

# אלגוריתמים מגלי-אמת

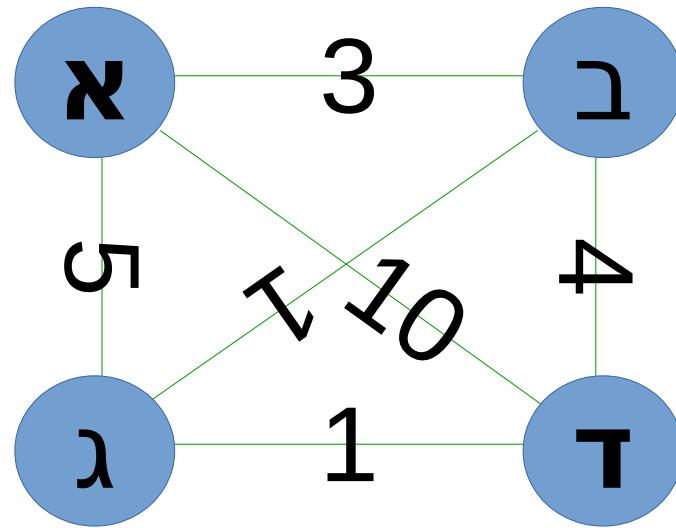
# Truthful Algorithms

אראל סגל-הלוי



# בעיה 1: מציאת מסלול זול ביותר

נתונה רשת. לכל קשת יש עלות-מעבר. צריך להעביר חבילה בין שתי נקודות ברשת (א-ד), במסלול עם עלות כוללת נמוכה ביותר.



- אם העלות של כל קשת ידועה לכולם ("ידע ציבורי", common knowledge) – יודעים לפתור.
- אבל מה אם העלות של כל קשת ידועה רק לבעל-הקשת (ידע פרטי, private information)?

# בעיה 2: בחירת פרסומות לדף רשת

Google - Mozilla Firefox - חיפוש ב- מחשב נייד - חיפוש ב- X +

file:///home/erelsgl/Dropbox/ariel/ALGORITHMS2M/google-ads.html 170% Search

תנך docs cite איפה בוס ubuntu תקציב stats dicta notebook אריאל אלגמ CPP vps בר-אילון conf משתלות OOP

מחשב נייד

Google

הכל תמונות סרטונים חדשות מפות עוד הגדרות כלים

כ-366,000 תוצאות (0.59 שניות)

1 מחשבים ניידים 60 יום ניסיון | עכשיו באתר AZRIELI.COM  
▼ [www.azrieli.com/](http://www.azrieli.com/) מודעה  
מגוון רחב של דגמים של מיטב המותגים לבחירתכם באתר הקניות החדש מקבוצת עזריאלי

2 רשת אייבורי מחשבים | מחשב נייד דל 15.6" | ivory.co.il  
▼ [www.ivery.co.il/](http://www.ivery.co.il/) מודעה  
מעבד Windows 10 Core i3-6006U ב-1,890 ש"ח

3 מחשבים ניידים - מבחר של ניידים | במבחר מחירים החל מ-790 ש"ח  
▼ [www.ksp.co.il/נ"ח](http://www.ksp.co.il/נ) מודעה

# בעיה 2: בחירת פרסומות לדף רשת

נתונים  $m$  מפרסמים שונים. לכל מפרסם יש ערך שונה להקלקה על הפרסומת שלו.

בדף יש  $k$  מיקומים,  $k < m$ . לכל מיקום יש אחוזי-הקלקה שונים.

צריך לבחור  $k$  מפרסמים ולתת מיקום לכל מפרסם, כך שתוחלת סכום הערכים תהיה גדולה ביותר.

- אם הערך של כל מפרסם ידוע לכולם –

- אלגוריתם חמדני פותר את הבעיה (נוכיח בהמשך).

- אבל מה אם הערך של כל מפרסם ידוע רק למפרסם?

# בעיה 3: בחירת פרסומות לרדיו

נתונים  $m$  מפרסמים שונים. לכל מפרסם יש פרסומת באורך שונה, וגם ערך שונה להשמעת הפירסומת שלו.

בתוכנית יש זמן קצוב  $T$  להשמעת פרסומות.

צריך לבחור פרסומות באורך כולל של לכל היותר  $T$ , כך שסכום הערכים גדול ביותר.

- אם הערך של כל מפרסם ידוע לכולם –

בעיית התרמיל (knapsack problem).

