Cursus de Master en Ingénierie 3^{e} année

Rapport de Stage

TODO

Erdi ÇAN
Samy DUMONT
Encadré par Anca BELME

10 septembre 2023

SCIENCES
SORBONNE
UNIVERSITÉ

Résumé

Abstract

Remerciements

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Nomenclature

Symbole	Signification	Valeur
$\boldsymbol{x}$	Design variables TODO	
$f(\boldsymbol{x})$	Objective function	
$g(\boldsymbol{x})$	Inequality constraints TODO	
$h(\boldsymbol{x})$	Equality constraints TODO	

Premier mots des autheurs

TODO premier mots ce que on a fait et les difficultes vite fait plutot pour dire nos ameliorations en math etc...

Dans ce rapport on utilise pas mal de references a notre anexe pour les bases et les definitions fondamentales utilise plusieur fois pour venir facilement en ariere nous conseillons de utiliser alt + left arrow pour revenir en ariene dans windows et linux et cmd + [dans Mac OS X. Ou regarde le racourcis pour votre viever de pdf pour faciliter le retour. Si il y a un seul lien normalement on a essaye de mettre des references de retiur mais le premier est plus conseille.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction

Lobjectid de loptimisation avec les enjeux et les avantages et pourquoi ca peut etre utile

1.1.1 Optimisation

Optimisation et les difficultes de l'optimisation car on peux faire une seul propriete l'optimal et si on a plusieurs parametres on a besoin de faire des compromis entre eux. Mais cela ne empeche pas de trouver le optimal de plusieurs couple.

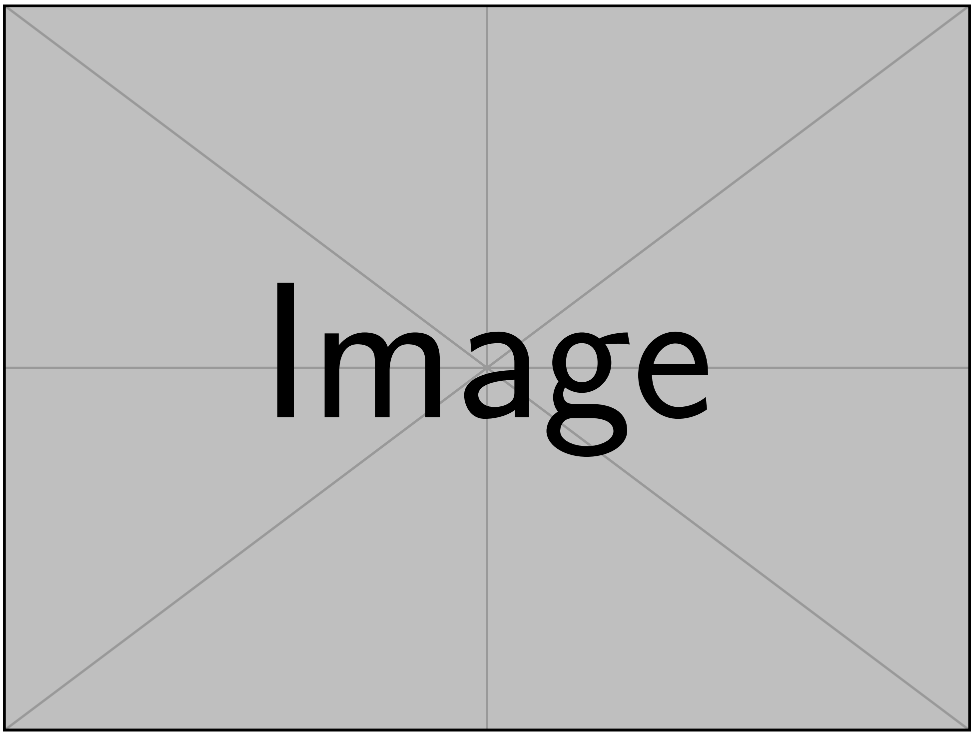

FIGURE 1.1.1 – Figure des valeur optimale de trainee et du lift

L'objective est de minimiser $f(x)$ (function objective) subject a $g(x) < 0$ (constraints) et $h(x) = 0$ Mais comment on definit ces fonctions est que cest seulement que on essaye de minimiser la masse sans contrainte alors on a plus de objet car plus de pbjet veut dire que on aurait pas de masse et donc cest l'optimale. Pour cela le choix de fonction objective et des contraintes est tres importante.

