

Module LU2ME003 : Méthodes mathématiques et numériques pour la mécanique

Sorbonne Université, Licence Mécanique

Diana Baltean-Carlès, A. Belme, C. Weisman, E. Sultan

6 mars 2023

Table des matières

1	Équations différentielles du premier ordre	7
1.1	Introduction : équations différentielles	7
1.2	Équations différentielles du premier ordre	8
1.2.1	Équations différentielles à variables séparées	9
1.2.2	Réduction à une forme séparable	10
1.2.3	Équations différentielles linéaires	10
2	Interpolation polynômiale	15
2.1	Méthodes d'interpolation par collocation	15
2.1.1	Forme polynômiale développée en puissances de x	15
2.1.2	Forme polynômiale de Lagrange	16
2.2	Polynômes osculateurs (hors programme 2022-23)	18
2.2.1	Interpolation d'Hermite	18
2.2.2	Les splines cubiques	18
2.3	Méthode des moindres carrés	18
2.4	Polynômes mini-max	19
2.4.1	Droite mini-Max	20
2.4.2	Parabole mini-Max	20
2.4.3	Polynômes mini-Max de degré $m > 2$	20
3	Intégration numérique	21
3.1	Formules de quadrature du type interpolation	21
3.2	Formules de Newton-Cotes	22

3.2.1	Formule des trapèzes ($n = 1$)	22
3.2.2	Formule de Simpson ($n = 2$)	23
3.2.3	Généralisation	24
3.3	Les méthodes composites	25
3.3.1	Méthode composite des trapèzes ($q = 1$)	25
3.3.2	Méthode composite de Simpson ($q = 2$)	25
3.4	Formules de quadrature du type Gauss	26
3.4.1	Gauss-Legendre	26
3.4.2	Gauss-Radau	29
3.4.3	Gauss-Lobatto	30
4	Dérivation numérique	31
4.1	Utilisation des polynômes de Lagrange	31
4.1.1	Dérivée centrée à 3 points	31
4.1.2	Dérivée seconde à 3 points	32
4.2	Utilisation des développements de Taylor	32
4.2.1	Différences progressives (ou à droite ou avals)	32
4.2.2	Différences régressives (ou à gauche ou amont)	34
4.2.3	Différences centrées	34
4.3	Utilisation des différences divisées (hors programme 2022-23)	35
4.3.1	Différences progressives	35
4.3.2	Différences régressives	36
5	Equations différentielles ordinaires (EDO)	37
5.1	Méthodes d'intégration à un pas	38
5.1.1	Définition	38
5.1.2	Schémas explicite/implicite	38
5.1.3	Généralités sur les méthodes à un pas explicites : Consistance - stabilité - convergence	39
5.2	Méthode d'Euler.	41
5.3	Méthodes de Runge-Kutta	41

5.3.1	Méthodes RK2	41
5.3.2	Méthode RK4	42
5.4	Application à la résolution de systèmes d'EDO	43
6	Équations différentielles linéaires du 2ème ordre	45
6.1	Équation linéaire homogène à coefficients constants	48
6.1.1	Equations du type Euler-Cauchy (homogènes)	51
6.2	Équations linéaires homogènes à coefficients variables; Wronskien .	53
6.3	Équations linéaires non-homogènes	56
6.3.1	Méthodes des coefficients indéterminés	57
6.3.2	Méthode de la variation des constantes	60
6.4	Équations différentielles d'ordre $n > 2$	62
6.4.1	Équations linéaires homogènes	62
6.4.2	Équations homogènes à coefficients constants	65
6.4.3	Équations non-homogènes; Méthode de variation des constantes	67

Chapitre 1

Équations différentielles du premier ordre

1.1 Introduction : équations différentielles

Une équation différentielle ordinaire est une équation qui contient une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue, notée $y(x)$ ou $y(t)$ et que l'on souhaite déterminer de l'équation. La forme générale d'une équation différentielle d'ordre n s'écrit :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{(n)}y}{dx^n}\right) = 0$$

Exemples :

1. Le déplacement d'une pierre qui tombe du haut d'une tour. L'équation différentielle vérifiée par la position verticale de la pierre par rapport au sol, $y = y(t)$, t = le temps, est :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g$$

Dans l'équation précédente, la résistance de l'air est négligée. En intégrant deux fois on trouve la solution :

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

2. Déplacement d'une masse placée à l'extrémité d'un ressort. Si on note $y(t)$ le déplacement par rapport à la position d'équilibre, m la masse du corps et k

la constante élastique du ressort, alors le mouvement du corps est modélisé par l'équation différentielle :

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0$$

Les équations différentielles sont des outils de modélisation dans beaucoup d'applications de l'ingénierie, de la physique, de l'économie, etc. Les plus simples équations peuvent être résolues avec des calculs élémentaires, tandis que pour des équations modèle plus compliquées on aura besoin de méthodes spécifiques que l'on discutera par la suite.

Une première classification des équations différentielles se fait selon l'ordre. L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la dérivée la plus grande intervenant dans les équations :

1. équations différentielles du premier ordre,
2. équations différentielles d'ordre 2,
3. équations différentielles d'ordre n .

1.2 Équations différentielles du premier ordre

Définition 1 : Les équations différentielles du premier ordre contiennent seulement $\frac{dy}{dx}$, éventuellement y et des fonctions de x (pour $y = y(x)$). On peut les écrire sous la forme :

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \quad \text{forme implicite} \quad (1.1)$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{forme explicite} \quad (1.2)$$

Observation : Les équations différentielles ont, en général, plusieurs solutions. On donne la solution d'une équation différentielle par sa forme générale, faisant intervenir une constante arbitraire. On appelle celle-ci la solution générale. Si on choisit une valeur spécifique de la constante on obtient une solution particulière. Dans ce qui suit on va présenter des méthodes d'obtention des solutions générales pour les équations différentielles de premier ordre. Pour une équation donnée, une solution générale obtenue par une telle méthode est "unique" (on peut trouver des formes équivalentes), et pour cela elle sera appelée "la solution générale".

Définition 2 : (Problème aux valeurs initiales) Une équation différentielle avec une condition initiale est appelée problème aux valeurs initiales ou problème de Cauchy.

$$(PC) \begin{cases} \frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

1.2.1 Équations différentielles à variables séparées

Définition 3 : Ce sont des équations qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x) \quad (1.4)$$

ou

$$g(y)dy = f(x)dx \quad (1.5)$$

Une telle équation est appelée séparable car les variables x et y sont séparées de sorte que x apparaît seulement à droite et y apparaît seulement à gauche.

Pour résoudre (1.4) on intègre les deux membres par rapport à x si f et g sont continues alors :

$$\int g(y) \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx + C$$

ou

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx + C$$

Observation : On fait apparaître explicitement une constante C mais si elle est contenue implicitement dans les intégrales non-définies. On fait ce choix pour ne pas oublier que la constante d'intégration doit être prise en compte à cette étape du calcul.

Exemple : (Courbes en forme de cloche : un problème particulier de conduction de la chaleur)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} &= -2xy \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Avec la séparation des variables on a :

$$\frac{dy}{y} = -2x dx \iff \ln |y| = -x^2 + c \iff |y| = e^{-x^2+c}$$

On pose $k = \pm e^c$. On trouve alors la solution générale $y(x) = ke^{-x^2}$.

1.2.2 Réduction à une forme séparable

Certaines équations ne sont pas séparables mais elles peuvent être mises sous une forme séparable avec un changement de variable. Ceci est vrai pour des équations du type :

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.6)$$

avec g une fonction donnée de variable $\frac{y}{x}$.

On fait le changement de variable suivant $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. En dérivant, on trouve :

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

L'équation différentielle vérifiée par u est à variables séparées :

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Exemple : $2xy \frac{dy}{dx} - y^2 + x^2 = 0$

$$2 \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0$$

On pose $u = \frac{y}{x}$. Alors,

$$2xu \frac{du}{dx} + u^2 + 1 = 0 \iff \frac{2u du}{1 + u^2} = -\frac{dx}{x}$$

En intégrant,

$$\ln(1 + u^2) = -\ln|x| + c \iff 1 + u^2 = \frac{k}{x}$$

On revient à y ,

$$x^2 + y^2 = kx \iff \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2}{4} \text{ famille de cercles de rayon } k/2 \text{ et de centre } (k/2, 0).$$

1.2.3 Équations différentielles linéaires

Définition 4 : Ce sont des équations qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = r(x) \quad \forall x \in I \subset \mathbb{R} \quad (1.7)$$

p et r étant des fonctions données en x , quelconques. Si $r(x) = 0, \forall x \in I$, l'équation est homogène, sinon elle est non-homogène ou avec second membre.

Propriété : (Caractérisation de la structure de l'ensemble des solutions)

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I)$. L'ensemble des solutions de l'équation non-homogène est obtenu en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation non-homogène.

Résolution :

— **équation homogène** $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$.

On résout par séparation de variables :

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad \Longleftrightarrow \ln |y| = - \int_{x_0}^x p(u)du + c$$

d'où

$$y_h(x) = ke^{-\int_{x_0}^x p(u)du} \quad (k = e^c, y > 0, \quad k = -e^c, y < 0)$$

Observation : Dans la formule précédente $k = y_h(x_0)$. On peut aussi laisser la solution sous la forme

$$y_h(x) = ke^{-\int p(x)dx} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

La fonction $e^{-\int p(x)dx}$ génère toutes les solutions de l'équation homogène (elle peut être considérée comme la base de l'espace des solutions).

— **équation non-homogène**

La solution générale :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

avec y_h la solution générale de l'équation homogène et y_p une solution particulière de l'équation non-homogène. On peut chercher une solution particulière avec la méthode de variation de la constante : à partir de la forme générale de la solution de l'équation homogène on fait varier la constante :

$$y_p(x) = c(x)e^{-\int_{x_0}^x p(u)du}$$

avec $c(x)$ une fonction à déterminer. On impose la condition que $y_p(x)$ est solution de l'équation non-homogène :

$$\frac{dy_p}{dx} + p(x)y_p = \frac{dc}{dx}e^{-\int_{x_0}^x p(u)du} = r(x)$$

$$\frac{dc}{dx} e^{-\int_{x_0}^x p(u)du} = r(x)$$

d'où :

$$c(x) = \int_{x_0}^x r(s) e^{\int_{x_0}^s p(u)du} ds + c^*$$

En conclusion,

$$y_p(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(u)du} \left(\int_{x_0}^x r(s) e^{\int_{x_0}^s p(u)du} ds \right) + k e^{-\int_{x_0}^x p(u)du}$$

Réduction à la forme linéaire. Équation de Bernoulli

Certaines équations différentielles non-linéaires peuvent être réduites à la forme linéaire. La plus célèbre est l'équation de Bernoulli.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)y^a \quad a \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

Si $a = 0$ ou $a = 1$ l'équation est linéaire, sinon elle est non linéaire.

On pose $u(x) = (y(x))^{1-a}$. Alors,

$$\frac{du}{dx} = (1-a)y^{-a} \frac{dy}{dx} = (1-a)(g - pu)$$

L'équation différentielle pour u est :

$$\frac{du}{dx} + (1-a)pu = (1-a)g$$

qui est une équation différentielle linéaire qu'on sait résoudre.

Existence et unicité des solutions

On considère le problème aux valeurs initiales (problème de Cauchy) (1.3). On a le résultat suivant :

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, D un ensemble ouvert. L'application f est continue,

localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Alors $\forall (x_0, y_0) \in D$, il existe un intervalle contenant x_0 et une application $y : I \rightarrow J, I \times J \subset D$ solution du problème de Cauchy (1.3). La solution du problème de Cauchy en (x_0, y_0) est unique.

Remarque

La condition $f(x, y)$ est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable est essentielle pour l'unicité de la solution. A titre d'exemple, le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} &= \sqrt{|y|} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

a deux solutions :

$$y_1(x) = 0, \quad y_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La condition de Lipschitz n'est pas vérifiée dans le voisinage de $y = 0$. Si on prend deux valeurs $\tilde{y}_1 = 0$ et $\tilde{y}_2 > 0$, alors

$$\frac{|f(x, \tilde{y}_1) - f(x, \tilde{y}_2)|}{|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2|} = \frac{1}{\tilde{y}_2}$$

ce qui peut être aussi large qu'on veut quand \tilde{y}_2 approche 0. Donc $\nexists K > 0$ tel que $|f(x, \tilde{y}_1) - f(x, \tilde{y}_2)| < K|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2|$, dans un domaine contenant un voisinage de $y = 0$.