- אבל מה אם הערך של כל מפרסם ידוע רק למפרסם?

# אלגוריתם אמיתי

הגדרה: אלגוריתם נקרא אמיתי (truthful)  
או חסין-אסטרטגיה (strategyproof)  
או לא-ניתן-למניפולציה (non-manipulable)  
או מגלה-אמת (truth-revealing)

אם לכל משתתף כדאי להגיד את הערך  
האמיתי שלו, לא משנה מה עושים האחרים.

## יתרונות:

- למנהל – קלט אמיתי - < פלט אמיתי;
- למשתתפים - אין צורך "לרגל".

# בעיה 0: חישוב מקסימום

יש לי חפץ שאני לא צריך. אני רוצה לתת אותו למי שיפיק ממנו הכי הרבה תועלת. אני שואל כל אחד "כמה שווה לך החפץ?" ורוצה לתת למי שהערך שלו הגבוה ביותר.

אם הערכים ידועים – בעיית חישוב מקסימום.

אם הערכים לא ידועים:

- לתת את החפץ בחינם – לא אמיתי.

- מכרז "מחיר ראשון" – לא אמיתי.

- האם קיים מכרז אמיתי?

- <https://youtu.be/ZyATAodMDrQ>

# מכרז מחיר שני – Second Price Auction

## מכרז ויקרי - Vickrey Auction

הגדרה: מכרז ויקרי (= מכרז מחיר שני) הוא:

- (א) המשתתפים כותבים הכרזות במעטפות;
- (ב) המעטפות נפתחות ומסודרות בסדר יורד;
- (ג) בעל ההכרזה הגבוהה ביותר זוכה בחפץ;
- (ד) הזוכה משלם את ההכרזה השניה בגובהה.



# מכרז ויקרי - Vickrey Auction

**משפט:** כששחקנים יש העדפות קוואזי-ליניאריות, מכרז ויקרי הוא אמיתי.

**הוכחה:** נניח שהערך שלי הוא  $v$  והערך המקסימלי של האחרים הוא  $x$ .

- לא משנה מה אגיד, התועלת שאשיג במקרה הטוב ביותר תהיה  $\max(0, v-x)$ .
- כשאני מכריז  $v$ , אני מקבל תועלת זו. \*\*\*

# מכרז מחיר ראשון – First Price Auction

**משפט: מכרז מחיר ראשון אינו אמיתי.**

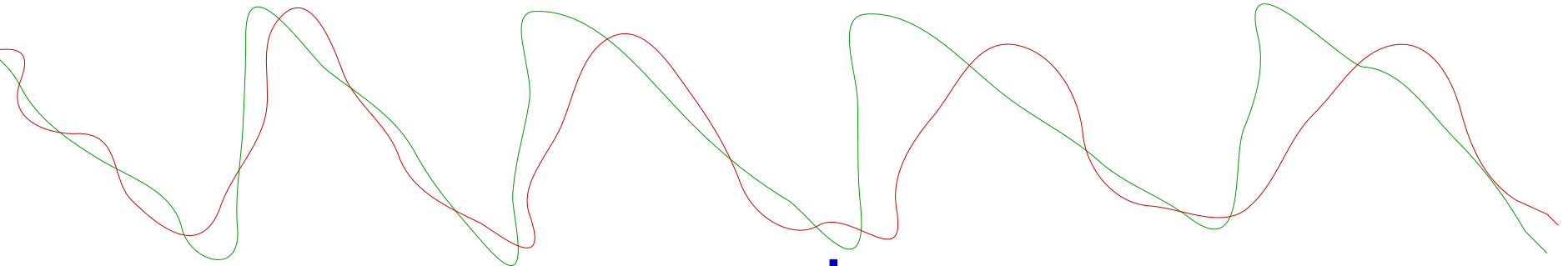
**הוכחה:** כדי להוכיח שמכרז אינו אמיתי מספיק להביא דוגמה נגדית אחת.

נניח שהערך של שחקן כלשהו הוא 10, הוא הגבוה ביותר, והערך השני הוא 5.

הכרזה אמיתית (10) תיתן לו תועלת 0, אבל הכרזה לא אמיתי (למשל 6) תיתן לו תועלת גדולה מ-0.

