

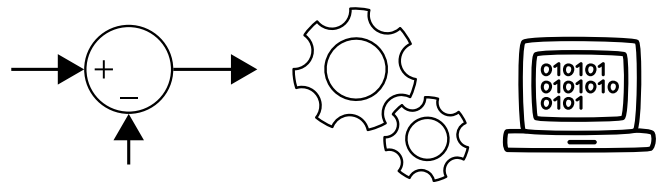
Condensé de cours de SI de PSI

Ce document écrit par Alexandre Iooss est sous licence Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0.

Cette version a été générée le 26 juillet 2018.

Table des matières

1 Asservissement	2	2.3.1 Énergie cinétique de S par rapport à R	8
1.1 Rappels de première année	2	2.3.2 Puissance des efforts extérieurs	8
1.1.1 Les transformations	2	2.3.3 Puissance des efforts intérieurs	8
1.1.2 Formulaire des transformées de Laplace	2	2.3.4 Puissance des quantités d'accélération	8
1.1.3 Dépassement d'un second ordre	2	2.3.5 Théorème de l'énergie cinétique	8
1.1.4 Identifier un second ordre	2	2.3.6 Expression de l'énergie cinétique	8
1.2 Précision des systèmes bouclés	3	2.3.7 Utilisation du théorème de l'énergie cinétique	8
1.2.1 Classe d'une fonction de transfert	3	2.4 Mobilité, hyperstaticité	9
1.2.2 En régime permanent en poursuite	3	2.4.1 Nombre cyclomatique	9
1.2.3 En régime permanent en régulation	3	2.4.2 Analyse cinématique	9
1.2.4 En régime harmonique en poursuite	3	2.4.3 Analyse statique	9
1.2.5 En régime harmonique en régulation	3	2.4.4 Mobilité cinématique	9
1.2.6 Cas de non linéarité	3	2.4.5 Déterminant caractéristique	9
1.3 Stabilité des systèmes asservis	3	2.4.6 Hyperstaticité	9
1.3.1 Stabilité	3	2.4.7 Formule de mobilité	9
1.3.2 Conditions de stabilité	3	2.5 Équilibrage	9
1.3.3 Critère de Routh (hors programme)	3	2.5.1 Solide équilibré	9
1.3.4 Théorème de Cauchy (hors programme)	4	2.5.2 Théorème	9
1.3.5 Critère de Nyquist (hors programme)	4	2.5.3 Question de cours	9
1.3.6 Critère du Revers	4	3 Logique séquentielle	10
1.3.7 Marge de phase et de gain	4	3.1 Circuits logiques	10
1.3.8 Facteur de résonance	4	3.1.1 Bascule RS	10
1.3.9 Abaque de Black-Nichols	4	3.2 Diagrammes SysML	10
1.3.10 Modes et Pôles dominants	4	3.2.1 Architecture des systèmes	10
1.4 Correcteurs (Régulateurs)	5	4 Hydraulique et pneumatique de puissance	11
1.4.1 Les correcteurs en parallèle	5	4.1 Pneumatique de puissance	11
1.4.2 Les correcteurs en série	5	4.1.1 Distribution de l'énergie	11
1.4.3 Les correcteurs classiques	5		
2 Mécanique	6		
2.1 Rappels de première année	6		
2.1.1 Formule de Willis	6		
2.1.2 Formule de la base mobile	6		
2.1.3 Théorème de Varignon	6		
2.1.4 Modélisation des actions mécaniques	6		
2.1.5 Formule de Gibbs	6		
2.2 Dynamique des solides	6		
2.2.1 Les torseurs utilisés	6		
2.2.2 Propriétés de ces torseurs	6		
2.2.3 Théorème des actions réciproques	6		
2.2.4 Théorèmes généraux de la mécanique	6		
2.2.5 Un peu d'algèbre linéaire	7		
2.2.6 Opérateur d'inertie	7		
2.2.7 Matrice d'inertie	7		
2.2.8 Théorème de Huyghens	7		
2.2.9 Moment d'inertie par rapport à une droite	7		
2.2.10 Caractéristiques d'inertie	7		
2.2.11 Méthode de résolution d'un problème	7		
2.2.12 Théorèmes de Guldin (hors programme)	7		
2.2.13 Cas dans un référentiel non Galiléen (hors programme)	7		
2.3 Théorème de l'énergie cinétique	8		



1 Asservissement

1.1 Rappels de première année

1.1.1 Les transformations

Soit f une fonction du temps telle que $\forall t < 0, f(t) = 0$. La transformée de Laplace de f est

$$\mathcal{L}(f) : p \mapsto \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Soit f une fonction du temps. La transformée de Fourier (hors programme) de f est

$$\mathcal{F}(f) : \omega \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Soit s une fonction discrète du temps. La transformée en Z (hors programme) de f est

$$Z(s) : z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) z^{-n}$$

1.1.2 Formulaire des transformées de Laplace

Dans les pays anglo-saxons, p se note s .

u est la fonction d'Heaviside.

