ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ (аппроксимация)

Во многих задачах возникает проблема замены некоторой функции, заданной аналитически или таблично, другой, близкой к первой, но более простой и удобной при вычислениях. Другая задача — восстановление функции на некотором отрезке по заданным на этом отрезке значениям функции в дискретном множестве точек.

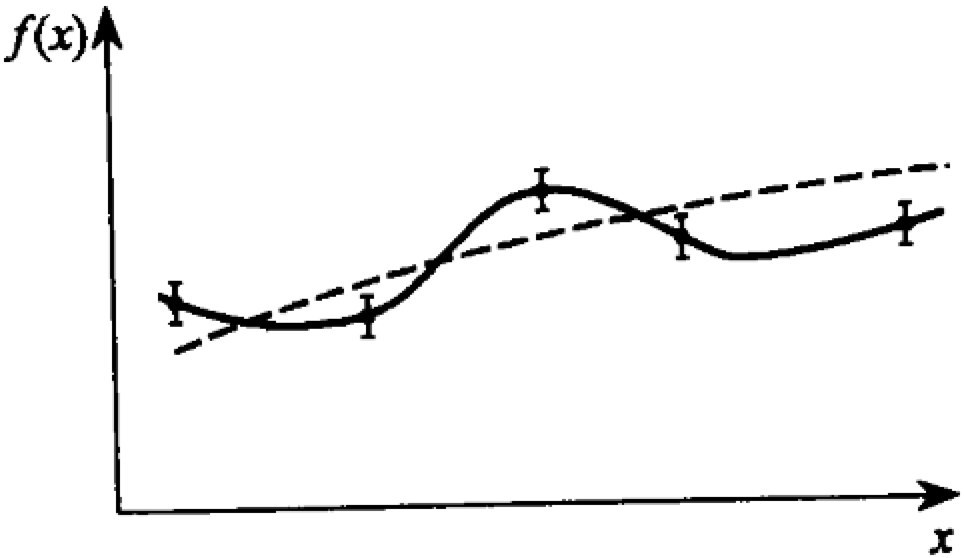
В общем случае при постановке задачи приближения необходимо ответить на следующие вопросы:

1. Какой класс приближающих функций необходимо выбрать.

2. Какой выбрать критерий близости исходной и приближающей функции. В качестве критерия можно выбрать, например, точное совпадение приближаемой и приближающей функций в узловых точках (интерполяция); минимум суммы квадратов отклонения в узловых точках (метод наименьших квадратов) или другие.

3. Указать правило, позволяющее получить значение функции в промежутках между узлами, в частности, ответить на вопросы, какие узлы использовать для построения приближающей функции и как их расположить.

Пример



Среднеквадратичное приближение – пунктир.
Интерполяция - сплошная линия.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы $(n + 1)$ несовпадающих точек
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$
и $(n + 1)$ значений функции $f_i = f(x_i)$, $i = 0,\ldots,n$.

В задаче интерполяции требуется по табличным значениям (x_i, f_i) построить функцию $\varphi(x)$, такую, что значения $\varphi(x)$ легко вычисляются при любом $x \in [a, b]$ и при этом $\varphi(x_i) = f(x_i)$.

Наиболее распространен способ линейной интерполяции, в случае которой приближающая функция ищется в виде линейной комбинации некоторых базисных функций $\varphi_i(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$$

Интерполяционный многочлен

В качестве базисных функций можно выбрать любую линейно независимую систему функций, но чаще всего выбираются степенные функции 1, x, x^2,…, x^n. Это объясняется тем, что многочлены легко вычисляются и теория интерполяции многочленами хорошо разработана. Приближающую функцию в этом случае ищем в виде многочлена степени n:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Для определения значений коэффициентов a_i требуется решить систему уравнений $P(x_i)=f_i$; $i=0,\ldots,n$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = f_1 \\ \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = f_n \end{cases}$$

Определитель этой системы является ненулевым определителем Вандермонда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{j>i\geq 0}^{n} (x_j - x_i) \neq 0$$

Таким образом, решение системы существует и единственно, а это означает, что для таблицы значений функции (x_i, f_i), $i=0,\ldots,n$ существует единственный интерполяционный многочлен степени n.

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Будем искать интерполяционный многочлен в виде $L(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$,
где многочлен $l_i(x)$ представляет собой многочлен степени n, удовлетворяющий условию $l_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

Условие равенства нулю означает, что все x_j за исключением x_i являются корнями многочлена l_i и по теореме о разложении многочлена по корням: $l_i(x)=C_i(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)$

Найдем C_i исходя из условия равенства единице при $i=j$:

$$C_i=\frac{1}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

Таким образом, интерполяционный многочлен в форме Лагранжа будет выглядеть так:

$$L(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\sum_{i=0}^{n} f_i \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

Пример

По таблице:

x	-1	0	1	2
y	4	2	0	1

построим интерполяционный многочлен в форме Лагранжа:

$$L(x)=4\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)}+2\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(1)(-1)(-2)}$$

$$+1\frac{(x+1)x(x-1)}{(3)(2)(1)}=\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x+2$$

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Основное преимущество формы записи интерполяционного многочлена Ньютона в сравнении с формой Лагранжа заключается в отсутствии необходимости перестраивать весь многочлен при добавлении новой точки в таблицу.

