

תרגיל 9 באלגוריתמים כלכליים:

גיא וולף – 212055966

דביר פריד – 204733810

4 – א) האלגוריתם הפשוט ביותר לתקציב פרופורציונלי חזק יהיה:

1: עבור כל מצביע:

1.1: הוסף לפריט כלשהו שהמצביע תומך בו תקציב בכמות של L/n .

הוכחת נכונות - נשים לב שעבור קבוצת מצביעים כלשהי בגודל k האלגוריתם הוסיף L/n לתקציב לכל משתתף ולכן סך כל מינימום התקציב של הפריטים שלפחות אדם אחד בקבוצה תומך בו הוא $k \cdot L/n$, כנדרש. על כן האלגוריתם מביא תקציב פרופורציונלי חזק לכל קבוצת מצביעים.

ב) האלגוריתם הזה אינו יעיל פראטו אך קיים לו תיקון אשר היננו יעיל פראטו. נניח נסתכל על הדוגמה הבאה, אשר בה סך הכל התקציב לחלוקה הוא 2:

מצביע/פריט	א'	ב'	ג'
1	מעוניין	מעוניין	
2		מעוניין	מעוניין

במהלך ריצת האלגוריתם יכולה להיות התוצאה הסופית שבה לפריט א' ינתן תקציב של 1 ולפריט ג' ינתן תקציב של $1 - L/n$, מצביע 1 תומך בא' ומצביע 2 תומך בג'. אם זאת, יש שיפור פראטו – לתת תקציב של 2 לב'. כך גם מצביע 1 וגם מצביע 2 ירוויחו – התקציב שהם יהנו ממנו יוכפל. על כן האלגוריתם הוא לא תמיד יעיל פראטו.

נביא אלגוריתם מעט יותר מורכב אשר הננו כן יעיל פראטו. במקום לתקצב את פריט שרירותי כלשהו שהמצביע מעוניין בו, נתקצב את הפריט הפופולרי ביותר שהמצביע מעוניין בו, כלומר את הפריט שהכי הרבה מצביעים מעוניינים בו מבין הפריטים אשר המצביע מעוניין בהם.

משום שהפריט הפופולרי ביותר שהמצביע מעוניין בו הוא גם פריט שרירותי שהמצביע תומך בו, האלגוריתם מחזיר תקציב פרופורציונלי חזק. נוכיח כי האלגוריתם אכן יעיל פראטו:

נניח שיש שיפור פראטו לתוצאת האלגוריתם. משום שגודל התקציב הכולל קבוע ישנו פריט אשר נסמנו בא' אשר התקצבו שלו ירד. נשים לב שמשום שא' תוקצב קיים לפחות מצביע אחד שתומך בא' שהאלגוריתם הקצה לא' תקציב בגללו. משום שהמצביע הזה לפחות לא נפגע קיימת אפשרות אחרת, אשר נסמן אותה כב', אשר התקציב שלה עלה. משום שידוע שלפחות למשתתף אחד היה שיפור ממש נובע שהיה שיפור בסך התועלת הכללית של האלגוריתם, ולכן יותר מצביעים תמכו באפשרות ב' על פני אפשרות א'. על כן במהלך ריצת האלגוריתם אפשרות ב' הייתה אמורה להיות מתקצבת על פני אפשרות א' עבור המצביע. סתירה. לכן האלגוריתם יעיל פראטו.

ג) האלגוריתם הוא מגלה אמת – נניח בשלילה שהוא אינו מגלה אמת. על כן קיים מצביע כלשהו בקלט כלשהו אשר יש לו תמריץ חזק (כלומר עדיף לו ממש) לא להגיד את העדפותיו האמתיות. ישנם 2 דרכים איך לא לחשוף את העדפותיך האמתיות:

1: קיים פריט אשר המצביע ידווח שהוא מעוניין בתקצובו אף על פי שהוא לא באמת מעוניין בכך – אם הדבר יקרה אזי המצביע יסתכן בכך שח/ L תקציב ילך לפריט הזה במקום לפריט אשר הוא באמת מעוניין בתקצובו, ועל כן עדיף לו שלא לדווח על הפריט.

2: קיים פריט אשר המצביע מעוניין בתקצובו אבל לא ידווח זאת עליו – הדבר לא ישפיע על המצביע בשום צורה כל עוד שיש לו פריט אחד אחר לפחות שהוא דיווח עליו – בין אם ידווח עליו ובין אם לא הוא יקבל את אותה כמות תקציב לפריט אחד אשר הוא דיווח עליו – ואף יזיק לו אם יש רק פריט אחד אשר הוא מעוניין בתקצובו – אם הוא יעשה זאת אף פריט שהוא מעוניין בתקצובו לא יתקצב. על כן אין למצביע אינטרס חזק לא לדווח על הפריט.

משום שבאף אחת משתי הדרכים המצביע לא נמצא באינטרס כלשהו לשקר באשר להעדפותיו
האלגוריתם מגלה אמת.