Module LU2ME003 : Méthodes mathématiques et numériques pour la mécanique

—

Sorbonne Université, Licence Mécanique

Diana Baltean-Carlès, A. Belme, C. Weisman, E. Sultan

17 février 2023

Table des matières

1 Équations différentielles du premier ordre **5**

1.1 Introduction : équations différentielles 5

1.2 Équations différentielles du premier ordre 6

1.2.1 Équations différentielles à variables séparées 7

1.2.2 Réduction à une forme séparable 8

1.2.3 Équations différentielles linéaires 8

2 Interpolation polynômiale **13**

2.1 Méthodes d'interpolation par collocation 13

2.1.1 Forme polynômiale développée en puissances de x 13

2.1.2 Forme polynômiale de Lagrange 14

2.2 Polynômes osculatoires (hors programme 2022-23) 16

2.2.1 Interpolation d'Hermite 16

2.2.2 Les splines cubiques 16

2.3 Méthode des moindres carrés 16

2.4 Polynômes mini-max 17

2.4.1 Droite mini-Max 18

2.4.2 Parabole mini-Max 18

2.4.3 Polynômes mini-Max de degré $m > 2$ 18

3 Intégration numérique **19**

3.1 Formules de quadrature du type interpolation 19

3.2 Formules de Newton-Cotes 20

3.2.1 Formule des trapèzes ($n = 1$) 20
3.2.2 Formule de Simpson ($n = 2$) 21
3.2.3 Généralisation 22
3.3 Les méthodes composites 23
3.3.1 Méthode composite des trapèzes ($q = 1$) 23
3.3.2 Méthode composite de Simpson ($q = 2$) 23
3.4 Formules de quadrature du type Gauss 24
3.4.1 Gauss-Legendre 24
3.4.2 Gauss-Radau 27
3.4.3 Gauss-Lobatto 28

4 Dérivation numérique 29
4.1 Utilisation des polynômes de Lagrange 29
4.1.1 Dérivée centrée à 3 points 29
4.1.2 Dérivée seconde à 3 points 30
4.2 Utilisation des développements de Taylor 30
4.2.1 Différences progressives (ou à droite ou avales) 30
4.2.2 Différences régressives (ou à gauche ou amont) 32
4.2.3 Différences centrées 32
4.3 Utilisation des différences divisées (hors programmme 2022-23) . . . 33
4.3.1 Différences progressives 33
4.3.2 Différences régressives 34

5 Equations différentielles ordinaires (EDO) 35
5.1 Méthodes d'intégration à un pas 36
5.1.1 Définition 36
5.1.2 Schémas explicite/implicite 36
5.1.3 Généralités sur les méthodes à un pas explicites : Consistance - stabilité - convergence 37
5.2 Méthode d'Euler. 39
5.3 Méthodes de Runge-Kutta 39

5.3.1 Méthodes RK2 39
5.3.2 Méthode RK4 40
5.4 Application à la résolution de systèmes d'EDO 41

Chapitre 1

Équations différentielles du premier ordre

1.1 Introduction : équations différentielles

Une équation différentielle ordinaire est une équation qui contient une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue, notée $y(x)$ ou $y(t)$ et que l'on souhaite déterminer de l'équation. La forme générale d'une équation différentielle d'ordre n s'écrit :

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{(n)}y}{dx}) = 0$$

Exemples :

1. Le déplacement d'une pierre qui tombe du haut d'une tour. L'équation différentielle vérifiée par la position verticale de la pierre par rapport au sol, $y = y(t)$, $t =$le temps, est :

   $$\frac{d^2y}{dt^2} = g$$

   Dans l'équation précédente, la resistance de l'air est négligée. En intégrant deux fois on trouve la solution :

   $$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

2. Déplacement d'une masse placée à l'extrémité d'un ressort. Si on note $y(t)$ le déplacement par rapport à la position d'équilibre, m la masse du corps et k

la constante élastique du ressort, alors le mouvement du corps est modélisé par l'équation différentielle :

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$$

Les équations différentielles sont des outils de modélisation dans beaucoup d'applications de l'ingénierie, de la physique, de l'économie, etc. Les plus simples équations peuvent être résolues avec des calculs élémentaires, tandis que pour des équations modèle plus compliquées on aura besoin de méthodes spécifiques que l'on discutera par la suite.

Une première classification des équations différentielles se fait selon l'ordre. L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la dérivée la plus grande intervenant dans les équations :

1. équations différentielles du premier ordre,
2. équations différentielles d'ordre 2,
3. équations différentielles d'ordre n.

1.2 Équations différentielles du premier ordre

Définition 1 : Les équations différentielles du premier ordre contiennent seulement $\frac{dy}{dx}$, éventuellement y et des fonctions de x (pour $y = y(x)$). On peut les écrire sous la forme :

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \qquad \text{forme implicite} \tag{1.1}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \text{forme explicite} \tag{1.2}$$

Observation : Les équations différentielles ont, en général, plusieurs solutions. On donne la solution d'une équation différentielle par sa forme générale, faisant intervenir une constante arbitraire. On appelle celle-ci la solution générale. Si on choisit une valeur spécifique de la constante on obtient une solution particulière. Dans ce qui suit on va présenter des méthodes d'obtention des solutions générales pour les équations différentielles de premier ordre. Pour une équation donnée, une solution générale obtenue par une telle méthode est "unique" (on peut trouver des formes équivalentes), et pour cela elle sera appelée "la solution générale".

Définition 2 : (Problème aux valeurs initiales) Une équation différentielle avec une condition intiale est appelée problème aux valeurs initiales ou problème de Cauchy.

$$(PC)\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

1.2.1 Équations différentielles à variables séparées

Définition 3 : Ce sont des équations qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1.4}$$

ou

$$g(y)dy = f(x)dx \tag{1.5}$$

Une telle équation est appélé séparable car les variables x et y sont séparées de sorte que x apparaît seulement à droite et y apparaît seulement à gauche.

Pour résoudre (1.4) on intègre les deux membres par rapport à x si f et g sont continues alors :

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx + C$$

ou

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C$$

Observation : On fait apprraître explicitement une constante C m si elle est contenue implicitement dans les intégrales non-définies. On fait ce choix pour ne pas oublier que la constante d'intégration doit e prise en compte à cette étape du calcul.
Exemple : (Courbes en forme de cloche : un problème particulier de conduction de la chaleur)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} & = & -2xy \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

Avec la séparation des variables on a :

$$\frac{dy}{y} = -2xdx \Longleftrightarrow \ln|y| = -x^2 + c \Longleftrightarrow |y| = e^{-x^2+c}$$

On pose $k = \pm e^c$. On trouve alors la solution générale $y(x) = ke^{-x^2}$.

1.2.2 Réduction à une forme séparable

Certaines équations ne sont pas séparables mais elles peuvent être mises sous une forme séparable avec un changement de variable. Ceci est vrai pour des équations du type :

$$\frac{dy}{dx} = g(\frac{y}{x}) \tag{1.6}$$

avec g une fonction donnée de variable $\frac{y}{x}$.
On fait le changement de variable suivant $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. En dérivant, on trouve :

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

L'équation différentielle vérifiée par u est à variables séparées :

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Exemple : $2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x^2 = 0$

$$2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} - (\frac{y}{x})^2 + 1 = 0$$

On pose $u = \frac{y}{x}$. Alors,

$$2xu\frac{du}{dx} + u^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow \frac{2udu}{1+u^2} = -\frac{dx}{x}$$

En intégrant,

$$\ln(1+u^2) = -\ln|x| + c \Longleftrightarrow 1 + u^2 = \frac{k}{x}$$

On revient à y,

$x^2+y^2 = kx \Longleftrightarrow (x-\frac{k}{2})^2+y^2 = \frac{k^2}{4}$ famille de cercles de rayon $k/2$ et de centre $(k/2, 0)$.

1.2.3 Équations différentielles linéaires

Définition 4 : Ce sont des équations qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = r(x) \ \forall x \in I \subset \mathbb{R} \tag{1.7}$$

p et r étant des fonctions données en x, quelconques. Si $r(x) = 0, \forall x \in I$, l'équation est homogène, sinon elle est non-homogène ou avec second membre.

Propriété : (Caractérisation de la structure de l'ensemble des solutions)
L'ensemble des solutions de l'équation homogène est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I)$. L'ensemble des solutions de l'équation non-homogène est obtenu en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation non-homogène.