Procedure d'optimisation : on itere et ameliore le design jusque a la simulation converge.

Chapitre 2

Methods d'optimisation

Les methodes de optimisation peut se partager en deux sous parties en premier methodes de optimisation avec gradient(*gradient-based*) et sans gradient (*gradient-based*) et dans chaqun de ces categories on peux evoir des problemes de optimisation avec et sans contraintes. TODO

- Advantages and disadvantages of each of them
- differences
- similarites

Algorithme d'optimisation sans contrainte

Soit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il $\exists x^* \in \mathbb{R}^d$ tel que $F(x^*) = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} F(x)$

On cherche a calculer x^*

TODO expliquer les methodes dans le diapo 28 de la presentation MIT $16.810_L 0_O ptimisation$

TODO pas sur de ici si il faut detailler cela ???

Il existe plusieurs classes de methodes :

- Méthodes de descente : consiste à construire une suite minimisante, c'est à dire $(x_k)_{k \in N}$ telle que
$$F(x_{k+1}) \leq F(x_k)$$
$$x_k \to x^*$$
- Méthodes basées sur l'équation d'Euler qui consiste à chercher une solution de l'équation $\nabla F(x) = 0$. Ces méthodes nécessitent donc que F soit dérivable

2.1 Heuristic methods

2.2 Methodes base sur des gradients

Les methodes bases sur les gradients consiste a utiliser le gradient pour se diriger vers ou la fonction decroit et pour en suite trouver un minimum locale. Le deroulement de cela se passe en faisant l'algoritme suivant :

Algorithm 1 Algorithme de decente generic

Initialisation de notre point de depart initale. $x_0 \in \mathbb{R}^d$
for each k **do**
  Choisir une direction de descente h_k de F au point x_k
  Choisir un pas $t_k > 0$
  if $\nabla F(x_k) = 0$ **then**
    break (On arette la boucle car on a trouve notre minimum locale)
  end if
  $x_{k+1} = x_k + t_k h_k$
end for

Lemme 2.2.1 (meilleure direction de descente locale). Soit $x \in \mathbb{R}^d$ telle que $\nabla F(x) \neq 0$. $h \in \mathbb{R}^d$ est une direction de descente si et seulement si $\langle \nabla F(x), h \rangle < 0$. En particulier, $h_\nabla := -\frac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|}$ est la meilleure direction de descente.

TODO expriquer qqpart la fonction que on choisit peut etre numeroter en f_1 et f_2 ou f et g

2.2.1 Optimisation sans contrainte

Soit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il $\exists x^* \in \mathbb{R}^d$ tel que $F(x^*) = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} F(x)$

On cherche a calculer x^*

2.2.2 Methode du gradient a pas constant

La methode du gradient a pas constant coniste a prendre un point et se deplacer dans la direction contraire du gradient avec un pas consant choisi. La raison la quelle on prends la direction inverse du gradient est que le gradient donne la direction vers ou la fonction croit et nous on veut trouver le minimum. C'ette methode de descente prends un pas constant avec un pas $t_k = \tau > 0$, et une direction de descente $h_k = -\nabla F(x_k)$. Donc notre formule diteration deviens :

$$x_{k+1} = x_k - \tau \nabla F(x_k)$$

Avantages	Desavantages
Pas nescesaire de connaitre F seulement ∇F suffit	Le pas ces' possible que ca ne soit pas optimale
Pas besoin de iterer pour trouver un pas optimal	

