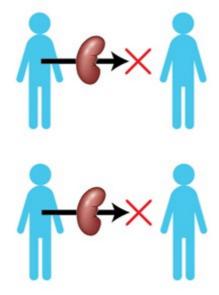
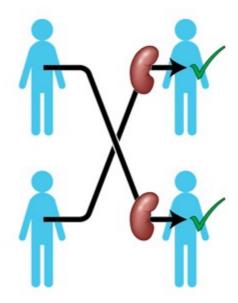
# החלפת כליות

#### אראל סגל-הלוי חלק מהשקפים של: Wayne Racey



The donor in each pair cannot give their kidney to the recipient because they are not a match

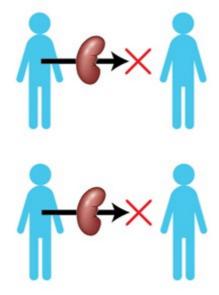


The donors can give their kidney to the **other** recipient because they are a good match

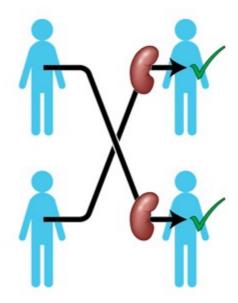
© UHN Patient Education

# החלפת כליות

#### אראל סגל-הלוי חלק מהשקפים של: Wayne Racey



The donor in each pair cannot give their kidney to the recipient because they are not a match



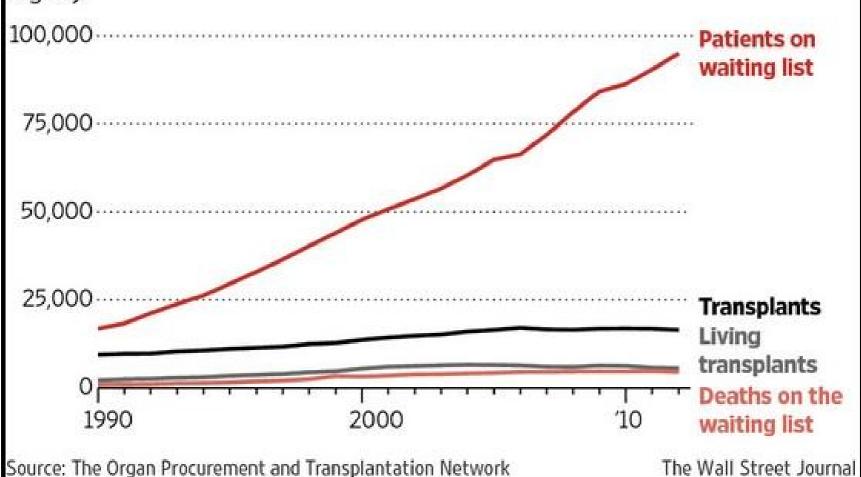
The donors can give their kidney to the **other** recipient because they are a good match

© UHN Patient Education

#### התור להשתלת כליות

#### A Long Wait for a Kidney

Since 1990, the number of people on the waiting list for a kidney transplant has grown sharply, while the number of transplants has increased only slightly.



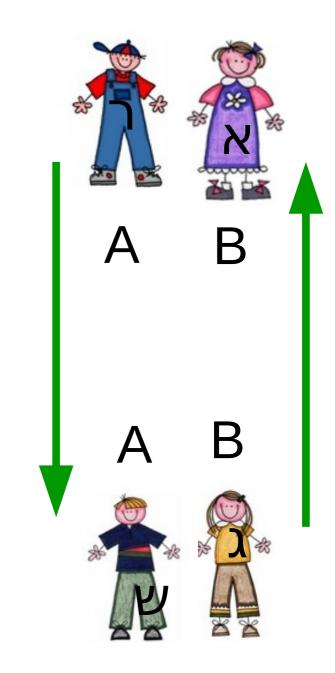
#### החלפת כליות

- כמעט בכל המדינות:
- יש מחסור בכליות להשתלה.
- **אסור** לתרום כליות תמורת כסף.
  - מותר לתרום כליה תמורת כליה.