Résolution :

— **équation homogène** $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = 0$.
On résout par séparation de variables :

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad \Longleftrightarrow \ln|y| = -\int_{x_0}^{x} p(u)du + c$$

d'où

$$y_h(x) = ke^{-\int_{x_0}^{x} p(u)du} \qquad (k = e^c,\ y > 0, \quad k = -e^c, y < 0)$$

Observation : Dans la formule précédente $k = y_h(x_0)$. On peut aussi laisser la solution sous la forme

$$y_h(x) = ke^{-\int p(x)dx} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

La fonction $e^{-\int p(x)dx}$ génère toutes les solutions de l'équation homogène (elle peut être considérée comme la base de l'espace des solutions).

— **équation non-homogène**
La solution générale :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

avec y_h la solution générale de l'équation homogène et y_p une solution particulière de l'équation non-homogène. On peut chercher une solution particulière avec la méthode de variation de la constante : à partir de la forme générale de la solution de l'équation homogène on fait varier la constante :

$$y_p(x) = c(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(u)du}$$

avec $c(x)$ une fonction à déterminer. On impose la condition que $y_p(x)$ est solution de l'équation non-homogène :

$$\frac{dy_p}{dx} + p(x)y_p = \frac{dc}{dx}e^{-\int_{x_0}^{x} p(u)du} = r(x)$$

$$\frac{dc}{dx} e^{-\int_{x_0}^{x} p(u)du} = r(x)$$

d'où :

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} r(s) e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du} ds + c*$$

En conclusion,

$$y_p(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(u)du} \left(\int_{x_0}^{x} r(s) e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du} ds \right) + k e^{-\int_{x_0}^{x} p(u)du}$$

Réduction à la forme linéaire. Équation de Bernoulli

Certaines équations différentielles non-linéaires peuvent être réduites à la forme linéaire. La plus célèbre est l'équation de Bernoulli.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)y^a \quad a \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

Si $a = 0$ ou $a = 1$ l'équation est linéaire, sinon elle est non linéaire.
On pose $u(x) = (y(x))^{1-a}$. Alors,

$$\frac{du}{dx} = (1-a)y^{-a}\frac{dy}{dx} = (1-a)(g - pu)$$

L'équation différentielle pour u est :

$$\frac{du}{dx} + (1-a)pu = (1-a)g$$

qui est une équation différentielle linéaire qu'on sait résoudre.

Existence et unicité des solutions

On considère le problème aux valeurs initiales (problème de Cauchy) (1.3).
On a le résultat suivant :

Théorème de Cauchy-Lipschitz
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D un ensemble ouvert. L'application f est continue,

localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Alors $\forall(x_0, y_0) \in D$, il existe un intervalle contenant x_0 et une application $y : I \to J$, $I \times J \subset D$ solution du problème de Cauchy (1.3). La solution du problème de Cauchy en (x_0, y_0) est unique.

Remarque
La condition $f(x, y)$ est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable est essentielle pour l'unicité de la solution. A titre d'exemple, le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} & = & \sqrt{|y|} \\ y(0) & = & 0 \end{cases}$$

a deux solutions :

$$y_1(x) = 0, \quad y_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & \text{si} & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4}, & \text{si} & x < 0 \end{cases}$$

La condition de Lipschitz n'est pas vérifiée dans le voisinage de $y = 0$. Si on prend deux valeurs $\tilde{y}_1 = 0$ et $\tilde{y}_2 > 0$, alors

$$\frac{|f(x, \tilde{y}_1) - f(x, \tilde{y}_2)|}{|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2|} = \frac{1}{\tilde{y}_2}$$

ce qui peut être aussi large qu'on veut quand $\tilde{y}_2$ approche 0. Donc $\nexists K > 0$ tel que $|f(x, \tilde{y}_1) - f(x, \tilde{y}_2)| < K|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2|$, dans un domaine contenant un voisinage de $y = 0$.

Introduction à l'approche numérique

Dans les quatre chapitres suivants, on va construire petit à petit des méthodes de résolution numérique des EDO. Au lieu d'obtenir les solutions y(x) de façon analytique, on va construire la solution point par point, à partir d'une condition initiale donnée. La solution ne sera pas exacte, mais approchée en tout point. On espère construire des méthodes "convergentes", c'est-à-dire que plus le nombre de points est grand, plus l'erreur commise sera petite.

L'approche numérique est divisée en 4 chapitres qui abordent les 4 questions suivantes :

Chap 2 : comment approcher une fonction donnée en un nombre fini de points par un polynôme ?

Chap 3 : comment approcher l'intégrale d'une fonction donnée en un nombre fini de points ?

Chap 4 : comment exprimer la dérivée d'une fonction en un point donné à partir des valeurs de la fonction en un nombre fini de points voisins ?

Chap 5 : comment utiliser tous les outils précédents pour approcher la résolution des EDO du 1er ordre ?

Chapitre 2

Interpolation polynômiale

On est souvent amené à réaliser une interpolation polynômiale lorsqu'une fonction est soit une fonction donnée analytiquement mais difficile à manipuler, soit une fonction tabulée connue seulement pour certaines valeurs de x (par exemple une fonction mesurée expérimentalement). Il existe quatre types de méthodes permettant de réaliser une interpolation polynômiale :

a) méthodes de collocation : le polynôme interpolé $F(x)$ coïncide avec $f(x)$ aux points x_j où la fonction $f(x_j)$ est connue : $F(x_j) = f(x_j)$

b) polynômes osculatoires : en plus de la coïncidence de $F(x_j)$ et de $f(x_j)$, il y a coïncidence en x_j de leurs m premières dérivées

c) moindres carrés : le polynôme interpolé $G(x)$ ne passe pas par les points $[x_j, f(x_j)]$ mais entre ces points. Le critère est que $S = \sum_{j=1}^{n} [F(x_j) - f(x_j)]^2$ soit minimale.

d) mini-max : le polynôme interpolé $M(x)$ passe entre les points $[x_j, f(x_j)]$. Le critère est que la distance à $M(x)$ du point le plus éloigné, soit la plus petite possible.

2.1 Méthodes d'interpolation par collocation

2.1.1 Forme polynômiale développée en puissances de x

Soit $f(x)$ connue aux points x_j par $f_j = f(x_j)$, $(0 \leq j \leq n)$, on approxime $f(x)$ par le polynôme $P_n(x)$ de degré n, passant par les points (x_j, f_j). Ce polynôme est unique. Il peut s'écrire :

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

avec : $f_j = a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + ... + a_n x_j^n,\ (0 \leq j \leq n)$. Les a_j sont solution d'un système $(n+1, n+1)$ qui utilise la matrice de Vandermonde d'ordre n :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & .... & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & .... & x_1^{n-1} & x_1^n \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ 1 & x_n & x_n^2 & .... & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ .... \\ .... \\ .... \\ .... \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ .... \\ .... \\ .... \\ .... \\ f_n \end{bmatrix}$$

2.1.2 Forme polynômiale de Lagrange

Dans cette section, on présente une autre façon d'obtenir le polynôme interpolé par collocation.

Polynômes de degré n :
On connait $(n+1)$ points distincts $x_0, x_1, ..., x_n$ dans $[a, b]$ et les valeurs $f_j = f(x_j)$, $0 \leq j \leq n$. On cherche à construire le polynôme $P_n(x)$ de degré $\leq n$ tel que $P_n(x_j) = f_j$, $0 \leq j \leq n$.

On définit les polynômes de Lagrange notés $L_i(x)$ de degré $\leq n$:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Ce polynômes sont tels que $L_i(x_j) = \delta_{ij}, 0 \leq i, j \leq n$ (avec $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$). Le polynôme $P_n(x)$ défini alors par :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \right] f_i,$$

$P_n(x)$ est le polynôme interpolé de Lagrange de la fonction f.

Remarques :

— La formule de Lagrange contient explicitement les f_i.

— Pour $n = 1$, $P_1(x)$ passe par (x_0, f_0) et (x_1, f_1), d'où

$$P_1(x) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

C'est la droite qui passe par les deux points (x_0, f_0) et (x_1, f_1).

— Pour $n = 2$, $P_2(x)$ est l'équation de la parabole qui passe par les trois points (x_0, f_0), (x_1, f_1) et (x_2, f_2) et on a :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

— Pour la programmation : On ne développe pas la forme analytique du polynôme $P(x)$. En pratique, on calcule pour chaque valeur de x souhaitée la valeur de $P(x)$ en calculant la somme des produits qui figurent dans l'expression.