1.1.2.1 Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p)$$

(valeur initiale : $p \rightarrow +\infty$)

1.1.2.2 Dérivation (intégration par partie)

$$\frac{df(t)}{dt} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p F(p) - f(t=0^+)$$

1.1.2.3 Intégration

$$\int_a^t f(x) u(x) dx \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(p)}{p} + \frac{1}{p} \int_a^0 f(x) dx$$

1.1.2.4 Translation (changement de variable)

$$f(t - \tau) u(t - \tau) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-\tau p} F(p)$$

1.1.2.5 Homothétie (changement de variable)

$$f(at) u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

1.1.2.6 Multiplication par e^{-at}

$$e^{-at} f(t) u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p + a)$$

1.1.2.7 Dirac

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$$

1.1.2.8 Heaviside, Rampe...

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t^n u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{p^{n+1}}$$

1.1.2.9 Oscillations

$$\sin(\omega t) u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\cos(\omega t) u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

1.1.3 Dépassement d'un second ordre

Lors de la réponse d'un second ordre à un échelon, le k -ième dépassement vaut (pourcentage relatif à la consigne)

$$D_k = \exp\left(\frac{-k\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

1.1.4 Identifier un second ordre

On cherche à identifier un second ordre avec la réponse temporelle à un échelon.

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Déjà on a le **gain** K en régime établi (rapport de la sortie sur l'entrée).

On cherche ensuite le **coefficient d'amortissement** ζ . On mesure le 1er dépassement D et on utilise cette formule

$$D = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

On cherche enfin la **pulsation propre du système** ω_0 . Pour cela on mesure la pseudo période T et on utilise

$$\frac{2\pi}{T} = \omega = \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}$$

1.2 Précision des systèmes bouclés

1.2.1 Classe d'une fonction de transfert

Une fonction de transfert de classe α s'écrit canoniquement

$$G(p) = \frac{K}{p^\alpha} \times \frac{1 + b_1 p + \dots}{1 + a_1 p + \dots}$$

1.2.2 En régime permanent en poursuite

Soit α la classe généralisée de $H_{BO}(p)$.

- Pour $\alpha = 0$, $\epsilon_{statique} = \frac{x_0}{1+K_{BO}}$
- Pour $\alpha = 1$, $\epsilon_{statique} = 0$ et $\epsilon_{trainage} = \frac{V}{K_{BO}}$
- Pour $\alpha = 2$, $\epsilon_{statique} = \epsilon_{trainage} = 0$ et $\epsilon_{accélération} = \frac{a}{K_{BO}}$

Donc l'erreur en régime permanent diminue si le gain K_{BO} ou la classe α augmentent.

Démonstration. On applique le théorème de la valeur final sur le signal d'erreur $\epsilon(p)$ (après le comparateur) avec en entrée un échelon, une rampe puis une parabole.

1.2.3 En régime permanent en régulation

L'erreur due à une perturbation en régulation diminue si le gain ou le nombre d'intégrateur en amont de cette perturbation augmentent.

Démonstration. Comme la démonstration précédente mais on considère la consigne nulle et une perturbation.

1.2.4 En régime harmonique en poursuite

Plus la bande passante d'un système bouclé est grande, plus le système est précis en régime sinusoïdal sur une grande plage de fréquence.

Démonstration. L'expression du gain de la BF avec $H_{BO}(p)$ montre qu'il existe une pulsation de coupure que l'on souhaite maximiser pour être précis en hautes fréquences.

1.2.5 En régime harmonique en régulation

Plus la bande passante des composants en amont de la perturbation est grande, plus le système est précis vis-à-vis d'une perturbation harmonique de haute fréquence.

Démonstration. Comme la démonstration précédente mais on considère la consigne nulle et une perturbation.

1.2.6 Cas de non linéarité

Les modèles utilisés sont des approximations linéaires autour de points de fonctionnement. Pour rester réaliste il faut éviter les phénomènes non linéaires tels que

- Une **saturation** (ex : tension max d'un hacheur),
- Une **zone morte** (ex : tension min d'un MCC).

1.3 Stabilité des systèmes asservis

1.3.1 Stabilité

Un système stable est un système qui revient vers sa position d'équilibre après perturbation.

1.3.2 Conditions de stabilité

Un système stable est un système qui admet une fonction de transfert $H(p)$ telle que

$$\forall \text{ pôles } p_i \text{ de } H(p), \quad \operatorname{Re}(p_i) < 0$$

Démonstration. Se ramener à la forme des pôles de la fonction de transfert : $p_i = -a_i \pm j\Omega_i$. La décomposition en élément simple mène au résultat.

Une seule étude de stabilité est nécessaire qu'il y ait perturbation ou pas.

Démonstration. Le dénominateur de la fonction de transfert en régulation et en poursuite est le même.

Donc un système est stable en boucle fermée si seulement si $1 + H_{BO}(p) = 0$ n'a que des solutions à partie réelle < 0 .

Démonstration. Les racines de $1 + H_{BO}$ sont les pôles de H_{BF} .

