Численное интегрирование

Задача формулируется как нахождение значения $\int_a^b f(x)dx$,

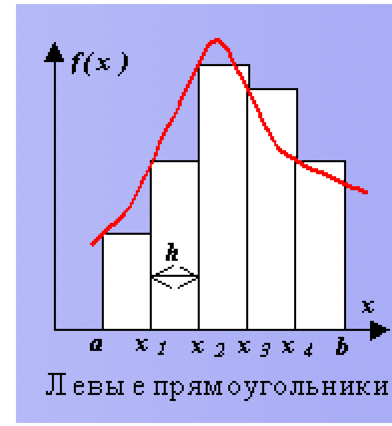
где $f(x)$ некоторая функция, непрерывная на интервале (a,b).

В большинстве существующих методов численного интегрирования для повышения точности исходный интервал (a,b) разбивается на n меньших интервалов $(x_i;\ x_{i+1})$, где $i=0,\ldots n$; $a<x_0<x_1<\ldots<x_n<b$. Интеграл при этом вычисляется как сумма площадей "полосок", получаемых при таком разбиении.

Отличие методов состоит в способе аппроксимации $f(x)$ на отрезке $(x_i;\ x_{i+1})$. В методах **Ньютона-Котеса** для аппроксимации используются полиномы различных степеней. К этой группе относятся методы прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Метод прямоугольников

Из геометрических соображений очевидно, что интеграл можно приближенно заменить площадью прямоугольника.



$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$$

Для равномерного разбиения с шагом $h = x_{i+1} - x_i$ можно записать:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_i)$$

В общем случае это можно интерпретировать как замену функции $f(x)$ каждом интервале $(x_i;\ x_{i+1})$ интерполяционным многочленом нулевой степени.

Оценка погрешности

Рассмотрим диапазон интегрирования от x_i до x_i+h, используя разложение $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки x_i:

$$f(x)\big|_{x=x_i} = f(x_i) + (x-x_i)f'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2!}f''(x_i) + \ldots$$

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx = x\cdot f(x_i)\Big|_{x_i}^{x_i+h} + \frac{(x-x_i)^2}{2}f'(x_i)\Bigg|_{x_i}^{x_i+h} + \frac{(x-x_i)^3}{3\cdot 2!}f''(x_i)\Bigg|_{x_i}^{x_i+h} + \ldots =$$

$$= f(x_i)h + \frac{h^2}{2}f'(x_i) + O(h^3)$$

Это означает, что погрешность метода (обозначим её R) можно оценить так:

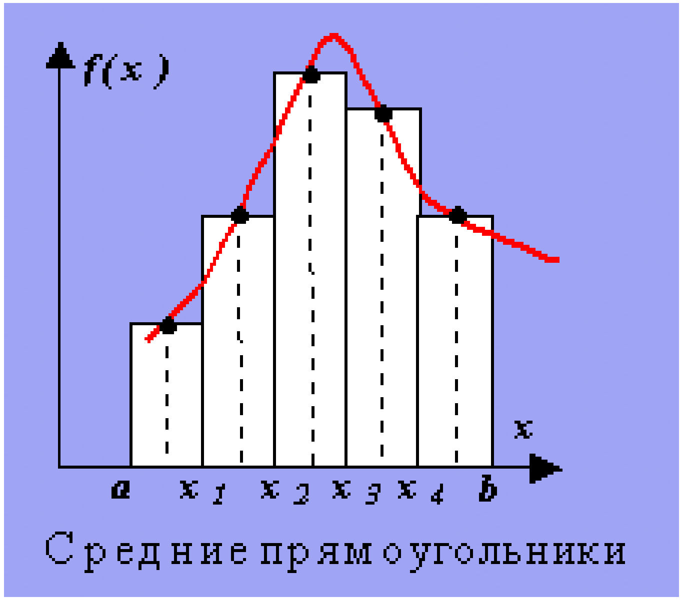
$$R \approx \frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \approx \frac{h}{2}\int_a^b f'(x)dx \text{ т.е. } R \le \frac{h}{2}M_1(b-a), \text{ где}$$

$$M_1 = \max\left|f'(x)\right|_{(a,b)}$$

Метод средних прямоугольников

Метод прямоугольников можно существенно улучшить, если выбирать для аппроксимации значение $f(x)$ в середине интервала – в точке $(x_i+x_{i+1})/2$, в результате чего расчетная формула примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$