• **מה הבעיה במכרז לא אמיתי? ←**

# מכרז מחיר ראשון בפירסום

- המכרזים הראשונים לפירסום לפי מילות חיפוש היו של Overture (לפני גוגל).
  - המכרזים הראשונים היו "מחיר ראשון".
  - המהנדסים שמו לב, שהמפרסמים משנים את ההכרזה שלהם שוב ושוב:
- 
- נוצר עומס כבד על השרתים.

# מכרז מחיר שני בפירסום

- בעקבות העומס הכבד על השרתים, החליטו המהנדסים של Google שהמכרז שלהם יהיה מכרז מחיר שני.
- המפרסם עם ההכרזה הגבוהה ביותר זוכה, ומשלים סנט אחד מעל ההכרזה השניה בגובהה.
- השלב הבא – כמה פרסומות בעמוד אחד.

# מכרז פירסום – Ad Auction

יש כמה חפצים למכירה, כל אחד באיכות שונה:

Google - Mozilla Firefox - חיפוש ניד - מחשב ניד - חיפוש ב-Google

file:///home/erelsgl/Dropbox/ariel/ALGORITHMS2M/google-ads.html 170% Search

תנך docs cite איפה בוס ubuntu תקציב stats dicta notebook אריאל אלג2מ CPP vps בר-אילן conf משתלות OOP

מחשב ניד Google

הכל תמונות סרטונים חדשות מפות עוד הגדרות כלים

כ-366,000 תוצאות (0.59 שניות)

- 1 מחשבים ניידים 60 יום ניסיון | עכשיו באתר AZRIELI.COM  
▼ [www.azrieli.com/](http://www.azrieli.com/) (מודעה)  
מגוון רחב של דגמים של מיטב המותגים לבחירתכם באתר הקניות החדש מקבוצת עזריאלי
- 2 רשת אייבורי מחשבים | מחשב ניד דל 15.6" | ivory.co.il  
▼ [www.ivory.co.il/](http://www.ivory.co.il/) (מודעה)  
מעבד Windows 10 Core i3-6006U ב-1,890 ש"ח
- 3 מחשבים ניידים - מבחר של ניידים | במבחר מחירים החל מ-790 ש"ח  
▼ [www.ksp.co.il/ח"ש](http://www.ksp.co.il/ח) (מודעה) 790 מחשבים ניידים/החל מ-790 ש"ח

# מכרז פירסום – Ad Auction

## הנחות:

- לכל משבצת  $k$  יש הסתברות-הקלקה  $r_k$
- $r_1 > r_2 > \dots$  [CTR = Click Through Rate]
- לכל מפרסם  $j$  יש ערך-הקלקה  $v_j$ .
- מכאן: כל מפרסם מעריך את משבצת  $k$  כ:

$$v_j * r_k$$

**המטרה שלנו** למצוא אלגוריתם אמיתי למיקסום סכום הערכים.

# מכרז פירסום – מיקסום סכום הערכים

## אלגוריתם חמדני:

- סדר את המפרסמים בסדר יורד של  $v_j$ :
- $v_1 > v_2 > \dots$
- תן למפרסם  $j$  את המקום ה- $j$ .

# מכרז פירסום – מיקסום סכום הערכים

## משפט: האלגוריתם החמדני ממקסם סכום ערכים.

הוכחה: נניח בשלילה שיש סדר שונה,  $k$ , הממקסם את סכום הערכים. בסדר זה יש מפרסמים  $j, i$  שעבורם:

$$v_j < v_i \quad r_{k(j)} > r_{k(i)}$$

נחליף את מפרסמים  $j$  ו- $i$ . אחרי ההחלפה,  $i$  נמצא במקום  $k(j)$  ו- $j$  נמצא במקום  $k(i)$ . השינוי בסכום:

$$v_i * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) - v_j * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) = (v_i - v_j)(r_{k(j)} - r_{k(i)}) > 0$$

מכאן שהסדר האחר אינו ממקסם את סכום הערכים – סתירה להנחה. \*\*\*



# מכרז פירסום

- אנחנו יודעים איך להקצות מפרסמים למקומות.
- אנחנו צריכים להחליט איך לקבוע את התשלומים.
- איך נכליל את מכרז ויקרי למכירת כמה חפצים?

# מכרז ויקרי - קלארק - גרובס Vickrey – Clarke - Groves (VCG)

הנחות:

- יש מספר סופי של תוצאות אפשריות.
- לכל משתתף יש ערך כספי לכל תוצאה.
- התועלת = ערך התוצאה פחות התשלום (קוואזי-ליניארית).