Introduction à l'approche numérique

Dans les quatre chapitres suivants, on va construire petit à petit des méthodes de résolution numérique des EDO. Au lieu d'obtenir les solutions $y(x)$ de façon analytique, on va construire la solution point par point, à partir d'une condition initiale donnée. La solution ne sera pas exacte, mais approchée en tout point. On espère construire des méthodes "convergentes", c'est-à-dire que plus le nombre de points est grand, plus l'erreur commise sera petite.

L'approche numérique est divisée en 4 chapitres qui abordent les 4 questions suivantes :

Chap 2 : comment approcher une fonction donnée en un nombre fini de points par un polynôme ?

Chap 3 : comment approcher l'intégrale d'une fonction donnée en un nombre fini de points ?

Chap 4 : comment exprimer la dérivée d'une fonction en un point donné à partir des valeurs de la fonction en un nombre fini de points voisins ?

Chap 5 : comment utiliser tous les outils précédents pour approcher la résolution des EDO du 1er ordre ?

Chapitre 2

Interpolation polynômiale

On est souvent amené à réaliser une interpolation polynômiale lorsqu'une fonction est soit une fonction donnée analytiquement mais difficile à manipuler, soit une fonction tabulée connue seulement pour certaines valeurs de x (par exemple une fonction mesurée expérimentalement). Il existe quatre types de méthodes permettant de réaliser une interpolation polynômiale :

- a) méthodes de collocation : le polynôme interpolé $F(x)$ coïncide avec $f(x)$ aux points x_j où la fonction $f(x_j)$ est connue : $F(x_j) = f(x_j)$
- b) polynômes osculateurs : en plus de la coïncidence de $F(x_j)$ et de $f(x_j)$, il y a coïncidence en x_j de leurs m premières dérivées
- c) moindres carrés : le polynôme interpolé $G(x)$ ne passe pas par les points $[x_j, f(x_j)]$ mais entre ces points. Le critère est que $S = \sum_{j=1}^n [F(x_j) - f(x_j)]^2$ soit minimale.
- d) mini-max : le polynôme interpolé $M(x)$ passe entre les points $[x_j, f(x_j)]$. Le critère est que la distance à $M(x)$ du point le plus éloigné, soit la plus petite possible.

2.1 Méthodes d'interpolation par collocation

2.1.1 Forme polynômiale développée en puissances de x

Soit $f(x)$ connue aux points x_j par $f_j = f(x_j)$, ($0 \leq j \leq n$), on approxime $f(x)$ par le polynôme $P_n(x)$ de degré n , passant par les points (x_j, f_j) . Ce polynôme est unique. Il peut s'écrire :

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

avec : $f_j = a_0 + a_1x_j + a_2x_j^2 + \dots + a_nx_j^n$, ($0 \leq j \leq n$). Les a_j sont solution d'un système $(n+1, n+1)$ qui utilise la matrice de Vandermonde d'ordre n :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}$$

2.1.2 Forme polynômiale de Lagrange

Dans cette section, on présente une autre façon d'obtenir le polynôme interpolé par collocation.

Polynômes de degré n :

On connaît $(n+1)$ points distincts x_0, x_1, \dots, x_n dans $[a, b]$ et les valeurs $f_j = f(x_j)$, $0 \leq j \leq n$. On cherche à construire le polynôme $P_n(x)$ de degré $\leq n$ tel que $P_n(x_j) = f_j$, $0 \leq j \leq n$.

On définit les polynômes de Lagrange notés $L_i(x)$ de degré $\leq n$:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Ces polynômes sont tels que $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, $0 \leq i, j \leq n$ (avec $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$). Le polynôme $P_n(x)$ défini alors par :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) = \sum_{i=0}^n \left[\prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \right] f_i,$$

$P_n(x)$ est le polynôme interpolé de Lagrange de la fonction f .

Remarques :

- La formule de Lagrange contient explicitement les f_i .
- Pour $n = 1$, $P_1(x)$ passe par (x_0, f_0) et (x_1, f_1) , d'où

$$P_1(x) = f(x_0) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1) \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

C'est la droite qui passe par les deux points (x_0, f_0) et (x_1, f_1) .

- Pour $n = 2$, $P_2(x)$ est l'équation de la parabole qui passe par les trois points (x_0, f_0) , (x_1, f_1) et (x_2, f_2) et on a :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

- Pour la programmation : On ne développe pas la forme analytique du polynôme $P(x)$. En pratique, on calcule pour chaque valeur de x souhaitée la valeur de $P(x)$ en calculant la somme des produits qui figurent dans l'expression.

Evaluation de l'erreur de la formule de Lagrange (demonstration hors programme 2022-23) :

On a construit pour la fonction $f(x)$ le polynôme de Lagrange $P_n(x)$ qui prend en x_0, x_1, \dots, x_n les valeurs données $f_0 = f(x_0), \dots, f_n = f(x_n)$. Quelle est la valeur du reste $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ pour les autres valeurs de x ?

Supposons que, dans $[a, b]$, qui contient les x_j , $f(x)$ possède des dérivées $f', f'', \dots, f^{(n+1)}(x)$.

Posons $u(x) = f(x) - P_n(x) - k\pi_{n+1}(x)$, avec $\pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$.

Il est évident que $u(x)$ possède $(n+1)$ racines x_0, x_1, \dots, x_n . Soit \bar{x} arbitrairement choisi dans $[a, b]$, différent des x_i , et fixons k pour que \bar{x} soit également racine de $u(x)$:

$$u(\bar{x}) = 0 = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) - k\pi_{n+1}(\bar{x}) \implies k = \frac{f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})}{\pi_{n+1}(\bar{x})}.$$

Ainsi dans $[a, b]$, $u(x)$ s'annule en n points intérieurs + les 2 extrémités. Le théorème de Rolle entraîne que $u'(x)$ possède au moins $(n+1)$ racines sur le segment $[a, b]$. De même $u''(x)$ est nulle au moins n fois sur $[a, b]$, ..., la dérivée $u^{(n+1)}(x)$ possède au moins un zéro :

$\exists \xi \in [a, b]$ tel que $u^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Or $P_n^{(n+1)}(x) = 0$ et $\pi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)! \implies u^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - k(n+1)!$.

Donc $\exists \xi \in [a, b]$ tel que $f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0$

$$\implies k = [f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})] / \pi_{n+1}(\bar{x}) = f^{(n+1)}(\xi) / (n+1)! \implies f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \pi_{n+1}(\bar{x}).$$

Ce raisonnement pouvant être reproduit pour tout \bar{x} , on a :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x)$$

2.2 Polynômes osculateurs (hors programme 2022-23)

2.2.1 Interpolation d'Hermite

On souhaite construire un polynôme passant par les $n + 1$ points $(x_j, f(x_j))$ et de dérivée coïncidant aux $n + 1$ points x_j avec les dérivées $f'(x_j)$ imposées. On a donc $2n + 2$ équations, et le polynôme recherché est de degré $2n + 1$.

On construit le polynôme d'Hermite en utilisant les polynômes de Lagrange et leurs propriétés. On obtient :

$$H(x) = \sum_{j=0}^n U_j(x) f_j + \sum_{j=0}^n V_j(x) f'_j$$

où f_j et f'_j sont les valeurs de la fonction donnée et de sa dérivée en x_j . Les fonctions $U_j(x)$ et $V_j(x)$ sont définies par :

$$U_j(x) = [1 - 2L'_j(x_j)(x - x_j)][L_j(x)]^2 \quad ; \quad V_j(x) = (x - x_j)[L_j(x)]^2$$

2.2.2 Les splines cubiques

Il s'agit d'une méthode d'interpolation qui respecte la collocation, et permet d'obtenir une courbe "lissée". Supposons connus les $f_j = f(x_j)$ ($0 \leq j \leq n$). On suppose qu'on ne connaît pas f'_j et f''_j .

L'interpolation $g(x)$ est un polynôme d'ordre 3 par morceaux définis entre x_j et x_{j+1} , tel que : $g(x) = a_0^j + a_1^j x + a_2^j x^2 + a_3^j x^3$. Pour déterminer $a_0^j, a_1^j, a_2^j, a_3^j$, on impose les 4 conditions suivantes :

- (i) collocation $g(x_j) = f(x_j)$
- (ii) $g(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$
- (iii) continuité de dg/dx en x_j
- (iv) continuité de d^2g/dx^2 en x_j .

2.3 Méthode des moindres carrés

On se donne une fonction f dont on connaît la valeur en $(n + 1)$ points distincts ($0 \leq j \leq n$).

On cherche une approximation de f par un polynôme $G_m(x)$ de degré m qui

minimise $S = \sum_{j=0}^n [G_m(x_j) - f(x_j)]^2$.

Le polynôme G_m est défini par $G_m(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ ($a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq m \leq n$).

On pose $S = \sum_{j=0}^n [\sum_{i=0}^m a_i x_j^i - f(x_j)]^2$.

Le minimum est atteint pour les a_j ($0 \leq j \leq n$) qui vérifient $\partial S / \partial a_l = 0$, ($0 \leq l \leq m$). Or on a :

$$\frac{\partial S}{\partial a_l} = 2 \sum_{j=0}^n \left[\sum_{i=0}^m a_i x_j^i - f(x_j) \right] x_j^l = 0, \quad (0 \leq l \leq m)$$

$$\text{soit } \sum_{i=0}^m a_i \left(\sum_{j=0}^n x_j^{i+l} \right) = \sum_{j=0}^n f(x_j) x_j^l$$

On en déduit que pour trouver un polynôme de degré m qui approche au sens des moindres carrés une fonction connue en $(n+1)$ points distincts avec $m < n$ il faut résoudre un système linéaire de degré $(m+1)$ qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_j & \sum x_j^2 & \dots & \sum x_j^{m-1} & \sum x_j^m \\ \sum x_j & \sum x_j^2 & \sum x_j^3 & \dots & \sum x_j^m & \sum x_j^{m+1} \\ \sum x_j^2 & \sum x_j^3 & \sum x_j^4 & \dots & \sum x_j^{m+1} & \sum x_j^{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_j^m & \sum x_j^{m+1} & \sum x_j^{m+2} & \dots & \sum x_j^{2m-1} & \sum x_j^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^n f_j \\ \sum_{j=0}^n x_j f_j \\ \sum_{j=0}^n x_j^2 f_j \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{j=0}^n x_j^m f_j \end{bmatrix}$$

La matrice A est inversible. Les résultats pour $m \geq 10$ ne sont pas significatifs. En général, on prend $m = 1$ (droite), ou $m = 2$ (parabole).

2.4 Polynômes mini-max

Soit $h_j = h(x_j) = M(x_j) - f(x_j)$ et soit H la plus grande de ces erreurs en valeur absolue. Le polynôme mini-max est le polynôme pour lequel H est la plus petite possible.

La méthode de "substitution" est un algorithme pour trouver $M(x)$ en s'appuyant sur la propriété d'égale erreur. On choisit un sous-ensemble initial de points (x_j, f_j) . On trouve un polynôme d'égale erreur correspondant à ces données. Si l'erreur maximum portée par ce polynôme est l'erreur H , ce polynôme est le polynôme $M(x)$ cherché. Si ce n'est pas le cas, on remplace un point de l'ensemble par un point extérieur et on recommence le processus. On peut démontrer la convergence vers $M(x)$.

2.4.1 Droite mini-Max

On cherche $M(x) = a + bx$ et on note $h_i = M(x_i) - f_i$. Pour déterminer une droite d'égale erreur, il faut trouver a, b, h tels que $M(x_i) - f(x_i) = \pm h$ (avec alternance des signes pour les x croissants) :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & -1 \\ 1 & x_2 & 1 \\ 1 & x_3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

On calcule $h_j = M(x_j) - f_j$ dans les autres points ($0 \leq j \neq i \leq n$). Si tous les $|h_j| \leq |h|$, alors ce polynôme est bien le polynôme mini-max de $f(x_j)$. Sinon, on choisit un autre point pour remplacer un des 3 points i , et on recommence....