Evaluation de l'erreur de la formule de Lagrange (demonstration hors programme 2022-23) :
On a construit pour la fonction $f(x)$ le polynôme de Lagrange $P_n(x)$ qui prend en $x_0, x_1, ..., x_n$ les valeurs données $f_0 = f(x_0), ..., f_n = f(x_n)$. Quelle est la valeur du reste $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ pour les autres valeurs de x ?
Supposons que, dans $[a, b]$, qui contient les x_j, $f(x)$ possède des dérivées f', f'', ... , $f^{(n+1)}(x)$.
Posons $u(x) = f(x) - P_n(x) - k\pi_{n+1}(x)$, avec $\pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1).....(x-x_n)$.
Il est évident que $u(x)$ possède $(n+1)$ racines $x_0, x_1, ..., x_n$. Soit $\bar{x}$ arbitrairement choisi dans $[a, b]$, différent des x_i, et fixons k pour que $\bar{x}$ soit également racine de $u(x)$:
$u(\bar{x}) = 0 = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) - k\,\pi_{n+1}(\bar{x}) \Longrightarrow k = \frac{f(\bar{x})-P_n(\bar{x})}{\pi_{n+1}(\bar{x})}$.
Ainsi dans $[a, b]$, $u(x)$ s'annule en n points intérieurs + les 2 extrémités. Le théorème de Rolle entraine que $u'(x)$ possède au moins $(n+1)$ racines sur le segment $[a, b]$. De même $u''(x)$ est nulle au moins n fois sur $[a, b]$, ... , la dérivée $u^{(n+1)}(x)$ possède au moins un zéro :
$\exists\xi \in [a, b]$ tel que $u^{(n+1)}(\xi) = 0$.
Or $P_n^{(n+1)}(x) = 0$ et $\pi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)! \Longrightarrow u^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - k\,(n+1)!$.
Donc $\exists\xi \in [a, b]$ tel que $f^{(n+1)}(\xi) - k\,(n+1)! = 0$
$\Longrightarrow k = [f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})]/\pi_{n+1}(\bar{x}) = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)! \Longrightarrow f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(\bar{x})$.
Ce raisonnement pouvant être reproduit pour tout $\bar{x}$, on a :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)$$

2.2 Polynômes osculatoires (hors programme 2022-23)

2.2.1 Interpolation d'Hermite

On souhaite construire un polynôme passant par les $n+1$ points $(x_j, f(x_j))$ et de dérivée coïncidant aux $n+1$ points x_j avec les dérivées $f'(x_j)$ imposées. On a donc $2n+2$ équations, et le polynôme recherché est de degré $2n+1$.
On construit le polynôme d'Hermite en utilisant les polynômes de Lagrange et leurs propriétés. On obtient :

$$H(x) = \sum_{j=0}^{n} U_j(x)\, f_j + \sum_{j=0}^{n} V_j(x)\, f'_j$$

où f_j et f'_j sont les valeurs de la fonction donnée et de sa dérivée en x_j. Les fonctions $U_j(x)$ et $V_j(x)$ sont définis par :

$$U_j(x) = [1 - 2L'_j(x_j)(x - x_j)][L_j(x)]^2 \qquad ; \qquad V_j(x) = (x - x_j)[L_j(x)]^2$$

2.2.2 Les splines cubiques

Il s'agit d'une méthode d'interpolation qui respecte la collocation, et permet d'obtenir une courbe "lissée". Supposons connus les $f_j = f(x_j)$ $(0 \leq j \leq n)$. On suppose qu'on ne connait pas f'_j et f''_j.
L'interpolation $g(x)$ est un polynôme d'ordre 3 par morceaux définis entre x_j et x_{j+1}, tel que : $g(x) = a_0^j + a_1^j\, x + a_2^j\, x^2 + a_3^j\, x^3$. Pour déterminer $a_0^j, a_1^j, a_2^j, a_3^j$, on impose les 4 conditions suivantes :
(i) collocation $g(x_j) = f(x_j)$
(ii) $g(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$
(iii) continuité de dg/dx en x_j
(iv) continuité de d^2g/dx^2 en x_j.

2.3 Méthode des moindres carrés

On se donne une fonction f dont on connait la valeur en $(n+1)$ points distincts $(0 \leq j \leq n)$.
On cherche une approximation de f par un polynôme $G_m(x)$ de degré m qui

minimise $S = \sum_{j=0}^{n} [G_m(x_j) - f(x_j)]^2$.
Le polynôme G_m est défini par $G_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i\, x^i \quad (a_i \in \mathbb{R},\, 0 \leq m \leq n)$.
On pose $S = \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{i=0}^{m} a_i\, x_j^i - f(x_j)\right]^2$.
Le minimum est atteint pour les $a_j \quad (0 \leq j \leq n)$ qui verifient $\partial S/\partial a_l = 0$, $(0 \leq l \leq m)$. Or on a :

$$\frac{\partial S}{\partial a_l} = 2 \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{i=0}^{m} a_i\, x_j^i - f(x_j)\right] x_j^l = 0, \quad (0 \leq l \leq m)$$

$$\text{soit } \sum_{i=0}^{m} a_i \left(\sum_{j=0}^{n} x_j^{i+l}\right) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) x_j^l$$

On en déduit que pour trouver un polynôme de degré m qui approche au sens des moindres carrés une fonction connue en $(n+1)$ points distincts avec $m < n$ il faut résoudre un système linéaire de degré $(m+1)$ qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_j & \sum x_j^2 & \dots & \sum x_j^{m-1} & \sum x_j^m \\ \sum x_j & \sum x_j^2 & \sum x_j^3 & \dots & \sum x_j^m & \sum x_j^{m+1} \\ \sum x_j^2 & \sum x_j^3 & \sum x_j^4 & \dots & \sum x_j^{m+1} & \sum x_j^{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_j^m & \sum x_j^{m+1} & \sum x_j^{m+2} & \dots & \sum x_j^{2m-1} & \sum x_j^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{n} f_j \\ \sum_{j=0}^{n} x_j\, f_j \\ \sum_{j=0}^{n} x_j^2\, f_j \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{j=0}^{n} x_j^m\, f_j \end{bmatrix}$$

La matrice A est inversible. Les résultats pour $m \geq 10$ ne sont pas significatifs. En général, on prend $m = 1$ (droite), ou $m = 2$ (parabole).

2.4 Polynômes mini-max

Soit $h_j = h(x_j) = M(x_j) - f(x_j)$ et soit H la plus grande de ces erreurs en valeur absolue. Le polynôme mini-max est le polynôme pour lequel H est la plus petite possible.
La méthode de "substitution" est un algorithme pour trouver $M(x)$ en s'appuyant sur la propriété d'égale erreur. On choisit un sous-ensemble initial de points (x_j, f_j). On trouve un polynôme d'égale erreur correspondant à ces données. Si l'erreur maximum portée par ce polynôme est l'erreur H, ce polynôme est le polynôme $M(x)$ cherché. Si ce n'est pas le cas, on remplace un point de l'ensemble par un point extérieur et on recommence le processus. On peut démontrer la convergence vers $M(x)$.

2.4.1 Droite mini-Max

On cherche $M(x) = a + b\,x$ et on note $h_i = M(x_i) - f_i$. Pour déterminer une droite d'égale erreur, il faut trouver a, b, h tels que $M(x_i) - f(x_i) = \pm h$ (avec alternance des signes pour les x croissants) :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & -1 \\ 1 & x_2 & 1 \\ 1 & x_3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

On calcule $h_j = M(x_j) - f_j$ dans les autres points ($0 \leq j \neq i \leq n$). Si tous les $|h_j| \leq |h|$, alors ce polynôme est bien le polynôme mini-max de $f(x_j)$. Sinon, on choisit un autre point pour remplacer un des 3 points i, et on recommence....

2.4.2 Parabole mini-Max

Soit $M(x) = a + bx + cx^2$ et soit $h_i = M(x_i) - f(x_i)$ les erreurs en 4 points donnés. On démontre qu'il existe une parabole unique d'égale erreur tel que $h_1 = h$, $h_2 = -h$, $h_3 = h$, $h_4 = -h$ (alternance des signes pour des abscisses croissantes). A partir de la relation $M(x_i) - f(x_i) = \pm h$, on forme le système suivant qui permet de déterminer les coefficients a, b, c, et h :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & -1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & 1 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & -1 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

On calcule $h_j = M(x_j) - f_j$ dans les autres points ($0 \leq j \neq i \leq n$). Si tous les $|h_j| \leq |h|$, alors ce polynôme est bien le polynôme mini-max de $f(x_j)$. Sinon, on choisit un autre point pour remplacer un des 4 points i, et on recommence....