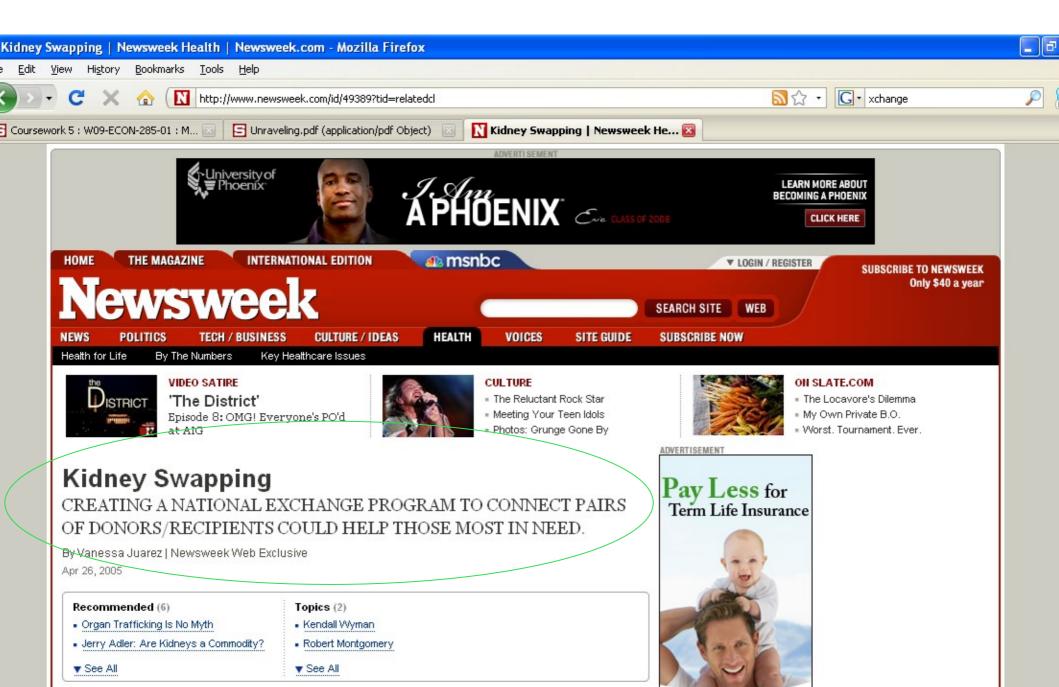
#### למה להחליף כליות?

תורם מוכן לתרום לחולה אבל לא מתאים, בגלל סוג הדם או סיבות נוספות:

< נתרם תורם V	0	A	В	AB
0	JO	JO	JO	J
Α	לא	כן	לא	כן
В	לא	לא	JO	J
AB	לא	לא	לא	JO



#### החלפת כליות 2004 - מעגלי מסחר



#### החלפת כליות 2005 - שידוכי מסחר

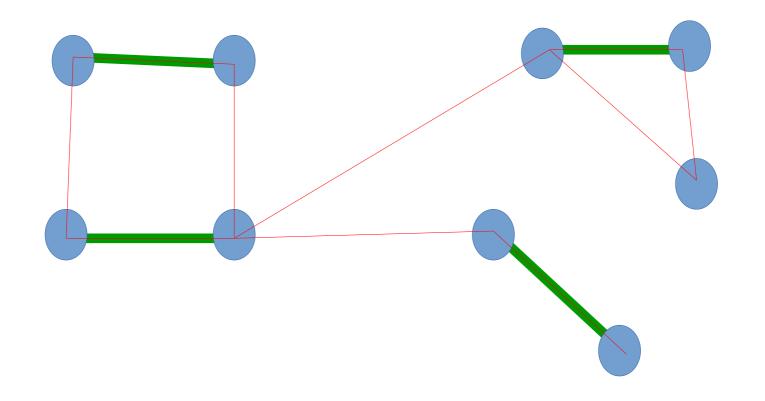
:אלגוריתם מעגלי המסחר לא התאים לבעיה

- המעגלים ארוכים מדי! בהחלפת כליות מעדיפים מעגלים קצרים – באורך 2 או 3 – כי כל ההשתלות במעגל חייבות להתבצע במקביל.
  - מצד שני, בהחלפת כליות ההעדפות בינאריות –
     כל חולה מוכן לקבל כליה מכל תורם מתאים.