2.4.2 Parabole mini-Max

Soit $M(x) = a + bx + cx^2$ et soit $h_i = M(x_i) - f(x_i)$ les erreurs en 4 points donnés. On démontre qu'il existe une parabole unique d'égale erreur tel que $h_1 = h, h_2 = -h, h_3 = h, h_4 = -h$ (alternance des signes pour des abscisses croissantes). A partir de la relation $M(x_i) - f(x_i) = \pm h$, on forme le système suivant qui permet de déterminer les coefficients a, b, c , et h :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & -1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & 1 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & -1 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

On calcule $h_j = M(x_j) - f_j$ dans les autres points ($0 \leq j \neq i \leq n$). Si tous les $|h_j| \leq |h|$, alors ce polynôme est bien le polynôme mini-max de $f(x_j)$. Sinon, on choisit un autre point pour remplacer un des 4 points i , et on recommence....

2.4.3 Polynômes mini-Max de degré $m > 2$

De manière similaire aux cas de la droite et de la parabole, on prend $(m + 2)$ points et on détermine $M(x)$, on calcule l'erreur dans les autres points si $H > |h|$. On recommence jusqu'à trouver le bon polynôme $M(x)$ de degré m .

Chapitre 3

Intégration numérique

Définition :

Soit l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ avec $b > a$, on cherche une valeur approchée de cette intégrale au moyen de sommes finies. On appelle formule de quadrature à $(n + 1)$ points une formule du type :

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n A_i^n f(x_i)$$

où les A_i^n ne dépendent pas de la fonction f .

3.1 Formules de quadrature du type interpolation

Soient $(n + 1)$ points x_i ($0 \leq i \leq n$) où la fonction f est connue. Le polynôme $P_n(x)$ interpolé de Lagrange de f est donné par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \text{ avec } L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

La formule de quadrature associée est

$$\int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b P_n(x) dx = \sum_{i=0}^n \left(\int_a^b L_i(x) dx \right) f(x_i) \text{ et donc } A_i^n = \int_a^b L_i(x) dx.$$

Propriétés :

- l'intégration des polynômes est très simple
- en général, $f(x_i)$ est tabulée en certains points donnés, et on n'a pas le choix des x_i
- si $f(x)$ est une fonction compliquée mais connue analytiquement, on peut :
 - soit prendre des subdivisions régulières de $[a, b]$ (formules de Newton-Cotes)
 - soit choisir les x_i "au mieux", au sens de Gauss

Erreur de quadrature :

On définit l'erreur $R(f) = I(f) - I_n(f)$.

Une formule de quadrature est dite exacte si $R(f) = 0$.

Théorème :

Une formule de quadrature à $n + 1$ points de type interpolation est exacte pour $f(x) = x^k$ ($0 \leq k \leq n$) par construction).

Définition :

On dit qu'une formule de quadrature a un degré de précision m si la formule est exacte pour $f(x) = x^k$ ($0 \leq k \leq m$), mais non exacte pour $f(x) = x^{m+1}$.

3.2 Formules de Newton-Cotes

On prend des subdivisions régulières de $[a, b]$ en posant $h = (b - a)/n$
 $\implies x_j = a + jh$ avec $(x_0 = a, x_n = b)$.

3.2.1 Formule des trapèzes ($n = 1$)

Le polynôme de Lagrange s'écrit :

$$P_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

En intégrant $P_1(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$, on obtient la formule suivante, appelée "formule des trapèzes" :

$$\int_a^b f(x) dx \cong (b-a) \left[\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) \right]$$

Calcul d'erreur :

$$R(f) = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)].$$

On pose $b = a + h$ et on a alors $R(f) = \int_a^{a+h} f(x) dx - \frac{h}{2} [f(a) + f(a+h)]$. Si $f(x)$ est suffisamment dérivable, on fait des développements limités au voisinage de $h = 0$.

$$\text{On a : } f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + O(h^3).$$

Soit $G(x)$ une primitive de $f(x)$, on a $\int_a^{a+h} f(x) dx = G(a+h) - G(a)$, et

$$G(a+h) = G(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f'''(a) + O(h^4),$$

On trouve $R(f) = (\frac{1}{6} - \frac{1}{4})h^3 f''(a) + O(h^4) = -\frac{h^3}{12} f''(a) + O(h^4)$. L'erreur est donc en $O(h^3)$.

On déduit de l'expression de $R(f)$ que la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré 0 et 1, et non exacte pour les polynômes de degré ≥ 2 . Son degré de précision est donc égal à 1.

3.2.2 Formule de Simpson ($n = 2$)

Pour $n = 2$, $P_2(x)$ est l'équation de la parabole qui passe par les trois points $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ et $(b, f(b))$. Par intégration sur $[a, b]$, on obtient la formule suivante, appelée "formule de Simpson" :

$$\int_a^b f(x) dx \cong (b-a) \left[\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b) \right]$$

Calcul d'erreur :

$$R(f) = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)].$$

On pose $h = (b-a)/2$. Vue la symétrie de $R(f)$ par rapport à $\alpha = (a+b)/2$, on effectue le développement limité au voisinage du point α , soit :

$$R(f) = \int_{\alpha-h}^{\alpha+h} f(x) dx - \frac{h}{3} [f(\alpha-h) + 4f(\alpha) + f(\alpha+h)]$$

En faisant des développements de Taylor, on montre qu'il existe $\xi \in]\alpha-h, \alpha+h[$ tel que $R(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$

$$\implies |R(f)| \leq \frac{h^5}{90} \max |f^{(4)}(x)|, \quad x \in [a, b]$$

L'erreur est donc en $O(h^5)$. On déduit de l'expression de $R(f)$ que la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré ≤ 3 , et non exacte pour les polynômes de degré ≥ 4 . Son degré de précision est donc égal à 3.

3.2.3 Généralisation

On prend des subdivisions régulières de $[a, b]$ en posant $h = (b - a)/n$
 $\implies x_i = a + ih$ avec $(x_0 = a, x_n = b)$. En intégrant le polynôme de Lagrange défini par ces $n + 1$ points, on obtient :

$$\int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=0}^n \left(\int_a^b L_i(x) dx \right) f(x_i) = (b - a) \sum_{i=0}^n B_i^n f(a + ih)$$

avec $B_i^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x) dx$

Calcul des B_i^n :

On pose $y = \frac{x-a}{h} \implies \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) = h^n \prod_{j=0, j \neq i}^n (y - j)$
et $\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j) = h^n \prod_{j=0, j \neq i}^n (i - j)$
 $= h^n \times i \times (i - 1) \times \dots \times 2 \times 1 \times (-1) \times (-2) \times \dots \times (-n - 1 + i) \times (-n + i) =$
 $h^n (-1)^{n-i} i! (n - i)!$

$$\implies B_i^n = \frac{1}{nh} \int_0^n \frac{h^n \prod_{j=0, j \neq i}^n (y - j)}{h^n \prod_{j=0, j \neq i}^n (i - j)} h dy = \frac{(-1)^{n-i}}{i! (n - i)! n} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n (y - j) dy$$

Remarque : On a $B_i^n = B_{n-i}^n$. Il suffit de calculer B_i^n pour $i \leq n/2$

$$n = 1 \implies B_0^1 = -1 \int_0^1 (y - 1) dy = (-1)(1/2 - 1) = 1/2, \quad B_1^1 = B_0^1$$

$$n = 2 \implies B_0^2 = \frac{(-1)^2}{0!2!2} \int_0^2 (y - 1)(y - 2) dy = 1/6, \quad B_2^2 = B_0^2;$$

$$B_1^2 = \frac{(-1)^1}{1!1!2} \int_0^2 y(y - 2) dy = 4/6$$

Sur le tableau suivant, on donne les B_i^n pour $1 \leq n \leq 6$:

n	1	2	3	4	5	6
B_0^n	1/2	1/6	1/8	7/90	19/288	41/840
B_1^n		4/6	3/8	32/90	75/288	216/840
B_2^n				12/90	50/288	27/840
B_3^n						272/840

Théorème : Si le nombre de points d'intégration est $(n + 1)$ l'erreur de quadrature des formules de Newton-Cotes est en h^{n+2} pour n impair ($R(f) = O(h^{n+2})$),

et h^{n+3} pour n pair ($R(f) = O(h^{n+3})$).

Le degré de précision dans le cas des formules de Newton-Côtes à $(n+1)$ points est n pour n impair, et $n+1$ pour n pair.

3.3 Les méthodes composites

Définition : On applique à des sous-intervalles de (a, b) une formule de Newton-Cotes de degré q petit, fixé. On pose $h = (b - a)/n$.

3.3.1 Méthode composite des trapèzes ($q = 1$)

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x) dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} h \left[\frac{1}{2} f(a+ih) + \frac{1}{2} f(a+(i+1)h) \right]$$

donc
$$\int_a^b f(x) dx \cong h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

3.3.2 Méthode composite de Simpson ($q = 2$)

On choisit n pair et on considère les intervalles de longueur $2h$.

$$\int_a^{a+2h} f(x) dx \cong 2h \left[\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f(a+h) + \frac{1}{6} f(a+2h) \right]$$

$$\int_{a+2h}^{a+4h} f(x) dx \cong 2h \left[\frac{1}{6} f(a+2h) + \frac{4}{6} f(a+3h) + \frac{1}{6} f(a+4h) \right]$$

$$\int_{a+(n-2)h}^b f(x) dx \cong 2h \left[\frac{1}{6} f(a+(n-2)h) + \frac{4}{6} f(a+(n-1)h) + \frac{1}{6} f(b) \right]$$

Soit en additionnant :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\cong \frac{h}{3} \{ f(a) + f(b) + 2[f(a+2h) + f(a+4h) + \dots + f(a+(n-2)h)] \\ &\quad + 4[f(a+h) + f(a+3h) + \dots + f(a+(n-1)h)] \} \end{aligned}$$

3.4 Formules de quadrature du type Gauss

Pour obtenir des formules de quadrature à $(n + 1)$ points possédant un degré de précision supérieur à celui obtenu par les formules de Newton-Côtes, on peut, au lieu de prendre des abscisses x_j régulièrement espacées, les choisir "au mieux".

3.4.1 Gauss-Legendre

Comme les inconnues sont à présent les $n + 1$ coefficients A_i^n et les points $n + 1$ points x_i (soient $2n + 2$ inconnues), on peut espérer augmenter le degré de précision à $2n + 1$. On cherche les A_i^n et les x_i tels que la formule de quadrature $I_\omega(f) = \sum_{i=0}^n A_i^n f(x_i)$ soit exacte pour tout polynôme de degré $\leq 2n + 1$.

a) Formules par identification :

- a) formule à 1 point ($n = 0$) : On cherche $A_0^0 \in \mathbb{R}$, et $x_0 \in [a, b]$ tel que la quadrature soit de degré de précision le plus élevé possible.

$$\int_a^b f(x) dx \cong [A_0^0 f(x_0)]$$

On écrit que la quadrature est exacte pour $f(x) = 1$ et $f(x) = x$. $f(x) = 1 \rightarrow \int_a^b dx = b - a = A_0^0$
 $f(x) = x \rightarrow \int_a^b x dx = \frac{(b^2 - a^2)}{2} = A_0^0 x_0$
 on trouve : $A_0^0 = b - a$ et $x_0 = \frac{(a+b)}{2}$.

On a ainsi la formule de Gauss à 1 point, de degré de précision 1, est :

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f\left[\frac{(a + b)}{2}\right]$$

- b) formule à 2 points ($n = 1$) :

On effectue tout d'abord le calcul sur l'intervalle $[0, 1]$, puis on effectue un changement de variable pour se ramener à l'intervalle $[a, b]$.

$$\int_0^1 f(x) dx \cong [A_0^1 f(x_0) + A_1^1 f(x_1)]$$

$$f(x) = 1 \rightarrow \int_0^1 dx = 1 = A_0^1 + A_1^1$$

$$f(x) = x \rightarrow \int_0^1 x dx = 1/2 = A_0^1 x_0 + A_1^1 x_1$$

Soit le polynôme de degré 2 : $\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) = 0 = x^2 - sx + p$ et soit le polynôme de degré 3 : $\pi_1(x) = x \pi(x)$. En écrivant que la quadrature

est exacte pour $f(x) = \pi(x)$ et $f(x) = \pi_1(x)$, on a $\int_0^1 \pi(x) dx = 0$ et $\int_0^1 \pi_1(x) dx = 0$, et on trouve $s = 1, p = 1/6$.