TABLE 2.1 – Pros and cons gradient simple

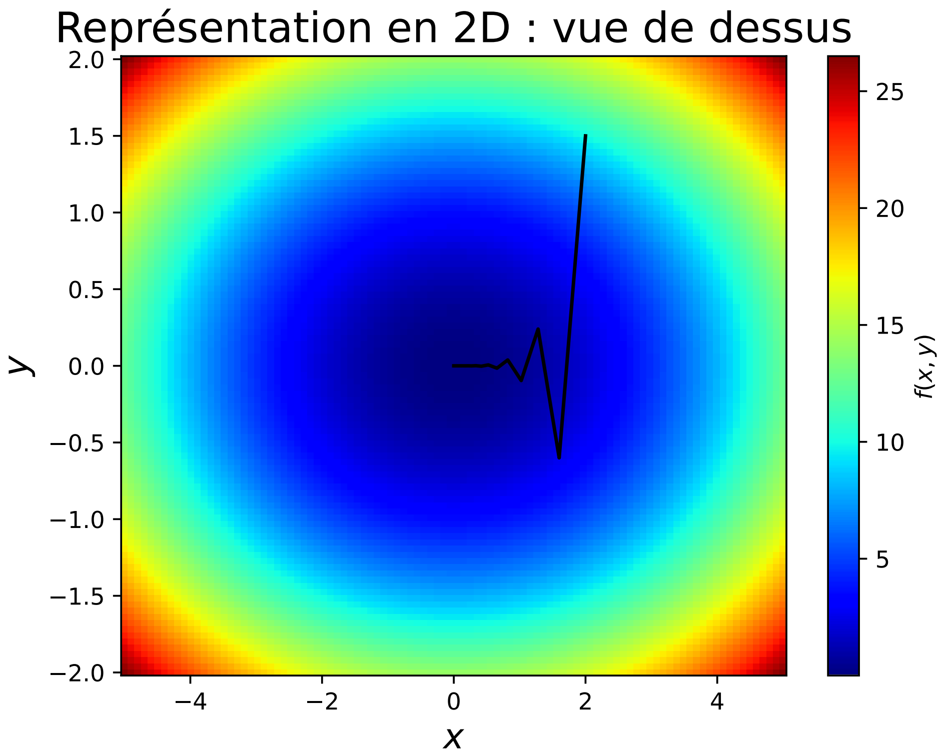

FIGURE 2.2.1 – Figure des iterations avec grad simple en 2D et 3D

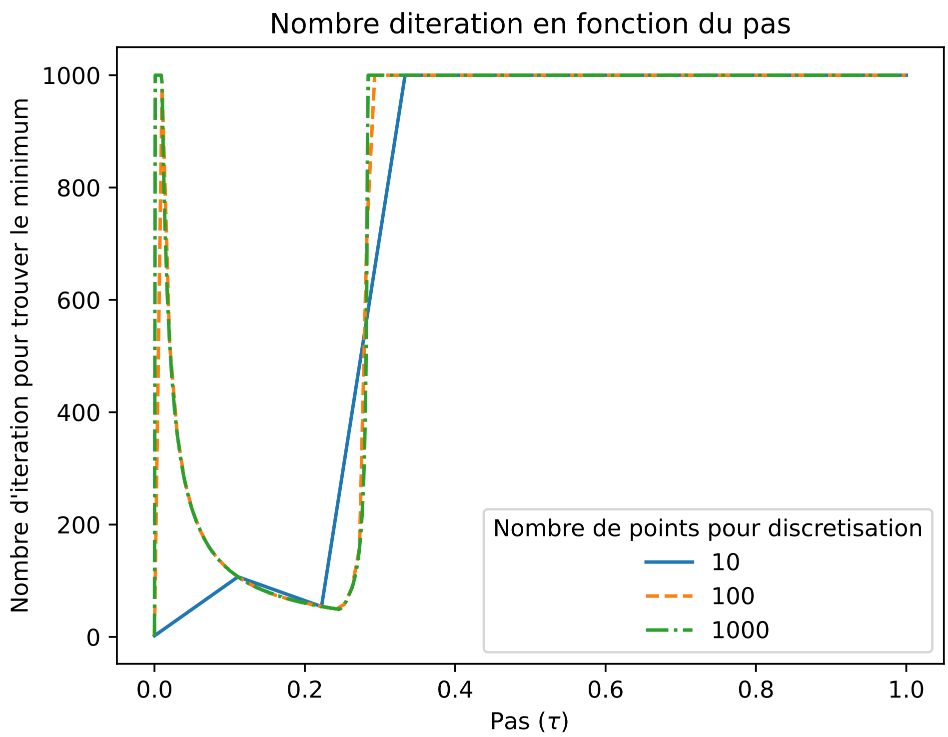

FIGURE 2.2.2 – Figure du pas optimale droite avec une discretisation elevee gauche discretisation basse

