Лекция 8

Метод простой итерации

II. Численные методы решения алгебраических и трансцедентных уравнений

5. Метод простой итерации

Для использования этого метода исходное нелинейное уравнение записывается в виде

$$x = f(x)$$

Пусть известно начальное приближение корня $x = c_0$. Подставляя это значение в правую часть уравнения, получаем новое приближение $c_1 = f(c_0)$. Подставляя каждый раз в это уравнение новое значение корня получаем последовательность значений: $c_k = f(c_{k-1})$, $k = 1, 2, 3…$

5. Метод простой итерации

Итерационный процесс прекращается, если результаты двух последовательных итераций близки, т. е. если выполнено неравенство $|c_k - c_{k-1}| < \varepsilon$. Достаточное условие сходимости метода простой итерации дается следующей теоремой.

5. Метод простой итерации

Теорема. Пусть $x = c$ – корень уравнения $x = f(x)$, т. е. $c = f(c)$, а $|f'(c)| < 1$ и $f'(x)$ непрерывна. Тогда существует окрестность ξ корня $c (c \in \xi)$ такая, что если начальное приближение c_0 принадлежит этой окрестности, то для метода простой итерации последовательность значений $\{c_k\}$ сходится к c при $k \to \infty$.

5. Метод простой итерации

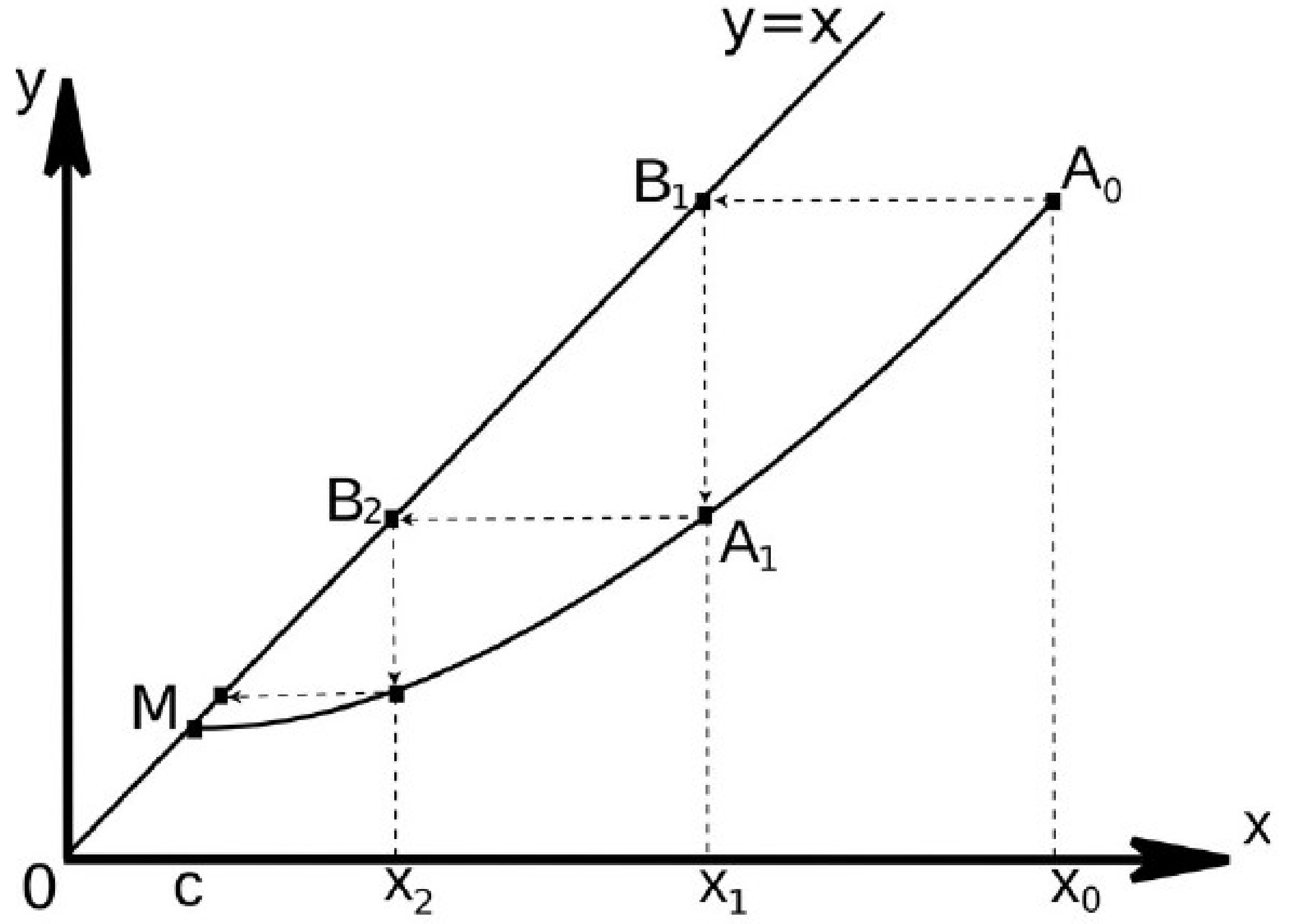
Геометрически способ итерации может быть пояснен следующим образом. Построим графики функций $y = x$ и $y = f(x)$. Каждый действительный корень с уравнения $x = f(x)$ является абсциссой точки пересечения M кривой $y = f(x)$ с прямой $y = x$.