En résolvant $x^2 - sx + p = 0$, on a $x_0 = (1 - 1/\sqrt{3})/2, x_1 = (1 + 1/\sqrt{3})/2$.
A partir des relations $A_0^1 + A_1^1 = 1$ et $A_0^1 (1 - 1/\sqrt{3})/2 + A_1^1 (1 + 1/\sqrt{3})/2 = 1/2$, on trouve alors $A_0^1 = A_1^1 = 1/2$.

On obtient donc : $\int_0^1 f(x) dx = [f((1 - 1/\sqrt{3})/2) + f((1 + 1/\sqrt{3})/2)]/2$.

La formule de Gauss à 2 points, exacte pour les polynômes de degré 3 est :

$$\int_a^b f(x) dx \cong ((b-a)/2)[f[a+(b-a)(1-1/\sqrt{3})/2] + f[a+(b-a)(1+1/\sqrt{3})/2]]$$

b) Utilisation des polynômes de Legendre

Les polynômes orthogonaux de Legendre permettent de construire de façon systématique les quadratures de Gauss-Legendre.

Ces polynômes constituent une famille de polynômes dits orthogonaux, définis sur l'intervalle $[-1, 1]$. Les polynômes X_0, X_1, \dots, X_n constituent une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n , définis sur $[-1, 1]$.

Orthogonalité :

Les relations d'orthogonalité sont

$$\int_{-1}^1 X_n(x) X_p(x) dx = 0 \quad \text{si} \quad n \neq p \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 X_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

Récurrence :

Les polynômes orthogonaux de Legendre vérifient une relation de récurrence à trois termes $(n+1) X_{n+1} = (2n+1)xX_n - nX_{n-1}$

On les calcule à partir de $X_0 = 1$ et $X_1 = x$.

On a donc $X_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, X_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \dots$

Equation :

On montre que ces polynômes sont solutions de l'équation différentielle :

$$(x^2 - 1) y'' + 2x y' - n(n+1) y = 0$$

Quadrature sur $[-1,1]$:

Soit à calculer l'intégrale $I_1(f) = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$, on introduit les $(n+1)$ racines ξ_i du polynôme de Legendre $X_{n+1}(x)$ (qui est un polynôme de degré $n+1$). La quadrature est alors une quadrature de type interpolation construite à partir des ξ_i :

$$I_1(f) \cong \sum_{i=0}^n \omega_i^n f(\xi_i)$$

Les facteurs de pondération ω_i^n sont en général tabulés.
On peut retrouver leur valeur par :

$$\omega_i^n = \int_{-1}^1 \left[\frac{X_{n+1}(x)}{(x - \xi_i) X'_{n+1}(\xi_i)} \right]^2 dx$$

soit,

$$\omega_i = \frac{2}{[(1 - x_i^2)(X'_n(x_i))^2]}$$

Le tableau suivant donne les valeurs des ξ_i et des ω_i^n ($2 \leq n+1 \leq 6$) :

n+1	ξ_i	w_i^n
2	± 0.577350	1.0000000
3	0.000000	0.8888889
	± 0.774597	0.5555556
4	± 0.333333	0.6521450
	± 0.861136	0.3478548

n+1	ξ_i	w_i^n
5	0.000000	0.5688889
	± 0.538469	0.4786290
	± 0.906280	0.2369270
6	± 0.238619	0.4679140
	± 0.661209	0.3607616
	± 0.932469	0.1713245

Théorème : Les formules de Gauss à $n+1$ points sont exactes pour les polynômes de degré $2n+1$.

Preuve (hors programme 2020-21) : Comme il s'agit d'une quadrature de type interpolation à $n+1$ points, la quadrature est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Soit alors un polynôme $P(x)$ défini sur $[-1, 1]$ de degré $2n+1$, et $X_{n+1}(x) = (x - \xi_0)(x - \xi_1) \dots (x - \xi_n)$ le polynôme de Legendre de degré n , de racines ξ_i .

On effectue la division polynomiale :

$P(x) = X_{n+1}(x)Q(x) + R(x)$, où le degré de $Q(x)$ est inférieur ou égal à n (le degré de $R(x)$ l'est également). On a alors :

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \int_{-1}^1 X_{n+1}(x)Q(x) dx + \int_{-1}^1 R(x) dx$$

La propriété d'orthogonalité des polynômes de Legendre entraîne $\int_{-1}^1 X_{n+1}(x)Q(x)dx = 0$.

La quadrature étant exacte pour $R(x)$, on a

$$\int_{-1}^1 P(x)dx = \int_{-1}^1 R(x)dx = \sum_{i=0}^n \omega_i R(\xi_i)$$

Or on a $R(\xi_i) = P(\xi_i) - X_{n+1}(\xi_i)Q(\xi_i) = P(\xi_i)$, et donc $\int_{-1}^1 P(x)dx = \sum_{i=0}^n \omega_i P(\xi_i)$.

La quadrature est donc exacte pour $P(x)$.

Généralisation à la quadrature sur $[a, b]$:

Soit à calculer $I(f) = \int_a^b f(x)dx$.

On utilise un changement de variables pour se ramener sur l'intervalle $[-1, 1]$, en posant :

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi$$

, soit

$$\xi = -\frac{b+a}{b-a} + \frac{2}{b-a}x.$$

On a alors

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi\right)d\xi \cong \frac{(b-a)}{2} \sum_{j=0}^n \omega_j f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi_j\right),$$

où les ξ_j sont les $n+1$ racines du polynôme de Legendre $X_{n+1}(x)$, et les facteurs ω_j sont ceux déterminés par la quadrature de Gauss.

Remarque (hors programme 2020-21) Supposons que l'on souhaite calculer l'intégrale suivante où $\omega(x)$ est une fonction poids, positive sur $]a, b[$.

$$I_\omega(f) = \int_a^b \omega(x)f(x)dx$$

Si $\omega = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on utilise les polynômes de Chebyshev T_n , qui sont une autre base de polynômes orthogonaux, également définis sur $[-1, 1]$.

3.4.2 Gauss-Radau

On travaille de nouveau sur l'intervalle $[-1, 1]$. Supposons que dans la quadrature, l'extrémité -1 est assignée. Pour une quadrature à deux points, on cherche

x_1 tel que

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = [A_0^1 f(-1) + A_1^1 f(x_1)] + R(f)$$

soit exacte ($R(f) = 0$) sur l'espace vectoriel des polynômes du degré le plus élevé possible.

On a 3 inconnues : x_1, A_0^1, A_1^1 . En écrivant les trois premières relations, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\rightarrow R(f) = 2 - A_0^1 - A_1^1 = 0 \\ f(x) = x &\rightarrow R(f) = 0 + A_0^1 - x_1 A_1^1 = 0 \\ f(x) = x^2 &\rightarrow R(f) = \frac{2}{3} - A_0^1 - x_1^2 A_1^1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1/3, A_0^1 = 1/2, A_1^1 = 3/2$$

d'où $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2}[f(-1) + 3f(1/3)] + R(f)$. Pour $f(x) = x^3$, $R(f) \neq 0$.

3.4.3 Gauss-Lobatto

On travaille de nouveau sur l'intervalle $[-1, 1]$. Supposons que dans la quadrature, les deux extrémités -1 et 1 sont assignées. Par identification, on obtient les formules suivantes, exactes respectivement pour les polynômes de degré 3 et 5 :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + R(f)$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{6}f(-1) + \frac{5}{6}f(-1/\sqrt{5}) + \frac{5}{6}f(1/\sqrt{5}) + \frac{1}{6}f(1) + R(f)$$

Chapitre 4

Dérivation numérique

Connaissant une fonction f en un ensemble fini de points x_j ($0 \leq j \leq n$), on construit un schéma permettant l'approximation de $f'(x)$ et de $f''(x)$.

4.1 Utilisation des polynômes de Lagrange

La fonction $f(x)$ est approchée par le polynôme de Lagrange $F(x)$ défini par $F(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$ avec $L_i(x) = \prod_{0 \leq j \leq n, (j \neq i)} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$.
On a $f(x) = F(x) + E \implies f'(x) = F'(x) + E'(x)$.

4.1.1 Dérivée centrée à 3 points

Dans ce cas $n = 2 \implies f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ connues.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \quad L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$F'(x) = f(x_0) \frac{2x - (x_1 + x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{2x - (x_0 + x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{2x - (x_0 + x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Si on prend $h > 0$, $x_0 = x_1 - h$, $x_2 = x_1 + h$, on a :

$$F'(x) = f(x_0) \frac{2(x-x_1) - h}{2h^2} - f(x_1) \frac{2(x-x_1)}{h^2} + f(x_2) \frac{2(x-x_1) + h}{2h^2}$$

$$\text{Soit } F'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} \quad \text{ou} \quad f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

4.1.2 Dérivée seconde à 3 points

On dérive l'expression précédente de la dérivée du polynôme de Lagrange, pour 3 points équidistants :

$$F''(x) = f(x_0) \frac{2}{2h^2} - f(x_1) \frac{2}{h^2} + f(x_2) \frac{2}{2h^2}$$

$$\text{Soit } F''(x_1) = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) \cong \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

4.2 Utilisation des développements de Taylor

Si les points x_j où la fonction $f(x)$ est connue sont équidistants, on introduit le pas constant $h = x_j - x_{j-1}$.

Rappel des diverses formes utilisées de développements de Taylor de $f(x+h)$ au point x :

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \dots,$$

$$\text{ou } f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

avec $\xi \in]x, x+h[$,

ou (forme la plus utilisée dans ce cours) :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{h} \mathbf{f}'(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{h}^2}{2} \mathbf{f}''(\xi) + \frac{\mathbf{h}^3}{6} \mathbf{f}'''(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\mathbf{h}^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{f}^{(n-1)}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\mathbf{h}^n),$$

On dit que le développement est effectué jusqu'à l'ordre n en h.

$$\text{ou } f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + o(h^{n-1}).$$

D'une façon générale, on souhaite augmenter l'ordre d'approximation des schémas utilisés le plus possible.

4.2.1 Différences progressives (ou à droite ou avals)

Il s'agit d'exprimer les dérivées en x en utilisant les données de f en des points situés à droite de x .

a) Dérivées à l'ordre 1 en h

Calcul de f'_j

On écrit le développement de Taylor de $f(x+h)$ en x , et on en déduit une ap-

proximation de $f'(x)$:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\implies f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{h} \mathcal{O}(h^2) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

$$\text{soit } f'_j \simeq \frac{f_{j+1} - f_j}{h}$$

La formule est équivalente à prendre la dérivée au point x du polynôme de Lagrange passant par les 2 points x et $x+h$. (C'est une droite, et donc la dérivée est la pente de cette droite!).

Calcul de f''_j

Pour obtenir une dérivée d'ordre supérieur, on doit prendre en considération plus de points. On combine les développements de Taylor de $f(x+h)$ et de $f(x+2h)$ en x , et on en déduit une approximation de $f''(x)$:

$$(1) \quad f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$(2) \quad f(x+2h) = f(x) + 2h f'(x) + \frac{(2h)^2}{2} f''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

En formant $(2) - 2 \times (1)$, on élimine le terme en $f'(x)$ et on obtient :

$$f''(x) = \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

$$\text{soit } f''_j \simeq \frac{f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2}}{h^2}$$

Ici aussi, la formule est équivalente à prendre la dérivée seconde au point x du polynôme de Lagrange passant par les 3 points x , $x+h$ et $x+2h$. (C'est une parabole!).

b) Dérivées à l'ordre 2 en h

Pour augmenter l'ordre, il faut également prendre en compte un nombre supérieur de points.

