

Tratamento de Dados de Tomografia por Técnicas de Álgebra Linear Computacional

Emanuel Piveta Pozzobon, Henrique Valente Nogueira, Pedro Coelho Gimenes de Freitas, Rafael Dalacorte Erdmann

Resumo

A tomografia computadorizada se insere no contexto da modernização de processos em saúde e se fundamenta em técnicas de Álgebra Linear Computacional. Nesta técnica, cada exame retorna uma matriz correspondentes à energia detectada dos raios X por divisão do espaço em pixels. Esses dados costumam ser tratados por Técnicas de Reconstrução Algébrica a partir da projeção ortogonal em hiperplanos consecutivos, de modo a se achar os coeficientes e incógnitas correspondentes aos sistemas lineares. Neste trabalho, procuramos realizar o tratamento de matrizes provindas de tomografia computadorizada a partir do algoritmo das técnicas de reconstrução algébrica adaptado à linguagem Python. Como resultado, .

Keywords: Tomografia Computadorizada, Técnicas de Reconstrução Algébrica, Projeção Ortogonal, Aproximação de hiperplanos

1 Introdução

A modernização de técnicas de exame clínico faz parte da revolução tecnológica imposta pelo avanço dos saberes em computação. Nesse sentido, a área da tomografia foi uma das beneficiadas com esse processo, uma vez que foi possível realizar exames com mais fáceis de serem acessados e armazenados. A tomografia teve início no Século XX, a partir da representação de objetos finos em um filme radiográfico. Formulações matemáticas avançadas referentes à tomografia foram publicadas em 1917, por Johann Radon. Entretanto, seus resultados só foram reconhecidos na metade do século. A técnica proposta por Johann é a base das Técnicas de Reconstrução Algébricas (TRA) para tomografia.

Para a obtenção do sistema matricial, é feita a incidência de um feixe de raios X no paciente, opostamente a um conjunto de detectores. Os dados são armazenados por um sistema de pixels, de forma que seja possível verificar a energia por região no espaço. Esse sistema é matricial e possui um número de equações muito maior que o número de incógnitas, e por causa disso é possível resolvê-lo. Esse problema se torna um problema inverso, na medida em que queremos descobrir a absorção desse feixe a partir da intensidade medida após a irradiação em um conjunto de medidas. A técnica mais usada se baseia em TRA, que será explorada mais a frente. Neste trabalho, foram explorados os funcionamentos e procedimentos de Álgebra Linear Computacional para o tratamento de dados de tomografia a partir de TRA, partindo de um banco de dados contendo matrizes referentes à tomografia digital.

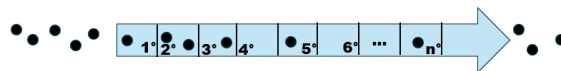
2 Formulação matemática

2.1 Obtenção dos dados

A obtenção de sistemas lineares por exames clínicos de tomografia é obtida a partir dos valores de energia detectados nos sensores de raios X. Esses sensores rotacionam em torno do eixo do corpo do paciente, de maneira que haja uma distribuição espacial. Essa distribuição é dividida em pixels, e cada valor de incógnita X_j corresponde à densidade de pixel:

$$X_j = \ln \left(\frac{\text{Número de fótons entrando no } j\text{-ésimo pixel}}{\text{Número de fótons saindo do } j\text{-ésimo pixel}} \right)$$

Visualmente, é possível visualizar a divisão n de feixe na figura abaixo:



O feixe de elétrons é incidido com uma direção e sentido específicos. Ele percorre um comprimento que corresponde a n pixels, e, devido à absorção energética da amostra, é esperado que a densidade de pixel diminua conforme j se aproxime de n . Pode ser feita uma generalização das equações de densidade de pixel da seguinte forma:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = \ln(\text{Fração de fótons que passa pelos pixels sem serem absorvidos})$$