*הפתרון*: במקום לחפש מעגלים, נחפש **שידוכים**.

#### מציאת שידוך גדול ביותר

שידוך בגרף כללי = אוסף של זוגות-צמתים זרים. כל צומת מייצג זוג; כל קשת מייצגת התאמה הדדית. כדי להציל הכי הרבה חולים, נרצה למצוא שידוך גדול ביותר.

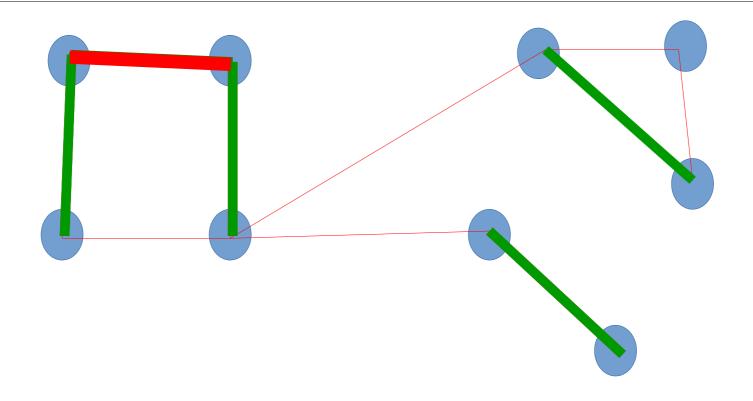


# אלגוריתם למציאת שידוך גדול ביותר

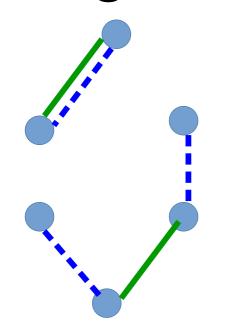
**מסלול שיפור** = מתחיל ומסתיים ב*צמתים לא* משודכים, ומתחלף בין קשתות בתוך ומחוץ לשידוך.

#### :האלגוריתם

כל עוד יש מסלול-שיפור -- הפוך אותו.

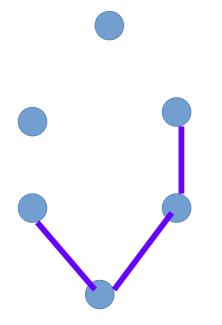


#### (Berge's Lemma) הלמה של ברג'



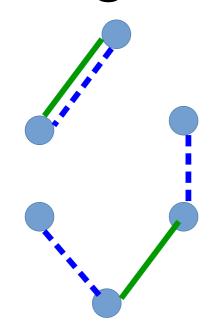
למה: שידוך M הוא גדול ביותר אם"ם אין מסלול שיפור.

הוכחה: -->: אם יש מסלול שיפור – אפשר להפוך אותו וכך להגדיל את M ב-1.



<--: נניח ש-M לא גדול ביותר.</li>
יהי K שידוך גדול יותר מ-M.
נסתכל על ההפרש הסימטרי
– כל הקשתות הנמצאות
באחד השידוכים ולא בשניהם.

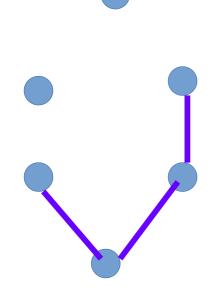
#### (Berge's Lemma) הלמה של ברג'



[המשך]כל צומת בגרף סמוך לכל היותר לקשת אחת מכל שידוך. לכן, רכיבי הקשירות בגרף ההפרש הם:

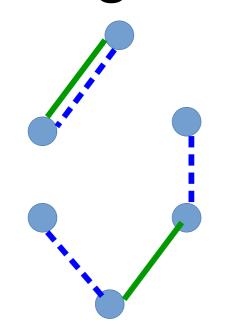
- א. צמתים מבודדים, או

ב. מסלולים מתחלפים, או -



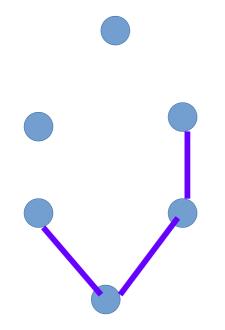
ג. מעגלים מתחלפים - באורך זוגי ועם מספר זהה של קשתות משני השידוכים.