2.4.3 Polynômes mini-Max de degré $m > 2$

De manière similaire aux cas de la droite et de la parabole, on prend $(m + 2)$ points et on détermine $M(x)$, on calcule l'erreur dans les autres points si $H > |h|$. On recommence jusqu'à trouver le bon polynôme $M(x)$ de degré m.

Chapitre 3

Intégration numérique

Définition :
Soit l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ avec $b > a$, on cherche une valeur approchée de cette intégrale au moyen de sommes finies. On appelle formule de quadrature à $(n+1)$ points une formule du type :

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i^n \, f(x_i)$$

où les A_i^n ne dépendent pas de la fonction f.

3.1 Formules de quadrature du type interpolation

Soient $(n+1)$ points x_i $(0 \leq i \leq n)$ où la fonction f est connue. Le polynôme $P_n(x)$ interpolé de Lagrange de f est donné par

$$P_n(x) \; = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) \, f(x_i) \;\text{ avec }\; L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

La formule de quadrature associée est

$$\int_a^b f(x) \, dx \cong \int_a^b P_n(x) \, dx = \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b L_i(x) \, dx \right) f(x_i) \;\text{ et donc }\; A_i^n = \int_a^b L_i(x) \, dx.$$

Propriétés :

— l'intégration des polynômes est très simple
— en général, $f(x_i)$ est tabulée en certains points donnés, et on n'a pas le choix des x_i
— si $f(x)$ est une fonction compliquée mais connue analytiquement, on peut :
- soit prendre des subdivisions régulières de $[a, b]$ (formules de Newton-Cotes)
- soit choisir les x_i "au mieux", au sens de Gauss

Erreur de quadrature :
On définit l'erreur $R(f) = I(f) - I_n(f)$.
Une formule de quadrature est dite exacte si $R(f) = 0$.

Théorème :
Une formule de quadrature à $n + 1$ points de type interpolation est exacte pour $f(x) = x^k$ $(0 \leq k \leq n)$ par construction).

Définition :
On dit qu'une formule de quadrature a un degré de précision m si la formule est exacte pour $f(x) = x^k$ $(0 \leq k \leq m)$, mais non exacte pour $f(x) = x^{m+1}$.

3.2 Formules de Newton-Cotes

On prend des subdivisions régulières de $[a, b]$ en posant $h = (b - a)/n$
$\Longrightarrow x_j = a + jh$ avec $(x_0 = a, x_n = b)$.

3.2.1 Formule des trapèzes $(n = 1)$

Le polynôme de Lagrange s'écrit :

$$P_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

En intégrant $P_1(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$, on obtient la formule suivante, appelée "formule des trapèzes" :

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong (b-a)\left[\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$

Calcul d'erreur :
$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$.
On pose $b = a + h$ et on a alors $R(f) = \int_a^{a+h} f(x)dx - \frac{h}{2}[f(a) + f(a+h)]$. Si $f(x)$ est suffisamment dérivable, on fait des développements limités au voisinage de $h = 0$.
On a : $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + O(h^3)$.
Soit $G(x)$ une primitive de $f(x)$, on a $\int_a^{a+h} f(x)dx = G(a+h) - G(a)$, et
$G(a+h) = G(a) + hf(a) + \frac{h^2}{2}f'(a) + \frac{h^3}{6}f''(a) + O(h^4)$,

On trouve $R(f) = (\frac{1}{6} - \frac{1}{4})h^3 f''(a) + O(h^4) = -\frac{h^3}{12}f''(a) + O(h^4)$. L'erreur est donc en $O(h^3)$.

On déduit de l'expression de $R(f)$ que la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré 0 et 1, et non exacte pour les polynômes de degré ≥ 2. Son degré de précision est donc égal à 1.

3.2.2 Formule de Simpson $(n = 2)$

Pour $n = 2$, $P_2(x)$ est l'équation de la parabole qui passe par les trois points $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ et $(b, f(b))$. Par intégration sur $[a, b]$, on obtient la formule suivante, appelée "formule de Simpson" : :

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong (b-a)\left[\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{6}f(b)\right]$$

Calcul d'erreur :
$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]$.
On pose $h = (b-a)/2$. Vue la symétrie de $R(f)$ par rapport à $\alpha = (a+b)/2$, on effectue le développement limité au voisinage du point α, soit :

$$R(f) = \int_{\alpha-h}^{\alpha+h} f(x)\,dx - \frac{h}{3}[f(\alpha - h) + 4f(\alpha) + f(\alpha + h)]$$

En faisant des développements de Taylor, on montre qu'il existe $\xi \in]\alpha - h, \alpha + h[$ tel que $R(f) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$

$$\Longrightarrow |R(f)| \leq \frac{h^5}{90} max|f^{(4)}(x)|, \quad x \in [a, b]$$

L'erreur est donc en $O(h^5)$. On déduit de l'expression de $R(f)$ que la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré ≤ 3, et non exacte pour les polynômes de degré ≥ 4. Son degré de précision est donc égal à 3.

3.2.3 Généralisation

On prend des subdivisions régulières de $[a, b]$ en posant $h = (b-a)/n$
$\Longrightarrow x_i = a + ih$ avec $(x_0 = a, x_n = b)$. En intégrant le polynôme de Lagrange défini par ces $n+1$ points, on obtient :

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b L_i(x)\,dx \right) f(x_i) \;=\; (b-a) \sum_{i=0}^{n} B_i^n\, f(a+ih)$$

avec $B_i^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x)\,dx$

Calcul des B_i^n :
On pose $y = \frac{x-a}{h} \Longrightarrow \prod_{j=0,j\neq i}^n (x - x_j) = h^n \prod_{j=0,j\neq i}^n (y-j)$
et $\prod_{j=0,j\neq i}^n (x_i - x_j) = h^n \prod_{j=0,j\neq i}^n (i-j)$
$= h^n \times i \times (i-1) \times ... \times 2 \times 1 \times (-1) \times (-2) \times ... \times (-n-1+i) \times (-n+i) = h^n\,(-1)^{n-i}\, i!\,(n-i)!$

$$\Longrightarrow B_i^n = \frac{1}{nh} \int_0^n \frac{h^n \prod_{j=0,j\neq i}^n (y-j)}{h^n \prod_{j=0,j\neq i}^n (i-j)}\, hdy = \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!\,n} \int_0^n \prod_{j=0,j\neq i}^{n} (y-j)\,dy$$

<u>Remarque</u> : On a $B_i^n = B_{n-i}^n$. Il suffit de calculer B_i^n pour $i \leq n/2$
$n = 1 \Longrightarrow B_0^1 = -1 \int_0^1 (y-1)\,dy = (-1)(1/2-1) = 1/2, \quad B_1^1 = B_0^1$
$n = 2 \Longrightarrow B_0^2 = \frac{(-1)^2}{0!2!2} \int_0^2 (y-1)(y-2)\,dy = 1/6, \quad B_2^2 = B_0^2;$
$B_1^2 = \frac{(-1)^1}{1!1!2} \int_0^2 y(y-2)\,dy = 4/6$

Sur le tableau suivant, on donne les B_i^n pour $1 \leq n \leq 6$:

n	1	2	3	4	5	6
B_0^n	1/2	1/6	1/8	7/90	19/288	41/840
B_1^n		4/6	3/8	32/90	75/288	216/840
B_2^n				12/90	50/288	27/840
B_3^n						272/840

Théorème : Si le nombre de points d'intégration est $(n+1)$ l'erreur de quadrature des formules de Newton-Cotes est en h^{n+2} pour n impair ($R(f) = O(h^{n+2})$), et h^{n+3} pour n pair ($R(f) = O(h^{n+3})$).

Le degré de précision dans le cas des formules de Newton-Côtes à $(n+1)$ points est n pour n impair, et $n+1$ pour n pair.

3.3 Les méthodes composites

Définition : On applique à des sous-intervalles de (a,b) une formule de Newton-Cotes de degré q petit, fixé. On pose $h = (b-a)/n$.