Essa fração é padrão para cada medida e é chamada de b_i . A ideia é que a dispersão do feixe de Raios-X pode ser desconsiderada se existir uma medição anterior que determina o coeficiente b da máquina antes da medida, e esse coeficiente não tende a mudar entre duas medidas. Como várias medidas de feixes são feitas (a partir de rotações), o sistema linear evolui e dizemos que:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

Onde a_{ij} são coeficientes da equação. Em uma medida, existe uma rotação em torno do eixo do paciente e por isso são feitas muitas M medições. Assim, teremos um conjunto M de equações:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N &= b_M. \end{aligned}$$

A partir desse sistema, são aplicadas as técnicas de reconstrução algébrica. A variação de intensidade de raio-X pode ser representada pela equação generalizada:

$$p(L) = \int_L \mu(n)dn$$

Onde u é o coeficiente de absorção e n está relacionado ao número de pixels. L é a reta correspondente ao feixe de elétrons. Isso se torna um problema inverso, porque, como há uma rotação em torno do paciente para o feixe incidente de elétrons, existe uma região Ω pela qual existe a distribuição de densidade μ . O problema inverso se torna encontrar uma aproximação para essa distribuição de densidade, ou seja, inverter a equação da variação de intensidade de raio-X em um espaço de funções adequados.

2.2 Projeção Ortogonal

Considere um vetor \vec{u} qualquer que seu ponto inicial é Q , considere outro vetor \vec{a} que seu ponto inicial também é Q . É possível a partir desse conjunto, 'decompor' o \vec{u} na soma de dois componentes, um desses componentes sendo ortogonal ao vetor \vec{a} , enquanto o outro sendo múltiplo escalar de \vec{a} . Como demonstrado na Figura 1, a componente que é múltiplo escalar de \vec{a} é obtida através de uma reta perpendicular desenhada a partir da ponta de \vec{u} até \vec{a} , essa componente é chamada de \vec{w}_1 . Além disso, a outra componente, perpendicular a \vec{a} , chamada de \vec{w}_2 , é obtida por: $\vec{w}_1 = \vec{u} - \vec{w}_2$

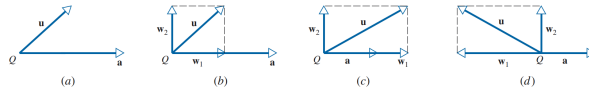


Figura 1: (a) Dois vetores com mesma origem. (b)(c)(d) Projeção ortogonal \vec{w}_2 de dois vetores.

Sabe-se que \vec{w}_1 deve ser múltiplo escalar de \vec{a} , assim considerando um escalar qualquer k :

$$\vec{w}_1 = k\vec{a}$$

Sabendo que: $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$, pode-se afirmar que:

$$\vec{u} = k\vec{a} + \vec{w}_2$$

Realizado essa etapa, calcula-se $\vec{u} \cdot \vec{a}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{a} = (k\vec{a} + \vec{w}_2) \cdot \vec{a} \quad (1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{a} = k \|\vec{a}\|^2 + \vec{w}_2 \cdot \vec{a}. \quad (2)$$

Os vetores \vec{a} e \vec{w}_2 são ortogonais entre si, dessa forma o produto escalar entre eles é 0. Assim o resultado é:

$$k = \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}$$

Além disso, o vetor \vec{w}_1 , isto é, a projeção ortogonal de \vec{u} em \vec{w}_2 ou componente vetorial de \vec{u} ao

longo de \vec{a} , a qual pode-se denotar como: $\text{proj}_{\vec{a}} u$. Assim, afirma-se:

$$\text{proj}_{\vec{a}} u = \vec{w}_1 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

E consequentemente o vetor \vec{w}_2 ou também chamado de componente vetorial de \vec{u} ortogonal a \vec{a} é:

$$\vec{u} - \text{proj}_{\vec{a}} u = \vec{w}_2 = \vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

Portanto, conclui-se que se \vec{u} e \vec{a} forem vetores em \mathbb{R}^n e se $\vec{a} \neq 0$, então \vec{u} pode ser escrito de maneira única na forma $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$, em que \vec{w}_1 é um múltiplo escalar de \vec{a} e \vec{w}_2 é ortogonal a \vec{a} .