Для вывода интерполяционного многочлена в форме Ньютона понадобится понятие о разделенных разностях.

Разделенные разности

Разделенные разности ***нулевого*** порядка совпадают со значениями функции.

Разделенные разности ***первого*** порядка определяются соотношениями:

$$f(x_i;x_j)=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$$

Разделенные разности ***второго*** порядка определяются через разделенные разности первого порядка:

$$f(x_i;x_j;x_k)=\frac{f(x_i;x_j)-f(x_j;x_k)}{x_i-x_k}$$

Разделенная разность ***порядка n*** определяется соотношением:

$$f(x_i;x_j;x_k;...;x_n)=\frac{f(x_i;x_j;x_k;...;x_{n-1})-f(x_i;x_j;x_k;...;x_n)}{x_i-x_n}$$

Если функция задана таблицей значений в четырех точках: x_0, x_1, x_2, x_3 , то разделенные разности удобно вычислять в следующем порядке:

$f(x_0)$ $f(x_1)$ $f(x_2)$ $f(x_3)$	$f(x_0;x_1)$ $f(x_1;x_2)$ $f(x_2;x_3)$	$f(x_0;x_1;x_2)$ $f(x_1;x_2;x_3)$	$f(x_0;x_1;x_2;x_3)$

Разделенные разности более высоких порядков равны нулю.

Вывод формулы интерполяционного многочлена в форме Ньютона:

1. $f(x;x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Rightarrow f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x;x_0)$

2. $f(x;x_0;x_1)=\dfrac{f(x;x_0)-f(x_0;x_1)}{x-x_1}\Rightarrow f(x;x_0)=f(x_0;x_1)+(x-x_1)f(x;x_0;x_1)$

подставляя 2 в 1 получаем:

3. $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0;x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x;x_0;x_1)$

Продолжая дальше в итоге получим:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0;x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x;x_0;x_1)+...+$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)f(x_0;x_1;...;x_n)$$

Сглаживание методом наименьших квадратов

При проведении некоторых экспериментальных исследований наблюдаются частые и резкие изменения значений измеряемых величин. Чтобы избежать трудностей в изучении таких процессов и управлении ими, используют ***сглаживание***.

Применять сглаживание нужно осмотрительно. В некоторых случаях резко выделяющиеся точки могут характеризовать существенные качественные изменения, происходящие в исследуемом объекте. Сглаживая экспериментальные данные, можно легко утратить информацию о таких явлениях.

Сущность метода наименьших квадратов, для табличной функции состоит в том, чтобы отыскать такую аналитическую зависимость из некоторого класса функций, для которой сумма квадратов отклонений по всем точкам таблицы была бы минимальной.

Пусть связь между аргументами x_i и значениями функции f_i (i=0,…,n) приближенно описывается выражением:

$y = p(x, a_0, ..., a_k)$ с числовыми параметрами $a_0, ..., a_k$.

Требуется определить такие значения этих параметров, при которых сумма квадратов отклонений

$$\sum_{i=0}^{n} (p(x_i, a_0, ..., a_k) - y_i)^2$$ будет наименьшей.

Для многочлена *k*-й степени $P_k(x) = a_k x^k + ... + a_1 x + a_0$

сумма квадратов отклонений представляет собой неотрицательную функцию переменных $a_0, ..., a_k$

$$F(a_0, ..., a_k) = \sum_{i=0}^{n} (a_k x_i^k + ... + a_1 x_i + a_0 - y_i)^2$$

Требующиеся нам наилучшие коэффициенты многочлена должны давать минимум функции F.

Необходимым условием экстремума дифференцируемой функции многих переменных является равенство нулю ее частных производных по всем переменным, следовательно задача отыскания коэффициентов сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_0} = 0, \\ ... \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_k} = 0 \end{cases}$$

Дифференцируя F по каждой переменной, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_k a_k = d_0 \\ c_1 a_0 + c_2 a_1 + c_3 a_2 + \ldots + c_{k+1} a_k = d_1 \\ \ldots \\ c_k a_0 + c_{k+1} a_1 + c_{k+2} a_2 + \ldots + c_{2k} a_k = d_k \end{cases}$$