3.3.1 Méthode composite des trapèzes ($q = 1$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)\,dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} h \left[\frac{1}{2} f(a+ih) + \frac{1}{2} f(a+(i+1)h)\right]$$

donc $$\int_a^b f(x)\,dx \cong h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots\ldots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2} f(b)\right]$$

3.3.2 Méthode composite de Simpson ($q = 2$)

On choisit n pair et on considère les intervalles de longueur $2h$.

$$\int_a^{a+2h} f(x)\,dx \cong 2h \left[\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f(a+h) + \frac{1}{6} f(a+2h)\right]$$

$$\int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx \cong 2h \left[\frac{1}{6} f(a+2h) + \frac{4}{6} f(a+3h) + \frac{1}{6} f(a+4h)\right]$$

$$\int_{a+(n-2)h}^{b} f(x)\,dx \cong 2h \left[\frac{1}{6} f(a+(n-2)h) + \frac{4}{6} f(a+(n-1)h) + \frac{1}{6} f(b)\right]$$

Soit en additionnant :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \;\; &\cong \tfrac{h}{3} \{ f(a) + f(b) + 2[f(a+2h) + f(a+4h) + \ldots\ldots + f(a+(n-2)h)] \\ &\qquad\qquad +4\,[f(a+h) + f(a+3h) + \ldots\ldots + f(a+(n-1)h)] \}\end{aligned}$$

3.4 Formules de quadrature du type Gauss

Pour obtenir des formules de quadrature à $(n+1)$ points possédant un degré de précision supérieur à celui obtenu par les formules de Newton-Côtes, on peut, au lieu de prendre des abscisses x_j régulièrement espacées, les choisir "au mieux".

3.4.1 Gauss-Legendre

Comme les inconnues sont à présent les $n+1$ coefficients A_i^n et les points $n+1$ points x_i (soient $2n+2$ inconnues), on peut espérer augmenter le degré de précision à $2n+1$. On cherche les A_i^n et les x_i tels que la formule de quadrature $I_\omega(f) = \sum_{i=0}^n A_i^n\, f(x_i)$ soit exacte pour tout polynôme de degré $\leq 2n+1$.

a) Formules par identification :

a) formule à 1 point $(n=0)$: On cherche $A_0^0 \in \mathbb{R}$, et $x_0 \in [a,b]$ tel que la quadrature soit de degré de précision le plus élevé possible.

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \left[A_0^0 f(x_0)\right]$$

On écrit que la quadrature est exacte pour $f(x)=1$ et $f(x)=x$. $f(x) = 1 \to \int_a^b dx = b-a = A_0^0$
$f(x) = x \to \int_a^b xdx = \frac{(b^2-a^2)}{2} = A_0^0 x_0$
on trouve : $A_0^0 = b-a$ et $x_0 = \frac{(a+b)}{2}$.
On a ainsi la formule de Gauss à 1 point, de degré de précision 1, est :

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f[\frac{(a+b)}{2}]$$

b) formule à 2 points $(n=1)$:
On effectue tout d'abord le calcul sur l'intervalle $[0,1]$, puis on effectue un changement de variable pour se ramener à l'intervalle $[a,b]$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx \cong \left[A_0^1 f(x_0) + A_1^1 f(x_1)\right]$$

$f(x) = 1 \to \int_0^1 dx = 1 = A_0^1 + A_1^1$
$f(x) = x \to \int_0^1 xdx = 1/2 = A_0^1 x_0 + A_1^1 x_1$
Soit le polynôme de degré 2 : $\pi(x) = (x-x_0)(x-x_1) = 0 = x^2 - sx + p$ et soit le polynôme de degré 3 : $\pi_1(x) = x\,\pi(x)$. En écrivant que la quadrature

est exacte pour $f(x) = \pi(x)$ et $f(x) = \pi_1(x)$, on a $\int_0^1 \pi(x)\,dx = 0$ et $\int_0^1 \pi_1(x)\,dx = 0$, et on trouve $s = 1, p = 1/6$.
En résolvant $x^2 - sx + p = 0$, on a $x_0 = (1 - 1/\sqrt{3})/2, x_1 = (1 + 1/\sqrt{3})/2$.
A partir des relations $A_0^1 + A_1^1 = 1$ et $A_0^1\,(1-1/\sqrt{3})/2 + A_1^1\,(1+1/\sqrt{3})/2 = 1/2$, on trouve alors $A_0^1 = A_1^1 = 1/2$.
On obtient donc : $\int_0^1 f(x)\,dx = [f((1-1/\sqrt{3})/2) + f((1+1/\sqrt{3})/2)]/2$.
La formule de Gauss à 2 points, exacte pour les polynômes de degré 3 est :

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong ((b-a)/2)[f[a+(b-a)(1-1/\sqrt{3})/2]+f[a+(b-a)(1+1/\sqrt{3})/2]]$$

.

b) Utilisation des polynômes de Legendre
Les polynômes orthogonaux de Legendre permettent de construire de façon systématique les quadratures de Gauss-Legendre.

Ces polynômes constituent une famille de polynômes dits orthogonaux, définis sur l'intervalle $[-1, 1]$. Les polynômes $X_0, X_1, ..., X_n$ constituent une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n, définis sur $[-1, 1]$.

Orthogonalité :
Les relations d'orthogonalité sont

$$\int_{-1}^1 X_n(x)\,X_p(x)\,dx = 0 \quad \text{si} \quad n \neq p \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 X_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

Récurrence :
Les polynômes orthogonaux de Legendre vérifient une relation de récurrence à trois termes $\quad (n+1)\,X_{n+1} = (2n+1)xX_n - nX_{n-1}$
On les calcule à partir de $X_0 = 1$ et $X_1 = x$.
On a donc $X_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $X_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, ...

Equation :
On montre que ces polynômes sont solutions de l'équation différentielle :

$$(x^2-1)\;y'' + 2\,x\;y' - n\,(n+1)\,y = 0$$

Quadrature sur [-1,1] :

Soit à calculer l'intégrale $I_1(f) = \int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi$, on introduit les $(n+1)$ racines ξ_i du polynôme de Legendre $X_{n+1}(x)$ (qui est un polynôme de degré $n+1$). La quadrature est alors une quadrature de type interpolation construite à partir des ξ_i :

$$I_1(f) \cong \sum_{i=0}^{n} \omega_i^n \, f(\xi_i)$$

Les facteurs de pondération ω_i^n sont en général tabulés.
On peut retrouver leur valeur par :

$$\omega_i^n = \int_{-1}^{1} \left[\frac{X_{n+1}(x)}{(x-\xi_i)\, X'_{n+1}(\xi_i)} \right]^2 dx$$

soit,

$$\omega_i = \frac{2}{[(1-x_i^2)(X'_n(x_i))^2]}$$

Le tableau suivant donne les valeurs des ξ_i et des ω_i^n $(2 \leq n+1 \leq 6)$:

n+1	ξ_i	w_i^n
2	$\pm$ 0.577350	1.0000000
3	0.000000	0.8888889
	$\pm$ 0.774597	0.5555556
4	$\pm$ 0.333333	0.6521450
	$\pm$ 0.861136	0.3478548

n+1	ξ_i	w_i^n
5	0.000000	0.5688889
	$\pm$ 0.538469	0.4786290
	$\pm$ 0.906280	0.2369270
6	$\pm$ 0.238619	0.4679140
	$\pm$ 0.661209	0.3607616
	$\pm$ 0.932469	0.1713245

Théorème : Les formules de Gauss à $n+1$ points sont exactes pour les polynômes de degré $2n+1$.

Preuve (hors programme 2020-21) : Comme il s'agit d'une quadrature de type interpolation à $n+1$ points, la quadrature est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Soit alors un polynôme $P(x)$ défini sur $[-1,1]$ de degré $2n+1$, et $X_{n+1}(x) = (x-\xi_0)(x-\xi_1)....(x-\xi_n)$ le polynôme de Legendre de degré n, de racines ξ_i.
0n effectue la division polynômiale :
$P(x) = X_{n+1}(x)Q(x) + R(x)$, où le degré de $Q(x)$ est inférieur ou égal à n (le degré de $R(x)$ l'est également). On a alors :
$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_{-1}^{1} X_{n+1}(x)Q(x)dx + \int_{-1}^{1} R(x)dx$

La propriété d'orthogonalité des polynômes de Legendre entraîne $\int_{-1}^{1} X_{n+1}(x)Q(x)dx = 0$.
La quadrature étant exacte pour $R(x)$, on a
$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_{-1}^{1} R(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \, R(\xi_i)$
Or on a $R(\xi_i) = P(\xi_i) - X_{n+1}(\xi_i)Q(\xi_i) = P(\xi_i)$, et donc $\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_j \, P(\xi_i)$.
La quadrature est donc exacte pour $P(x)$.

