אלגוריתמים מגלי-אמת מתקדמים

Advanced Truthful Algorithms

אראל סגל-הלוי

בעיית התרמיל (knapsack)

- נתון תרמיל המסוגל לשאת עד 100 ק"ג
(= 100 שניות המיועדות לפירסום).
- נתונים חפצים עם משקלים שונים וערכים שונים
(= לכל מפרסם יש מודעה באורך אחר וערך אחר).
- צריך למלא את התרמיל בחפצים במשקל כולל עד 100, כך שסכום הערכים גבוה ככל האפשר
(= צריך למלא את הזמן בפרסומות באורך כולל עד 100, כך שסכום הערכים גבוה ככל האפשר).
- הבעיה היא NP-קשה,
אבל יש לה אלגוריתמי-קירוב טובים.

אלגוריתמי קירוב למילוי תרמיל

אלגוריתם חמדני א:

- סדר את החפצים בסדר יורד של הערך.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

הקירוב עלול להיות גרוע (גודל התרמיל = 100):

$100/100k, $20/2k, $20/2k, $20/2k …

אלגוריתמי קירוב למילוי תרמיל

אלגוריתם חמדני ב:

- סדר את החפצים בסדר יורד של **ערך/משקל**.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

הקירוב עלול להיות גרוע:

$3/2k, $100/100k.

"טוֹבִים הַשְּׁנַיִם מִן הָאֶחָד
אֲשֶׁר יֵשׁ לָהֶם שָׂכָר טוֹב בַּעֲמָלָם" (קהלת ד 9)

אלגוריתם א+ב: הפעל את שני האלגוריתמים החמדניים. בחר את התוצאה עם הסכום הגבוה.

משפט: אלגוריתם א+ב נותן קירוב 1/2 (=משיג לפחות 1/2 מהערך הגבוה ביותר האפשרי).

הוכחה: נניח שאלגוריתם ב עוצר אחרי k חפצים.
עם החפץ ה-$k+1$ – הסכום הוא מקסימלי++.
הסכום של אלגוריתם א הוא לפחות החפץ ה-$k+1$.
--> הסכום של אלגוריתמים א+ב מקסימלי++.
--> הסכום של א **או** ב הוא מקסימלי++ \ 2.
***

אלגוריתם אמיתי למילוי תרמיל

אלגוריתם א+ב ללא תשלומים הוא **לא אמיתי**.

האם אלגוריתם א+ב עם תשלומי VCG הוא אמיתי?

דוגמה:

$54/52k, $52/51k, $49/49k.

הראשון זוכה ומשלם $101.

--> האלגוריתם **לא אמיתי**.

איפה ההוכחה "נופלת"?

מכרז מאירסון (Myerson)

נתונים:

- כלל-בחירה הקובע לכל משתתף אם נבחר או לא:
  - *"בחר את השלושה עם הערכים הגבוהים"*
  - *"בחר את כל מי שערכו גדול מ-10"*
  - *"בחר את המסלול הזול ביותר"*
  - *"בחר בעזרת אלגוריתם חמדני א"*
- לכל משתתף יש ערך ל"היבחרות".

דרוש: כלל-תשלום, שאיתו המכרז יהיה אמיתי.

האם לכל כלל-בחירה קיים כלל-תשלום אמיתי?

כלל-בחירה מונוטוני

הגדרה: כלל-בחירה נקרא *מונוטוני* אם, עבור כל i, ההסתברות ש-i נבחר היא פונקציה עולה של v_i.

- כלל-בחירה *דטרמיניסטי* הוא מונוטוני אם עבור כל i, אם הוא נבחר כשהערך שלו x, אז הוא נבחר גם כשהערך שלו הוא כל מספר הגדול מ-x.

דוגמאות לכללים מונוטוניים:

- בחר את 3 הערכים הגדולים ביותר.
- בחר את הערך הגדול ביותר, בתנאי שהוא מעל 10.
- בחר בעזרת אלגוריתם חמדני א / ב / א+ב.

דוגמאות לכללים לא מונוטוניים:

- בחר את הערך השני מלמעלה.
- בחר את הערך הגדול ביותר, אם הוא מתחת ל-7.

משפט מאירסון (Myerson)

משפט מאירסון: מונוטוניות היא תנאי הכרחי ומספיק לאמיתיות. כלומר:

(א) לכל כלל-בחירה לא-מונוטוני - אין כלל-תשלום אמיתי.

(ב) לכל כלל-בחירה מונוטוני - קיים כלל-תשלום אמיתי.

(ג) אם כל שחקן שלא נבחר – לא משלם, אז כלל-התשלום הוא יחיד.

בשקפים הבאים:

- נוכיח את משפט מאירסון.
- נגדיר במדוייק את כלל-התשלומים.

הוכחת משפט מאירסון

סימונים:

- כלל-הבחירה – c - פונקציה המקבלת כקלט את הערכים של כל המשתתפים, ומחזירה וקטור בינארי (1 = "נבחרת!", 0="לא נבחרת."). c נתון וקבוע.
- כלל התשלום – p - פונקציה המקבלת כקלט את הערכים של כל המשתתפים, ומחזירה וקטור מספרי של תשלומים. את p אנחנו מחפשים.