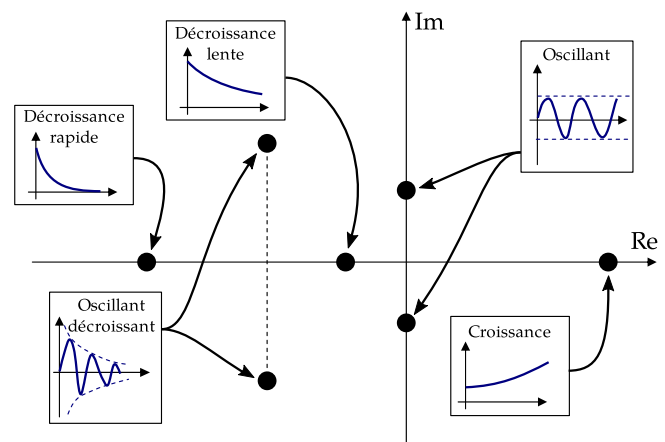


FIG. 1 : Représentation des pôles

1.3.3 Critère de Routh (hors programme)

Ce critère ne marche pas sur un système comportant un retard. On considère un système de fonction de transfert $H(p)$ de dénominateur

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

Le système est stable si seulement si

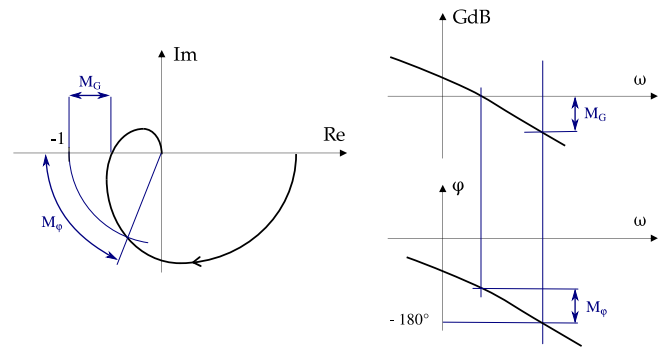
- Tous les coefficients a_i soient de même signe et $\neq 0$,
- Tous les termes de la première colonne du tableau (voir cours) soient de même signe et non nuls.

Le nombre de racine à partie réelle strictement positive est donné par le nombre de changement de signe dans la première colonne.

1.3.4 Théorème de Cauchy (hors programme)

Si un point M d'affixe p décrit dans le plan complexe un contour fermé (C) dans le sens inverse trigonométrique, à l'intérieur duquel se trouve P pôles et Z zéros d'une fonction $F(p)$, alors l'image de (C) par $F(p)$ décrit une courbe (Γ) qui fait autour de l'origine $(Z - P)$ tours.

Démonstration. La variation de l'argument de $F(p)$ pour un tour de M sur (C) est $(-2\pi) \times (Z - P)$.



1.3.5 Critère de Nyquist (hors programme)

Un système bouclé est stable en boucle fermée si seulement si le lieu de Nyquist de H_{BO} complété et parcouru dans le sens des ω croissants

- Ne passe pas par le point critique -1 ,
- Fasse autour du point critique -1 , N tours dans le sens trigonométrique égal au nombre de pôles de H_{BO} à partie réelle strictement positive.

Démonstration. Par la condition de stabilité ainsi que le théorème de Cauchy en considérant la courbe englobant la partie réelle positive du plan complexe. Le point critique est en -1 car on se rapporte à $1 + H_{BO}$.

1.3.6 Critère du Revers

Un système bouclé est stable en boucle fermée si et seulement si le point critique -1 reste à gauche en parcourant le lieu de Nyquist de H_{BO} dans le sens des ω croissants.

Valable que si H_{BO} n'a pas de pôle à partie réelle positive.

Démonstration. Cas particulier du critère de Nyquist.

1.3.7 Marge de phase et de gain

Soit ω_c la pulsation de coupure, i.e. $|H_{BO}(j\omega_c)| = 1$. Alors la marge de phase est

$$M_\varphi = \varphi(\omega_c) - (-180^\circ)$$

Soit ω_1 tel que $\varphi(\omega_1) = -180^\circ$. Alors la marge de gain est

$$M_G = -20 \times \log |H_{BO}(j\omega_1)|$$

En pratique, il y a stabilité pour $M_\varphi \geq 45^\circ$ et $M_G \geq 6$ dB.

1.3.8 Facteur de résonance

Il y a résonance en $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$. Le facteur de résonance est

$$Q = 20 \times \log \left(\frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

À savoir faire. Lire Q sur un diagramme de Bode (la parallèle à l'asymptote en BF passant par le maximum).

En pratique, il y a stabilité pour $Q \leq 2.3$ dB.

Marge de Gain et de Phase sur un Nyquist et Bode

1.3.9 Abaque de Black-Nichols

L'abaque est constitué d'un réseau de courbes isophases et isomodules en boucle fermée par retour unitaire.

En traçant un lieu de H_{BO} on trouve

- Le facteur de qualité Q par l'isomodule tangent.
- La marge de phase M_φ et de gain M_G (voir fig. 2).

À faire au moins une fois dans sa vie. Utiliser le module Control Design de MatLab-Simulink pour régler un correcteur via un abaque de Black-Nichols.