2.3 Técnica de reconstrução algébrica (TRA) usando o método de Kaczmarz:

Primeiramente, a fim de elucidar o método considere as 3 equações (1), (2) e (3) no espaço bidimensional $x_1 x_2$. A representação gráfica delas está na Figura 2.(a), sendo visível que não possuem intersecção. A primeira vista, pode-se dizer elas não possuem nenhuma solução, no entanto, o triângulo sombreado pode ser considerado como o conjunto de possíveis soluções aproximadas. O método de Kaczmarz é um algoritmo que realiza sucessivas projeções ortogonais de pontos sobre as retas definidas, até gerar pontos na fronteira do triângulo. Esses pontos são gerados pelo processo iterativo até a convergência do resultado. Esse processo pode ser visualizado de forma na Figura 2.(b) (ANTON, H.)

Equação 1 - L1: $x_1 + x_2 = 2$

Equação 2 - L2: $x_1 - 2x_2 = -2$

Equação 3 - L3: $3x_1 - x_2 = 3$

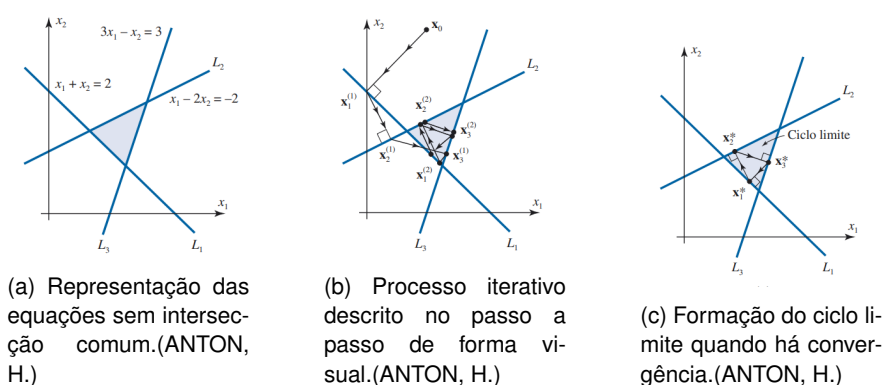


Figura 2: Passo a passo do método iterativo de Kaczmarz: (a), (b), (c).

Passo 0. Escolhe-se um ponto inicial arbitrário x_0 .

Passo 1. Projeta-se x_0 ortogonalmente sobre a primeira reta L_1 , denotando essa projeção por $x_1^{(1)}$. O expoente (1) indica que esta é a primeira rodada do algoritmo.

Passo 2. Projeta-se $x_1^{(1)}$ ortogonalmente sobre a segunda reta L_2 , denotando essa projeção por $x_2^{(1)}$.

Passo 3. Projeta-se $x_2^{(1)}$ ortogonalmente sobre a terceira reta L_3 , denotando essa projeção por $x_3^{(1)}$.

Passo 4. Considera-se $x_3^{(1)}$ como o novo valor inicial x_0 e repetimos o processo, passando novamente pelos passos 1 a 3. Na segunda rodada, os pontos projetados são denotados por $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$; na terceira rodada, por $x_1^{(3)}$, $x_2^{(3)}$, $x_3^{(3)}$, e assim sucessivamente.