Посмотрим на второй член разложения $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки $\bar{x} = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_i + \dfrac{h}{2}$ при вычислении интеграла:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} (x-\bar{x})\, f'(\bar{x})dx = \frac{(x-\bar{x})^2}{2}\, f'(\bar{x})\Big|_{x_i}^{x_i+h} = f'(\bar{x})\left(\frac{(x_i+h-\bar{x})^2}{2} - \frac{(x_i-\bar{x})^2}{2}\right) =$$

$$= f'(\bar{x})\left(\frac{\left(x_i + h - x_i - \frac{h}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(x_i - x_i - \frac{h}{2}\right)^2}{2}\right) = 0$$

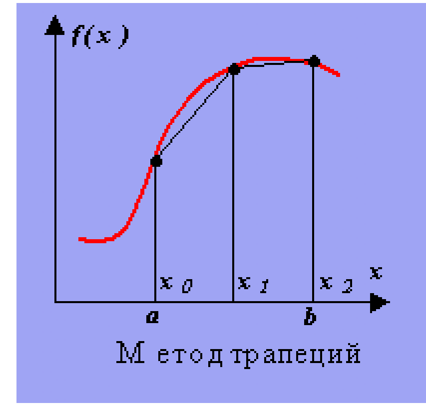
Так как второй член разложения сократился, оценка погрешности изменилась в лучшую строну:

$$R \approx \frac{h^3}{24}\sum_{i=0}^{n-1} f''\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \approx \frac{h^2}{24}\int_a^b f''(x)dx$$

$$R \le \frac{h^2}{24} M_2 (b-a), \quad \text{где} \quad M_2 = \max \left| f''(x) \right|_{(a,b)}$$

Метод трапеций

Аппроксимация в этом методе осуществляется полиномом первой степени. Значение интеграла на каждом интервале $(x_i; x_{i+1})$ вычисляется как площадь прямоугольной трапеции с основаниями равными значениям функции и высотой равной величине шага:



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$$

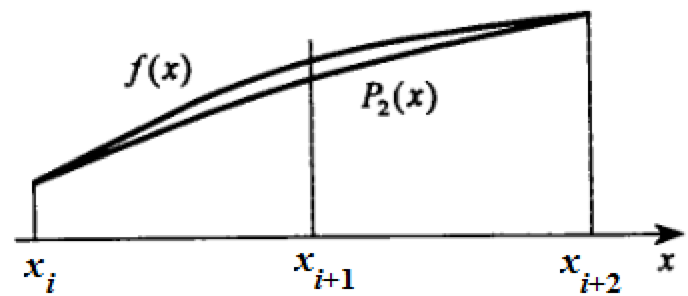
Таким образом $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)$

Погрешность метода трапеций в два раза выше, чем у метода средних прямоугольников:

$$R \approx -\frac{h^2}{12}\int_a^b f''(x)dx$$

Метод Симпсона.

Подынтегральная функция $f(x)$ заменяется интерполяционным полиномом второй степени $P_2(x)$ – параболой, проходящей через три точки x_i, x_{i+1}, x_{i+2}.



Запишем выражение для $P_2(x)$, воспользовавшись формой Ньютона:

$$P_2(x) = f(x_i) + \frac{x - x_i}{h}\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right) + \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2h^2}\left(f(x_i) - 2f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right)$$

Обозначим $z = x - x_i$ тогда

$$P_2(z) = f(x_i) + \frac{z}{h}\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right) + \frac{z(z-h)}{2h^2}\left(f(x_i) - 2f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right) =$$

$$= f(x_i) + \frac{z}{2h}\left(-3f(x_i) + 4f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})\right) + \frac{z^2}{2h^2}\left(f(x_i) - 2f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right)$$

Рассчитаем интеграл по данному интервалу:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P_2(x)dx = \int_0^{2h} P_2(z)dz =$$

$$= 2hf(x_i) + \frac{(2h)^2}{4h}\left(-3f(x_i) + 4f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})\right) + \frac{(2h)^3}{6h^2}\left(f(x_i) - 2f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(6f(x_i) - 9f(x_i) + 12f(x_{i+1}) - 3f(x_{i+2}) + 4f(x_i) - 8f(x_{i+1}) + 4f(x_{i+2})\right) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right)$$