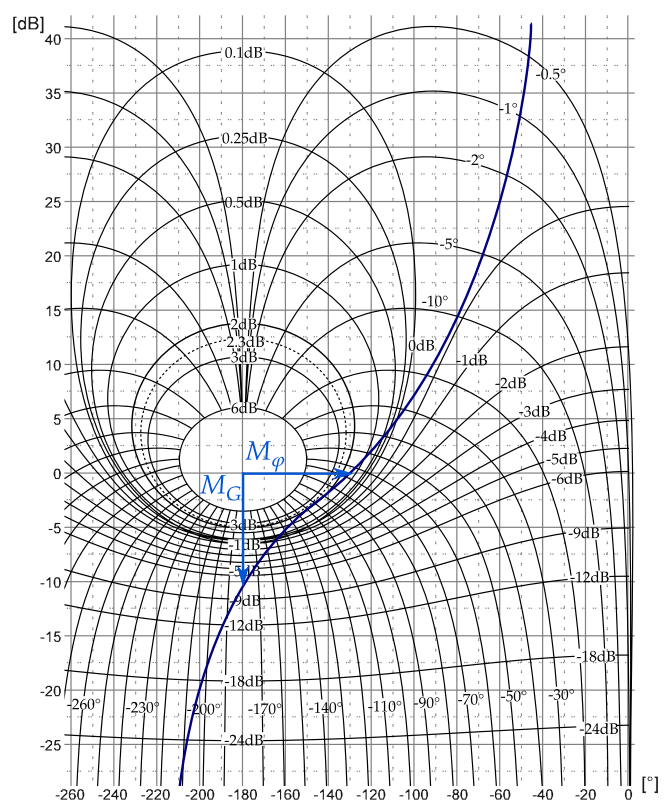


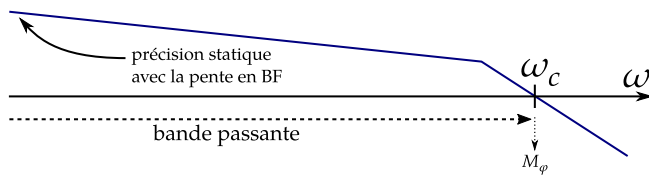
FIG. 2 : Abaque de Black-Nichols avec le lieu d'une H_{BO}

1.3.10 Modes et Pôles dominants

Voir fig. 1. On peut approximer une fonction de transfert avec ses pôles dominants (les plus proches de l'origine) après le début du régime transitoire.

1.4 Correcteurs (Régulateurs)

Pour améliorer la stabilité, précision et la rapidité d'un système asservi on peut ajouter et régler un correcteur.



Visualisation des critères sur le Bode de H_{BO}

1.4.1 Les correcteurs en parallèle

- Retour avec une grandeur physique intermédiaire,
- **La compensation** en mesurant la perturbation,
- **Chaîne d'anticipation** (feedforward) avec l'entrée.

1.4.2 Les correcteurs en série

Mise en place plus simple qu'en parallèle, très utilisés.

- **Correction proportionnelle (P)** : meilleures rapidité et précision mais la stabilité diminue (ω_c augmente donc M_φ diminue). $C(p) = K$
- **Correction intégrale (I)** : meilleure précision mais la stabilité diminue (-90° pour M_φ). $C(p) = \frac{1}{T_i p}$
- **Correction dérivée (D)** : meilleure rapidité et stabilité ($+90^\circ$ pour M_φ) mais la précision diminue et risque de bruit en hautes fréquences. $C(p) = T_D p$

1.4.3 Les correcteurs classiques

1.4.3.1 Le correcteur PI

Améliore la précision en ajoutant un intégrateur.

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

Méthode de réglage.

1. Choisir la pulsation de coupure ω_c en réglant K .
2. Choisir la marge de phase M_φ en réglant $T_i < \omega_c$.

1.4.3.2 Le correcteur à retard de phase

Pour éviter l'instabilité due à l'intégrateur du PI, on utilise

$$C(p) = K \frac{1 + T p}{1 + a T p} \quad \text{avec } a > 1$$

Utilisation.

- Règle la précision (placé dans les basses fréquences),
- Règle la marge de phase (placé dans les hautes fréquences).

Point d'inflexion en $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$ où $\sin(\varphi_m) = \frac{1-a}{1+a}$

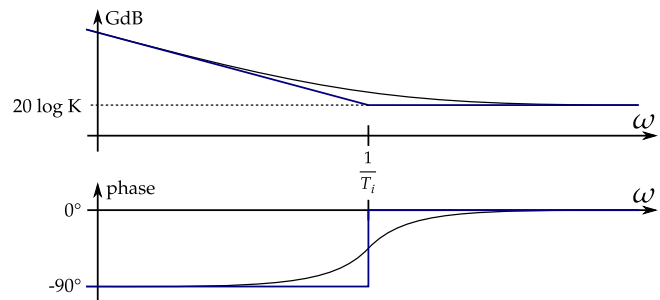


Diagramme de Bode du PI et retard de phase

1.4.3.3 Le correcteur PD

Analogie du correcteur PI.