#### (Berge's Lemma) הלמה של ברג'



[המשך] הנחנו ש-K גדול יותר מ-M.

לפי כלל שובך היונים, רכיב אחד חייב לכלול *יותר* קשתות של K מקשתות של M.



הרכיב הזה חייב להיות מסלול מתחלף, שבו הקשת הראשונה והקשת האחרונה הן ב-K ולא ב-M. זה מסלול-שיפור עבור M! \*\*\*

# אלגוריתם למציאת שידוך גדול ביותר

מהלֶמה של ברג' נובע שהאלגוריתם הבא מוצא שידוך גדול ביותר בגרף כללי:

> כל עוד יש מסלול-שיפור: הפוך אותו.

#### אלגוריתם הפרחים (Blossom Algorithm – Edmonds 1965)

- ?איך מוצאים מסלול שיפור
- בעזרת *אלגוריתם הפרחים* פותח ע"י אדמונדס.
  - $O(|V|^2 |E|)$  :מן ריצה
  - אפשר למצוא גם שידוך עם משקל גדול ביותר.
    - נלמד בקורס מתקדם בתורת הגרפים.
      - networkx.max\_weight\_matching•

## אלגוריתם אמיתי לשידוך כליות?

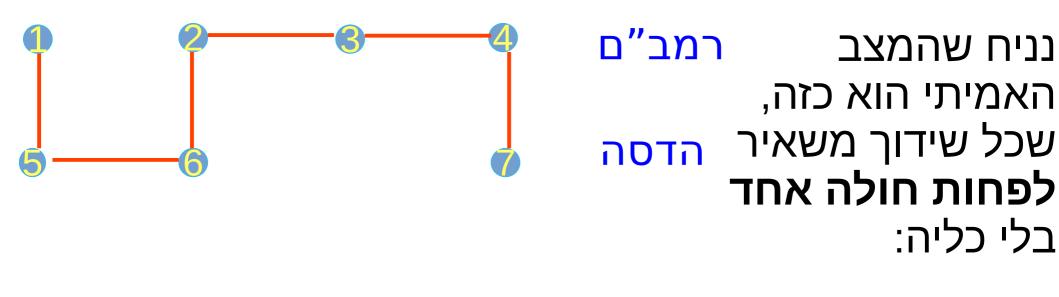
- **מי הם השחקנים** בבעיית שידוך הכליות?
  - **הזוגות** יכולים לכל היותר להסתיר קשתות, אבל זה לא יעזור להם.
  - המרכזים הרפואיים יכולים להסתיר זוגות - לשדך אותם באופן פנימי.
  - האינטרס של המרכזים הרפואיים הוא לדאוג לחולים "שלהם" - שכמה שיותר חולים שלהם יקבלו כליה.

#### תמריצים של מרכזים רפואיים

משפט: אין אלגוריתם שהוא גם יעיל פארטו וגם אמיתי עבור המרכזים הרפואיים.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים אלגוריתם כזה. נראה מצב שבו, לכל שידוך שהאלגוריתם בוחר, קיים מרכז שיכול להסתיר זוגות, וכך להגדיל את מספר החולים "שלו" שמקבלים כליה. -->

