

אלגוריתמים כלכליים – תרגיל 9

מגישים: אייל שחימוב 323926147, שלו גולדשטיין 212210280

שאלה 2:

סעיף א':

קבוצת הפריטים במקרה הזה היא קבוצה של 360 מועמדים (120 מכל מפלגה).

קבוצת החזקה תהיה כל סידורי המועמדים האפשריים.

ננסה "לפסול" כמה קבוצות מקבוצת החזקה, קבוצות שהאלגוריתם לא יבחר בהם בוודאות. כל סידור עם מעל 120 מ-360 המועמדים, לא ייבחר, כי "התקציב" הוא 120 מקומות.

כמו כן, כל קבוצת מועמדים שנמצאים בה מועמדים מיותר ממפלגה אחת (הכוונה לקבוצה שנמצא בה גם מועמד כלשהו ממפלגה אחת ומועמד כלשהו ממפלגה אחרת), לא תיבחר, שכן לא קיימת קבוצת מצביעים שיסכימו על מועמדים שונים ממפלגות שונות, מכיוון שלכל מצביע מותר להצביע למפלגה אחת.

בסך הכל, צמצמנו את קבוצת החזקה מבלי לפגוע באלגוריתם.

נסמן את המפלגות ב- A, B, C ואת x המועמדים הראשונים שלה ב- $A(x)$ למשל.

קבוצת החזקה המצומצמת תיראה כך לאחר המיון:

$(A(120), B(120), C(120), A(119), B(119), C(119), \dots, A(1), B(1), C(1), \{\})$

(הסדר בין A, B, C ייקבע שרירותית).

נסמן את מספר הקולות שמפלגה קיבלה ב- V_A למשל, האלגוריתם יעצור על קבוצה $A(x)$ אם

$$\frac{V_A}{V} \geq \frac{x}{120}$$

נדגים את פעולת האלגוריתם על הנתונים הבאים:

מפלגות A, B, C , כך ש: $V_A = 546,000$, $V_B = 504,000$, $V_C = 150,000$, וסך כל הקולות: $V = 1,200,000$.

האלגוריתם יעצור קודם על הקבוצה $A(x)$, כי V_A הוא הגבוה ביותר.

נחשב את x : נדרש:

$$\frac{546,000}{1,200,000} \geq \frac{x}{120}$$

ה- x הגדול ביותר שמקיים את זה הוא $x = 54$.

לכן קבוצה $A(54)$ תיבחר, ונוריד את 546,000 המצביעים מקבוצת הפעילים.

הקבוצה הבאה שתיבחר תהיה $B(50)$, עבור קבוצת המצביעים 504,000.

והקבוצה האחרונה שתיבחר $C(15)$, עבור 150,000 המצביעים הפעילים האחרונים.

בסך הכל מפלגות A, B, C יקבלו 54, 50, 15 מנדטים, בהתאמה, שמסתכמים ל-119.

(נשים לב כי גם אם היינו בוחרים להוציא בכל פעם את קבוצת המצביעים הקטנה ביותר שניתן להוציא, למשל 540,000 במקום 546,000, היינו נותרים עם מנדט עודף, שכן כל שארית שתיווצר, לא תהיה גדולה מ- $\frac{1}{120}$, ולכן לא תיבחר שום קבוצה, חוץ מהקבוצה הריקה. בכל מקרה, התוצאה הסופית לא תשתנה).

סעיף ב'

נבדוק מה תהיה התוצאה באלגוריתם "השארית הגדולה ביותר".

המפלגות יקבלו 15, 50, 54 מנדטים, בהתאמה, על פי חלוקה יחסית.

נחשב את השאריות, נסמן L_A למשל. נשים לב כי גודל מנדט פה הוא 10,000 $\frac{1,200,000}{120} = 10,000$.

$$L_A = V_A \% 10,000 = 6,000$$

$$L_B = V_B \% 10,000 = 4,000$$

$$L_C = V_C \% 10,000 = 0$$

המנדט העודף יעבור למפלגה A, שכן שם השארית היא הגבוהה ביותר.

בסך הכל, יקבלו 15, 50, 55 מנדטים.

נבדוק מה תהיה התוצאה באלגוריתם "חוק בדר עופר".

המפלגות שוב יקבלו 15, 50, 54 מנדטים, בהתאמה, על פי חלוקה יחסית.

נחשב כמה כל מפלגה תצטרך "לשלם" עבור מנדט נוסף, נסמן P_A למשל. נשים לב כי גודל מנדט פה הוא 10,000 $\frac{1,200,000}{120} = 10,000$.

$$P_A = \frac{V_A}{54 + 1} = \frac{546,000}{55} = 9,927$$

$$P_B = \frac{V_B}{50 + 1} = \frac{504,000}{51} = 9,882$$

$$P_C = \frac{V_C}{15 + 1} = \frac{150,000}{16} = 9,375$$

המנדט העודף יעבור שוב למפלגה A, שכן שם P הוא הגבוה ביותר.

בסך הכל, שוב יקבלו 15, 50, 55 מנדטים.

בסה"כ, האלגוריתם של עזיז-לי-טלמון סיפק את המטרה שלו (תקצוב קטן שווה ל-120), ונשאר מנדט עודף. בתקציב כספי, תוצאה זו אולי טובה כי נחסך כסף, אבל בכנסת נשאר מקום נוסף.

השיטות האחרונות הצליחו למצוא פתרון למנדט העודף, על פי פונקציית ערך כלשהי (שארית או תשלום על מנדט נוסף).