

פתרון - חלוקה הוגנת של קרקעות ועוגות

שאלה 1: חלוקה פרופורציונלית בשני מימדים

א. נתונה חלקת-אדמה בצורת מלבן. תארו אלגוריתם הנותן חלוקה פרופורציונלית של העוגה בין n אנשים, כך שכל אחד מקבל מלבן.

ב. נתונה חלקת-אדמה בצורת ריבוע. הוכיחו שלא קיים אלגוריתם הנותן חלוקה פרופורציונלית של העוגה בין n אנשים כך שכל אחד מקבל ריבוע.

פתרון: סעיף א למעשה ראינו בשיעור – אלגוריתם אבן-פז מחזיר פרוסות מלבניות אם כל החתכים הם אופקיים או אנכיים.

סעיף ב – צריך לתת דוגמה נגדית. אם n לא ריבועי זה קל – פשוט מניחים שפונקציית הערך של כולם היא אחידה (ערך = שטח), ולכן כל אחד צריך לקבל ריבוע ששטחו $n/1$ מהעוגה, כלומר אורך הצלע שלו $\sqrt{n}/1$. אבל כש- n הוא לא מספר ריבועי, אורך הצלע לא רציונלי, ולכן לא נוכל לכסות את כל העוגה המקורית.

המקרה ש- n ריבועי דורש דוגמה מורכבת יותר. ראו כאן:

http://www.eurocg2016.usi.ch/sites/default/files/paper_10.pdf.

שאלה 2: חלוקת תורנויות פרופורציונלית

אמא ואבא נסעו לנופש, והשאירו את n ילדיהם הגדולים לשמור על התינוקות ה- $n+1$. הילדים לא כל כך רוצים לשמור אבל אין להם ברירה, אז הם החליטו לחלק ביניהם את הזמן ולעשות תורנויות. לכל ילד יש העדפות שונות לגבי הזמן ביום שהכי קשה לשמור בו – יש כאלה שהכי קשה להם לשמור בלילה, יש כאלה שהכי קשה להם לשמור דווקא בצהריים, וכו'.

כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית של זמן השמירה, כך שכל ילד מקבל תורנות רצופה.

פתרון: אליהו סתת.

להרחבה ראו: https://en.wikipedia.org/wiki/Chore_division

שאלה 3: חלוקת תורנויות ללא קנאה

אמא ואבא נסעו לנופש וכו', כמו בשאלה 2.

א. תארו אלגוריתם שבו כל אחד מהילדים מקבל תורנות רצופה, והחלוקה היא ללא-קנאה-בקירוב (עד כדי שניה אחת).

ב. תנו דוגמה הממחישה את פעולת האלגוריתם של סעיף א.

פתרון: בשיעור.

שאלה 4: חלוקה עם זכויות לא שוות (unequal entitlements)

עמי ותמי עזרו לאמא להכין עוגה, אבל תמי עזרה יותר. עמי השקיע שתיים ותמי השקיעה חמש שעות. אמא רוצה לחלק את העוגה ביניהם בצורה הוגנת בהתאם להשקעה.

א. תנו הגדרה הגיונית למושג "חלוקה פרופורציונלית" במצב זה, בעזרת הפונקציה V_i (פונקציית הערך של שחקן i).

ב. כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית.

פתרון: דביר ונועם. להרחבה ראו:

https://en.wikipedia.org/wiki/Proportional_cake-cutting_with_different_entitlements וגם <https://arxiv.org/pdf/1709.03152.pdf>

שאלה 5: שינוי חלוקה קיימת

עמי רמי ותמי חילקו ביניהם עוגה בצורה פרופורציונלית (כל אחד קיבל לפחות $1/3$). הם התיישבו לאכול, אבל לפני שהספיקו - נכנסה צומי וטענה שגם לה מגיע חלק. פתחו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית (כל אחד מקבל לפחות $1/4$), ובנוסף, נותן לכל אחד משלושת הילדים הראשונים (עמי רמי ותמי) לפחות $3/4$ מהערך שהיה לו בחלוקה הראשונה.

פתרון: אנה אהרנוב.

פתרון כללי: גל פוליצר וטל נקר.

