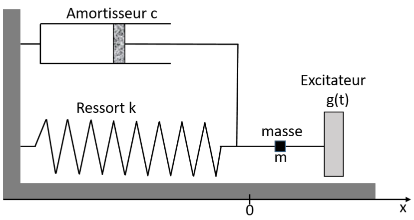
Projet LU2ME003 : étude d'un système masse-ressort-amortisseur. Application à l'étude de la tour de Taipei

Le projet est à réaliser en autonomie (18 février-10 avril). Une évaluation en ligne de type QCM (environ 15 min) sera organisée le 11 ou 12 avril en soirée. Pour cela vous devrez avoir terminé la programmation et avoir tracé et analysé les courbes demandées. Pour la compilation et l'exécution de vos programmes (en C ou Fortran), vous pouvez utiliser la plateforme repl.it.

On considère un système masse-ressort-amortisseur, où $x(t)$ est le déplacement de la masse m par rapport à sa position d'équilibre, k la raideur du ressort et c le coefficient d'amortissement. On suppose que le système est soumis à une excitation impulsionnelle $g(t) = g_s$ =constante, pour $t > 0$ (figure). Initialement, la masse est en position $x(0) = 0$, et sa vitesse est $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$.



Les données sont $m = 2$Kg, $k = 10$N.m^{-1}, $c = 1.5$kg.s^{-1}, $g_s = 20$N, la durée $t_{max} = 10$s de l'étude.
Les inconnues sont la position $x(t)$ et la vitesse $v(t) = \frac{dx}{dt}$.
L'équation différentielle linéaire du second ordre à résoudre est la suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{g_s}{m} \tag{1}$$

Q1. Calculer et tracer la solution analytique $x_{an}(t)$ et $v_{an}(t)$ de (1) pour $0 \le t \le t_{max}$. Tracer également un diagramme de phase (abscisse : $x_{an}(t)$ et ordonnée $v_{an}(t)$, pour $0 \le t \le t_{max}$). Commenter. Pour les tracés, on pourra utiliser les points t_n définis dans la partie numérique ci-dessous, et calculer les tableaux $x_{an}(n) = x_{an}(t_n)$ et $v_{an}(n) = v_{an}(t_n)$, pour $0 \le n \le n_{max}$.
Pour la résolution numérique, on met le problème sous forme d'un système d'EDO d'ordre 1 :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v && (2)\\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}v + \frac{g_s}{m} && (3) \end{aligned}\right.$$

Ce système sera résolu par des méthodes de type Runge Kutta, en écrivant le système à résoudre sous la forme $\dfrac{dU}{dt} = F(t, U)$, où le vecteur $U \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ a deux composantes $u_1 = x$ et $u_2 = v$, et la fonction F (qui ici n'est fonction que de U) est une fonction vectorielle, $F \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{aligned} f_1 &= u_2 \\ f_2 &= -\frac{k}{m}u_1 - \frac{c}{m}u_2 + \frac{g_s}{m} \end{aligned}\right.$$

Q2. Soit $n_{max} = 100$ fixé. On définit le pas de temps $\Delta t = t_{max}/n_{max}$ et le maillage $t_n = n\Delta t$, pour $0 \le n \le n_{max}$. On note $x_n \approx x(t_n)$ et $v_n \approx v(t_n)$ la solution numérique approchée.
Résoudre le système (2)(3) par la méthode d'Euler, dont l'algorithme est donné ci-dessous

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} + \Delta t\, F(t_n, U^{(n)}) = U^{(n)} + \Delta t\, F(U^{(n)})$$

On pourra mettre cette méthode en œuvre en utilisant un seul vecteur U pour le calcul des diverses solutions $U^{(n)}$ comme suit (on introduit le vecteur intermédiaire K_1) :

$$\text{pour } n = 1, ..., n_{max} - 1 \qquad \begin{cases} K_1 & = F(U) \\ U & = U + \Delta t\, K_1 \\ x_{n+1} & = u_1 \\ v_{n+1} & = u_2 \end{cases}$$

Calculer l'erreur $E_{euler} = |x_{n_{max}} - x_{an}(n_{max})|$.

Q3. Tracer sur une figure la position de la masse au cours du temps en superposant les solutions analytique et numérique. Tracer sur une deuxième figure la vitesse de la masse au cours du temps en superposant les solutions analytique et numérique.
Refaire l'étude pour $n_{max} = 100000$. Conclure.

Q4. On fait varier $n_{max} = 100,\ 500,\ 1000,\ 5000,\ 10000\ 50000\ 100000$. Tracer sur une échelle log-log l'erreur E_{euler} en fonction de Δt. Commenter.

Q5. Reprendre les questions Q2, Q3, Q4 par une méthode RK2 (au choix).
Algorithme pour la méthode de Heun (on introduit les vecteurs intermédiaires K_1, K_2) :

$$\text{pour } n = 1, ..., n_{max} - 1 \qquad \begin{cases} K_1 & = F(U) \\ K_2 & = F(U\ +\ \Delta t\, K_1) \\ U & = U\ +\ \frac{\Delta t}{2}\,(K_1\ +\ K_2) \\ x_{n+1} & = u_1 \\ v_{n+1} & = u_2 \end{cases}$$

Algorithme pour la méthode d'Euler modifié (on introduit les vecteurs intermédiaires K_1, K_2) :

$$\text{pour } n = 1, ..., n_{max} - 1 \qquad \begin{cases} K_1 & = F(U) \\ K_2 & = F(U\ +\ \frac{\Delta t}{2}\, K_1) \\ U & = U\ +\ \Delta t\, K_2 \\ x_{n+1} & = u_1 \\ v_{n+1} & = u_2 \end{cases}$$