Généralisation à la quadrature sur [a,b] :

Soit à calculer $I(f) = \int_a^b f(x)dx$.

On utilise un changement de variables pour se ramener sur l'intervalle $[-1, 1]$, en posant :

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi$$

, soit

$$\xi = -\frac{b+a}{b-a} + \frac{2}{b-a}x.$$

On a alors

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\xi)d\xi \cong \frac{(b-a)}{2}\sum_{j=0}^{n} \omega_j \, f(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\xi_j),$$

où les ξ_j sont les $n+1$ racines du polynôme de Legendre $X_{n+1}(x)$, et les facteurs ω_j sont ceux déterminés par la quadrature de Gauss.

Remarque (hors programme 2020-21) Supposons que l'on souhaite calculer l'intégrale suivante où $\omega(x)$ est une fonction poids, positive sur $]a, b[$.

$$I_\omega(f) = \int_a^b \omega(x)f(x)dx$$

Si $\omega = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on utilise les polynômes de Chebyshev T_n, qui sont une autre base de polynômes orthogonaux, également définis sur $[-1, 1]$.

3.4.2 Gauss-Radau

On travaille de nouveau sur l'intervalle $[-1, 1]$. Supposons que dans la quadrature, l'extrémité -1 est assignée. Pour une quadrature à deux points, on cherche

x_1 tel que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[A_0^1 f(-1) + A_1^1 f(x_1)\right] + R(f)$$

soit exacte ($R(f) = 0$) sur l'espace vectoriel des polynômes du degré le plus élevé possible.

On a 3 inconnues : x_1, $A_0^1\, A_1^1$. En écrivant les trois premières relations, on a :

$f(x) = 1 \to R(f) = 2 - A_0^1 - A_1^1 = 0$
$f(x) = x \to R(f) = 0 + A_0^1 - x_1 A_1^1 = 0$
$f(x) = x^2 \to R(f) = \frac{2}{3} - A_0^1 - x_1^2 A_1^1 = 0$

$\Longrightarrow x_1 = 1/3,\ A_0^1 = 1/2,\ A_1^1 = 3/2$

d'où $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}[f(-1) + 3f(1/3)] + R(f)$. Pour $f(x) = x^3$, $R(f) \neq 0$.

3.4.3 Gauss-Lobatto

On travaille de nouveau sur l'intervalle $[-1, 1]$. Supposons que dans la quadrature, les deux extrémités -1 et 1 sont assignées. Par identification, on obtient les formules suivantes, exactes respectivement pour les polynômes de degré 3 et 5 :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + R(f)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{6}f(-1) + \frac{5}{6}f(-1/\sqrt{5}) + \frac{5}{6}f(1/\sqrt{5}) + \frac{1}{6}f(1) + R(f)$$

Chapitre 4

Dérivation numérique

Connaissant une fonction f en un ensemble fini de points x_j $(0 \leq j \leq n)$, on construit un schéma permettant l'approximation de $f'(x)$ et de $f''(x)$.

4.1 Utilisation des polynômes de Lagrange

La fonction $f(x)$ est approchée par le polynôme de Lagrange $F(x)$ défini par $F(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(x)$ avec $L_i(x) = \prod_{0 \leq j \leq n (j \neq i)} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$.
On a $f(x) = F(x) + E \Longrightarrow f'(x) = F'(x) + E'(x)$.

4.1.1 Dérivée centrée à 3 points

Dans ce cas $n = 2 \Longrightarrow f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ connues.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \quad L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$F'(x) = f(x_0)\,\frac{2\,x-(x_1+x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\,\frac{2\,x-(x_0+x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\,\frac{2\,x-(x_0+x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Si on prend $h > 0$, $x_0 = x_1 - h$, $x_2 = x_1 + h$, on a :

$$F'(x) = f(x_0)\,\frac{2\,(x-x_1) - h}{2\,h^2} - f(x_1)\,\frac{2\,(x-x_1)}{h^2} + f(x_2)\,\frac{2\,(x-x_1)+h}{2\,h^2}$$

$$\text{Soit} \quad F'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2\,h} \quad \text{ou} \quad f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h}$$

4.1.2 Dérivée seconde à 3 points

On dérive l'expression précédente de la dérivée du polynôme de Lagrange, pour 3 points équidistants :

$$F''(x) = f(x_0)\,\frac{2}{2h^2} - f(x_1)\,\frac{2}{h^2} + f(x_2)\,\frac{2}{2\,h^2}$$

$$\text{Soit} \quad F''(x_1) = \frac{f(x_0) - 2\,f(x_1) + f(x_2)}{h^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) \cong \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

4.2 Utilisation des développements de Taylor

Si les points x_j où la fonction $f(x)$ est connue sont équidistants, on introduit le pas constant $h = x_j - x_{j-1}$.
Rappel des diverses formes utilisées de développements de Taylor de $f(x+h)$ au point x :
$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + ... + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + ...,$
ou $f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + ... + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$
avec $\xi \in]x, x+h[$,
ou (forme la plus utilisée dans ce cours) :
$\mathbf{f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + ... + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \mathcal{O}(h^n)},$
On dit que le développement est effectué jusqu'à l'ordre n en h.
ou $f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + ... + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \mathrm{o}(h^{n-1})$.
D'une façon générale, on souhaite augmenter l'ordre d'approximation des schémas utilisés le plus possible.

4.2.1 Différences progressives (ou à droite ou avales)

Il s'agit d'exprimer les dérivées en x en utilisant les données de f en des points situés à droite de x.

a) Dérivées à l'ordre 1 en h

Calcul de f'_j
On écrit le développement de Taylor de $f(x+h)$ en x, et on en déduit une ap-

proximation de $f'(x)$:

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{h}\mathcal{O}(h^2) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

$$\text{soit} \quad f'_j \simeq \frac{f_{j+1} - f_j}{h}$$

La formule est équivalente à prendre la dérivée au point x du polynôme de Lagrange passant par les 2 points x et $x+h$. (C'est une droite, et donc la dérivée est la pente de cette droite !).

Calcul de f''_j
Pour obtenir une dérivée d'ordre supérieur, on doit prendre en considération plus de points. On combine les développements de Taylor de $f(x+h)$ et de $f(x+2h)$ en x, et on en déduit une approximation de $f''(x)$:

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$(2) \qquad f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2} f''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

En formant $(2) - 2 \times (1)$, on élimine le terme en $f'(x)$ et on obtient :

$$f''(x) = \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

$$\text{soit} \quad f''_j \simeq \frac{f_j - 2\,f_{j+1} + f_{j+2}}{h^2}$$

Ici aussi, la formule est équivalente à prendre la dérivée seconde au point x du polynôme de Lagrange passant par les 3 points x, $x+h$ et $x+2h$. (C'est une parabole !).

b) Dérivées à l'ordre 2 en h
Pour augmenter l'ordre, il faut également prendre en compte un nombre supérieur de points.

Calcul de f'_j

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$(2) \qquad f(x+2h) = f(x) + 2h f'(x) + \frac{(2h)^2}{2} f''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

On forme $(2) - 4 \times (1)$ pour éliminer le terme en $f''(x)$, et on obtient :

$$f'(x) = \frac{-3\, f(x) + 4\, f(x+h) - f(x+2\,h)}{2\,h} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\text{soit} \quad f'_j \simeq \frac{1}{2\,h}(-3\, f_j + 4\, f_{j+1} - f_{j+2})$$

Calcul de f''_j. En suivant le même principe, on trouve :

$$f''_j = \frac{1}{h^2}(2\, f_j - 5\, f_{j+1} + 4\, f_{j+2} - f_{j+3}) + \mathcal{O}(h^2)$$

4.2.2 Différences régressives (ou à gauche ou amont)

On peut refaire les développements de Taylor en utilisant les points à gauche de x : $x-h$, $x-2h$, ...ou bien on peut utiliser les formules décentrées progressives avec h négatif. On obtient, à l'ordre 1 en h :

$$f'_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h} + \mathcal{O}(h)$$

et

$$f''_j = \frac{f_j - 2\, f_{j-1} + f_{j-2}}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

4.2.3 Différences centrées

Cette fois, on utilise les points entourant x : $x-h$, $x+h$, ... On montre que les ordres en h obtenus à l'aide des formules centrées sont pairs.