С учетом выражения для одного интервала, общая формула примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Метод Симпсона имеет четвертый порядок точности относительно шага:

$$R \approx -\frac{h^4}{180}\int_a^b f^{IV}(x)dx$$

Методы более высоких порядков

При аппроксимации подынтегральной кривой многочленом k-й степени требуется как минимум (k+1) точка, а формула для вычисления значения интеграла при минимально возможном n будет иметь следующий вид:

$$\int_{x_0}^{x_k} f(x)dx \approx c_0 h \sum_{i=0}^{k} \omega_i f(x_i)$$

Коэффициенты методов **Ньютона-Котеса:**

k	c_0	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1	1/2	1	1	-	-	-	-
2	1/3	1	4	1	-	-	-
3	3/8	1	3	3	1	-	-
4	2/45	7	32	12	32	7	-
5	5/288	19	75	50	50	75	19

При уменьшении шага следует учитывать, что n должно быть кратно k.

Выбор шага интегрирования

Для наиболее точного выбора шага интегрирования исходя из условий достижения заданной точности необходимо пользоваться оценками погрешности методов, в которые входят производные $f(x)$.

Другой подход основан на постепенном увеличении количества разбиений n начиная с минимально возможного для выбранного метода, и рассмотрении двух последовательных приближений. Обозначим S_m приближение вычисленное при $n=2^m$ для методов прямоугольников и трапеций $m=0,1,2,\ldots$; а для методов более высоких порядков аппроксимации (в которых $k > 1$) это приближение при $n=k^m$, $m=1,2,\ldots$.

Процесс измельчения сетки можно прекратить если выполняется неравенство: $| S_m - S_{m+1} | < \varepsilon$

где ε - заданная точность.

Задание

1. Для заданных в таблице вариантов функции и интервала построить график и вычислить значение определенного интеграла в MathCAD (либо microsoft mathematics и т.п.).
2. С использованием современных высокоуровневых языков программирования разработать программную реализацию методов численного интегрирования указанных в таблице вариантов для заданной в таблице вариантов функции. Точность и границы интервала задаются пользователем.
3. С помощью разработанной программы выполнить вычисления каждым из методов при различных значениях точности. Сравнить полученные результаты.
4. Подготовить отчет о проделанной работе, включающий:

- исходные данные (функцию, график, границы интервала);
- результаты вычислений (значения интеграла и величины шага, полученные разными методами, при различных значениях точности);
- выводы;
- тексты программ.

Таблица вариантов

№ вар.	*f*(*x*)	интервал	Методы
1	$f(x) := \frac{(1+x)^2}{\left[x^3 \cdot \sqrt{(2+x)}\right]}$	1.4; 5.0	1. Средних прямоугольников. 2. Трапеций. 3. Ньютона-Котеса 3-го порядка.
2	$f(x) := \frac{1+\sqrt{x}}{1+4x+3x^2}$	1.0; 7.5	1. Средних прямоугольников. 2. Левых прямоугольников. 3. Ньютона-Котеса 4-го порядка.
3	$f(x) := \frac{2.5x^2 - 0.1}{\ln(x)+1}$	6.2; 15.1	1. Средних прямоугольников. 2. Симпсона. 3. Ньютона-Котеса 5-го порядка.
4	$f(x) := \frac{\ln(x)}{\sqrt{1.2+0.3x}}$	12.0; 21.2	1. Средних прямоугольников. 2. Трапеций. 3. Ньютона-Котеса 5-го порядка.
5	$f(x) := \frac{(x+1)^2}{\sqrt{\ln(x)}}$	5.2; 12.0	1. Средних прямоугольников. 2. Левых прямоугольников. 3. Ньютона-Котеса 3-го порядка.
6	$f(x) := \sqrt{x} \cdot e^{\frac{-x}{2}}$	1.0; 8.2	1. Средних прямоугольников. 2. Симпсона. 3. Ньютона-Котеса 4-го порядка.
7	$f(x) := \frac{x^2 \cdot \ln(x)}{10+x^2}$	1.5; 5.0	1. Средних прямоугольников. 2. Правых прямоугольников. 3. Ньютона-Котеса 3-го порядка.