דביר פריד
גל פוליצר

<u>אלגוריתמים כלכליים מטלה 12 – כליות ומבחנים</u>

שאלה 3 – מציאת שרשרת גדולה ביותר:

אתם מנהלים את המרכז הישראלי להשתלת איברים. פנה אליכם תורם חסיד (אלטרואיסט) ואמר שהוא מוכן לתרום כליה, אבל רק אם התרומה שלו תציל לפחות שבעה חולים שונים (ע"י תרומה בשרשרת).

א. תארו אלגוריתם הבודק םא קיימת שרשרת מתאימה. הקלט לאלגוריתם הוא גרף ההתאמות בין הזוגות במאגר, וכן ההתאמות בין התורם החסיד לבין הזוגות במאגר. הדגימו את האלגוריתם.
ב. מהי סיבוכיות האלגוריתם שלכם?

פתרון:

אני אשתדל להציג כמה פתרונות: תחילה, נבחין שמדובר בבעיה NPH, כיוון שזה שקול לבעיה קשה אחרת, מעגל המילטוני בגרף:

למה: קיים מסלול המילטוני בגרף אם ורק אם המסלול הארוך ביותר הינו באורך $n-1$.

הוכחת הלמה: אם קיים מסלול המילטוני, אזי לפי הגדרה קיים מסלול פשוט שעובר בכל הקודקודים בדיוק פעם אחת. כיוון שהמסלול מתחיל בקודקוד אחד, ומסתיים באחד אחר, אזי קיימים $n-1$ קשתות בתווך. אם לא קיים מסלול המילטוני, אזי לפי הגדרה לא קיים מסלול פשוט שעובר בכל הקודקודים בדיוק פעם אחת. נניח בשלילה שקיים בגרף מסלול ארוך ביותר באורך $n-1$, נסמנו p. p הוא מסלול פשוט באורך $n-1$, כלומר – ישנן $n-1$ קשתות במסלול. לכן קיימים על המסלול n קודקודים, וזו סתירה לכך שאין מסלול המילטוני.

לכן, הגישות הן למצוא פתרון לפרמרטר קבוע (נקבע את אורך המסלול ל7), או שנמצא פתרון פולינומי בגרף ואקספוננציאלי באורך המסלול.

פתרון נאיבי: נעבור על כל $\binom{n}{7}$ הקבוצות בגרף ההתאמות לפני הוספת החסיד לגרף. עבור כל קבוצה נבדוק אם קיים בה מסלול פשוט ($\frac{7!}{2}$ סידורים, כיוון שהקשתות לא מכוונות אז לכל סידור יש סידור מראה שמבחינתנו זהה לו, שזה מספר קבוע של בדיקות לכל קבוצה). לכל קבוצה כזו שיש לה סידור שכזה, נבדוק אם קיימת קשת לאיבר ההתחלה או לאיבר הסוף בסידור (בדיקה קבועה). אם כן – החזר שקיימת שרשרת מתאימה. אחרת – האלגוריתם יחזיר שלא. סיבוכיות הזמן תהיה $\mathcal{O}\left(\binom{n}{7}\right)=\mathcal{O}(n^7)$.

פתרון שני: מציאת 'פירוק מסלולי' לגרף (כלומר, *path – decomposition* של הגרף), ולאחר מכן תכנות דינמי. הגדרת 'פירוק מסלולי': $<\{X_i \mid i\in I\},T>$ הינו 'פירוק מסלולי' של הגרף $G=(V,E)$ אם הוא 'פירוק עצי' (*tree-decomposition*), כלומר: $\bigcup X_i = V$, לכל קשת בגרף $\{u,v\}$ מתקיים כי קיים i כך ש: $\{u,v\}\subseteq X_i$, ובנוסף, לכל $i,j,k\in I$, אם j נמצא במסלול בין i לk אזי $X_i\cap X_k\subseteq X_j$. T הינו עץ ביחס לאינדקסים $i\in I$. כדי להגדיר שמדובר בפירוק מסלולי, נוסיף ש T הינו גרף מסלול פשוט.

את האלגוריתם עצמו אציג בכיתה. סיבוכיות זמן הריצה שלו הינה $\mathcal{O}(d!\,2^d m)$, כאשר d הוא *path-width* (שזה אותו דבר כמו *tree-width*), ו-m הוא מספר הקשתות בגרף.