Le correcteur PD n'est pas physique

$$C(p) = K (1 + T_d p)$$

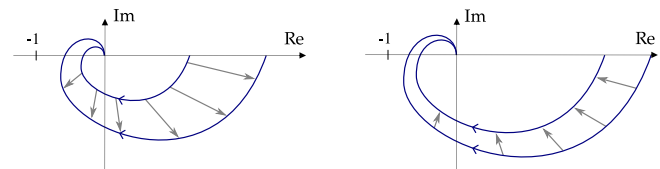
On bloque donc les BF avec $\tau \ll T_d$

$$C(p) = K \left(1 + \frac{T_d p}{1 + \tau p} \right) \approx K \frac{1 + T_d p}{1 + \tau p}$$

1.4.3.4 Le correcteur à avance de phase

Analogie du correcteur à retard de phase.

$$C(p) = K \frac{1 + T p}{1 + a T p} \quad \text{avec } a < 1$$



Effet de la correction par retard de phase

Effet de la correction par avance de phase

1.4.3.5 Le correcteur PID

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \tau_d p \right)$$

2 Mécanique

2.1 Rappels de première année

2.1.1 Formule de Willis

À savoir retrouver très rapidement, soit en repartant du roulement sans glissement (méthode longue), soit directement en se plaçant sur le porte-sattelites.

Par exemple :

$$\frac{\omega_{1/ps}}{\omega_{3/ps}} = -\frac{Z_3}{Z_1} \frac{Z_2}{Z_2}$$

2.1.2 Formule de la base mobile

La formule de la base mobile, aussi appelée **formule de Bour**, est une relation entre les dérivées temporelles d'un vecteur par rapport à deux référentiels distincts.

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{u}$$

2.1.3 Théorème de Varignon

Chaque torseur est composé d'une **résultante** et d'un **moment** (dépendant du point). Le théorème de Varignon permet de déplacer le point d'écriture du torseur.

Par exemple pour le torseur cinématique, on obtient la formule de Varignon

$$\vec{V}_{B, S/R} = \vec{V}_{A, S/R} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}$$

Pour retenir. « BABAR »

Démonstration. Avec la formule de la base mobile sur $\frac{d\vec{AB}}{dt}$ puis une relation de Chasles $\vec{AB} = -\vec{OA} + \vec{OB}$.

2.1.4 Modélisation des actions mécaniques

On distingue :

- Les actions volumiques : l'action exercée sur pour un volume élémentaire $d\tau$ est

$$d\vec{f}(M) = \vec{f}_v(M) d\tau$$

- Les actions surfaciques : l'action exercée sur pour une surface élémentaire dS est

$$d\vec{f}(M) = \vec{f}_s(M) dS$$

Ainsi l'action appliqué à une particule infinitésimale de masse dm , de volume dV et de surface dS est

$$d\vec{f} = \vec{f}_v(M) dV + \vec{f}_s(M) dS$$

2.1.5 Formule de Gibbs

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

2.2 Dynamique des solides

On se limite à des **solides indéformables** et à **masse conservative**.

2.2.1 Les torseurs utilisés

Le torseur cinématique

$$\{\mathcal{U}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{A, S/R} \end{array} \right\}_A$$

Le torseur des actions mécaniques

$$\{\mathcal{T}_{E/E}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{E/E} \\ \vec{M}_{A, E/E} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \int_E d\vec{f} \\ \int_E \vec{AM} \wedge d\vec{f} \end{array} \right\}_A$$

Le torseur cinétique

$$\{\mathcal{C}_{E/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{C(E/R)} \\ \vec{\sigma}_{A, E/R} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \int_E \vec{V}_{M, E/R} dm \\ \int_E \vec{AM} \wedge \vec{V}_{M, E/R} dm \end{array} \right\}_A$$

Le torseur dynamique

$$\{\mathcal{D}_{E/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{D(E/R)} \\ \vec{\delta}_{A, E/R} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \int_E \vec{a}_{M/R} dm \\ \int_E \vec{AM} \wedge \vec{a}_{M/R} dm \end{array} \right\}_A$$

2.2.2 Propriétés de ces torseurs

$$\begin{aligned} \vec{R}_{C(E/R)} &= m \vec{V}_{G, E/R} \\ \vec{R}_{D(E/R)} &= \left. \frac{d\vec{R}_{C(E/R)}}{dt} \right|_R = m \vec{a}_{G, E/R} \\ \vec{\delta}_{A, E/R} &= \left. \frac{d\vec{\sigma}_{A, E/R}}{dt} \right|_R + m \left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_R \wedge \vec{V}_{G, E/R} \end{aligned}$$

Démonstration. Avec la définition des torseurs.

2.2.3 Théorème des actions réciproques

$$\{\mathcal{T}_{E2/E1}\} = -\{\mathcal{T}_{E1/E2}\}$$

2.2.4 Théorèmes généraux de la mécanique

Le principe fondamental de la dynamique dit qu'il existe au moins un référentiel R (dit galiléen) tel que

$$d\vec{f}(M) = \vec{a}_{M/R} dm$$

Démonstration. Voir le cours de Physique.

