

מטלה - החלפת בתים וכליות

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

שאלה 1: החלפת בתים - יעילות ואדישות

בהרצאה הוכחנו, שאלגוריתם מעגלי המסחר הוא יעיל פארטו כאשר כל יחסי ההעדפה הם חזקים (אין אדישות).

א. הוכיחו (ע"י דוגמה) שאלגוריתם מעגלי המסחר אינו יעיל פארטו כאשר יחסי ההעדפה הם לא חזקים (-) יש אדם שהוא אדיש בין שני בתים).

ב. [מחקרי]. הציעו שיפור לאלגוריתם, כך שיהיה יעיל פארטו גם כשיש אנשים שהם אדישים בין שני בתים (האלגוריתם עדיין צריך לעודד השתתפות). הדגימו את פעולת האלגוריתם שלכם.

שאלה 2: הסתברות להחלפה מוצלחת

נניח שיש n אנשים עם n בתים, וההעדפות של כל אדם מתפלגות באופן אחיד (ההסתברות שאדם i הכי רוצה את בית j היא $1/n$). מה ההסתברות שאדם מסוים יהיה חלק ממעגל-החלפה בסיבוב הראשון?

[אם אתם לא מצליחים לפתור לכל n , נסו לפתור לערכים קטנים, למשל 2, 3, וכו'..]

שאלה 3: החלפת משמרות בפייתון

כיתבו פונקציה בפייתון המבצעת החלפת משמרות בין עובדים, בעזרת אלגוריתם מעגלי המסחר. העזרו במחלקה הבאה (ניתן לשנות לפי הצורך):

```
class Worker:
    name: str
    # Worker name, for display.
    preferences: list
    # preferences[0] is the best shift for the worker.
    # preferences[1] is the 2nd-best shift for the worker. etc...
    current_shift: int
    # The shift to which the worker is currently assigned
```

הפונקציה מקבלת כקלט וקטור עם כל העובדים במערכת (לכל עובד רשום סדר העדיפויות שלו והמשמרת הנוכחית שלו), וכותבת למסך את השינויים שיש לבצע בלוח השיבוצים, למשל:

Avraham moves from shift 0 to shift 1.

Isaac moves from shift 1 to shift 2.

Yaakov moves from shift 2 to shift 0.

כותרת הפונקציה:

```
def exchange_shifts (workers: List[Worker])
```

בדקו את הפונקציה בעזרת doctest.

שאלה 4: הסתברות להחלפת כליות

לצורך השאלה, הניחו שהתאמה בין תורם לחולה תלויה רק בסוג הדם, ושהסתברות לכל סוג דם (0, A, B, AB) היא בדיוק רבע.

א. נניח שאדם חולה וזקוק לכליה, ואשתו בריאה ומוכנה לתרום לו. מה ההסתברות שהכליה מתאימה?

ב. נניח שיש שני זוגות כמו בסעיף א. מה ההסתברות שאפשר לבצע החלפת-כליות מוצלחת? בכמה ההחלפה משפרת את סיכויי ההצלה של כל אחד מהחולים?

בסעיפים הבאים נניח שיש שלושה זוגות כמו בסעיף א.

ג. מה ההסתברות שאפשר לבצע החלפת-כליות מוצלחת, אם החלפות מתבצעות בזוגות בלבד?

ד. מה ההסתברות שאפשר לבצע החלפת-כליות בשלושה, בכמה ההחלפה משפרת את סיכויי ההצלה של החולים?

שאלה 5: החלפת כליות בפייתון

כיתבו פונקציה המקבלת מטריצת התאמה בין זוגות, ומוצאת מעגלים **באורך 2 או באורך 3**, כך שמספר המושתלים הכולל הוא הגבוה ביותר. הפונקציה לא חייבת להיות יעילה חישובית (אפשר לכתוב פתרון brute force). כותרת אפשרית לפונקציה:

```
def find_max_matches (compatible: List[List[bool]]): ...
```

המטריצה compatible מתארת התאמה בין תורם לחולה. למשל

compatible[11,22]==True אומר שתורם מספר 11 יכול לתרום לחולה מספר 22;

compatible[22,11]==True אומר שתורם מספר 22 יכול לתרום לחולה מספר 11 (שימו לב – המטריצה לא בהכרח סימטרית).

פלט לדוגמה:

Length 2 cycle: 11→22 and 22→11

Length 3 cycle: 44→55 and 55→99 and 99→44