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + +\mathcal{O}(h^3)$$

$$(2) \qquad f(x-h) = f(x) - h\, f'(x) + \frac{h^2}{2}\, f''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

On forme $(1)-(2)$, ce qui permet d'éliminer le terme en h^2, et on obtient :

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2\,h}+\mathcal{O}(h^2)$$

soit,

$$f'_j=\frac{f_{j+1}-f_{j-1}}{2\,h}+\mathcal{O}(h^2)$$

Pour obtenir la dérivée seconde, on écrit les développements jusqu'à l'ordre 4 :

$$(1)\qquad f(x+h)=f(x)+h\,f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\mathcal{O}(h^4)$$

$$(2)\qquad f(x-h)=f(x)-h\,f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x)+\mathcal{O}(h^4)$$

On forme $(1)+(2)$, et on obtient :

$$f''(x)=\frac{f(x-h)-2\,f(x)+f(x+h)}{h^2}+\mathcal{O}(h^2)\Longrightarrow f''_j=\frac{f_{j-1}-2\,f_j+f_{j+1}}{h^2}+\mathcal{O}(h^2)$$

4.3 Utilisation des différences divisées (hors programme 2022-23)

On définit les opérateurs Δ_+ et Δ_- par :

$\Delta_+\,f(x)=f(x+h)-f(x)$ pour les différences progressives,

et $\Delta_-\,f(x)=f(x)-f(x-h)$ pour les différences régressives.

On introduit aussi les opérateurs A et R tels que $A\,f(x)=f(x+h)$ et $R\,f(x)=f(x-h)$, et l'opérateur Identité I, de telle sorte que l'on a :

$\Delta_+\,f(x)=f(x+h)-f(x)=Af(x)-f(x)=(A-I)f(x)$, et

$\Delta_-\,f(x)=f(x)-f(x-h)=f(x)-Rf(x)=(I-R)f(x)$.

Ceci permettra le calcul des dérivées successives de $f(x)$ plus simplement et de les écrire sous forme de tableaux jusqu'à la dérivée quatrième.

4.3.1 Différences progressives

Dérivées d'ordre 1

On a démontré que

$$f'_j=\frac{\Delta_+\,f_j}{h}+\mathcal{O}(h)\simeq\frac{(A-I)f_j}{h}$$

et on a alors

$$f''_j = \frac{\Delta_+ f'_j}{h} + \mathcal{O}(h) \simeq \frac{\Delta_+^2 f_j}{h^2} = \frac{(A-I)^2 f_j}{h^2} = \frac{(A^2-2A+I) f_j}{h^2} = \frac{A^2 f_j - 2A f_j + f_j}{h^2}$$

Or $A f_j = f_{j+1}$ et $A^2 f_j = f_{j+2}$. Donc on retrouve :

$$f''_j = \frac{f_{j+2} - 2 f_{j+1} + f_j}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

On peut alors généraliser le résultat pour le calcul de la dérivée nième, en utilisant le développement du binôme de Newton, avec $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$:

$$f_j^{(n)} = \frac{\Delta_+^n f_j}{h^n} + \mathcal{O}(h) \simeq \frac{(A-I)^n f_j}{h^2} = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, A^k I^{n-k} (-1)^{n-k} \, f_j = \frac{(-1)^n}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, C_n^k \, f_{j+k}$$

car $A^k I^{n-k} f_j = A^k f_j = f_{j+k}$. On peut alors construire le tableau suivant :

	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	f_{j+3}	f_{j+4}
$h\, f'_j$	-1	1			
$h^2\, f''_j$	1	-2	1		
$h^3\, f'''_j$	-1	3	-3	1	
$h^4\, f_j^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

4.3.2 Différences régressives

Dérivées d'ordre 1 De façon analogue, on a

$$\frac{\Delta_-^n f_j}{h^n} + \mathcal{O}(h) \simeq \frac{(I-R)^n f_j}{h^2} = \frac{(-R+I)^n f_j}{h^2} = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, (-1)^k R^k I^{n-k} f_j = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, C_n^k \, f_{j-k}$$

On en déduit le tableau suivant :

	f_j	f_{j-1}	f_{j-2}	f_{j-3}	f_{j-4}
$h\, f'_j$	1	-1			
$h^2\, f''_j$	1	-2	1		
$h^3\, f'''_j$	1	-3	3	-1	
$h^4\, f_j^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

Chapitre 5

Equations différentielles ordinaires (EDO)

Introduction - Définitions
Dans ce chapitre, on cherche à résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire vérifiant une condition initiale (problème de Cauchy). Avant d'effectuer une résolution numérique, il faut s'assurer que le problème admet une unique solution.

Pb de Cauchy, EDO du 1er ordre :
On se donne un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, une fonction $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On souhaite déterminer la fonction $y : [a,b] \to \mathbb{R}$, vérifiant le problème de Cauchy ci-dessous :

$$\begin{cases} y'(x) & = f(x, y(x)) \qquad \forall\, x \in [a,b] \\ y(a) & = \alpha \end{cases}$$

On rappelle le théorème : Si f est continue dans $[a,b] \times \mathbb{R}$ et lipschitzienne par rapport à la seconde variable, alors le problème de Cauchy admet une solution unique.

Pb de Cauchy, systèmes d'EDOs du 1er ordre :
On se donne un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, une fonction $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, et et $\alpha \in \mathbb{R}^n$.
On souhaite déterminer la fonction $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, vérifiant le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y_1(a) = \alpha_1 \\ y_2(a) = \alpha_2 \\ ... \\ y_n(a) = \alpha_n \end{cases}$$

Le théorème d'existence et d'unicité est identique au cas précédent. Il suffit d'utiliser pour la condition de Lipschitz, une norme dans $\mathbb{R}^n$.

Systèmes d'EDOs d'ordre supérieur à 1 :
On peut se ramener à un système d'équations différentielles du premier ordre.

5.1 Méthodes d'intégration à un pas

5.1.1 Définition

On subdivise l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en n points équidistants, en posant $h = (b - a)/n$, et $x_{i+1} - x_i = h$, de sorte que : $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$.

On pose $y_0 = y(x_0) = y(a) = \alpha$, et on note y_i la valeur approchée de $y(x_i)$.

Une méthode à un pas permet de calculer y_{i+1} à partir de y_i.

A partir de la donnée de $y_0 = \alpha$, on calcule donc successivement les y_i $(y_1, y_2, ..., y_n)$.

On relie ensuite les points (x_i, y_i) par interpolation pour définir une fonction y_i sur $[a, b]$.

L'erreur de discrétisation $e_i = y(x_i) - y_i$ dépend (entre autres) de la valeur du pas h.

5.1.2 Schémas explicite/implicite

On distingue les schémas explicites, pour lesquels on peut calculer explicitement y_{i+1} en fonction de la donnée y_i, des schémas implicites, pour lesquels il faut résoudre une équation pour calculer y_{i+1} en fonction de la donnée y_i.

1. **Exemple 1**
   Supposons qu'on utilise une différence progressive d'ordre 1 pour approcher $y'(x_i)$. On obtient $y'(x_i) = f(x_i, y_i) \cong (y_{i+1} - y_i)/h$, soit : $y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i)$. C'est un schéma explicite, car on peut calculer explicitement y_{i+1} en fonction de la donnée y_i.
2. **Exemple 2**
   Supposons qu'on utilise une différence régressive d'ordre 1 pour approcher $y'(x_i)$. On obtient $y'(x_i) = f(x_i, y_i) \cong (y_i - y_{i-1})/h$, soit : $y_i = y_{i-1} + h\, f(x_i, y_i)$, ou encore $y_{i+1} = y_i + h\, f(x_{i+1}, y_{i+1})$. C'est un schéma implicite,

car pour calculer y_{i+1} en fonction de la donnée y_i, il faut résoudre une équation, qui peut être non-linéaire.
On peut par exemple utiliser une méthode itérative de type point fixe : $y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + h\, f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})$, avec $y_{i+1}^{(0)}$ calculé par un schéma explicite.

3. **Exemple 3**
Supposons qu'on utilise une différence centrée d'ordre 2 pour approcher $y'(x_i)$. On pose $y'(x_i) = f(x_i, y_i) \cong (y_{i+1} - y_{i-1})/(2h)$. On obtient $y_{i+1} = y_{i-1} + 2\,h\, f(x_i, y_i)$. C'est un schéma explicite à deux pas qui nécessite la connaissance de deux conditions initiales y_0 et y_1. En général, on calcule y_1 en utilisant une méthode à un pas.