להרחבה ראו: https://en.wikipedia.org/wiki/Fink_protocol

שאלה 6: חלוקה ללא קנאה עם שארית

נתון האלגוריתם הבא לחלוקה בין 3 אנשים (דומה לצעד הראשון של אלגוריתם סלפרידג'-קונוויי):

- 1. עמי חותך את העוגה לשלושה חלקים שווים בעיניו.
 - 2. תמי מקצצת את הפרוסה הטובה ביותר בעיניה, כך שיהיו לה שתי פרוסות טובות ביותר.
 - 3. מוצאים שידוך מקסימום בין 3 השחקנים לבין 3 מתוך 4 הפרוסות.
- שימו לב - באלגוריתם זה לא כל העוגה מחולקת - יש שארית הנשארת על השולחן.

א. הוכיחו שהחלוקה המתקבלת היא ללא קנאה, וכל שחקן מקבל פרוסה השווה בעיניו לפחות $1/4$ מהשווי הכללי של העוגה.

ב. עכשיו נניח שצריך לחלק עוגה בין 4 שחקנים. תארו אלגוריתם לחלוקה עם שארית, הנותן חלוקה ללא קנאה, שבה כל שחקן מקבל פרוסה השווה בעיניו לפחות $1/8$ מהשווי הכללי של העוגה.

פתרון: ראו <https://arxiv.org/abs/1511.02599>

שאלה 7: תיכנות - חלוקת-עוגה פרופורציונלית

נניח שרוצים לחלק נהר חד-ממדי, המיוצג ע"י הקטע $[0,1]$. כל משתתף מיוצג ע"י המחלקה הבאה:

```
class Agent:
    def eval(self, x:float)->float:
        """
        :param x: a positive number representing a location on the cake.
        :return: v: the value of the piece [0,x] for the agent.
        """

    def mark(self, v:float)->float:
        """
        :param v: a positive number representing a value of a piece.
        :return: x: a number such that the value of [0,x] equals v.
        """
```

א. כיתבו בשפה לבחירתכם (אפשר גם פסאודו-קוד) את אלגוריתם "חתוך ובחר":

```
def cutAndChoose(a:Agent, b:Agent):
```

הפונקציה מקבלת שני שחקנים וכותבת את החלוקה בפורמט הבא (לדוגמה):

Agent a receives [0,0.3]. Agent b receives [0.3,1].

ב. כיתבו בשפה לבחירתכם את אלגוריתם אבן-פז:

```
def algEvenPaz(agents:List[Agent]):
```

הפונקציה מקבלת מערך של שחקנים וכותבת את החלוקה בפורמט הבא (לדוגמה):

Agent 0 receives [0,0.3]. Agent 1 receives [0.3,0.6]. Agent 2..

• פתרון: גיא וולף, <https://github.com/guyguy40/EconAlgsEx1/blob/master/econAlgs1.py>

שאלה 8: תיכנות - סימפלקס החלוקות

ניתן לייצג פונקציית-הערך של שחקן ע"י רשימה של מספרים, המייצגים את הערך של השחקן לכל חלק מהעוגה. למשל, אם העוגה היא הקטע $[0,1]$, אז הרשימה 5,2,9,4 משמעה שהשחקן מעריך את הרבע השמאלי של העוגה $[0,0.25]$ כ-5, הרבע הבא $[0.25,0.5]$ כ-2, וכו'.

א. נתונה המחלקה הבאה, המאוחלת ע"י רשימה של מספרים כנ"ל. השלימו את הפונקציה `eval`.

```
class Agent:
    def __init__(self, values:list):
        """
        Initialize an agent with piecewise-constant valuations
        over a 1-dimensional cake.
        :param values: The values of the agent to the regions of the cake.
```

ברוך ה' חונן הדעת

```
"""
self.values = values

def eval(self, x:float, y:float)->float:
    """
    :param x,y: positive numbers representing locations on the cake.
    :return: v: the value of the piece [x,y] for the agent.
    """
```

ב. כיתבו פונקציה המקבלת כקלט משתנה מסוג Agent כנ"ל, ומציירת את סימפלקס החלוקות הדו-ממדי בצבעים, כאשר:

- כל נקודה שבה השחקן רוצה את פרוסה מס' 1 מסומנת באדום;
- כל נקודה שבה השחקן רוצה את פרוסה מס' 2 מסומנת בירוק;
- כל נקודה שבה השחקן רוצה את פרוסה מס' 3 מסומנת בכחול.