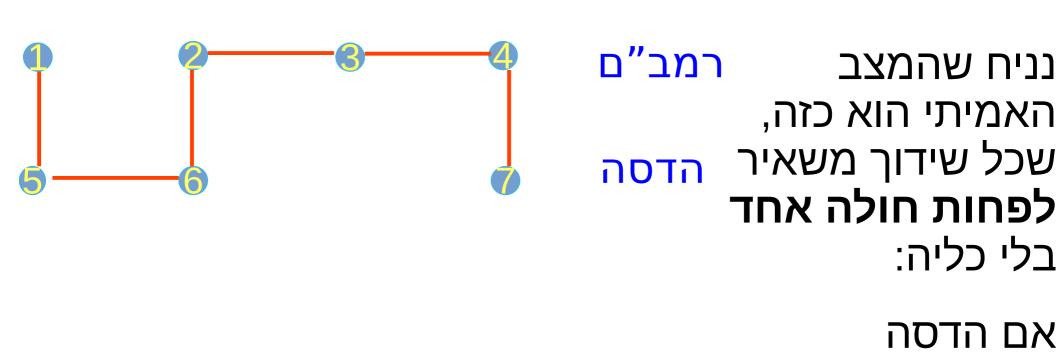
#### תמריצים של מרכזים רפואיים – הוכחה



שני זוגות ומשדך אותם אצלו, אז יש רמב"ם רק שידוך יעיל-פארטו אחד, ובו כל 4 החולים של הדסה רמב"ם מקבלים

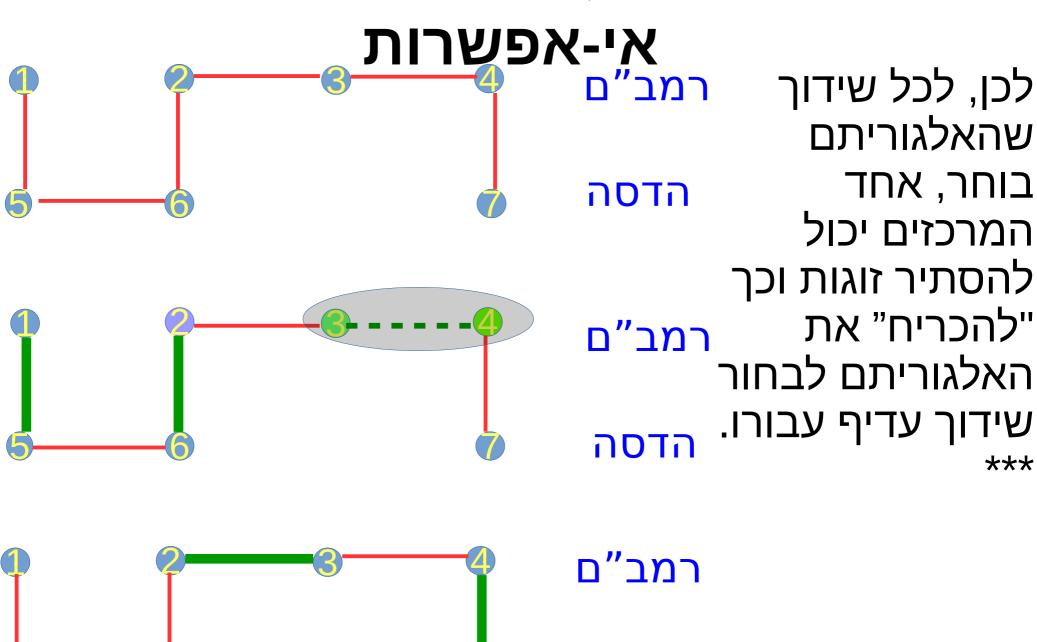
אם רמב"ם מסתיר

#### תמריצים של מרכזים רפואיים – הוכחה



מסתירה שני זוגות ומשדכת אותם אצלה, אז יש רק שידוך יעיל-פארטו אחד, ובו כל 3 החולים של הדסה מקבלים כליה:

## תמריצים של מרכזים רפואיים –



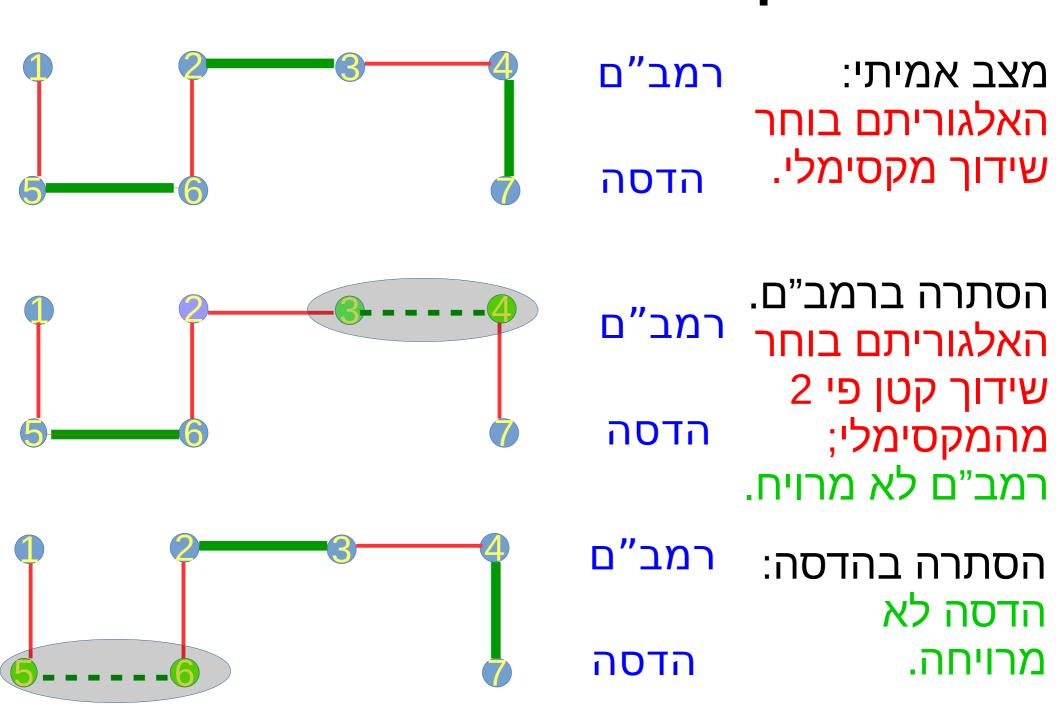
## – תמריצים של מרכזים רפואיים קירוב 1/2

כיוון שאין אלגוריתם אמיתי המשיג את השידוך הגדול ביותר, חיפשו אלגוריתם אמיתי המשיג שידוך שהוא גדול-ביותר-בקירוב.

:(2013) אשלגי, פישר, קאש, פרוקצ'יה, 2013)

- מחשבים את השידוך הגדול ביותר *מבין כל* השידוכים שבהם מספר הקשתות **הפנימיות** בכל מרכז רפואי הוא **מקסימלי**.
  - <-- דוגמאות

#### קירוב 1/2 - דוגמאות



#### קירוב 1/2 - מימוש

#### איך מחשבים?

- •נותנים משקל לכל קשת:
- |E| קשת פנימית משקל ספרימית −
- קשת בין מרכזים משקל 1
- •מחשבים את השידוך **הכבד** ביותר (אלגוריתם אדמונדס עם משקלים).
- השידוך ממקסם את מס' הקשתות הפנימיות, • וברחות לזה - את ממ' ההשתות הכולל
  - •ובכפוף לזה את מס' הקשתות הכולל.

#### קירוב 1/2 - הוכחה

משפט: אלגוריתם אשלגי-פישר-קאש-פרוקצ'יה מחזיר תמיד שידוך שגודלו לפחות 1/2 מהשידוך הגדול ביותר האפשרי.

הוכחה: נניח שהשידוך הגדול ביותר כולל *ח* קשתות (*n*2 צמתים). מכל *קשת*, לפחות *צומת* אחד נמצא בשידוך של האלגוריתם – אחרת האלגוריתם היה יכול להוסיף את הקשת ולהשיג שידוך גדול יותר. לכן השידוך של האלגוריתם כולל לפחות *n* צמתים.