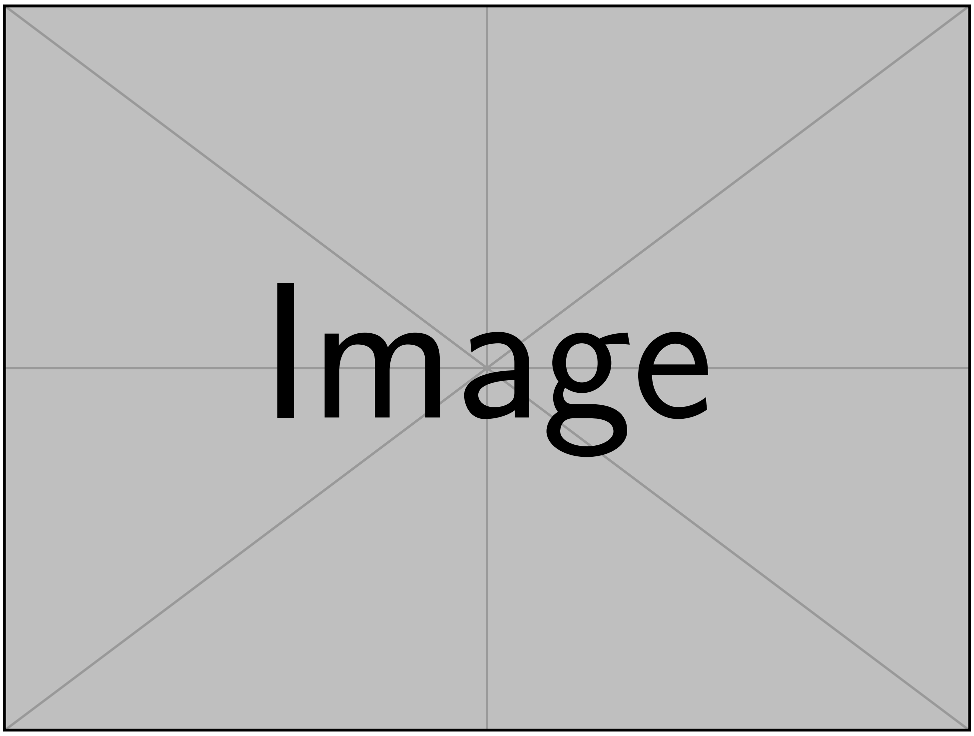

FIGURE 2.2.3 – On choissisant le pas optimale pour avoir le moins de iteration comme vu dans la figure 2.2.2 le nombre diteration pour chaque point.

2.2.3 Methode du gradient a pas quasi-optimale

Dans ces methodes on trouve des pas quasi optimales pour aprocher au minimum avec moins de iterations.