הוכחת משפט מאירסון - המשך

התועלת של משתתף עם ערך v שאומר x היא:

$$v*c(x) - p(x)$$

במכרז אמיתי, חייב להתקיים, לכל v,x:

$$v*c(v) - p(v) \geq v*c(x) - p(x)$$

התועלת של משתתף עם ערך x שאומר v היא:

$$x*c(v) - p(v)$$

במכרז אמיתי חייב להתקיים, לכל v,x:

$$x*c(x) - p(x) \geq x*c(v) - p(v)$$

מחברים את המשוואות ומקבלים:

$$v*[c(v)-c(x)] \geq p(v)-p(x) \geq x*[c(v) - c(x)]$$

הוכחת משפט מאירסון - המשך

נתון: כלל-בחירה c. **דרוש**: כלל-תשלום אמיתי p:

$$v[c(v)-c(x)] \geq p(v)-p(x) \geq x[c(v)-c(x)]$$

מצב א: $c(v)=c(x)$:

$$0 \geq p(v)-p(x) \geq 0$$

מכאן: $p(v)=p(x)$ - התשלום על בחירה לא תלוי בערך.

מצב ב: $c(v)>c(x)$, כלומר $c(v)=1$ וגם $c(x)=0$:

$$v \geq p(v)-p(x) \geq x$$

מכאן: $v>x$ – הפונקציה c חייבת להיות *מונוטונית*.

*** הוכחנו את חלק (א) של משפט מאירסון.

משפט מאירסון – ערך הסף

לפונקציית-בחירה מונוטונית יש **ערך סף** =
הערך שבו הפונקציה c מתחלפת מ-0 ל-1.

ערך-הסף יכול להיות שונה משחקן לשחקן. דוגמאות:

- אם הכלל הוא "בחר את כל הערכים הגדולים מ-10", אז ערך-הסף לכל השחקנים הוא 10.
- אם הכלל הוא "בחר את הערך הגבוה ביותר", אז ערך-הסף של הנבחר הוא המחיר השני.
- אם הכלל הוא "הרץ אלגוריתם חמדני ב", אז ערך-הסף של כל שחקן יהיה תלוי במשקל שלו.

הוכחת משפט מאירסון - המשך

נתון: כלל-בחירה c. **דרוש**: כלל-תשלום אמיתי p:

$$v[c(v)-c(x)] \geq p(v)-p(x) \geq x[c(v)-c(x)]$$

נשים את x קצת מתחת ל"סף" ואת v קצת מעל ל"סף", ונקבל:

$$v \geq p(v)-p(x) \geq x$$

מכאן: $p(v)-p(x)$ חייב להיות שווה לערך הסף.

מכאן: אם שחקן שלא נבחר – לא משלם $(p(x)=0)$, אז כלל התשלום הוא יחיד.

*** הוכחנו את חלק (ג) של משפט מאירסון.

הוכחת משפט מאירסון - סיום

מצאנו כלל-תשלום אחד ויחיד המועמד להיות אמיתי:

- לכל שחקן i יש ערך-סף מסויים t_i. נקבע לפי c.
- אם $t_i > v_i$, אז השחקן נבחר ומשלם t_i.
- אחרת, השחקן לא נבחר ולא משלם.

הוכחה שכלל-תשלום זה הוא אמיתי:

- אם נבחרת ותכריז מעל t_i, או לא נבחרת ותכריז מתחת ל t_i - כלום לא ישתנה.
- אם נבחרת, ותכריז מתחת ל-t_i - לא תיבחר, והתועלת שלך תהיה 0, אבל קודם התועלת שלך היתה חיובית (כי $v_i > t_i$).
- אם לא נבחרת, ותכריז מעל t_i - תיבחר ותשלם t_i, והתועלת שלך תהיה שלילית (כי $v_i < t_i$). ***

מכרז מאירסון למילוי תרמיל

הנחה: המשקל של כל משתתף ידוע. כל משתתף צריך להגיד רק את הערך שלו.

אלגוריתם חמדני א:

- סדר את החפצים בסדר יורד של הערך.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

$100/100k, *$20/2k, $20/2k, $20/2k …*

הראשון נבחר ומשלם את ערך הסף שלו - $20.

אלגוריתם חמדני ב:

- סדר את החפצים בסדר יורד של **ערך/משקל**.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

$20/2k, $5/1k, *$98/98k.*

שני הראשונים נבחרים:

הראשון משלם $2, השני משלם $1.

מכרז מאירסון למילוי תרמיל

- **אלגוריתם א+ב**: הפעל את שני האלגוריתמים החמדניים. בחר את התוצאה עם הסכום הגבוה.

$54/52k, $52/51k, $49/49k.

הראשון זוכה ומשלם: $52 * (52k/51k)

$100/100k, $20/2k, $20/2k.

הראשון זוכה ומשלם $40.

$100/100k, $60/2k, $50/2k.

שני האחרונים זוכים ומשלמים: ?

ויקרי-קלארק-גרובס לעומת מאירסון

	וק"ג	מאירסון
פרמטרים לכל משתתף	הרבה *(למשל: בחירת מסעדה)*	אחד *(הערך ל"היבחרות")*
כלל בחירה	מיקסום סכום ערכים	כל כלל מונוטוני *(למשל: קירוב בעיית התרמיל, מיקסום רווח)*

שאלה פתוחה

האם יש אלגוריתם אמיתי המשלב את היתרונות של וק"ג ומאירסון, כלומר:

- עובד עם שחקנים רב-פרמטריים,
- עובד גם בלי למקסם את סכום הערכים

?