Calcul de f'_j

$$(1) \quad f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$(2) \quad f(x+2h) = f(x) + 2h f'(x) + \frac{(2h)^2}{2} f''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

On forme (2) $- 4 \times$ (1) pour éliminer le terme en $f''(x)$, et on obtient :

$$f'(x) = \frac{-3 f(x) + 4 f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\text{soit } f'_j \simeq \frac{1}{2h}(-3 f_j + 4 f_{j+1} - f_{j+2})$$

Calcul de f''_j . En suivant le même principe, on trouve :

$$f''_j = \frac{1}{h^2}(2 f_j - 5 f_{j+1} + 4 f_{j+2} - f_{j+3}) + \mathcal{O}(h^2)$$

4.2.2 Différences régressives (ou à gauche ou amont)

On peut refaire les développements de Taylor en utilisant les points à gauche de x : $x-h$, $x-2h$, ...ou bien on peut utiliser les formules décentrées progressives avec h négatif. On obtient, à l'ordre 1 en h :

$$f'_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h} + \mathcal{O}(h)$$

et

$$f''_j = \frac{f_j - 2 f_{j-1} + f_{j-2}}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

4.2.3 Différences centrées

Cette fois, on utilise les points entourant x : $x-h$, $x+h$, On montre que les ordres en h obtenus à l'aide des formules centrées sont pairs.

$$(1) \quad f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$(2) \quad f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

On forme (1) – (2), ce qui permet d'éliminer le terme en h^2 , et on obtient :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

soit,

$$f'_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Pour obtenir la dérivée seconde, on écrit les développements jusqu'à l'ordre 4 :

$$(1) \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$(2) \quad f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

On forme (1) + (2), et on obtient :

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \implies f''_j = \frac{f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

4.3 Utilisation des différences divisées (hors programme 2022-23)

On définit les opérateurs Δ_+ et Δ_- par :

$\Delta_+ f(x) = f(x+h) - f(x)$ pour les différences progressives,

et $\Delta_- f(x) = f(x) - f(x-h)$ pour les différences régressives.

On introduit aussi les opérateurs A et R tels que $Af(x) = f(x+h)$ et $Rf(x) = f(x-h)$, et l'opérateur Identité I , de telle sorte que l'on a :

$\Delta_+ f(x) = f(x+h) - f(x) = Af(x) - f(x) = (A - I)f(x)$, et

$\Delta_- f(x) = f(x) - f(x-h) = f(x) - Rf(x) = (I - R)f(x)$.

Ceci permettra le calcul des dérivées successives de $f(x)$ plus simplement et de les écrire sous forme de tableaux jusqu'à la dérivée quatrième.

4.3.1 Différences progressives

Dérivées d'ordre 1

On a démontré que

$$f'_j = \frac{\Delta_+ f_j}{h} + \mathcal{O}(h) \simeq \frac{(A - I)f_j}{h}$$

et on a alors

$$f_j'' = \frac{\Delta_+ f_j'}{h} + \mathcal{O}(h) \simeq \frac{\Delta_+^2 f_j}{h^2} = \frac{(A - I)^2 f_j}{h^2} = \frac{(A^2 - 2A + I)f_j}{h^2} = \frac{A^2 f_j - 2A f_j + f_j}{h^2}$$

Or $A f_j = f_{j+1}$ et $A^2 f_j = f_{j+2}$. Donc on retrouve :

$$f_j'' = \frac{f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

On peut alors généraliser le résultat pour le calcul de la dérivée nième, en utilisant le développement du binôme de Newton, avec $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$:

$$f_j^{(n)} = \frac{\Delta_+^n f_j}{h^n} + \mathcal{O}(h) \simeq \frac{(A - I)^n f_j}{h^n} = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n C_n^k A^k I^{n-k} (-1)^{n-k} f_j = \frac{(-1)^n}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f_{j+k}$$

car $A^k I^{n-k} f_j = A^k f_j = f_{j+k}$. On peut alors construire le tableau suivant :

	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	f_{j+3}	f_{j+4}
$h f_j'$	-1	1			
$h^2 f_j''$	1	-2	1		
$h^3 f_j'''$	-1	3	-3	1	
$h^4 f_j^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

4.3.2 Différences régressives

Dérivées d'ordre 1 De façon analogue, on a

$$\frac{\Delta_-^n f_j}{h^n} + \mathcal{O}(h) \simeq \frac{(I - R)^n f_j}{h^n} = \frac{(-R + I)^n f_j}{h^n} = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k R^k I^{n-k} f_j = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f_{j-k}$$

On en déduit le tableau suivant :

	f_j	f_{j-1}	f_{j-2}	f_{j-3}	f_{j-4}
$h f_j'$	1	-1			
$h^2 f_j''$	1	-2	1		
$h^3 f_j'''$	1	-3	3	-1	
$h^4 f_j^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

Chapitre 5

Equations différentielles ordinaires (EDO)

Introduction - Définitions

Dans ce chapitre, on cherche à résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire vérifiant une condition initiale (problème de Cauchy). Avant d'effectuer une résolution numérique, il faut s'assurer que le problème admet une unique solution.

Pb de Cauchy, EDO du 1er ordre :

On se donne un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} , une fonction $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On souhaite déterminer la fonction $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, vérifiant le problème de Cauchy ci-dessous :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

On rappelle le théorème : Si f est continue dans $[a, b] \times \mathbb{R}$ et lipschitzienne par rapport à la seconde variable, alors le problème de Cauchy admet une solution unique.

Pb de Cauchy, systèmes d'EDOs du 1er ordre :

On se donne un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} , une fonction $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

On souhaite déterminer la fonction $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, vérifiant le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_1(a) = \alpha_1 \\ y_2(a) = \alpha_2 \\ \dots \\ y_n(a) = \alpha_n \end{cases}$$

Le théorème d'existence et d'unicité est identique au cas précédent. Il suffit d'utiliser pour la condition de Lipschitz, une norme dans \mathbb{R}^n .

Systèmes d'EDO d'ordre supérieur à 1 :

On peut se ramener à un système d'équations différentielles du premier ordre.

5.1 Méthodes d'intégration à un pas

5.1.1 Définition

On subdivise l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en n points équidistants, en posant $h = (b - a)/n$, et $x_{i+1} - x_i = h$, de sorte que : $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$.

On pose $y_0 = y(x_0) = y(a) = \alpha$, et on note y_i la valeur approchée de $y(x_i)$.

Une méthode à un pas permet de calculer y_{i+1} à partir de y_i .

A partir de la donnée de $y_0 = \alpha$, on calcule donc successivement les y_i (y_1, y_2, \dots, y_n).

On relie ensuite les points (x_i, y_i) par interpolation pour définir une fonction y_i sur $[a, b]$.

L'erreur de discrétisation $e_i = y(x_i) - y_i$ dépend (entre autres) de la valeur du pas h .

5.1.2 Schémas explicite/implicite

On distingue les schémas explicites, pour lesquels on peut calculer explicitement y_{i+1} en fonction de la donnée y_i , des schémas implicites, pour lesquels il faut résoudre une équation pour calculer y_{i+1} en fonction de la donnée y_i .

1. Exemple 1

Supposons qu'on utilise une différence progressive d'ordre 1 pour approcher $y'(x_i)$. On obtient $y'(x_i) = f(x_i, y_i) \cong (y_{i+1} - y_i)/h$, soit : $y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$. C'est un schéma explicite, car on peut calculer explicitement y_{i+1} en fonction de la donnée y_i .

2. Exemple 2

Supposons qu'on utilise une différence régressive d'ordre 1 pour approcher $y'(x_i)$. On obtient $y'(x_i) = f(x_i, y_i) \cong (y_i - y_{i-1})/h$, soit : $y_i = y_{i-1} + h f(x_i, y_i)$, ou encore $y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1})$. C'est un schéma implicite,

car pour calculer y_{i+1} en fonction de la donnée y_i , il faut résoudre une équation, qui peut être non-linéaire.

On peut par exemple utiliser une méthode itérative de type point fixe :

$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})$, avec $y_{i+1}^{(0)}$ calculé par un schéma explicite.

3. Exemple 3

Supposons qu'on utilise une différence centrée d'ordre 2 pour approcher $y'(x_i)$. On pose $y'(x_i) = f(x_i, y_i) \cong (y_{i+1} - y_{i-1})/(2h)$. On obtient $y_{i+1} = y_{i-1} + 2h f(x_i, y_i)$. C'est un schéma explicite à deux pas qui nécessite la connaissance de deux conditions initiales y_0 et y_1 . En général, on calcule y_1 en utilisant une méthode à un pas.

5.1.3 Généralités sur les méthodes à un pas explicites : Consistance - stabilité - convergence

Soit une méthode à un pas dont le schéma est donné par :

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \\ y_{i+1} = y_i + h \phi(x_i, y_i, h) \quad (0 \leq i \leq n) \end{cases}$$

Les diverses méthodes se distinguent par le choix de la fonction $\phi(x, y, h)$.

1. Consistance

La méthode $y_{i+1} = y_i + h \phi(x_i, y_i, h)$ est consistante avec l'équation différentielle si, pour toute solution $y(x)$ de $y'(x) = f(x, y)$ on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\max_i \left| \frac{1}{h} (y(x_{i+1}) - y(x_i)) - \phi(x_i, y(x_i), h) \right| \right] = 0$$

Théorème (admis) : Pour qu'une méthode à un pas soit consistante, il faut et il suffit que $\phi(x, y, 0) = f(x, y)$.

2. Ordre de l'erreur

L'erreur de discrétisation est définie par $e_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$.

On peut alors calculer l'erreur commise sur un pas, en supposant que $y_i = y(x_i)$:

$$\begin{aligned} e_{i+1} &= y(x_{i+1}) - y_{i+1} = y(x_{i+1}) - y(x_i) + y(x_i) - y_{i+1} \\ &= y(x_{i+1}) - y(x_i) + y(x_i) - [y_i + h \phi(x_i, y_i, h)] = y(x_{i+1}) - y(x_i) - h \phi(x_i, y_i, h). \end{aligned}$$

Définition : On dit que la méthode est d'ordre $\geq p$ si

$$\max_i \left| \frac{1}{h} (y(x_{i+1}) - y(x_i)) - \phi(x_i, y(x_i), h) \right| = \mathcal{O}(h^p)$$

En effet, l'erreur sur un pas vérifiera alors $e_{i+1} = \mathcal{O}(h^{p+1})$, et l'erreur globale sur l'intervalle $[a, b] = [x_0, x_n]$, donnée par $e = \sum_{i=0}^{n-1} e_{i+1}$, sera majorée par :

$|e| \leq n \times \max_i |e_{i+1}| = n \times \mathcal{O}(h^{p+1}) = n \times h \times \mathcal{O}(h^p) = (b - a) \times \mathcal{O}(h^p)$, et donc la méthode est globalement d'ordre p .

Dire qu'une méthode est consistante revient à dire qu'elle est au moins d'ordre 1. En général on utilise des développements limités pour démontrer la consistance et calculer l'ordre de l'erreur.

3. Stabilité

Soient y_i et z_i ($1 \leq i \leq n$) les solutions respectives des systèmes :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \phi(x_i, y_i, h) \\ y_0 \text{ donné} \end{cases} \quad \begin{cases} z_{i+1} = z_i + h [\phi(x_i, z_i, h) + \epsilon_i] \\ z_0 \text{ donné} \end{cases}$$

La méthode est dite théoriquement stable s'il existe deux constantes M_1 et M_2 indépendantes de h telles que :

$$\max_i |y_i - z_i| \leq M_1 |y_0 - z_0| + M_2 \max_i |\epsilon_i|$$

Signification : Une méthode est stable si une petite perturbation sur les données (α, ϕ) n'entraîne qu'une petite perturbation sur la solution, et ceci, indépendamment de h .

Théorème : Si la fonction ϕ est Lipschitzienne par rapport à la seconde variable, alors la méthode est stable.

4. Convergence

La méthode converge si $\lim_{h \rightarrow 0} \max_i |y(x_i) - y_i| = 0$, quelque soit la condition initiale α .

Si une méthode à un pas est consistante et stable, elle est alors convergente.