Regle d'Armijo

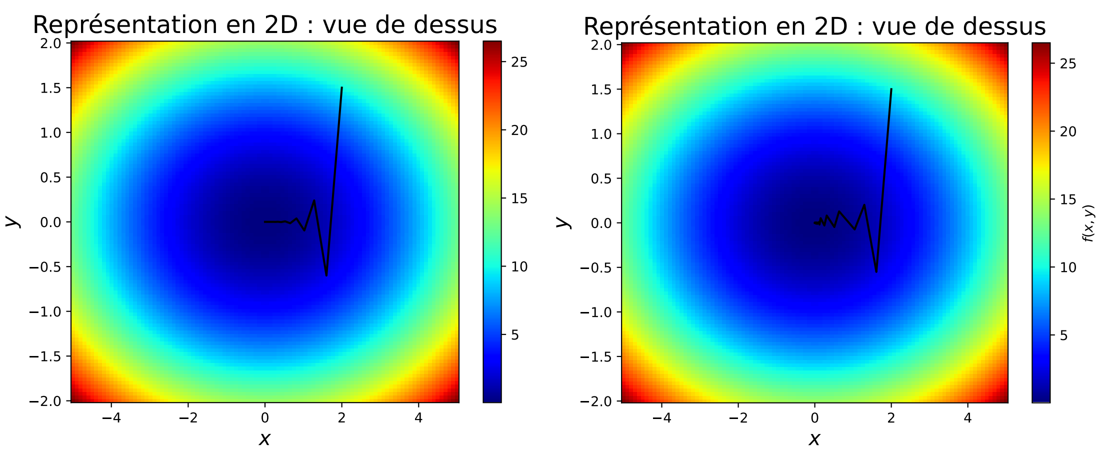

FIGURE 2.2.4 – TODO add nombre diterations fait

Regle de Wolfe

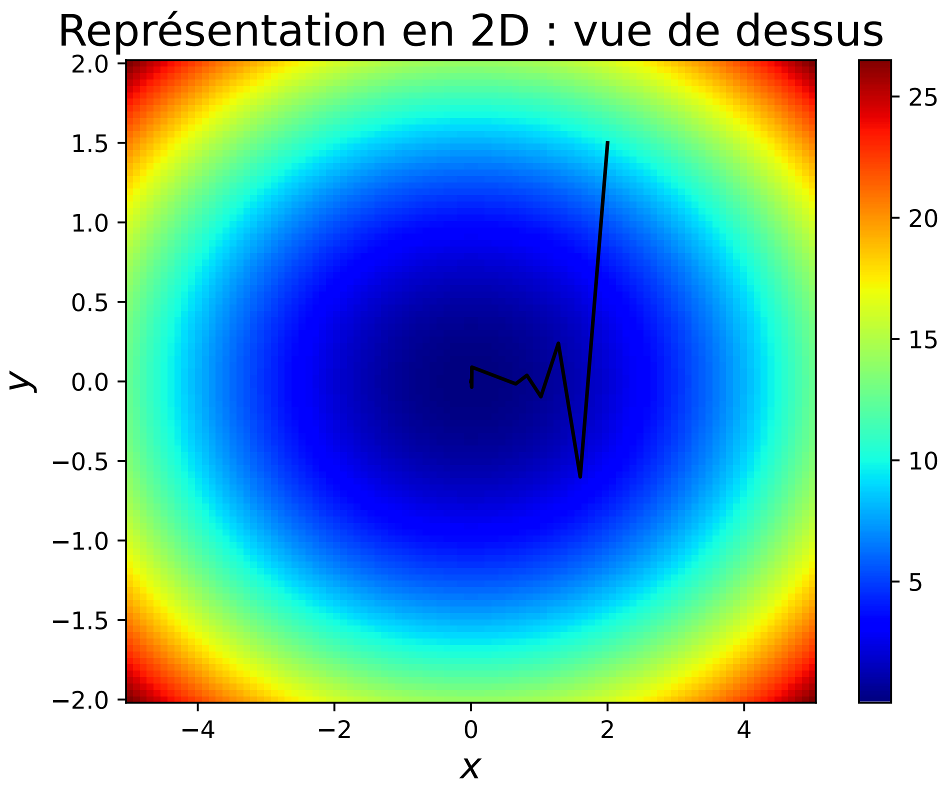

FIGURE 2.2.5 – TODO add nombre diterations fait

2.2.4 Methode du gradient a pas optimale

Cette methode essaye de trouver la direction en prennant a la direction orthogonale de la direction precedente. En faisant TODO mettre les formules etc

