

מטלה - חלוקת חפצים בדידים

שאלה 3: חלוקת תיקים בין מפלגות בקואליציה

לאחר הבחירות, שתי מפלגות החליטו להקים ממשלה ביחד, אבל הן בזבזו חודש שלם בויכוחים על איזה מפלגה תקבל איזה תיק. לאחר שהתייאשו מהויכוחים, הן פנו אליכם כדי שתעזרו להם להחליט.

א. הציעו אלגוריתם שיאפשר לשתי המפלגות להחליט על חלוקת-תיקים עם התכונות הבאות:

- יעילה פארטו.
 - מותר שתהיה רוטציה בין המפלגות בתיק אחד לכל היותר.
 - החלוקה תהיה הוגנת, בהתחשב בגדלים השונים של המפלגות.
- הגדירו במדויק את תכונת ההגינות, והוכיחו את נכונות האלגוריתם.

פתרון: נניח שלמפלגה i יש m_i מנדטים.

תנאי ההגינות: הכללה הגיונית לתכונה של חלוקה ללא-קנאה היא:

$$V_i(X_i)/m_i \geq V_i(X_j)/m_j$$

למשל, אם למפלגה א יש פי 2 מנדטים מלמפלגה ב, נקבל:

$$V_1(X_1) \geq 2 \cdot V_1(X_2)$$

$$V_2(X_2) \geq V_2(X_1)/2$$

האלגוריתם: כמו באלגוריתם המנצח המתוקן, מסדרים את התיקים בסדר יורד של יחס הערכים מפלגה א / מפלגה ב, נותנים את כל התיקים למפלגה ב, ומעבירים תיקים לפי הסדר למפלגה א, עד שיש תיק אחד שאם "נחתך" אותו נקבל שיחס הערכים שווה ליחס המנדטים, כלומר:

$$V_1(X_1)/m_1 = V_2(X_2)/m_2$$

בתיק ש"נחתך" תהיה רוטציה בהתאם ליחס החיתוך, למשל אם מפלגה א מקבלת 0.25 ומפלגה ב 0.75, אז מפלגה א תחזיק בתיק שנה אחת ומפלגה ב שלוש שנים (בהנחה שהממשלה תחזיק מעמד 4 שנים...)

הוכחת נכונות:

יעילות פארטו – בדיוק כמו בהוכחה של המנצח המתוקן, אפשר נסמן ב- r את יחס הערכים עבור החפץ האחרון שהועבר (או נחתך). החלוקה המתקבלת ממקסמת את הסכום:

$$V_1(X_1) + r \cdot V_2(X_2)$$

וכל חלוקה הממקסמת סכום של פונקציה עולה של הערכים, היא חלוקה יעילה פארטו.

רוטציה בתיק אחד לכל היותר – ברור מההגדרה.

הגינות מוכללת –

כאמור, החלוקה ממקסמת את הסכום $V_1(X_1) + r \cdot V_2(X_2)$. כיוון שהסכום הזה יכול להיות 100 (אם נותנים הכל למפלגה א) או $r \cdot 100$ (אם נותנים הכל למפלגה ב), הסכום המתקבל חייב להיות לפחות המקסימום מביניהם, כלומר:

ברוך ה' חנוך הדעת

- $V_1(X_1) + r \cdot V_2(X_2) \geq \max(100, 100r)$

בנוסף, לפי הגדרת תנאי העצירה של האלגוריתם:

- $V_2(X_2) = m_2 \cdot V_1(X_1) / m_1$

נציב באי-שוויון למעלה ונקבל:

- $V_1(X_1) \cdot (1 + r \cdot m_2 / m_1) \geq \max(100, 100r)$

אם $r \leq 1$:

- $V_1(X_1) \cdot (1 + m_2 / m_1) \geq 100$

אם $r > 1$:

- $V_1(X_1) \cdot r \cdot (1 + m_2 / m_1) \geq 100r$

ולכן בכל מקרה:

- $V_1(X_1) \geq 100 / (1 + m_2 / m_1) = 100 \cdot m_1 / (m_1 + m_2)$

- $(m_1 + m_2) \cdot V_1(X_1) \geq 100 \cdot m_1$

- $m_2 \cdot V_1(X_1) \geq m_1 \cdot (100 - V_1(X_1)) = m_1 \cdot V_1(X_2)$

וזו בדיוק תכונת ההגינות שהגדרנו למעלה עבור מפלגה 1. אותו חישוב עובד עבור מפלגה 2.