5. **Interprétation en terme de quadrature.** En repartant de l'EDO, $y'(x) = f(x, y(x))$, si on l'intègre entre x_i et x_{i+1} , on obtient : $y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$
La méthode à un pas correspondant à $\phi(x, y, h)$ donnée, consiste donc à approcher l'intégrale par $h\phi(x_i, y_i, h)$.

5.2 Méthode d'Euler.

Définition. On choisit $\phi(x_i, y_i, h) = f(x_i, y_i)$. La méthode est donc la suivante :

$$\begin{cases} y_0 &= \alpha \\ y_{i+1} &= y_i + h f(x_i, y_i) \quad (0 \leq i \leq n-1) \end{cases}$$

Pour la programmation on pourra introduire la notation k_1 , et effectuer comme suit la résolution du pas $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + h k_1 \end{cases}$$

Consistance et ordre. Ecrivons le développement de Taylor de la fonction $y(x)$ en x_i , en supposant qu'elle est suffisamment régulière :

$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \mathcal{O}(h^2)$, donc :
 $y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\phi(x_i, y(x_i), h) + \mathcal{O}(h^2)$ et on a : $\frac{1}{h}[y(x_{i+1}) - y(x_i)] - \phi(x_i, y(x_i), h) = \mathcal{O}(h)$.

La méthode d'Euler est d'ordre 1. Elle est donc consistante.

Stabilité. Si f est k lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, $\forall x \in [a, b]$, alors ϕ est Lipschitzienne par rapport à la seconde variable, et donc la méthode d'Euler est stable.

Convergence. Si f est k lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, $\forall x \in [a, b]$, alors la méthode d'Euler converge.

Interprétation en terme de quadrature. La méthode d'Euler consiste donc à approcher l'intégrale par $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \cong hf(x_i, y_i)$ (formule du rectangle à gauche)

5.3 Méthodes de Runge-Kutta

5.3.1 Méthodes RK2

On suppose que la fonction est suffisamment régulière, $f(x, y) \in C^2$, et on prend, avec $0 < \beta < 1$:

$$\phi(x, y, h) = (1 - \beta)f(x, y) + \beta f\left[x + \frac{h}{2\beta}, y + \frac{h}{2\beta}f(x, y)\right]$$

Les deux méthodes RK2 les plus utilisées sont :

a) méthode de Heun d'ordre 2 :

$$\beta = 1/2 \implies y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \{f(x_i, y_i) + f[x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)]\}$$

Elle est basée sur la quadrature des trapèzes. En pratique, pour la résolution du pas $[x_i, x_{i+1}]$, on procède en deux étapes :

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_{i+1}, y_i + h k_1) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \end{cases}$$

On peut montrer que la méthode de Heun est une méthode d'ordre 2.

b) méthode d'Euler modifiée d'ordre 2 :

$$\beta = 1 \implies y_{i+1} = y_i + hf \left[x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \right]$$

Elle est basée sur la méthode d'intégration du point milieu. En pratique, pour la résolution du pas $[x_i, x_{i+1}]$, on procède en deux étapes :

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_{i+1/2}, y_i + \frac{h}{2} k_1) \\ y_{i+1} = y_i + h k_2 \end{cases}$$

On peut montrer que la méthode d'Euler modifiée est d'ordre 2.

5.3.2 Méthode RK4

Elle est basée sur la méthode d'intégration de Simpson en trois points équidistants. En pratique, pour la résolution du pas $[x_i, x_{i+1}]$, on procède en quatre étapes :

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_{i+1/2}, y_i + \frac{h}{2} k_1) \\ k_3 = f(x_{i+1/2}, y_i + \frac{h}{2} k_2) \\ k_4 = f(x_{i+1}, y_i + h k_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) \end{cases}$$

La méthode RK4 est d'ordre 4. Elle est la plus utilisée pour la résolution des équations différentielles du premier ordre.

5.4 Application à la résolution de systèmes d'EDO

Soit un système de m équations différentielles ordinaires, écrit sous la forme $\frac{dY}{dt} = F(t, Y)$, où le vecteur des inconnues $Y(t)$ et la fonction $F(t, y_1, y_2, \dots, y_m)$ s'écrivent :

$$Y \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(t, Y) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \dots \\ f_m(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{pmatrix}$$

La résolution du pas $[t_n, t_{n+1}]$ (avec Δt le pas de temps entre 2 instants de calcul) par la méthode d'Euler s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} K_1 = F(t_n, Y_n) \\ Y_{n+1} = Y_n + \Delta t K_1 \end{cases}$$

Les autres méthodes se programment de manière analogue.

Chapitre 6

Équations différentielles linéaires du 2ème ordre

On s'intéresse aux équations linéaires du 2ème ordre car elles ont des applications importantes en mécanique, électricité, ce qui les rend plus importantes que les équations différentielles d'ordre supérieur. La théorie de ces équations est la même que celle des équations linéaires en général.

Définition 1 *Une équation différentielle du 2ème ordre est linéaire si elle peut être écrite sous la forme*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x) \quad (6.1)$$

et non linéaire si elle ne peut pas s'écrire sous cette forme.

En d'autres termes, une équation est linéaire si elle l'est pour y et ses dérivées, tandis que $p(x)$, $q(x)$ et $r(x)$ sont des fonctions données de x quelconques.

Si le premier terme y'' est multiplié par une fonction $f(x)$ alors il faut diviser l'équation par $f(x)$ afin de la ramener à la forme (6.1) dite standard (ou canonique).

Si $r \equiv 0$ alors l'équation est dite homogène et non-homogène sinon. De plus, si $r \neq 0$, alors l'équation obtenue en faisant $r = 0$ dans (6.1) est appelée *équation homogène associée* (à (6.1)).

Les fonctions $p(x)$, $q(x)$ et $r(x)$ sont appelés coefficients de l'équation (6.1). Lorsque ces fonctions sont des constantes, on parle d'équation à coefficients constants.

Exemple: 1

$$\begin{aligned}
y'' + 4y &= e^{-x} \sin x && \text{(équation linéaire non-homogène)} \\
(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y &= 0 && \text{(équation linéaire homogène)} \\
\begin{cases} x(y''y + y'^2) + 2y'y = 0 \\ y'' = \sqrt{(y')^2 + 1} \end{cases} &&& \text{(équations non- linéaires)}
\end{aligned}$$

On suppose que $x \in I \subset \mathbb{R}$, I étant un intervalle ouvert.

Proposition 1 (*Principe de superposition ou de linéarité*) *Pour une équation différentielle linéaire homogène, toute combinaison linéaire de deux solutions sur I est aussi solution.*

Preuve: Soient y_1, y_2 deux solutions de l'équation homogène

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (6.2)$$

et $y = C_1y_1 + C_2y_2$ avec C_1 et C_2 deux constantes. Alors

$$\begin{aligned}
y'' + p(x)y' + q(x)y &= (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) \\
&= C_1 \underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{=0} + C_2 \underbrace{(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Remarque : Le résultat ci-dessus n'est plus vrai pour des équations non-homogènes ou non-linéaires.

Exemple: 2 1) On considère l'équation linéaire (à coefficients constants)

$$y'' + y = 1.$$

Les fonctions $\begin{matrix} y_1 = 1 + \cos x \\ y_2 = 1 + \sin x \end{matrix}$ sont solutions, mais $\begin{matrix} y_3 = 2y_1 = 2(1 + \cos x) \\ y_4 = y_1 + y_2 = 2 + \sin x \end{matrix}$ ne le sont pas.

2) On considère l'équation non-linéaire

$$y''y - xy = 0.$$

Les fonctions $\begin{matrix} y_1 = x^2 \\ y_2 = 1 \end{matrix}$ sont solutions, mais $\begin{matrix} y_3 = -y_1 = -x^2 \\ y_4 = y_1 + y_2 = x^2 + 1 \end{matrix}$ ne le sont pas.

Pour une équation différentielle d'ordre 2 du type (6.2), la solution générale est une combinaison linéaire $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ où y_1, y_2 sont deux solutions particulières linéairement indépendantes.

Définition 2 *Un problème aux valeurs initiales (PVI) est un problème composé de l'équation (6.1) et de deux conditions initiales :*

$$\begin{cases} y(x_0) = K_0 \\ y'(x_0) = K_1 \end{cases} .$$

Définition 3 *Un problème aux valeurs limites (PVL) est un problème composé de l'équation (6.1) et de deux conditions aux limites :*

$$\begin{cases} y(x_0) = K_0 \\ y(x_1) = K_1 \end{cases} \quad (x_0 \neq x_1) .$$

Exemple: 3 On considère le PVI :

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 3 \end{cases} .$$

e^x et e^{-x} sont solutions de $y'' - y = 0$, d'où la solution générale $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Par dérivation, on trouve $y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$. La prise en compte des conditions initiales conduit alors à $\begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = 1 \end{cases}$. Finalement, la solution du PVI s'écrit $y = 4e^x + e^{-x}$.

Définition 4 (solution générale) *Une solution générale de l'équation du 2ème ordre homogène (6.2) sur I est une solution du type $C_1 y_1 + C_2 y_2$, où y_1 et y_2 sont des solutions non proportionnelles entre-elles (linéairement indépendantes) et C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.*

(solution particulière) Une solution particulière de (6.2) est obtenue en spécifiant les valeurs des constantes C_1 et C_2 .

Remarque : Un choix pour les valeurs de C_1, C_2 produit une solution particulière ; un choix différent en produit une autre. En général, il n'y a aucune raison que deux solutions particulières distinctes soient linéairement indépendantes.

Définition 5 (base) *Une base de solutions pour (6.2) est une paire de solutions y_1, y_2 linéairement indépendantes.*

(réduction de l'ordre) Si dans l'équation différentielle la variable y n'apparaît pas explicitement (c'est le cas dans (6.1) lorsque $q \equiv 0$), alors l'équation se ramène à une équation du premier ordre en posant $y' = z$ (pour (6.1) avec $q \equiv 0$, on obtient ainsi $z' + p(x)z = r(x)$ qui est bien du premier ordre).

Attention : lorsqu'elle s'applique, la méthode de réduction de l'ordre ramène la résolution d'une équation différentielle du 2ème ordre à la résolution de deux équations du premier ordre. En effet, après avoir déterminé la solution $z = z(x)$ de l'équation réduite, il reste à trouver la solution $y = y(x)$ du problème initial que l'on obtient en intégrant $y' = z$ (y est une primitive de z).

6.1 Équation linéaire homogène à coefficients constants

On examine le cas où les coefficients sont des constantes (indépendantes de x) :

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (6.3)$$

On a vu pour l'équation différentielle $y' + ky = 0$ qu'une solution particulière est $y = e^{-kx}$. On va généraliser cette approche à l'ordre 2.

Si on cherche une solution du type $y = e^{\lambda x}$ alors on obtient par substitution $(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$. Comme $e^{\lambda x} > 0$, λ satisfait l'équation du 2ème degré

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (6.4)$$

que l'on appelle *équation caractéristique* associée à (6.3).

La/les racines de (6.4) sont les *valeurs caractéristiques* associées à (6.3). Leur nature dépend de la valeur du discriminant $\Delta = a^2 - 4b$. Il y a trois cas à distinguer :

- **cas 1 :** $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{\Delta}) \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{\Delta}) \end{cases}.$$

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$ et $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ constituent une base (de l'espace) des solutions de (6.3). La solution générale est une combinaison linéaire $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

Exemple: 4 Considérons le PVI
$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = -5 \end{cases}.$$

L'équation caractéristique associée à $y'' + y' - 2y = 0$ s'écrit $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$; les valeurs caractéristiques (i.e. les racines) sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.

La solution générale est donc $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ où C_1, C_2 sont des constantes quelconques.

La solution du PVI s'obtient en particulierisant les valeurs de C_1, C_2 afin d'obtenir une solution particulière telle que $\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$. On trouve $\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 3 \end{cases}$ et donc $y = e^x + 3e^{-2x}$.

- **cas 2 :** $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$. On prend $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{-ax/2}$. Évidemment, on ne peut pas retenir $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, puisque dans ce cas on aurait $y_1 \equiv y_2$ et le couple (y_1, y_2) ne peut pas former une base des solutions.