On peux voir cette orthogonalite sur la figure TODO cite 3D grad opti

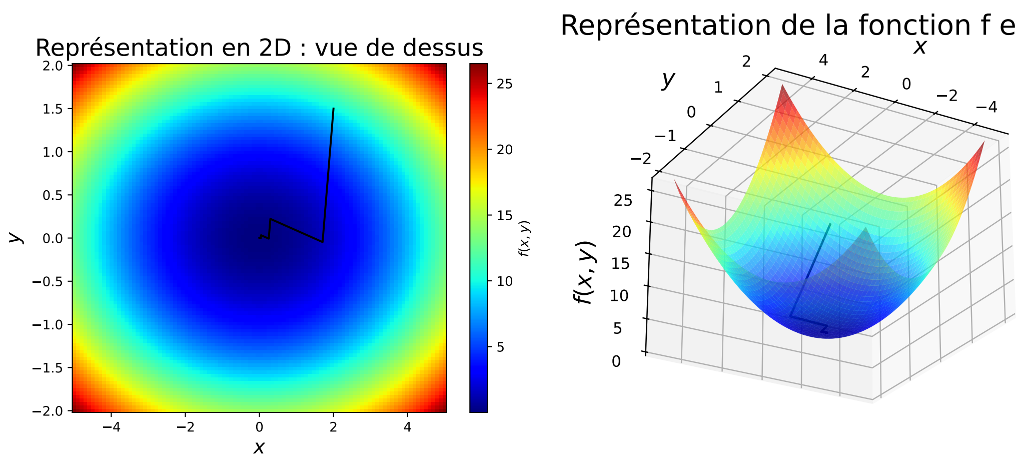

FIGURE 2.2.6 – TODO add nombre diterations fait

2.2.5 Adjoint

Bibliographie

[1] N. YOUNG, *An Introduction to Hilbert Space*. Cambridge University Press, 1988. DOI : 10.1017/CBO9781139172011.

Annexe A

TODO name of Annexes

A.1 NACA Naming

Annexe B

TODO name of Annexes

B.1 Bases mathematiques

TODO comment faire les defintions pour que ca ne souit pas du plagiat????

Definition B.1.1 (l^2)**.**

Definition B.1.2 (Produit scalaire)**.** Le produit scalaire dun $\mathbb{C}-$espace vectoriel V est une application bilinear conjuge-symetrique.

$$\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

telle que pour $\forall x, y, z \in V$ et pour $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,

— $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
— $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
— $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
— $\langle x, x \rangle > 0$ alors $x \neq 0$

De cela on peut aussi definir l'espace préhilbertien qui est le pair $\langle V, \langle .,. \rangle \rangle$ ou V est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel et $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire sur V.

TODO est que cela est vraie tout le temps ou dans les espaces fini pu $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ Car si cest pas toujoursle cas TODO definir en espace infini

Si $x, y \in \mathbb{C}^n$ alors,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

ou $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ et $\overline{y_i}$ est le conjuge complexe de y_i.
(Petit rappel : si $z \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)$)

TODO je suis pas sur si cet defini seulement si x et y sont de mem dimension ou pas

Definition B.1.3 (Espace dual)**.**

Definition B.1.4 (Espace d'Hilbert)**.**

Definition B.1.5 (dérivée de Gâteaux ou dérivée directionnelle)**.**

Definition B.1.6 (Dérivée au sens de Fréchet)**.** TODO Soit E un espace de Hilbert. On dit que f est Fréchet différentiable en x s'il existe $p \in E$ tel que :

$$f(x+h) = f(x) + \langle p, h \rangle + O(h^2) \tag{B.1}$$

On dit que p est la derivee (ou la differentielle ou le gradient) de f en x si ca existe peux etre note comme ci dessous. (Tout les ecriture ci dessous sont equivaslentes) Donc la formule de Taylor-Young pour les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ est :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)\langle h, h\rangle + O(||h||_2^3) \tag{B.2}$$

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x) \cdot h, h\rangle + O(\langle h, \langle h, h\rangle\rangle) \tag{B.3}$$

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x))^T h\rangle + \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(x) h + O(h^T hh) \tag{B.4}$$

TODO Est que il ya des methodes pour trouver le minimum globale sans parcourir toute la fonction dans un temps fini ou notre meilleur choix est de faire une recherche aleatoire de decente et a la fin on a la posibilite de tomber dans un minimum globale ?