Por meio desse algoritmo, é possível alcançar a convergência dos resultados, independentemente dos valores iniciais x_0 escolhidos. Além disso, o algoritmo identifica um ponto de convergência específico para cada reta do sistema. Para a reta L_1 , há um ponto de convergência denominado x_1^* ; para a reta L_2 , o

ponto de convergência é chamado x_2^* ; e, para a reta L_3 , o ponto de convergência é x_3^* . Esses três pontos aproximados do sistema linear formam um ciclo limite, como representado na Figura (3). (ANTON, H)

Isso ocorre porque o algoritmo gera três sequências de pontos, uma para cada reta. À medida que as iterações avançam, essas sequências convergem para valores específicos, representando uma solução aproximada do sistema linear. (ANTON, H)

Considere a equação abaixo como representação de uma reta no plano x_1x_2 :

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, \quad \text{considera-se: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{então: } \mathbf{A}^T \mathbf{x} = b$$

A expressão que representa esse algoritmo é:

$$\mathbf{x}_k^{(p)} = \mathbf{x}_{k-1}^{(p)} + \frac{\mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k^T \mathbf{x}_{k-1}^{(p)}}{\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k} \mathbf{A}_k$$

Nessa expressão p significa as rodadas de iterações, enquanto k representa a linha do sistema linear $Ax = b$. Enquanto $\mathbf{x}_k^{(p)}$ o ponto solução k -ésima iteração, ou seja, a projeção ortogonal de $\mathbf{x}_{k-1}^{(p)}$ sobre uma das retas. E $\mathbf{x}_{k-1}^{(p)}$ é a solução da iteração anterior, ou seja, é o ponto de partida para calcular o resultado. O valor b_k este é o valor de b na k -ésima na equação do sistema linear. A_k é o vetor que possui todos os a da k -ésima linha. Enquanto A_k^T é a transposta de A_k . (ANTON, H)

É possível aplicar esse método para problemas sobredeterminados, isto é, sistemas lineares que possuem M equações em N incógnitas, sendo M muito maior que N . Dessa forma os vetores \mathbf{x} e \mathbf{A} devem escritos da seguinte forma (ANTON, H)

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{iN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, M$$

Dessa forma, essas M equações podem escritas na forma sistema linear:

$$A_i^T \mathbf{x} = b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, M$$

E cada uma dessas M equações define o que é chamado de hiperplano no espaço euclidiano R^N de dimensão N . Hiperplano é generalização da ideia de retas e planos em dimensões superiores. Ele pode ser descrito pela expressão:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Assim, pode-se usar o método de Kaczmarz para hiperplanos ordem superior a 2. Como descrito no algoritmo abaixo, que de forma geral é parecida com o algoritmo apresentado anteriormente. (ANTON, H.):

Passo 0. Escolhemos um ponto arbitrário $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Passo 1. Para a primeira rodada, tomamos $p = 1$.

Passo 2. Para $k = 1, 2, \dots, M$, calculamos

$$\mathbf{x}_k^{(p)} = \mathbf{x}_{k-1}^{(p)} + \frac{\mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k^T \mathbf{x}_{k-1}^{(p)}}{\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k} \mathbf{A}_k$$

Passo 3. Denotamos $x_0^{(p-1)}$ como $x_M^{(p)}$.

Passo 4. Aumentamos o número da rodada p por 1 e retornamos ao Passo 2.

3 Metodologia

Foi realizada uma extensa revisão bibliográfica a fim de determinar técnicas e problemas matemáticos envolvendo a tomografia computadorizada. Em seguida, um conjunto de dados a respeito de tomografia digital foi obtido de maneira virtual. Todo o procedimento computacional pode ser verificado no Github, presente nas referências deste documento. A base de dados utilizada foi a TomoBank, que reúne diferentes dados de tomografia computadorizada. Dentro dessa base, foram utilizados os conjuntos "Lorentz" e "Nano CT Ângulos Esparsos". Esses dados foram tratados computacionalmente por meio da biblioteca de *Python* Tomopy, e a imagem com os dados originais foi reconstruída pelas funções pré-definidas da biblioteca. Um outro algoritmo foi escrito, que deveria realizar as projeções ortogonais sucessivas e realizar a reconstrução de imagem. Por fim, o algoritmo de TRA foi testado em sistemas lineares menores a fim de verificar sua eficiência.

