

מטלה - מכרזי ויקרי-קלארק-גרובס ומאירסון

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

שאלה 1: שוק דו-צדדי

אחד השימושים של תורת המכרזים הוא ניהול אוטומטי של שוק דו-צדדי, שיש בו גם קונים וגם מוכרים, כמו למשל בבורסה לניירות ערך. לצורך השאלה נניח שכל מוכר מחזיק מניה אחת, כל קונה מעוניין במניה אחת, וכל המניות זהות (של אותה חברה).

א. נניח שבבורסה יש:

- חמישה מוכרים, המייחסים למניה שלהם את הערכים הבאים: 1, 3, 5, 7, 9.
- חמישה קונים, המייחסים לאותה מניה את הערכים: 2, 4, 6, 8, 10.

מהו המסחר הממקסם את סכום הערכים – כמה מניות נסחרות, מי מוכר ומי קונה?

ב. מה הם תשלומי VCG בשוק של סעיף א? מה הבעיה בתשלומים אלה?

ג. נתון כלל-הבחירה "בחר את כל הקונים והמוכרים במסחר האופטימלי". מה הם תשלומי מאירסון עבור כלל זה? הדגימו על השוק של סעיף א.

ד. נתון כלל-הבחירה "בחר את כל הקונים והמוכרים במסחר האופטימלי, פרט לזוג קונה-מוכר עם ההפרש הקטן ביותר". מה הם תשלומי מאירסון עבור כלל זה? הדגימו על השוק של סעיף א.

שאלה 2: תיכנות - כלל-התשלום של מאירסון

נתונה פונקציה המייצגת כלל-בחירה. כותרת הפונקציה:

```
def choices (values: List[float]) → List[bool]: ...
```

הפונקציה מקבלת כקלט וקטור של מספרים המייצגים את הערכים של השחקנים (בשקלים). הפונקציה מחזירה כפלט וקטור בוליאני המחזיר, לגבי כל שחקן, האם הוא נבחר או לא.

כיתבו פונקציה המייצגת את כלל-התשלום המתאים, לפי משפט מאירסון. כותרת הפונקציה:

```
def payments (values: List[float]) → List[float]: ...
```

הפונקציה מקבלת כקלט את וקטור הערכים (כמו הפונקציה הקודמת), ומחזירה את וקטור התשלומים, בשקלים, ברמת-דיוק של אגורה אחת (0.01 ש"ח).

אם הפונקציה מגלה שכלל-הבחירה אינו מונוטוני - היא צריכה לזרוק חריגה מתאימה.

שאלה 3: תיכנות - מכרז מאירסון לבעיית התרמיל

נתון מערך גלובלי בשם `weights`, שבו האיבר ה-`i` מייצג את המשקל של השחקן ה-`i`.

א. בחרו אחד מאלגוריתמי-הקירוב שלמדנו (א, ב, או א+ב), וכיתבו את פונקציית-הבחירה המתאימה לו:

```
def choices (values: List[Double]) → List[Boolean]: ...
```

ב. בחרו אחד מאלגוריתמי-הקירוב שלמדנו (א, ב, או א+ב), וכיתבו את פונקציית-התשלום המתאימה לו:

```
def payments (values: List[Float]) → List[Float]: ...
```

כאן (בניגוד לשאלה הקודמת) חישוב התשלומים צריך להיות מדויק, ע"י נוסחה מפורשת.

שאלה 4: דוגמאות למכרזי מאירסון

הסעיפים הבאים מתייחסים לכלל-הבחירה "בחר את הערך הגבוה ביותר, בתנאי שהוא לפחות 10".

א. הראו (ע"י דוגמה) שתשלומי וק"ג עבור כלל זה אינם מגלי-אמת.

ב. תנו נוסחה לחישוב תשלומי מאירסון עבור כלל זה. הדגימו את הנוסחה.

בסעיפים הבאים, נתון שלכל משתתף i יש משקל w_i שהוא מידע ציבורי. כלל-הבחירה הוא "בחר את המשתתף שהמכפלה ערך*משקל ($v_i * w_i$) שלו היא הגדולה ביותר".

ג. הראו (ע"י דוגמה) שתשלומי וק"ג עבור כלל זה אינם מגלי-אמת.

ד. תנו נוסחה לחישוב תשלומי מאירסון עבור כלל זה. הדגימו את הנוסחה.

שאלה 5: אלגוריתם אמיתי למציאת עץ פורש מקסימלי

נתון גרף לא-מכוון, שבו לכל קשת יש ערך. כל קשת שייכת למישהו, והערך הוא מידע פרטי של הבעלים.

א. הדגימו את אלגוריתם VCG למציאת עץ פורש עם ערך מקסימלי.

ב. הדגימו את אלגוריתם מאירסון למציאת עץ פורש עם ערך מקסימלי.

שאלה 6: פתרונות מקוריים לבעיית התרמיל

א. הציעו שלושה אלגוריתמים מקוריים (שונים מהאלגוריתמים שנלמדו בכיתה) והגיננו לפתרון בעיית התרמיל.

ב. עבור כל אלגוריתם שמצאתם בסעיף א, תנו דוגמה למשקלים וערכים, המראה שהאלגוריתם אינו אופטימלי.

ג. עבור אחד האלגוריתמים שמצאתם בסעיף א, חשבו את כלל-התשלומים של מאירסון.

הערה: משקלי החפצים יכולים להיות מספרים ממשיים חיוביים כלשהם (לא דווקא מספרים שלמים).