5. Метод простой итерации

Отправляясь от некоторой точки $A_0(x_0, f(x_0))$, строим ломаную линию $A_0\ B_1\ A_1\ B_2\ A_2$ ... («лестница»), звенья которой попеременно параллельны осям $0x$ и Oy, вершины $A0$, $A1$, $A2$... лежат на кривой $y = f(x)$, а вершины B_1 , B_2 , ... на прямой $y = x$.

Общие абсциссы точек A_1 и B_1 , A_2 и B_2 , ..., очевидно, представляют собой соответственно последовательные приближения x_1 , x_2 , .. . корня c.

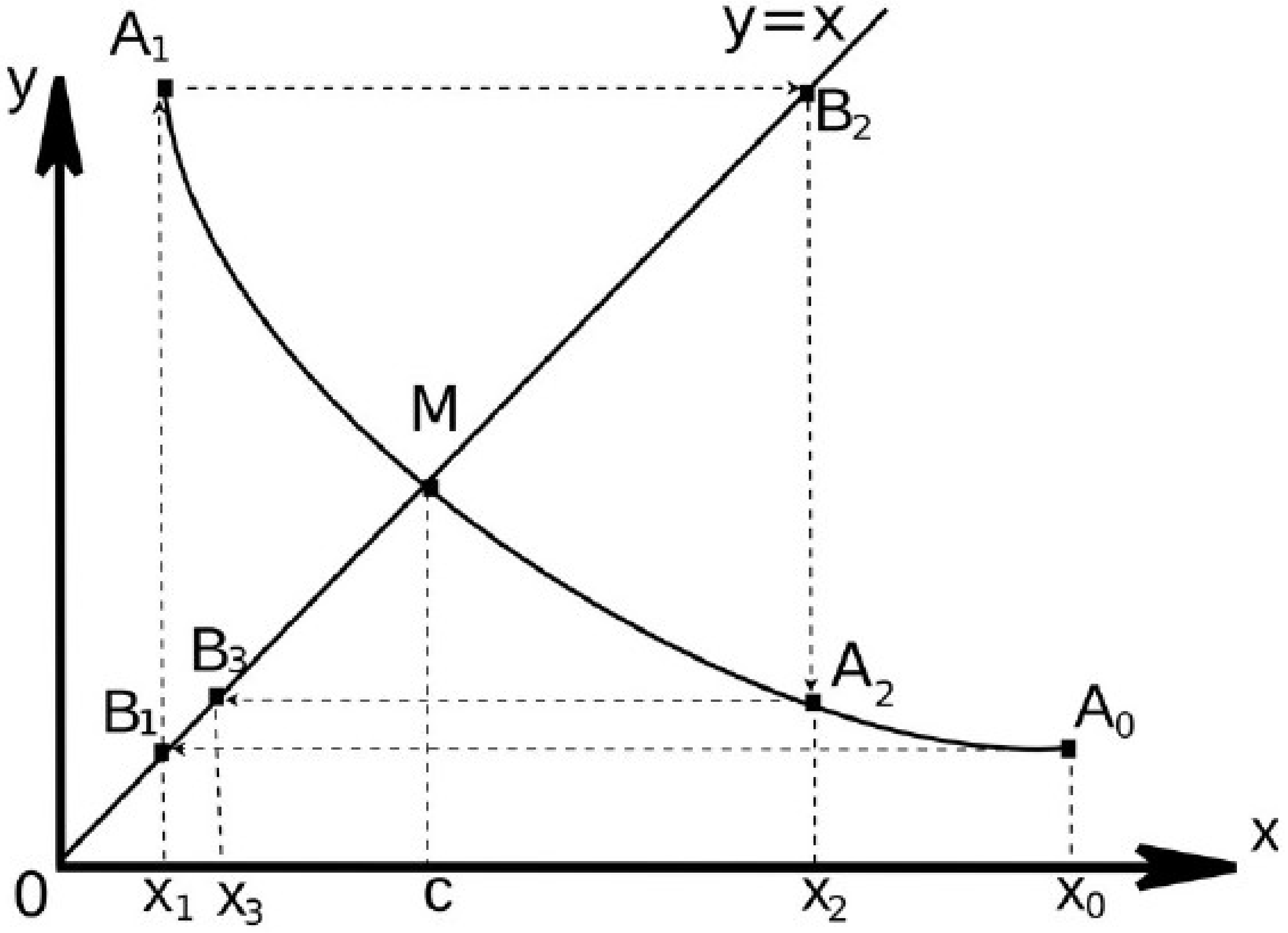
5. Метод простой итерации



5. Метод простой итерации

Возможен также другой вид ломаной A_0 B_1 A_1 B_2 A_2 ... («спираль»).
Нетрудно заметить, что решение в виде «лестницы» получается, если производная `f'(x)` положительна, а решение в виде «спирали», если `f'(x)` отрицательна.

5. Метод простой итерации



5. Метод простой итерации

Итерационный метод имеет одно важное свойство, называемое **самоисправляемостью**. Поскольку начальное приближение x0 выбирается произвольно, то отсюда следует, что полученное в итерационном процессе n-е приближение при желании можно считать начальным. Это означает, что если в процессе вычисления приближений допускались ошибки, то они не влияют на окончательный результат.

5. Метод простой итерации

Задание 1. Уточнить корень уравнения

$$\sin(2x)-\ln(x) = 0$$

Методом простой итерации на отрезке $[1,3;\ 1,5]$ с точностью до 10^{-4}

5. Метод простой итерации

Метод простой итерации можно использовать с уравнением общего вида:

$$x = x - m\, f(x),$$

где m — отличная от нуля константа.

В этом случае $f(x) = x - m\, F(x)$ и тогда наше уравнение примет вид:

$$f(x) = x - m(\sin 2x - \ln x)$$

5. Метод простой итерации

Производная

$$F'(x) = 2\cos 2x - \frac{1}{x}$$