Pour construire une 2ème solution (linéairement indépendante de y_1), on utilise la méthode de la réduction de l'ordre en posant $y_2 = uy_1$ où $u = u(x)$ est une fonction inconnue. Par dérivation, il vient

$$\begin{cases} y_2' = u'y_1 + uy_1' \\ y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \end{cases}$$

et en remplaçant dans (6.3) :

$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + a(u'y_1 + uy_1') + buy_1 = 0$$

ou encore

$$u''y_1 + u' \underbrace{(2y_1' + ay_1)}_{=0} + u \underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{=0} = 0.$$

Le coefficient de u' vaut 0 car $2y_1' = 2(e^{-ax/2})' = -ae^{-ax/2} = -ay_1$. Celui de u est nul car y_1 est solution de (6.3). L'équation pour u se réduit donc à $u''y_1 = 0$ c-à-d $u'' = 0$ dont la solution générale s'écrit $u = \alpha x + \beta$ où α et β sont des constantes quelconques. Le choix $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ produit la solution particulière $y_2 = xy_1$ qui est bien linéairement indépendante de y_1 ($\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{Cte}$). Le couple (y_1, y_2) forme une base des solutions et la solution générale s'écrit

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = (C_1 + C_2 x) e^{-ax/2}. \quad (6.5)$$

Remarque : Pour la solution particulière de $u'' = 0$, on aurait très bien pu prendre $u = x + 1$ ce qui aurait produit $y_2 = (x + 1)y_1$ et la solution générale $y = (C_1 + C_2 + C_2 x) e^{-ax/2}$. Il s'agit bien d'une solution générale de (6.3) lorsque $\Delta = 0$, mais on voit bien que ce choix est maladroit puisque la solution (6.5) est de la même forme et est de surcroît plus simple !

Exemple: 5 Considérons le PVI $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

L'équation caractéristique admet la racine double $\lambda = 2$. La solution générale est $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$. La solution du PVI est la solution particulière obtenue par $\begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -5 \end{cases}$ càd $y = (3 - 5x)e^{2x}$.

- **cas 3 :** $\Delta < 0$ l'équation caractéristique (6.4) admet deux racines complexes conjugués

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + i\sqrt{-\Delta}) = -\frac{a}{2} + i\omega \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(-a - i\sqrt{-\Delta}) = -\frac{a}{2} - i\omega \end{cases}$$

où l'on a posé $2\omega = \sqrt{-\Delta} = \sqrt{4b - a^2}$.

La solution générale complexe est alors

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = e^{-ax/2} (C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x})$$

où C_1, C_2 sont des nombres complexes quelconques. Noter que $e^{\lambda_1 x} / e^{\lambda_2 x} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq \text{Cte}$.

Une base de solutions réelles est $\begin{cases} y_1 = e^{-ax/2} \cos \omega x \\ y_2 = e^{-ax/2} \sin \omega x \end{cases}$. Le rapport $\frac{y_2}{y_1} = \tan \omega x \neq \text{Cte}$ (on a $\omega > 0$) ce qui montre que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

La solution générale réelle peut donc s'écrire

$$y = e^{-ax/2} (A \cos \omega x + B \sin \omega x)$$

où A, B sont des réels quelconques.

Remarque : Comment a-t-on trouvé les solutions réelles à partir des solutions complexes ?

Il s'agit en fait de construire des fonctions réelles en formant les bonnes combinaisons linéaires des solutions complexes. D'après le *principe de superposition*, les combinaisons linéaires

$$\begin{cases} y_1 = \frac{e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}}{2} \\ y_2 = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{2i} \end{cases}$$

sont solutions de (6.3) puisque $e^{\lambda_1 x}$ et $e^{\lambda_2 x}$ le sont.

Par ailleurs, puisque les valeurs caractéristiques sont complexes conjugués l'une de l'autre, on a $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \Rightarrow e^{\lambda_1 x} = \overline{e^{\lambda_2 x}}$ et $e^{\lambda_2 x} = \overline{e^{\lambda_1 x}}$ (\bar{z} désigne le

complexe conjugué de $z \in \mathbb{C}$). On peut donc écrire

$$\begin{cases} y_1 = \frac{e^{\lambda_1 x} + \overline{e^{\lambda_1 x}}}{2} = \operatorname{Re}\{e^{\lambda_1 x}\} \\ y_2 = \frac{e^{\lambda_1 x} - \overline{e^{\lambda_1 x}}}{2i} = \operatorname{Im}\{e^{\lambda_1 x}\} \end{cases}$$

où $\operatorname{Re}\{z\}$ et $\operatorname{Im}\{z\}$ désignent respectivement les parties réelle et imaginaire de $z \in \mathbb{C}$ (autrement dit $z = \operatorname{Re}\{z\} + i \operatorname{Im}\{z\}$).

Les relations ci-dessus montrent clairement que y_1 et y_2 sont réelles. Les fonctions $\cos \omega x$ et $\sin \omega x$ apparaissent grâce la formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{\lambda_1 x} = e^{(-\frac{1}{2}a + i\omega)x} = e^{-\frac{1}{2}ax} e^{i\omega x} = e^{-\frac{1}{2}ax} (\cos \omega x + i \sin \omega x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}\{e^{\lambda_1 x}\} = e^{-\frac{1}{2}ax} \cos \omega x \\ \operatorname{Im}\{e^{\lambda_1 x}\} = e^{-\frac{1}{2}ax} \sin \omega x \end{cases}.$$

Comme y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes ($\frac{y_2}{y_1} = \tan \omega x \neq \text{Cte}$, cf. plus haut), elles constituent une base des solutions réelles de l'équation différentielle (6.3) lorsque $a^2 < 4b$.

Exemple: 6 Considérons le PVL $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y(\pi) = -3 \end{cases}$.

La solution générale de $y'' + y = 0$ (équation de l'*oscillateur harmonique*) est $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Les conditions aux limites $\begin{cases} y(0) = 3 \\ y(\pi) = -3 \end{cases}$ conduisent à $\begin{cases} C_1 = 3 \\ -C_1 = -3 \end{cases}$; la valeur de C_2 est indéterminée et il y a une infinité de solutions $y = 3 \cos x + C_2 \sin x$ avec C_2 quelconque.

6.1.1 Equations du type Euler-Cauchy (homogènes)

Pour $x > 0$

$$x^2 y'' + axy' + by = 0 \tag{6.6}$$

où a et b sont des constantes réelles.

Cette équation, à *coefficients variables*, ne se prête pas directement à une résolution par les méthodes développées précédemment. Par contre, elle peut se ramener à une équation à coefficients constants (de la même forme que (6.3)) à

l'aide du *changement de variable* $x = e^t$. Elle peut être également résolue par un *changement de fonction* conduisant à un calcul algébrique. C'est cette dernière méthode qui va être présentée ci-dessous.

Le changement de fonction est simplement $y = x^m$ ce qui donne par substitution dans (6.6) :

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0 \quad \Rightarrow \quad [m^2 + (a-1)m + b]x^m = 0.$$

L'exposant m satisfait donc une équation du 2ème degré $m^2 + (a-1)m + b = 0$. On note m_1 et m_2 les racines (éventuellement égales) de cette équation et $\Delta = (a-1)^2 - 4b$ son discriminant.

- **cas 1** : $\Delta > 0$, deux racines réelles distinctes $m_1 = \frac{1-a+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $m_2 = \frac{1-a-\sqrt{\Delta}}{2}$.
Le couple $(y_1, y_2) = (x^{m_1}, x^{m_2})$ forme une base, de sorte que la solution générale est

$$y(x) = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}.$$

- **cas 2** : $\Delta = 0$, une racine réelle double $m_1 = m_2 = \frac{1-a}{2}$.
On pose $y_1 = x^{m_1} = x^{(1-a)/2}$. On cherche $y_2 = uy_1$. En remplaçant dans (6.6), on obtient

$$\begin{aligned} x^2(u''y_1 + 2u'y'_1 + uy''_1) + ax(u'y_1 + uy'_1) + buy_1 &= 0 \\ u''x^2y_1 + u'x(2xy'_1 + ay_1) + u \underbrace{(x^2y''_1 + axy'_1 + by_1)}_{=0} &= 0. \end{aligned}$$

Le coefficient de u est nul car y_1 est solution de (6.6). Pour le coefficient de u'

$$2xy'_1 + ay_1 = (2m_1 + a)y_1 = \left(2\frac{1-a}{2} + a\right)y_1 = y_1.$$

L'équation pour u devient alors $(u''x^2 + u'x)y_1 = 0$ et donc $(y_1 \neq 0)$ $u''x^2 + u'x = 0$. En posant $v = u'$ (méthode de réduction de l'ordre), on trouve $xv' + v = 0$ qui admet la solution particulière $v = 1/x$. On en déduit $u = \ln x$.

La paire $(x^{m_1}, x^{m_1} \ln x)$ forme une base de l'espace des solutions et la solution générale s'écrit :

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x)x^{(1-a)/2}$$

Exemple: 7

$$\begin{aligned} x^2 y'' - 3xy' + 4y &= 0 \\ y(x) &= (C_1 + C_2 \ln x)x^2 \end{aligned}$$

- **cas 3** : $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées $m_1 = \mu + i\nu$, $m_2 = \overline{m_1} = \mu - i\nu$, avec $\mu = \frac{1-a}{2}$ et $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta} = 2b - \frac{1}{2}(1-a)^2$.

$$\begin{cases} y_1 = x^\mu \cos(\nu \ln x) \\ y_2 = x^\mu \sin(\nu \ln x) \end{cases}$$

et la solution générale

$$y(x) = x^\mu (C_1 \cos(\nu \ln x) + C_2 \sin(\nu \ln x)).$$

6.2 Équations linéaires homogènes à coefficients variables ; Wronskien

On reprend l'équation linéaire homogène générale (6.1)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

avec $p(x)$, $q(x)$ fonctions de x , continues. On considère le PVI pour lequel y vérifie les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} y(x_0) = K_0 \\ y'(x_0) = K_1 \end{cases} \quad (6.7)$$

Théorème 1 (*Existence et Unicité pour le PVI*) Si $p(x)$, $q(x)$ sont des fonctions continues sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, alors le PVI (6.1+6.7) a une unique solution $y(x)$ définie sur l'intervalle I .

Preuve: cf. Endély, Magnus, Ober, Higher Transcendental Functions, 1955.

Définition 6 (*Déterminant Wronskien*) Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et y_1, y_2 deux fonctions dérivables en $x_0 \in I$. Le déterminant Wronskien $W_{(y_1, y_2)}(x_0)$ (on dira simplement Wronskien) de (y_1, y_2) en x_0 est le déterminant :

$$W_{(y_1, y_2)}(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0).$$

Théorème 2 (*Dépendance/Indépendance linéaire des solutions*) On considère le PVI (6.1+6.7) avec $p(x)$ et $q(x)$ continues I .

Deux solutions y_1, y_2 sont linéairement dépendantes sur I si et seulement si leur Wronskien s'annule en un point $x_0 \in I$. De plus, si $W_{(y_1, y_2)}(x_0) = 0$ alors $W_{(y_1, y_2)}(x) \equiv 0$ pour tout $x \in I$.

On en déduit que si $W_{(y_1, y_2)}(x_1) \neq 0$ pour au moins un $x_1 \in I$, alors y_1, y_2 sont linéairement indépendantes sur I .

Preuve: La démonstration est décomposée en trois points :

a) Supposons que y_1, y_2 , soient linéairement dépendantes. Alors il existe une constante $K \neq 0$ telle que $y_2 = ky_1$ sur I . Dans ce cas, le Wronskien de (y_1, y_2) est identiquement nul sur I :

$$W_{(y_1, y_2)}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & ky_1(x) \\ y_1'(x) & ky_1'(x) \end{vmatrix} = ky_1(x)y_1'(x) - ky_1'(x)y_1(x) = 0.$$

pour tout $x \in I$.

b) On suppose seulement que y_1, y_2 sont solutions de (6.1) et que $W_{(y_1, y_2)}(x_0) = 0$ pour un $x_0 \in I$. On va montrer que y_1, y_2 sont linéairement dépendantes.

