

אלגוריתמים כלכליים-מטלה 9-ליאורה שמרלר

1) א. פתרון ראשון: האלגוריתם מבוסס על האלגוריתם של עזיז-לי-טלמון 2018, תחת ההנחות הבאות:

מכיוון שאין סדר עדיפויות בשיטת בחירת אישור, בכדי להבטיח ייצוג הוגן לכל תת-המגזרים של בוחר המפלגה, אנו מניחים כי עבור כל בוחר הוא מסמן לאיזה תת-מגזר הוא שייך. ניתן להסתדר ללא הנחה זו, אך אז נקבל שחלק מתתי תתי המגזרים מאשרים גם מועמדים שלא לגמרי מייצגים את תת המגזר שלהם וכך עלול להיווצר מצב שלתת המגזר שלהם אין באמת מועמדים המייצגים אותם.

אחרת, ניתן לדלג להמשך שהוא ממש האלגוריתם של עזיז-לי-טלמון 2018.

- ראשית נמין בסדר יורד את גודל תת המגזר $k \in K$.
- אתחול: מועמדים לרשימה = קבוצה ריקה, בוחרים = בוחר המפלגה.
- סדר את 2^m קבוצות המועמדים בסדר יורד של כמות מועמדים, כל תת קבוצה שגדולה מ L ניתן להוריד.
- לכל קבוצת מועמדים Y , מהגדולה לקטנה:
 - חשב את קבוצת הבוחרים ששייכים ל k שרוצים את כל המועמדים ב Y .
 - אם כמות המועמדים ב Y היא לכל היותר $-kL/n$
 - הוסף את המועמדים ב- Y לרשימת המפלגה.
 - הורד את הבוחרים ב K מקבוצת הבוחרים שנותרו ללא ייצוג.

פתרון שני: האלגוריתם של עזיז-לי-טלמון 2018 פותר את הבעיה:

אתחול: מועמדים לרשימה = קבוצה ריקה,

בוחרים = בוחר המפלגה.

- סדר את 2^m קבוצות המועמדים בסדר יורד של כמות מועמדים, כל תת קבוצה שגדולה מ L ניתן להוריד.
- לכל קבוצת מועמדים Y , מהגדולה לקטנה:
 - חשב את קבוצת הבוחרים K שרוצים את כל המועמדים ב Y . נניח שבקבוצה יש k בוחרים.
 - אם כמות המועמדים ב Y היא לכל היותר $-kL/n$
 - הוסף את המועמדים ב- Y לרשימת המפלגה.
 - הורד את הבוחרים ב K מקבוצת הבוחרים שנותרו ללא ייצוג.

בשני המקרים, כאשר יש שארית גדולה, נלך למועמד שמייצג כמה שיותר בוחרים מתתי מגזרים שונים.

ב. ההוכחה היא בשני הפתרונות היא של ההוכחה של אלגוריתם של עזיז-לי-טלמון. ייצוג הוגן- לכל קבוצת בוחרים בגודל k מתוך n : קבוצת המועמדים שנכנסות לרשימה היא המספר הגדול ביותר של מועמדים שכל חברי הקבוצה מסכימים עליהם, ומספרם לא עולה על kL/n .

אלגוריתם עזיז-לי-טלמון בווריאציה הנ"ל תמיד מחזיר ייצוג הוגן [חלש]- הוכחה: נתונה קבוצת אזרחים K בגודל k , המסכימים על קבוצת מועמדים X , כאשר $c(X) \leq kL/n$. נוכיח שגודל הקבוצה X למועמדים שחברי K רוצים, הוא לפחות $c(X)$.

X מחולקת לשתי תתי קבוצות: Y שנמצאים ברשימת המועמדים, Z שלא נכנסו עדיין לרשימה. יש שתי אפשרויות היכן חברי הקבוצה K יכולים להיות:

- אם כל חברי K ללא ייצוג- האלגוריתם יוכל להכניס חלק מהמועמדים Z ל L מועמדים הראשונים ברשימה, סתירה.
 - אם חלק מהם כבר בעלי ייצוג ברשימה- כשהם לא בקבוצת הבוחרים ללא ייצוג, נבחרה לקבוצת המועמדים שאין להם ייצוג $c(Z)$.
לכן, הכמות הכוללת למועמדים שחברי K רוצים הוא לפחות: $c(Z) + c(Y) = c(X)$.
- ג. נבחר את L המועמדים באמצעות האלגוריתם של סעיף א, את המועמד ה $L + 1$ נבחר עפ"י העדפויותיהם של המגזר שהייצוג שלו $c(X) < kL/n$ או וגם מינימאלי ביחס לייצוג שהוא צריך לקבל. לאחר מכן, נבחר את המועמד שמייצג מספר רב של תתי מגזרים כאלה.

(3) א. לא.

אזרח	1,2,3,4	1,5,6
פריטים	א,ב	ג

פריט	א	ב	ג	ד
עלות	20	15	15	10

הקבוצה K בגודל 4, עלות 20, מתקצבים.
נשארו פריטים ב, ג, ד- יקרים מדי. סיימנו.
אבל, אם לכל אחד מהקבוצה 1,2,3,4 אין העדפה בין פריט א ל-ב, אז יותר יעיל פארטו יהיה לתקצב את ב ואת ג.

ב. לא. במקרה הנ"ל, אם מועמד 2 היה רוצה לתקצב גם את פריט ג, הוא ומועמד 1, היו מרוויחים אם היו אומרים שלא רוצים לתקצב את מועמד א, כך היו מתקצבים גם את ב וגם את ג.

ג. לא. במקרה הנ"ל אזרחים 5-6 משלמים, אך לא מקבלים תמורה לכסף שהשקיעו ומפסידים.