на отрезке `[1,3; 1,5]` отрицательна, следовательно, F(x) на этом отрезке монотонно убывает. Её значения на концах: `F(1,3) = 0,25`; `F(1,5) = −0,26`.

5. Метод простой итерации

Значение m необходимо подобрать такое, что для всех x отрезка [1,3; 1,5] значение выражения

$$m\left(2\cos 2x - \frac{1}{x}\right)$$

будет правильной положительной дробью.

5. Метод простой итерации

В качестве значения m примем

$$m = -\frac{1}{\left|F'(1,5)\right|} = -0,37$$

тогда рекуррентное соотношение примет вид:

$$x_{n+1} = x_n + 0,37\left(\sin 2x_n - \ln x_n\right)$$

5. Метод простой итерации

Для оценки погрешности n-го приближения используется формула

$$\Delta x_n \leqslant \frac{q}{1-q}\left|x_n - x_{n-1}\right|$$

где q можно получить как верхнюю границу модуля производной |f´(x)| при x∈[a;b]

5. Метод простой итерации

$$q = \max_{1,3 \le x \le 1,5} \left| f'(x) \right| = \max_{1,3 \le x \le 1,5} \left| 1 + 0,37 \left(2\cos(2x) - \frac{1}{x} \right) \right| \approx 0,081$$

Можно принять q = 0,1

5. Метод простой итерации

Описание входных, выходных и промежуточных данных:

x — начальное значение координаты x, корень на выходе
eps — точность вычислений
q — верхняя граница модуля производной

5. Метод простой итерации

```
Console.WriteLine("Введите величины");
Console.Write("x = ");
double x = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
Console.Write("eps = ");
double eps = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
Console.Write("q = ");
double q = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
```

5. Метод простой итерации

```
double a = eps * (1 - q) / q;
double p, y;
do {
    y = x + 0.37 * (Math.Sin(2 * x) - Math.Log(x));
    p = x - y;
    x = y;
} while (Math.Abs(p) > a);
Console.Write($"x = {x:f6}\n");
```

5. Метод простой итерации

Вывод:

```
x = 1,4
eps = 0,0001
q = 0,1
x = 1,399451
```