4 Resultados e Discussões

Nesta seção, comparamos dois métodos iterativos para a solução de sistemas lineares: o Método de Kaczmarz e o Método de Jacobi. Os códigos estão disponíveis em: [Github](#). O sistema de equações utilizado foi:

$$L_1 : a_1^T x = b_1 \quad \text{com} \quad a_1 = [1, 1], \quad b_1 = 2$$

$$L_2 : a_2^T x = b_2 \quad \text{com} \quad a_2 = [1, -2], \quad b_2 = -2$$

$$L_3 : a_3^T x = b_3 \quad \text{com} \quad a_3 = [3, -1], \quad b_3 = 3$$

A solução foi obtida com um chute inicial $x_0 = [1.0, 3.0]$ e 100 iterações.

4.0.1 Solução do Método de Kaczmarz

O Método de Kaczmarz mostrou uma rápida convergência para a solução. Após 100 iterações, os valores finais foram: $x_1 = 1.0909$, $x_2 = 0.9091$

O gráfico das iterações (Figura 3) revela que os pontos ficaram próximos das retas definidas pelas equações, indicando boa convergência.

4.0.2 Solução do Método de Jacobi

O Método de Jacobi apresentou uma convergência mais lenta. A solução final foi: $x_1 = 0.6667$, $x_2 = 1.3333$

Embora tenha se aproximado da solução, o gráfico das iterações mostrou maior oscilação, indicando que o método necessita de mais iterações para uma convergência satisfatória.

4.0.3 Discussão dos Resultados

Comparando os dois métodos, o Método de Kaczmarz demonstrou maior eficiência, convergindo rapidamente para a solução. Já o Método de Jacobi apresentou maior oscilação e uma convergência mais lenta, necessitando de mais iterações. Essas observações indicam que o Método de Kaczmarz é mais adequado para sistemas semelhantes, especialmente em situações que exigem soluções rápidas e precisas.

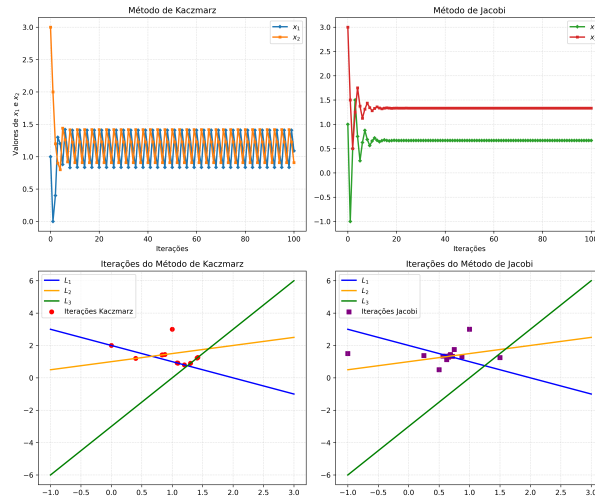


Figura 3: Iterações do Método de Kaczmarz e Método de Jacobi: os pontos das iterações são mostrados junto às retas do sistema.

4.1 Reconstrução Tomográfica com Ruído

A reconstrução tomográfica foi realizada utilizando dois métodos distintos: o algoritmo ATR Kaczmarz e o método Gridrec, implementado com a biblioteca Tomopy. A seguir, são discutidos os resultados obtidos com cada abordagem.

4.1.1 Algoritmo ATR Kaczmarz

O algoritmo ATR Kaczmarz produziu resultados insatisfatórios, com imagens apresentando padrões circulares evidentes, que se intensificaram com o aumento das iterações. Esses padrões são característicos do método, que tende a produzir soluções aproximadas em dados incompletos ou com ruído. Além disso, a baixa qualidade observada também pode ser atribuída à dimensionalidade do vetor gerado pelo modelo ATR, que impõe limitações à resolução da reconstrução.