On obtient le théorème de la résultante et du moment :

$$\{\mathcal{T}_{E/E}\} = \{\mathcal{D}_{E/R}\}$$

Démonstration. On utilise la relation précédente avec la définition des torseurs.

2.2.5 Un peu d'algèbre linéaire

On considère le plan euclidien. Soit le vecteur \overrightarrow{AG} de coordonnées (x, y, z) dans la base canonique.

Soit M la matrice canoniquement associée à l'application linéaire $f : \vec{u} \mapsto \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM})$:

$$M = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Voir le cours de Mathématiques.

2.2.6 Opérateur d'inertie

$\mathcal{I}(A, S)$ est l'opérateur d'inertie du solide S exprimé en A .

$$\mathcal{I}(A, S) : \vec{u} \mapsto \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}) dm$$

Alors on a la **propriété importante**

$$\vec{\sigma}_{A, S/R} = \mathcal{I}(A, S) \vec{\Omega}_{S/R} + m \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A, S/R}$$

2.2.7 Matrice d'inertie

La matrice d'inertie est la matrice associée à l'opérateur d'inertie. Elle est symétrique réelle donc il existe une **base principale d'inertie** où elle est diagonale et ses valeurs propres sont les **moments principaux d'inertie**.

Par ce qui précède

$$\mathcal{I}(A, S) = \int_S M dm$$

À savoir faire. Trouver la matrice d'inertie d'objets rudimentaires dans une base bien choisie.

2.2.8 Théorème de Huyghens

Le théorème de Huyghens s'écrit

$$\mathcal{I}(A, S) \vec{u} = \mathcal{I}(G, S) \vec{u} + m \overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG})$$

Donc avec ce qui précède avec $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG}$

$$\mathcal{I}(A, S) = \mathcal{I}(G, S) + m M$$

Démonstration. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}$ dans $\mathcal{I}(A, S)$.

2.2.9 Moment d'inertie par rapport à une droite

On note d la distance entre deux objets dans l'espace.

Le moment d'inertie par rapport à une droite Δ de vecteur directeur \vec{u} passant par O est

$$J_{(S/\Delta)} = \int_S (d(M, \Delta))^2 dm = \vec{u} \cdot \mathcal{I}(O, S) \vec{u}$$

Le théorème de Huyghens implique que

$$J_{(S/\Delta)} = J_{(S/\Delta')} + m (d(\Delta, \Delta'))^2$$

2.2.10 Caractéristiques d'inertie

Les caractéristiques d'inertie du solide indéformable S sont

- Sa masse m ,
- Son centre d'inertie G ,
- Son opérateur d'inertie $\mathcal{I}(\cdot, S)$.

2.2.11 Méthode de résolution d'un problème

Pour trouver les paramètres du mouvement (cinématique du solide S par rapport à R) :

- Résultante :

$$- \text{La résultante vaut } m \vec{a}_{G, S/R} = m \left. \frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} \right|_R$$

- Moment $\vec{\delta}_{A, S/R}$:

- Si on a l'opérateur d'inertie en G ,

$$1. \vec{\delta}_{A, S/R} = \vec{\delta}_{G, S/R} + m \overrightarrow{AG} \wedge \vec{a}_{G, S/R}$$

$$2. \vec{\delta}_{G, S/R} = \left. \frac{d \vec{\sigma}_{G, S/R}}{dt} \right|_R$$

$$3. \vec{\sigma}_{G, S/R} = \mathcal{I}(G, S) \vec{\Omega}_{S/R}$$

- Sinon,

$$1. \vec{\delta}_{A, S/R} = \left. \frac{d \vec{\sigma}_{A, S/R}}{dt} \right|_R + m \left. \frac{d \overrightarrow{OA}}{dt} \right|_R \wedge \vec{V}_{G, S/R}$$

$$2. \vec{\sigma}_{A, S/R} = \mathcal{I}(A, S) \vec{\Omega}_{S/R} + m \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A, S/R}$$

2.2.12 Théorèmes de Guldin (hors programme)

Pour trouver une aire par révolution d'un arc. Soit (AB) un arc plan dans (O, \vec{x}, \vec{y}) de longueur L et de centre d'inertie G .

$$A = L \times \text{longueur du cercle décrit par } G$$

Démonstration. Partir de $A = 2\pi \int_{(AB)} x dL$ et introduire la masse linéique ρ .

Pour trouver un volume par révolution d'une surface. Soit une surface dans (O, \vec{x}, \vec{y}) d'aire A et de centre d'inertie G .

$$V = A \times \text{longueur du cercle décrit par } G$$

Démonstration. Partir de $V = 2\pi \int_S x dS$ et introduire la masse linéique ρ .

2.2.13 Cas dans un référentiel non Galiléen (hors programme)

Ce référentiel non galiléen se déplace par rapport à un référentiel galiléen.

Ainsi il faut prendre en compte les forces d'entraînement et la force de Coriolis.

