

מטלה 5- אלגוריתמים כלכליים**שאלה 2: מכרז מחיר שני מוכלל**

מכרז מחיר שני מוכלל (Generalized Second Price Auction, GSP) הומצא ע"י גוגל, והוא מתנהל באופן הבא:

- כל מפרסם מכריז על הערך של קליק בעיניו;
- המפרסם שהכריז את הערך הגבוה ביותר זוכה במקום הראשון ומשלם את המחיר השני;
- המפרסם שהכריז את הערך השני זוכה במקום השני ומשלם את המחיר השלישי;
- וכו'...

א. הוכיחו, שכאשר ישנם שני מקומות או יותר, מכרז GSP אינו אמיתי.

ב. הוכיחו שהתשלומים במכרז GSP תמיד גבוהים לפחות כמו התשלומים במכרז VCG.

הצעת פתרון – סעיף א':

נניח בשלילה שהוא כן אמיתי ונביא דוגמה נגדית:

מפרסם 1	מפרסם 2	מפרסם 3	שיעור הקלקה 1	שיעור הקלקה 2
30	28	25	0.5	0.4

נתבונן במפרסם 1, כאשר הוא מפרסם את ערכו האמיתי של $v(1)$, הוא זוכה במקום הראשון ומרוויח:

$$0.5 \cdot (30 - 28) = 1$$

אבל אם מפרסם אחד יחליט לפרסם ערך לא אמיתי נמוך יותר, למשל 27, ובכך יזכה במקום השני, הוא ירוויח:

$$0.4 \cdot (30 - 27) = 1.2$$

ניתן לראות מכאן שלמפרסם 1 שווה לרגל ובכך להרוויח יותר. סתירה להנחה שמכרז GSP הוא אמיתי.

הצעת פתרון – סעיף ב':

נתבונן ונראה שהסכום הכולל שמשלם כל מפרסם ב-VCP auction זה בעצם:

$$\left(\sum_{j=i+1}^n v(j) \cdot r_{j-1} \right) - \left(\sum_{j=i+1}^n v(j) \cdot r_j \right) =$$

$$v(j) \cdot (r_j - r_{j-1}) + v(j+1) \cdot (r_{j+1} - r_j) \dots =$$

נחזיר ל-i במקום j:

$$v(i+1) \cdot (r_i - r_{i+1}) + v(i+2) \cdot (r_{i+1} - r_{i+2}) \dots$$

כעת נראה כי:

$$v(i+1) \cdot (r_i - r_{i+1}) + v(i+2) \cdot (r_{i+1} - r_{i+2}) \dots / r_i \leq v(i+1)$$

שהרי כל מפרסם במכרז GSP משלם $v(i+1)$ ואנחנו רוצים להוכיח שמחיר זה תמיד גדול מהמחיר שמשלם מפרסם במכרז VCP.

לכן:

$$v(i+1)*(r_i-r_{i+1})+v(i+2)*(r_{i+1}-r_{i+2})\dots/r_i \leq$$

נגדיל את צד שמאל של האי שוויון על ידי הפיכת כל $v(i+k)$ ל $v(i+1)$ ונוציא גורם משותף:

$$v(i+1)*(r_i-r_{i+1})+v(i+1)*(r_{i+1}-r_{i+2})\dots/r_i \leq$$

$$v(i+1)(r_i-r_{i+1}+r_{i+1}-r_{i+2}+r_{i+2}\dots r_n)/r_i =$$

$$v(i+1)(r_i-r_n)/r_i \leq v(i+1)*r_i/r_i=v(i+1)$$

מכאן קיבלנו שאכן:

$$v(i+1)*(r_i-r_{i+1})+v(i+2)*(r_{i+1}-r_{i+2})\dots/r_i \leq v(i+1)$$

ואפשר להוכיח גם הפוך ש $v(i+1) \geq v(i+1)*(r_i-r_{i+1})$, אך מנוחות הוכחנו את הצד השני שהוא משלים למקרה שלנו וממילא מוכיח גם הפוך.
מ.ש.ל