4.1.2 Método Gridrec

O método Gridrec, por outro lado, apresentou uma reconstrução de maior qualidade, com imagens de alta resolução e estruturas bem definidas. Este método, baseado em transformações de Fourier, é eficaz na suavização de artefatos comuns em reconstruções de projeção, especialmente em dados de tomografia de boa qualidade.

4.1.3 Comparação entre os Métodos

A principal diferença entre os métodos foi a presença dos padrões circulares no método ATR Kaczmarz, enquanto o Gridrec produziu uma imagem mais estável e sem artefatos. Para melhorar os resultados do ATR, seria necessário aprimorar a abordagem, como utilizar um modelo com maior capacidade de resolução ou aplicar técnicas de redução de ruído. O método Gridrec, no entanto, demonstrou maior robustez contra artefatos e obteve resultados superiores em termos de qualidade de imagem.

Concluímos que, para a solução do sistema linear, o Método de Kaczmarz foi mais eficiente, enquanto para reconstrução tomográfica com ruído, o método Gridrec foi superior, proporcionando imagens de melhor qualidade.

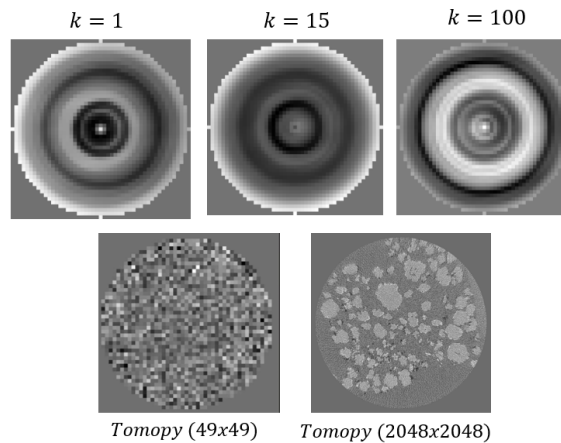


Figura 4: Iterações dos Métodos de Kaczmarz e Jacobi.

5 Considerações Finais

Os resultados do código para reconstrução por TRA, independentes da biblioteca Tomopy, se mostraram irresolutos e incapazes de serem utilizados. Isso pode ter acontecido por diversos motivos envolvendo a limitação do método de adaptar o TRA computacionalmente. Foram testados outros métodos de reconstrução de imagem que se provaram mais eficientes. Em uma análise mais profunda do funcionamento da biblioteca Tomopy, percebemos que ela utiliza de diferentes técnicas de álgebra linear computacional para chegar a um resultado mais preciso. Outros modelos também foram testados via adaptação ao método computacional, e se provaram mais eficientes. A limitação do TRA computacional foi comprovada na medida em que ele foi testado para sistemas menores, e seu resultado foi satisfatório.

6 Contribuições dos autores

Emanuel Piveta Pozzobon: Investigação, resolução matemática, escrita do código.

Henrique Valente Nogueira: Investigação, Redação - revisão e edição.

Pedro Coelho G. de Freitas: Desempenho do modelo, escrita do código, investigação matemática.

Rafael Dalacorte Erdmann: Investigação, resolução matemática, escrita do código.

Referências

ANTON, H., RORRERS, C, 2012. Álgebra linear com aplicações. Tradução técnica de DOERING, C. I. 10ª edição. Porto Alegre: Bookman.

De CEZARO, A.; DE CEZARO, F. T. Problemas inversos e a matemática da tomografia computadorizada. In: V BIENAL DA SBM - SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2010, João Pessoa. Universidade Federal da Paraíba, 2010.

PAREDES, L. L. T.; VILOCHE, F. S. B. Métodos iterativos para reconstrução de imagens. Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 2, n. 1, 2014. Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

SZNAJDER, R. Kaczmarz Algorithm Revisited / Jeszcze o algorytmie Kaczmarza. Technical Transactions: Fundamental Sciences, v. 2-NP, 2015.