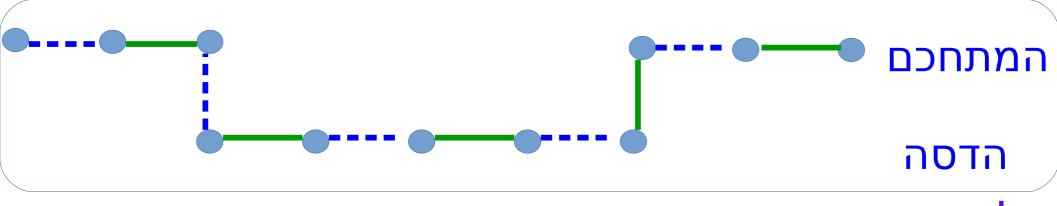
#### "קירוב 1/2 אמיתי – "הוכחה

משפט: אלגוריתם אשלגי-פישר-קאש-פרוקצ'יה הוא אמיתי כשיש שני מרכזים רפואיים. [יש הכללה למספר כלשהו של מרכזים רפואיים, אבל האלגוריתם מסובך יותר – ראו במאמר].

- "הוכחה" (מקוצרת מאד): יהי M השידוך כשאחד המרכזים אמיתי, ו-K השידוך כשהוא מתחכם.
- •נסתכל על *ההפרש הסימטרי* בין M ל-K.
- •כמו שראינו בלֶמה של בֶרג', רכיבי הקשירות הם צמתים מבודדים או מעגלים או מסלולים.
  - •מ*בודדים* או *מעגלים* לא יעזרו למתחכם.

#### "קירוב 1/2 אמיתי – "הוכחה

*המסלולים* בהפרש הסימטרי חייבים להיראות כך:



#### כלומר:

1)כל קטע *פנימי* חייב להיות באורך זוגי – כי כל אחד מהשידוכים ממקסם את מספר הקשתות הפנימיות.
2)מס' הקשתות *החיצוניות* חייב להיות זוגי – כי כל שידוך ממקסם את מספר הקשתות בכפוף ל- 1).
3)לכן המסלול מתחיל בקשת של K ומסתיים בקשת של M באותו צד; ולכן המתחכם לא מרויח.

#### מעבר לזוגות – מעגלי-החלפה באורך 3

- כיום אפשר לבצע שישה ניתוחים בו זמנית החלפת כליות במעגלים באורך 3.
  - איך מוצאים הכי הרבה מעגלים באורך ?3•
    - יש רדוקציה: הבעיה היא NP-קשה! יש רדוקציה
- •NP  $\rightarrow$  SAT  $\rightarrow$  3-coloring  $\rightarrow$ 
  - Set cover  $\rightarrow$  3D matching  $\rightarrow$  3-Circles
    - יש שתי גישות לפתרון בעיה NP-קשה:
    - •א. פתרון אופטימלי-בקירוב בזמן פולינומי;
      - •ב. פתרון אופטימלי-ממש בזמן מעריכי.
    - מה לדעתכם הפתרון המתאים לבעיה שלנו?



# השתלת כליות בין יבשתית

5:00

החלפת כליות בישראל

2 כליות נתרמות משתי תורמות בביה"ח בילינסון





8:00



הכליה מוטסת לצ'כיה

9:00

12:00

13:00

כליה מתורמת בהדסה הועברה לביה"ח בילינסון



כליה מצ'כיה מוטסת לישראל ומושתלת בהדסה

Ynet 17/12/2019

# - שרשראות-החלפה מעבר לזוגות – שרשראות-החלפה מתחילות בתורם אחד חסיד (אלטרואיסט)



- In July 2007, Alliance for paired donations started an "Altruistic Donor Chain"
- Altruistic donor in Michigan donated kidney to woman in Phoenix.
- Husband of Phoenix woman gave kidney to woman in Toledo.
- Her mom gave kidney to patient A in Columbus, whose daugher simultaneously gave kidney to patient B in columbus.
- And so on....

#### שרשרת החלפה באורך 60