5.1.3 Généralités sur les méthodes à un pas explicites : Consistance - stabilité - convergence

Soit une méthode à un pas dont le schéma est donné par :
$$\begin{cases} y_0 & = \alpha \\ y_{i+1} & = y_i + h\,\phi(x_i, y_i, h) \quad (0 \leq i \leq n) \end{cases}$$
Les diverses méthodes se distinguent par le choix de la fonction $\phi(x, y, h)$.

1. **Consistance**
La méthode $y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x_i, y_i, h)$ est consistante avec l'équation différentielle si, pour toute solution $y(x)$ de $y'(x) = f(x, y)$ on a :
$$lim_{h\to 0}\left[max_i\left|\frac{1}{h}(y(x_{i+1}) - y(x_i)) - \phi(x_i, y(x_i), h)\right|\right] = 0$$
Théorème (admis) : Pour qu'une méthode à un pas soit consistante, il faut et il suffit que $\phi(x, y, 0) = f(x, y)$.

2. **Ordre de l'erreur**
L'erreur de discrétisation est définie par $e_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$.

On peut alors calculer l'erreur commise sur un pas, en supposant que $y_i = y(x_i)$:

$e_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = y(x_{i+1}) - y(x_i) + y(x_i) - y_{i+1}$
$= y(x_{i+1}) - y(x_i) + y(x_i) - [y_i + h\phi(x_i, y_i, h)] = y(x_{i+1}) - y(x_i) - h\phi(x_i, y_i, h)$.

Définition : On dit que la méthode est d'ordre $\geq p$ si
$$max_i\left|\frac{1}{h}(y(x_{i+1}) - y(x_i)) - \phi(x_i, y(x_i), h)\right| = \mathcal{O}(h^p)$$

En effet, l'erreur sur un pas vérifiera alors $e_{i+1} = \mathcal{O}(h^{p+1})$, et l'erreur globale sur l'intervalle $[a, b] = [x_0, x_n]$, donnée par $e = \sum_{i=0}^{n-1} e_{i+1}$, sera majorée par :
$|e| \leq n \times max_i\, |e_{i+1}| = n \times \mathcal{O}(h^{p+1}) = n \times h \times \mathcal{O}(h^p) = (b-a) \times \mathcal{O}(h^p)$, et donc la méthode est globalement d'ordre p.

Dire qu'une méthode est consistante revient à dire qu'elle est au moins d'ordre 1. En général on utilise des développements limités pour démontrer la consistance et calculer l'ordre de l'erreur.

3. **Stabilité**
Soient y_i et z_i $(1 \leq i \leq n)$ les solutions respectives des systèmes :

$$\begin{cases} y_{i+1} & = y_i + h\,\phi(x_i, y_i, h) \\ y_0 & \text{donné} \end{cases} \qquad \begin{cases} z_{i+1} & = z_i + h\,[\phi(x_i, z_i, h) + \epsilon_i] \\ z_0 & \text{donné} \end{cases}$$

La méthode est dite théoriquement stable s'il existe deux constantes M_1 et M_2 indépendantes de h telles que :

$$max_i\, |y_i - z_i| \leq M_1\, |y_0 - z_0| + M_2\, max_i\, |\epsilon_i|$$

Signification : Une méthode est stable si une petite perturbation sur les données (α, ϕ) n'entraîne qu'une petite perturbation sur la solution, et ceci, indépendamment de h.

Théorème : Si la fonction ϕ est Lipschitzienne par rapport à la seconde variable, alors la méthode est stable.

4. **Convergence**
La méthode converge si $lim_{h\to 0} max_i |y(x_i) - y_i| = 0$, quelque soit la condition initiale α.
Si une méthode à un pas est consistante et stable, elle est alors convergente.

5. **Interprétation en terme de quadrature.** En repartant de l'EDO, $y'(x) = f(x, y(x))$, si on l'intègre entre x_i et x_{i+1}, on obtient : $y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\, dx$
La méthode à un pas correspondant à $\phi(x, y, h)$ donnée, consiste donc à approcher l'intégrale par $h\phi(x_i, y_i, h)$.

5.2 Méthode d'Euler.

Définition. On choisit $\phi(x_i, y_i, h) = f(x_i, y_i)$. La méthode est donc la suivante :

$$\begin{cases} y_0 & = \alpha \\ y_{i+1} & = y_i + h\, f(x_i, y_i) \quad (0 \leq i \leq n-1) \end{cases}$$

Pour la programmation on pourra introduire la notation k_1, et effectuer comme suit la résolution du pas $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + h\, k_1 \end{cases}$$

Consistance et ordre. Ecrivons le développement de Taylor de la fonction $y(x)$ en x_i, en supposant qu'elle est suffisamment régulière :
$y(x_{i+1}) = y(x_i+h) = y(x_i)+hy'(x_i)+\mathcal{O}(h^2) = y(x_i)+hf(x_i, y(x_i))+\mathcal{O}(h^2)$, donc :
$y(x_{i+1}) = y(x_i)+h\phi(x_i, y(x_i), h)+\mathcal{O}(h^2)$ et on a : $\frac{1}{h}[y(x_{i+1})-y(x_i)]-\phi(x_i, y(x_i), h) = \mathcal{O}(h)$.
La méthode d'Euler est d'ordre 1. Elle est donc consistante.

Stabilité. Si f est k lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, $\forall x \in [a, b]$, alors ϕ est Lipschitzienne par rapport à la seconde variable, et donc la méthode d'Euler est stable.

Convergence. Si f est k lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, $\forall x \in [a, b]$, alors la méthode d'Euler converge.

Interprétation en terme de quadrature. La méthode d'Euler consiste donc à approcher l'intégrale par $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\, dx \cong hf(x_i, y_i)$ (formule du rectangle à gauche)

5.3 Méthodes de Runge-Kutta

5.3.1 Méthodes RK2

On suppose que la fonction est suffisamment régulière, $f(x, y) \in C^2$, et on prend, avec $0 < \beta < 1$:

$$\phi(x, y, h) = (1-\beta)f(x, y) + \beta f\left[x + \frac{h}{2\beta}, y + \frac{h}{2\beta} f(x, y)\right]$$

Les deux méthodes RK2 les plus utilisées sont :

a) méthode de Heun d'ordre 2 :

$$\beta = 1/2 \Longrightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\ \{f(x_i, y_i) + f\,[x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)]\}$$

Elle est basée sur la quadrature des trapèzes. En pratique, pour la résolution du pas $[x_i, x_{i+1}]$, on procède en deux étapes :

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_{i+1}, y_i + h\,k_1) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1\ + k_2) \end{cases}$$

On peut montrer que la méthode de Heun est une méthode d'ordre 2.

b) méthode d'Euler modifiée d'ordre 2 :

$$\beta = 1 \Longrightarrow y_{i+1} = y_i + hf\left[x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right]$$

Elle est basée sur la méthode d'intégration du point milieu. En pratique, pour la résolution du pas $[x_i, x_{i+1}]$, on procède en deux étapes :

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_{i+1/2}, y_i + \frac{h}{2}\,k_1) \\ y_{i+1} = y_i + h\,k_2 \end{cases}$$

On peut montrer que la méthode d'Euler modifiée est d'ordre 2.

5.3.2 Méthode RK4

Elle est basée sur la méthode d'intégration de Simpson en trois points équidistants. En pratique, pour la résolution du pas $[x_i, x_{i+1}]$, on procède en quatre étapes :

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_{i+1/2}, y_i + \frac{h}{2}\,k_1) \\ k_3 = f(x_{i+1/2}, y_i + \frac{h}{2}\,k_2) \\ k_4 = f(x_{i+1}, y_i + h\,k_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\,(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4) \end{cases}$$

La méthode RK4 est d'ordre 4. Elle est la plus utilisée pour la résolution des équations différentielles du premier ordre.

5.4 Application à la résolution de systèmes d'EDO

Soit un système de m équations différentielles ordinaires, écrit sous la forme $\frac{dY}{dt} = F(t, Y)$, où le vecteur des inconnues $Y(t)$ et la fonction $F(t, y_1, y_2, ...y_m)$ s'écrivent :

$$Y \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad F(t, Y) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, y_2, ...y_m) \\ f_2(t, y_1, y_2, ...y_m) \\ ... \\ f_m(t, y_1, y_2, ...y_m) \end{pmatrix}$$

La résolution du pas $[t_n, t_{n+1}]$ (avec Δt le pas de temps entre 2 instants de calcul) par la méthode d'Euler s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} K_1 = F(t_n, Y_n) \\ Y_{n+1} = Y_n + \Delta t K_1 \end{cases}$$

Les autres méthodes se programment de manière analogue.