Pour plus de détail : Introduction à la mécanique du point

2.3 Théorème de l'énergie cinétique

2.3.1 Énergie cinétique de S par rapport à R

L'énergie cinétique de S par rapport à R est

$$T(S/R) = \frac{1}{2} \int_S \vec{V}_{M, S/R}^2 dm$$

2.3.2 Puissance des efforts extérieurs

La puissance des efforts extérieurs sur le solide S est

$$P_{e(\vec{S} \rightarrow S/R)} = \{\vec{J}_{\vec{S}/S}\}_A \otimes \{\vec{U}_{S/R}\}_A$$

2.3.3 Puissance des efforts intérieurs

La puissance des efforts intérieurs de l'ensemble de solide E est

$$P_{int(E)} = \sum_{i \neq j} \{\vec{J}_{i/j}\}_A \otimes \{\vec{U}_{j/i}\}_A$$

Pour une liaison parfaite cette puissance est nulle sinon négative.

2.3.4 Puissance des quantités d'accélération

La puissance des quantités d'accélération du solide S est

$$P_{a(S/R)} = \{\vec{D}_{S/R}\}_B \otimes \{\vec{U}_{S/R}\}_B$$

Donc

$$P_{a(S/R)} = \frac{dT(S/R)}{dt}$$

Démonstration. Par le calcul en utilisant la définition des torseurs et de l'énergie cinétique.

2.3.5 Théorème de l'énergie cinétique

Aussi appelé « théorème de l'énergie/puissance » par le programme.

Pour un ensemble E de solides

$$\frac{dT(E/R)}{dt} = P_{e(\vec{E} \rightarrow E/R)} + P_{int(E)}$$

Démonstration. Le PFD donne $P_{e(\vec{S} \rightarrow S/R)} = P_{a(S/R)}$ pour un solide. On généralise ensuite pour un ensemble de solides.

2.3.6 Expression de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} T(S/R) &= \frac{1}{2} m \vec{V}_{A, S/R}^2 \\ &+ \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \mathcal{I}(A, S) \vec{\Omega}_{S/R} \\ &+ (m \vec{AG}, \vec{V}_{A, S/R}, \vec{\Omega}_{S/R}) \end{aligned}$$

Démonstration (à savoir faire). À partir de la définition de $T(S/R)$ et avec la formule de Varignon.

Remarque. Le choix du point A n'est important que pour le calcul. Il faut donc le choisir astucieusement.

Il est plus astucieux parfois d'utiliser cette expression qui se montre par calcul à partir de la définition des torseurs.

$$T(S/R) = \frac{1}{2} \{C_{S/R}\} \otimes \{U_{S/R}\}$$

2.3.7 Utilisation du théorème de l'énergie cinétique

2.3.7.1 Posologie

Théorème à utiliser sur un système régi par un seul paramètre de mouvement. À éviter s'il existe des frottements que l'on ne souhaite pas déterminer.

2.3.7.2 Calcul d'une inertie équivalente

Pour calculer l'inertie équivalente de $E = 1 + 2 + 3$, on écrit

$$T(E/R) = T(1/R) + T(2/R) + T(3/R) = \frac{1}{2} I_{eq} \omega_1^2$$

2.4 Mobilité, hyperstaticité

2.4.1 Nombre cyclomatique

On note v le nombre de cycles indépendants d'une chaîne fermée complexe. Pour L liaisons et $(N - 1)$ pièces autres que le bâti

$$v = L - (N - 1)$$

2.4.2 Analyse cinématique

Dans le plan on peut écrire $E_c = 3v$ équations par la fermeture de chaîne cinématique et dans l'espace :

$$E_c = 6v$$

Le nombre d'inconnues cinématiques est :

$$I_c = \sum_{\text{liaisons}} \text{DDL}$$

Dans le plan, $\text{DDL}_{\text{liaison}} \leq 3$.

2.4.3 Analyse statique

Le nombre d'équations de statique que l'on peut écrire dans l'espace est :

$$E_s = 6(N - 1)$$

Le nombre d'inconnues d'effort est :

$$I_s = \sum_{\text{liaison}} (6 - I_c \text{ liaison})$$

2.4.4 Mobilité cinématique

Soit r_c le rang du système $\{\mathcal{U}_{S_i/S_i}\} = \{0\}$. Ainsi la mobilité cinématique est :

$$m_c = I_c - r_c$$

On remarque que : $m_c = m_{\text{utile}} + m_{\text{interne}}$

2.4.5 Déterminant caractéristique

On note r_s le rang du système $\{\mathcal{T}_{\text{ext}/S_i}\} = \{0\}$.

$E_s - r_s$ conditions doivent être vérifiées pour que le mécanisme soit en équilibre.

2.4.6 Hyperstaticité

On note h l'hyperstaticité :

$$h = I_s - r_s$$

En étude statique, c'est le nombre d'inconnues de liaisons en trop pour résoudre le système.

En étude cinématique, dans une base bien choisie, c'est le nombre d'équations $0 = 0$ obtenues.

Si $h = 0$, alors le système est **isostatique**.