האלגוריתם:

- בחר את התוצאה עם סכום-הערכים הגבוה ביותר.
  - עבור כל שחקן:
    - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים.
    - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים אילו השחקן הנוכחי לא היה משתתף.
    - גבה מהשחקן את ההפרש בין שני הסכומים.
- דוגמה: ראו בגליון אלקטרוני.

ויקרי - קלארק - גרובס

Vickrey – Clarke - Groves (VCG)

**משפט:** אלגוריתם ויקרי-קלארק-גרובס אמיתי.

**מושגים:** ערך = ברוטו (לא כולל המחיר);  
תועלת = נטו (ערך פחות מחיר).

**הוכחה:** התועלת של כל שחקן היא:

(1) **הערך של השחקן עצמו;**

(2) **פחות הסכום של שאר השחקנים בלעדיו;**

(3) **ועוד הסכום של שאר השחקנים כשהוא פה.**

ויקרי - קלארק - גרובס

Vickrey – Clarke - Groves (VCG)

**משפט:** אלגוריתם ויקרי-קלארק-גרובס אמיתי.

**הוכחה [המשך]:** התועלת של כל שחקן היא:

**סכום הערכים של כל השחקנים** (שורה 1,3),

**פחות מספר שאינו תלוי בהצהרה שלו** (שורה 2)

השחקן שואף להשיג תועלת גדולה ביותר. לשם

כך עליו למקסם את סכום הערכים של כל

השחקנים. זה בדיוק מה שעושה אלגוריתם

ויקרי-קלארק-גרובס כשהשחקן אמיתי. \*\*\*

**המשמעות:** שיתוף אינטרסים בין הפרט לכלל.

# ויקרי - קלארק - גרובס במכרזי פירסום

דוגמה עם שלושה מפרסמים ושני מקומות:

$$r_1 = 0.1, \quad r_2 = 0.05,$$

$$v_1 = 10, \quad v_2 = 9, \quad v_3 = 6.$$

## המחיר למפרסם 1:

- $9 * 0.1 + 6 * 0.05$  – סכום האחרים בלעדיו
- $- 9 * 0.05$  – סכום האחרים כשהוא נמצא
- $= 7.5 * 0.1$

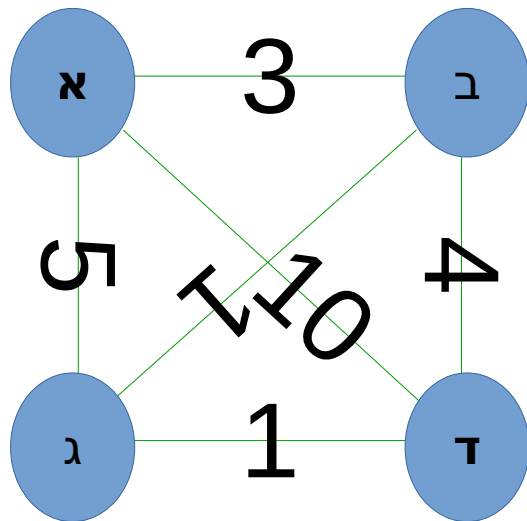
## המחיר למפרסם 2:

- $10 * 0.1 + 6 * 0.05$  – סכום האחרים בלעדיו
- $- 10 * 0.1$  – סכום האחרים כשהוא נמצא
- $= 6 * 0.05$

# מכרז ויקרי-קלארק-גרובס למסלול זול ביותר

צריך לפתור  $1+6$  בעיות מסלול-זול-ביותר.

- כשכולם נמצאים: המסלול אבגד, הסכום  $-5$ .
- בלי אב: המסלול אגד, הסכום  $-6$ . **תשלום  $-4$** .
- בלי בג: המסלול אגד, הסכום  $-6$ . **תשלום  $-2$** .
- בלי גד: המסלול אבד, הסכום  $-7$ . **תשלום  $-3$** .
- בלי אג/אד/בד: אין שינוי, הסכום  $-5$ . **תשלום  $0$** .
- תשלום כולל  $-9$ .



# מכרז ויקרי-קלארק-גרובס למילוי תרמיל

כשיש  $m$  חפצים,

צריך לפתור  $m+1$  בעיות-תרמיל.

**הבעיה: בעיית התרמיל היא NP-קשה!**

אז איך ממלאים תרמיל  
באלגוריתם אמיתי?

המשך יבוא...