

מטלה - אלגוריתמים למיקסום רווח

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

שאלה 1: סקר שוק בשפת פייתון

כפי שלמדנו בכיתה, מכרז מיירסון למיקסום רווח משתמש בפונקציית הערך הוירטואלי, והיא משתמשת בפונקציית התפלגות ההסתברות:

$$F(x) = \text{Prob}[v < x]$$

$$r(x) = x - [1 - F(x)] / F'(x)$$

ברוב המקרים, הפונקציה F אינה ידועה, ואנחנו צריכים לחשב אותה בקירוב מתוך נתונים סטטיסטיים.

כיתבו מחלקה לחישוב פונקציה זו. במחלקה יהיו לפחות שלוש שיטות:

- איתחול (בנאי) - מקבל וקטור של ערכים (שנאספו בסקרי-שוק).
- F - מקבלת ערך x , ומחזירה את ההסתברות האמפירית שהערך יהיה קטן מ- x . שימו לב - הפונקציה F תמיד מחזירה ערך בין 0 ל-1.
- r - מקבלת ערך x , ומחזירה את הערך הוירטואלי המתאים.

הוסיפו שיטות נוספות לפי הצורך.

```
class Distribution:
```

```
    def __init__(self, values: List[int]): ...
```

```
    def F(self, x:int) → float: ...
```

```
    def r(self, x:int) → float: ...
```

• רעיון הפתרון:

- בבנאי, צריך לסדר את הערכים בסדר עולה ולשמור אותם.
- בפונקציה F , עוברים על הערכים מהקטן לגדול, סופרים כמה ערכים קטנים מ- x , ומחלקים במספר הערכים הכולל (זה קירוב להסתברות שהערך קטן מ- x). בפרט, אם x קטן מהערך המינימלי מחזירים 0 ואם הוא גדול מהערך המקסימלי מחזירים 1.
- צריך גם פונקציה dF שמחשבת בקירוב את הנגזרת של F . דרך אפשרית לעשות זאת היא למצוא את הקטע שבו נמצא x - למצוא שני מספרים סמוכים בטבלת הערכים, a ו- b , המקיימים:
 - $a \leq x \leq b$
 - ואז הקירוב לנגזרת בנקודה x הוא השיפוע של F בין a ל- b :

• $(b-a)/(n/1)$

שאלה 2: מי נושא בנטל המס?

מוכר מעוניין למכור חפץ אחד לקונה אחד ולמקסם את הרווח שלו. התפלגות הערך של הקונה אחידה בין 10 ל-30 ש"ח.

א. הממשלה מטילה מס של 10 ש"ח על הקונה. מהו המכרז הממקסם את תוחלת הרווח של המוכר? מהי תוחלת הרווח של המוכר? ומהי תוחלת התועלת של הקונה?

• **פתרון:** המכרז האופטימלי הוא למכור ב-10. תוחלת הרווח של המוכר: 5. של הקונה (אינטגרל): 2.5.

ב. הממשלה מטילה מס של 10 ש"ח על המוכר. מהו המכרז הממקסם את תוחלת הרווח של המוכר? מהי תוחלת הרווח של המוכר? ומהי תוחלת התועלת של הקונה?

• **פתרון:** המכרז האופטימלי הוא למכור ב-20. תוחלת הרווח של המוכר: 5. של הקונה (אינטגרל): 2.5.

שאלה 3: מכרז עם תמיכה

אתם קבלני-בניין ובזה הרגע סיימתם לבנות דירה. אתם מעוניינים למכור אותה באופן שיעשה אתכם כמה שיותר עשירים (בתוחלת).

יש הרבה קונים פוטנציאליים, וכל קונה מייחס לדירה ערך שונה. מסקר-שוק שביצעתם, התברר שהתפלגות הערכים באוכלוסיה היא התפלגות אחידה בין 500 ל-1500 [באלפי ש"ח].

קונים צעירים במיוחד או מבוגרים במיוחד מזכים את הקבלן בהשתתפות ממשרד השיכון באופן הבא:

• קבלן המוכר דירה לקונה בן 20 ומטה - מקבל ממשרד השיכון 10% ממחיר הקניה.

• קבלן המוכר דירה לקונה בן 60 ומעלה - מקבל ממשרד השיכון 20% ממחיר הקניה.

תארו מכרז אמיתי שימקסם את תוחלת הרווח שלכם. כיתבו את המכרז בפסאודו-קוד והדגימו אותו.

• **פתרון:** גל [כמעט], ליעוז

שאלה 4: מכרז אופטימלי לקנייה

אתם מנהלים את מחלקת הרכש ברכבת ישראל. קיבלתם הוראה לקנות קרון חדש במחיר נמוך ככל האפשר. יש כמה חברות המייצרות קרונות, לכל חברה יש עלות אחרת לייצור קרון. אתם לא יודעים את העלויות של החברות השונות, אבל מתוך נתונים סטטיסטיים שאספתם, אתם יודעים שעלות-הייצור מתפלגת לפי פונקציה F (התפלגות זהה עבור כל החברות).

הנהלת הרכבת מעריכה, שהתועלת שתפיק מהקרון היא U (מספר ידוע - נניח מיליארד ש"ח).

תארו מנגנון אמיתי לקניית קרון, שבו תוחלת התועלת של רכבת-ישראל תהיה מקסימלית.

• **פתרון:** בשיעור.

שאלה 5: ערך וירטואלי בהתפלגות אחידה

נניח שהערך של קונה מסויים מתפלג אחיד בין a ל- b (שני פרמטרים חיוביים).

א. כיתבו ביטוי לפונקציית הערך הוירטואלי של הקונה, $r(v)$, כפונקציה של a, b .

ב. כיתבו ביטוי למחיר האופטימלי למכירת חפץ כלשהו לקונה זה.

ג. כיתבו ביטוי לתוחלת הרווח של המוכר כאשר הוא משתמש במחיר האופטימלי.

• **פתרון:** אלעד, ספיר+חני.

שאלה 6: מציאת מסלול רווחי ביותר

נתון גרף קשיר לא מכוון עם משקלים על הקשתות. אנחנו רוצים למצוא מסלול בין שני צמתים נתונים (בין צומת א לצומת ב). כל קשת בגרף שייכת לאדם מסויים, שמאד רוצה שנעבור דרכו. הערך של כל קשת (כמה בעל-הקשת מרויח כשאנחנו עוברים דרכו) הוא מידע פרטי של בעל-הקשת. כל הערכים מתפלגים אחיד בין 10 ל-30. תארו מכרז הממקסם את תוחלת הרווח שלנו; הדגימו על גרף מלא עם 4 צמתים.

• **פתרון:** מחשבים עבור כל קשת את הערך הוירטואלי שלה, ומוצאים מסלול הממקסם את סכום הערכים הוירטואליים.