2.4.7 Formule de mobilité

$$m_c - h = I_c - E_c = E_s - I_s$$

Le plus souvent m_c est évident et alors la méthode cinématique est directe :

$$h = m_c - (I_c - E_c)$$

Démonstration. Voir le cours.

2.5 Équilibrage

2.5.1 Solide équilibré

Un solide en rotation autour d'un axe fixe est dit équilibré si les actions qu'il exerce sur le bâti qui le supporte sont constantes au cours du temps.

2.5.2 Théorème

Un solide en rotation autour d'un axe fixe est équilibré si seulement si :

- Équilibrage statique : centre d'inertie $G \in$ axe rotation,
- Équilibrage dynamique : l'axe de rotation est un axe principal d'inertie.

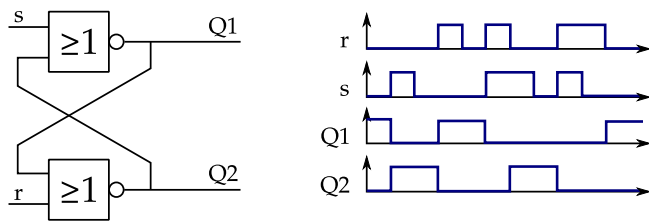
2.5.3 Question de cours

On peut équilibrer avec une unique masse si la bonne composante de la matrice d'inertie est nulle. Savoir refaire pour équilibrer avec deux masses.

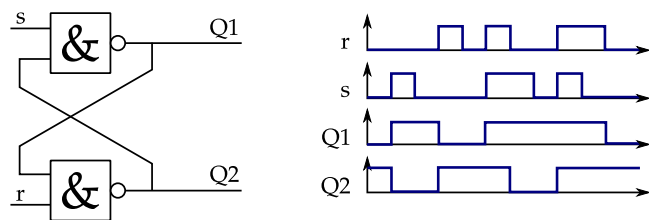
3 Logique séquentielle

3.1 Circuits logiques

3.1.1 Bascule RS



Exemple de réalisation : Déclenchement prioritaire



Exemple de réalisation : Enclenchement prioritaire

3.2 Diagrammes SysML

3.2.1 Architecture des systèmes

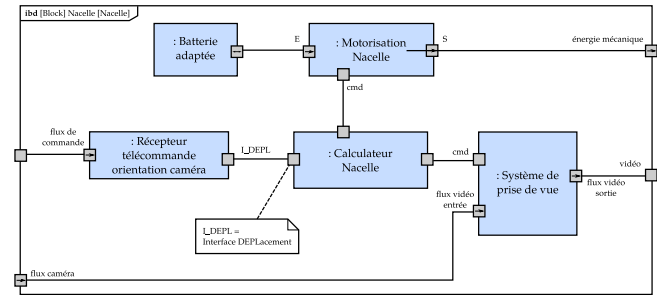
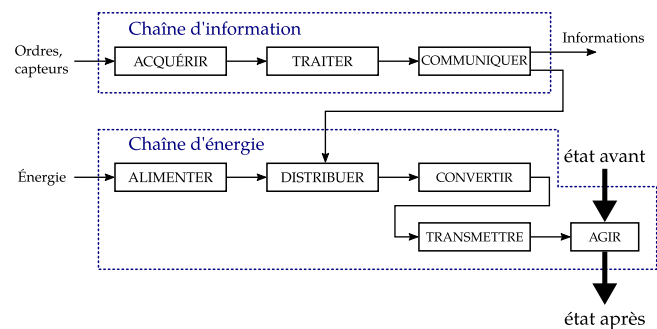


Diagramme des blocs internes (ibd)



Chaîne d'information et d'énergie (à savoir faire)

Le diagramme de blocs internes se compose de flux de matière, d'énergie et d'information.

Voici quelques exemples classiques d'architectures :

- Pour un système utilisant un moteur Courant-Continu :
 1. **Alimenter** : batterie ou { transformateur, redresseur (pont de diodes) et filtrage },
 2. **Distribuer** : pont en H,
 3. **Convertir** : moteur CC,
 4. **Transmettre** : réducteur, poulie-couroie...
 5. **Agir** : déplacement du robot...
- Pour un système pneumatique :
 1. **Alimenter** : tête de ligne qui reçoit l'énergie pneumatique d'un compresseur,
 2. **Distribuer** : distributeur ou électrovanne,
 3. **Adapter** : réducteur de débit, bloqueur...
 4. **Convertir** : actionneur pneumatique comme un vérin, une ventouse...
 5. **Agir** : aspiration, mouvement...

4 Hydraulique et pneumatique de puissance

Ce chapitre est hors programme en PSI mais permet de comprendre le fonctionnement de certains systèmes.

4.1 Pneumatique de puissance

4.1.1 Distribution de l'énergie

Avant chaque système il y a une tête de ligne, aussi appelée une unité de conditionnement de l'air FRL. Il est composé de :

- **Un filtre** : assèche l'air et filtre les impuretés,
- **Un manomètre régulateur** : régule/règle la pression,
- **Un lubrificateur** : évite la corrosion et améliore le glissement.