где $c_m = \sum_{i=0}^{n} x_i^m, m = 0, \ldots, 2k;$

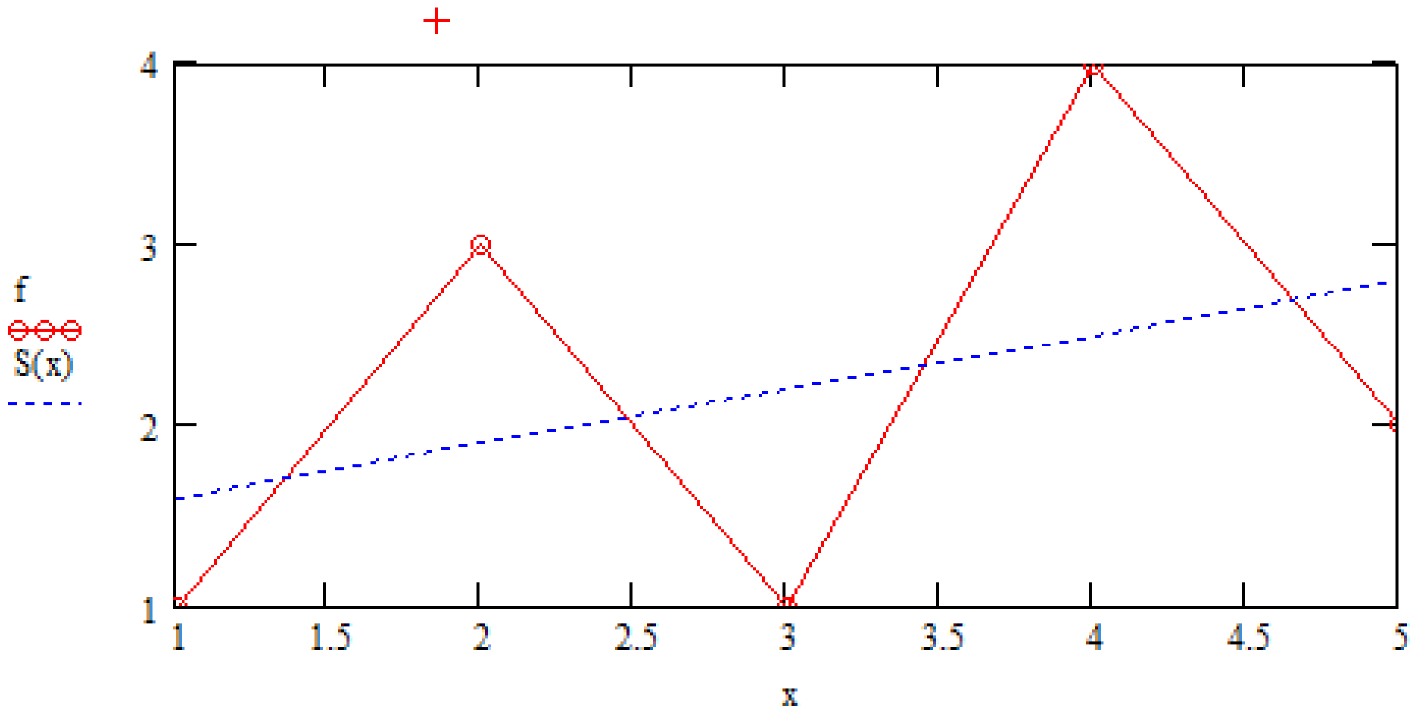
$$d_j = \sum_{i=0}^{n} f_i x_i^j, \; j = 0, \ldots, k.$$

Решив полученную систему, определим значения коэффициентов аппроксимирующего многочлена.

Пример сглаживания многочленом первой степени

$$n := 4 \quad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad f := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} (x_i)^0 & \sum_{i=0}^{n} (x_i)^1 \\ \sum_{i=0}^{n} (x_i)^1 & \sum_{i=0}^{n} (x_i)^2 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot (x_i)^0 \\ \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot (x_i)^1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 0.3 \end{pmatrix} \qquad S(x) := 0.3x + 1.3$$



Задание

1. Для функции заданной таблицей значений согласно таблице вариантов выполнить расчеты коэффициентов сглаживающих многочленов степеней 1, 2, 3 по методу наименьших квадратов и интерполяционного многочлена.
2. Для рассчитанных многочленов построить графики в MathCAD (либо microsoft mathematics и т.п.).
3. С использованием современных высокоуровневых языков программирования разработать программную реализацию построения

- интерполяционного многочлена с помощью формулы Лагранжа;
- интерполяционного многочлена с помощью формулы Ньютона;
- сглаживающих многочленов 1, 2, 3 степени по методу наименьших квадратов

для произвольной таблицы значений функции.

4. Сравнить результаты работы программы с графиками построенными в п. 2.
5. Подготовить отчет о проделанной работе, включающий:

- исходные данные (таблицу значений функции);
- результаты вычислений (коэффициенты многочленов, графики));
- результаты работы программ (графики, с выделением точек таблицы);
- тексты программ.

Таблица вариантов

№ вар.	$f(x)$					
1	x_i	1	2	3	4	5
	f_i	4	2	8	1	-1
2	x_i	-2	-1	0	1	2
	f_i	7	9	0	9	7
3	x_i	2	4	6	8	10
	f_i	0	3	1	3	7
4	x_i	-4	-2	0	2	4
	f_i	-11	-5	0	3	9
5	x_i	-3	-2	-1	0	1
	f_i	5	1	8	1	9
6	x_i	-2	-1	0	1	2
	f_i	3	0	10	0	3
7	x_i	2	4	6	8	10
	f_i	7	3	1	3	0