Soit $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} k_1 y_1(x_0) + k_2 y_2(x_0) = 0 \\ k_1 y_1'(x_0) + k_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

Il s'agit d'un système linéaire d'inconnues k_1, k_2 dont le déterminant est précisément le Wronskien $W_{(y_1, y_2)}(x_0)$ qui s'annule par hypothèse. On peut donc affirmer qu'il existe une solution (k_1, k_2) de (6.8) différente de $(0, 0)$.

On définit $y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$. D'après le principe de superposition, y est solution de (6.1). De plus, k_1, k_2 étant solution de (6.8), on en déduit que $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. On voit donc que y est solution d'un PVI avec des conditions initiales homogènes ; on a donc $y \equiv 0$ sur I .

Par unicité de la solution, $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = 0$ pour tout $x \in I$ avec $k_1 \neq k_2$ ce qui établit que y_1, y_2 sont linéairement dépendantes.

c) Si $W_{(y_1, y_2)}(x_0) = 0$ en un point $x_0 \in I$ alors y_1, y_2 sont linéairement dépendantes d'après b) et $W_{y_1, y_2}(x) = 0$ pour tout $x \in I$ d'après a).

Exemple: 8 précédents.

Théorème 3 (Existence d'une Solution Générale) Si les coefficients $p(x), q(x)$ sont des fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$ (ouvert), alors (6.2) a une solution générale sur I . Elle a de plus la forme $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ où y_1, y_2 sont deux solutions (particulières) linéairement indépendantes de (6.2).

Preuve: Soient y_1 la solution de (6.2) satisfaisant les conditions initiales $\begin{cases} y_1(x_0) = 1 \\ y_1'(x_0) = 0 \end{cases}$

et y_2 la solution satisfaisant $\begin{cases} y_2(x_0) = 0 \\ y_2'(x_0) = 1 \end{cases}$. On a alors

$$W_{(y_1, y_2)}(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

ce qui permet d'affirmer que y_1, y_2 sont linéairement indépendantes sur I et donc $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ est solution générale.

Remarque : Avec y_1, y_2 satisfaisant les conditions initiales de la démonstration ci-dessus, la solution $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ est solution du PVI

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = C_1 \\ y'(x_0) = C_2 \end{cases}.$$

Exemple: 9 La solution de l'équation de l'oscillateur harmonique $y'' + \omega^2 y = 0$ munie des conditions initiales $\begin{cases} y(0) = a \\ y'(0) = b\omega \end{cases}$ s'écrit $y(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x$. En effet, $y_1(x) = \cos \omega x$ est solution avec $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases}$ et $y_2(x) = \frac{1}{\omega} \sin \omega x$ est solution avec $\begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$.

Comment obtenir une deuxième solution, quand on connaît déjà une première solution, de telle sorte que ces deux solutions forment une base ?

Méthode de réduction de l'ordre = méthode applicable à toute équation linéaire homogène du type (6.2).

Soit y_1 une solution de (6.2) connue explicitement en fonction de x sur un intervalle I . On pose $y_2 = uy_1$, avec $u(x)$ à déterminer sur I . Par dérivations successives et application de la relation $(uv)' = u'v + uv'$, il vient :

$$\begin{cases} y_2' = u'y_1 + uy_1' \\ y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \end{cases}$$

d'où

$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + p(u'y_1 + uy_1') + quy_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) = 0$$

où l'on a utilisé le fait que y_1 est solution de (6.2) (càd $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$). En posant $v = u'$, on obtient

$$v'y_1 + (2y_1' + py_1)v = 0$$

qui est une équation du premier ordre, à variable séparable (1.4) :

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = -2 \frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx} - p \quad \Rightarrow \quad \ln |v| = -2 \ln |y_1| - \int p(x) dx$$

et donc, en prenant l'exponentielle des deux membres :

$$|v| = \frac{1}{y_1^2} \exp \left(- \int p(x) dx \right) \Leftrightarrow v = \pm \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx}.$$

En faisant le choix $v > 0$, on a finalement

$$v = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} = u' \quad \Rightarrow \quad u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx.$$

Pour que y_1 et y_2 soient linéairement indépendantes, il suffit que u ne soit pas une fonction constante sur I . Or c'est bien le cas, puisque $u' = v \neq 0$. Le couple (y_1, uy_2) forme une base des solutions de (6.2).

Remarque : Dans le cas d'une équation à coefficients constants, on peut retrouver la deuxième solution (6.5) avec la méthode décrite ci-dessous dans le cas où l'équation caractéristique admet une racine double (6.3 avec $a^2 = 4b$). En effet, il suffit de prendre $y_1(x) = e^{-ax/2}$ et $p(x) \equiv a \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède,

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx = \int \frac{e^{-a \int dx}}{e^{-ax}} dx = \int 1 dx = x \quad \Rightarrow \quad y_2 = uy_1 = xe^{-ax/2}$$

La solution générale s'écrit donc bien $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = (C_1 + C_2 x) e^{-ax/2}$.

6.3 Équations linéaires non-homogènes

On considère les équations du type (6.1) sur un intervalle ouvert I :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad (x \in I)$$

avec $r(x) \not\equiv 0$.

Comme dans le cas des équations linéaires du premier ordre, on a le résultat

Théorème 4 (a) la différence entre deux solutions de (6.1) est une solution de (6.2).

(b) la somme entre une solution de (6.1) sur I et une solution de (6.2) sur I est une solution de (6.1) sur I .

Définition 7 1) Une solution générale de l'équation non-homogène (6.1) sur I est de la forme

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{6.9}$$

où $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ est la solution générale de l'équation homogène (6.2) et $y_p(x)$ est une solution arbitraire de (6.1) sur I , qui ne contient pas de constantes arbitraires.

2) Une solution particulière de l'équation (6.1) est une solution de la forme (6.9) obtenue en particulierisant les constantes C_1 et C_2 (ainsi y_p est la solution particulière avec le choix de constantes $C_1 = C_2 = 0$).

Théorème 5 1) Si les fonctions $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ sont continues sur I , alors l'équation homogène a une solution générale sur I et donc l'équation non-homogène a aussi une solution générale donnée par (6.9).

2) Si à l'équation (6.1) on ajoute des conditions initiales, le problème de Cauchy obtenu a une solution unique sur I .

Preuve: On se base sur l'existence d'une solution pour une équation homogène, ainsi que sur l'existence d'une unique solution le problème de Cauchy associé à l'équation homogène.

Conclusion : Pour résoudre les équations non-homogène (6.1) ou un problème de Cauchy non-homogène, on doit résoudre dans un premier temps l'équation homogène associée (6.2) et ensuite trouver une solution particulière de l'équation non-homogène (6.2).

Dans la suite, on va présenter deux méthodes pour trouver une solution particulière.

6.3.1 Méthodes des coefficients indéterminés

C'est la méthode la plus simple à mettre en application. Elle ne s'applique qu'aux équations à coefficients constants et pour lesquelles le second membre $r(x)$ est du type : polynôme, fonction exponentielle, cos, sin, et à toute somme ou tout produit de telles fonctions. Ces fonctions ont la particularité que leur type ne change pas lorsqu'elles sont sujettes à une opération de dérivation. On va rechercher des solutions particulières en formant des combinaisons linéaires de fonctions du même type que $r(x)$. Les coefficients de la combinaison sont ensuite déterminés par identification.

Si $r(x)$ coïncide avec l'une des formes du tableau ci-dessus, alors il faut choisir le y_p correspondant, le remplacer dans l'équation $y'' + ay' + by = r(x)$ et trouver les coefficients par identification.

termes en $r(x)$	choix pour y_p
$ke^{\alpha x}$, $k \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$Ce^{\alpha x}$
kx^n , $n \in \mathbb{N}$	$K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + \dots + K_1 x + K_0$
$\begin{matrix} k \cos \omega x \\ k \sin \omega x \end{matrix}$, $\omega \in \mathbb{R}$	$\left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} K \cos \omega x + M \sin \omega x$
$\begin{matrix} ke^{\alpha x} \cos \omega x \\ ke^{\alpha x} \sin \omega x \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} e^{\alpha x} (K \cos \omega x + M \sin \omega x)$

TABLE 6.1 – Second membre et choix de la solution particulière pour la méthode des coefficients indéterminés (équations différentielles à coefficients constants).

Si le choix de y_p conduit à une fonction qui est elle-même solution de l'équation homogène associée, alors il faut multiplier y_p par x (voire x^2 dans le cas où l'équation caractéristique admet une racine double).

Si $r(x)$ est une somme des fonctions de la colonne de gauche, alors y_p doit être recherché comme somme des fonctions correspondantes dans la colonne de droite.

On notera que les fonctions puissance $x \mapsto x^\alpha$ d'exposant α non-entier ne se prêtent pas à un traitement par la méthode des coefficients indéterminés.

Exemple: 10 1) $y'' + 4y = 8x^2$.

On cherche $y_p(x) = K_2 x^2 + K_1 x + K_0$. En injectant dans l'équation, il vient

$$\begin{aligned}
 (K_2 x^2 + K_1 x + K_0)'' + 4(K_2 x^2 + K_1 x + K_0) &= \\
 2K_2 + 4(K_2 x^2 + K_1 x + K_0) &= \\
 4K_2 x^2 + 4K_1 x + 2K_2 + 4K_0 &= 8x^2.
 \end{aligned}$$

Par identification membre à membre :

$$\begin{cases} 4K_2 = 8 \\ 4K_1 = 0 \\ 2K_2 + 4K_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2 = 2 \\ K_1 = 0 \\ K_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow y_p(x) = 2x^2 - 1$$

et finalement la solution générale de $y'' + 4y = 8x^2$ s'écrit $y = y_h + y_p = A \cos 2x + B \sin 2x + 2x^2 - 1$.

2) $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

Équation caractéristique : $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ qui possède les deux racines réelles $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. La solution homogène est ainsi $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Si on choisit $y_p(x) = C e^x$, comme le suggère le tableau 6.1, on tombe sur une solution de l'équation homogène. On va donc chercher $y_p(x) = C x e^x$. En reportant dans

l'équation on obtient

$$\begin{aligned}
 (Cxe^x)'' - 3(Cxe^x)' + 2Cxe^x &= \\
 C(2+x)e^x - 3C(1+x)e^x + 2Cxe^x &= \\
 [2+x-3-3x+2x]Ce^x &= \\
 -Ce^x &= e^x
 \end{aligned}$$

et donc $C = -1$ d'où finalement $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - xe^x$.

3) On considère le problème aux valeurs initiales (de Cauchy) :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x + x \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

L'équation caractéristique admet la racine double 1, on en déduit la solution générale de l'équation homogène $y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^x$.

On cherche une solution particulière y_{p1} avec le second membre $r_1(x) = x$

$$r_1(x) = x \rightarrow y_{p1} = K_1x + K_0$$

et une autre, y_{p2} , avec $r_2(x) = e^x$:

$$r_2(x) = e^x \rightarrow y_{p2} = Cx^2e^x.$$

Par identification, on trouve d'une part

$$\begin{cases} K_1 = 1 \\ -2K_1 + K_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{p1} = x + 2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} K_1 = 1 \\ -2K_1 + K_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{p1} = x + 2$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
 (Cx^2e^x)'' - 2(Cx^2e^x)' + Cx^2e^x &= \\
 C(2+4x+x^2)e^x - 2C(2x+x^2)e^x + Cx^2e^x &= \\
 Ce^x[2+4x+x^2-4x-2x^2+x^2] &= \\
 2Ce^x &= e^x \Rightarrow C = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

càd $y_{p2} = \frac{1}{2}x^2e^x$.

En utilisant la linéarité de l'équation, la somme $y_{p1} + y_{p2}$ est solution particulière avec le second membre $x + e^x$. La solution générale de $y'' - 2y' + y = e^x + x$ est donc $y = (C_1 + C_2x)e^x + x + 2 + \frac{1}{2}x^2e^x$. Les conditions initiales fournissent enfin $C_1 = C_2 = -1$ d'où la solution du PVI :

$$y = \left(\frac{1}{2}x^2 - x - 1\right)e^x + x + 2.$$