Q6. Reprendre les questions Q2, Q3, Q4 par la méthode RK4 (on introduit les vecteurs intermédiaires K_1, K_2, K_3, K_4).

$$\text{pour } n = 1, ..., n_{max} - 1 \qquad \begin{cases} K_1 & = F(U) \\ K_2 & = F(U\ +\ \frac{\Delta t}{2}\, K_1) \\ K_3 & = F(U\ +\ \frac{\Delta t}{2}\, K_2) \\ K_4 & = F(U\ +\ \Delta t\, K_3) \\ U & = U + \frac{\Delta t}{6}(K_1\ +\ 2\,K_2 + 2\,K_3\ +\ K_4) \\ x_{n+1} & = u_1 \\ v_{n+1} & = u_2 \end{cases}$$

Application :

La Tour Taipei 101, inaugurée en 2004 est un des plus hauts gratte-ciels du monde (508 m de haut). Cette tour d'environ 700 000 tonnes, parfois décrite comme «un majestueux bambou bleu», a été conçue pour résister à des vents soufflant à 200 km/h et à un tremblement de terre de niveau 7 sur l'échelle de Richter. Lors de vents très violents le dernier étage peut se déplacer jusqu'à plus ou moins 3 m. La tour de 101 étages a été équipée d'une boule d'acier de 660 tonnes suspendue au 92e étage de la tour. La sphère peut se déplacer de plus ou moins 1.5 mètre maximum et permet d'amortir 30 à 40% des mouvements de l'édifice.

La tour sans la boule est assimilée à une poutre encastrée dans le sol et sollicitée en flexion : on peut montrer que pour de petits déplacements elle a un comportement proche d'un ressort de raideur k_1. On note m_1 la masse équivalente du bâtiment et x_1 le déplacement transversal du sommet de la tour. La boule d'acier est modélisée comme une masse m_2 liée au sommet de la tour par un ressort de raideur k_2 en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement visqueux c. Les données sont $m_1 = 264 \times 10^6$ kg, $k_1 = 225 \times 10^6$ N.m^{-1}, $m_2 = 660 \times 10^3$ kg , $k_2 = 510 \times 10^3$ N.m^{-1} et $c = 52 \times 10^3$ kg.s^{-1}.

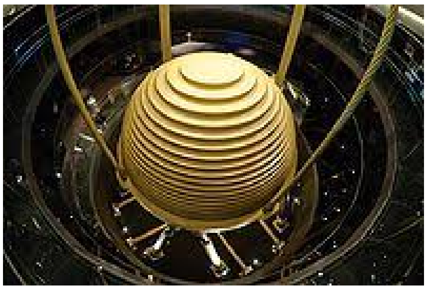
Les déplacements x_1 et x_2 sont alors solutions des deux équations différentielles linéaires du second ordre suivantes, à partir d'un état initial donné :

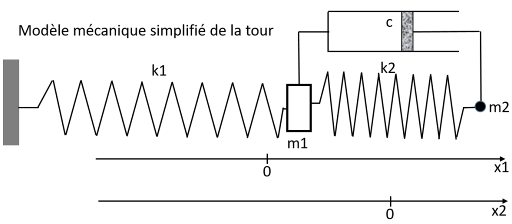
$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + \dfrac{k_1}{m_1}x_1(t) + \dfrac{k_2}{m_1}(x_1(t) - x_2(t)) = 0 \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} - \dfrac{k_2}{m_2}(x_1(t) - x_2(t)) + \dfrac{c}{m_2}\left(\dfrac{dx_2}{dt} - \dfrac{dx_1}{dt}\right) = 0 \end{cases}$$

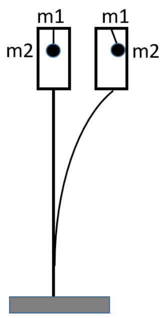
Pour la résolution numérique, on met le problème sous la forme du système suivant $\frac{dU}{dt} = f(t, U)$ où le vecteur a 4 composantes, $U(t) = (x_1, x_2, v_1, v_2)$.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = v_1 & (4) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = v_2 & (5) \\ \dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_1 + \dfrac{k_2}{m_1}x_2 & (6) \\ \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{k_2}{m_2}x_1 - \dfrac{k_2}{m_2}x_2 + \dfrac{c}{m_2}v_1 - \dfrac{c}{m_2}v_2 & (7) \end{cases}$$

Travail à réaliser : On modélise une bourrasque de vent par un déplacement initial du sommet de la tour $x_1(0) = x_0$ avec une vitesse nulle $v_1(0) = 0$ (et pour la sphère $x_2(0) = 0$, $v_2(0) = 0$). On prend $x_0 = 0.25$ m. On veut déterminer les déplacements du sommet de la tour et de la sphère au cours du temps.
On prend $t_{max} = 240$ s (4 min) et 3 valeurs du pas de temps fixées par $n_{max} = 2000,\ 20000,\ 200000$.
Résoudre le système (4)(5)(6)(7) par les méthodes d'Euler et RK4 et tracer $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
Traiter le cas $x_0 = 3$ m et conclure sur le modèle d'amortissement mis en place ici.







⚠ Attention à ne pas utiliser le même nom pour les raideurs k_1,k_2 et les vecteurs intermédiaires des méthodes RK.