



”מטרוניתא שאלה את ר' יוסי בר חלפתא,
אמרה לו: בכמה ימים ברא הקב"ה את עולמו?
אמר לה: לששת ימים...

אמרה לו: ומאותה שעה עד עכשיו מהו יושב ועושה?
אמר לה: מזווג זיווגים... ואם קלה היא בעינייך, קשה היא לפני
הקדוש ברוך הוא כקריעת ים סוף" (ויקרא רבה ח א).

אלגוריתמי שידוך

אראל סגל-הלוי

שיבוצים ושידוכים

שאלה: מה ההבדל בין הבעיות הבאות:

- א. שיבוץ סטודנטים לחדרים בדירה שכורה;
- ב. שיבוץ סטודנטים למחלקות באוניברסיטה?

תשובה:

- בעיה א חד צדדית – רק לסטודנטים יש העדפות.
- בעיה ב דו צדדית – גם למחלקות יש העדפות.

שוק דו-צדדי

הגדרה: שוק דו-צדדי הוא שוק שבו צריך להתאים בין משתתפים משתי קבוצות, כאשר לכל משתתף מכל אחת מהקבוצות יש העדפות שונות.

בשוק דו-צדדי אי-אפשר לצפות להגינות. מה כן?

1. יעילות פארטו;

2. יציבות – ראו בשקף הבא

שוק דו-צדדי

דוגמה: שני סטודנטים s_1, s_2 ושתי מחלקות m_1, m_2
הסטודנטים מדרגים $m_1 < m_2$, המחלקות מדרגות $s_1 < s_2$.
נתבונן בשידוך:

$$s_2 - m_1$$

$$s_1 - m_2$$

האם השידוך יעיל פארטו?

- כן.

אבל מה יקרה אם מחלקה m_1 תפנה לסטודנט s_1 ?

- השידוך יתפרק! אנשים לא ישתפו פעולה.

השוק ייפרם (*unravel*).

שידוכים יציבים

הגדרה: זוג מערער:

- סטודנט ומחלקה שאינם משודכים, והם מעדיפים זה את זו על פני ה"שידוכים" הנוכחיים שלהם.

הגדרה: שידוך יציב:

- שידוך בלי זוגות מערערים.

השקפים הבאים מבוססים על מצגת של פרופ' סרג'יו הרט בהרצאת "מדוע" בעיצובה של עינב הרט. לינק להרצאה <http://community-youth.huji.ac.il/program1.asp?id=116&cat=117>

שידוכים יציבים

הגדרת הבעיה:

- סטודנטים ומחלקות במספר שווה.
- בכל מחלקה יש מקום לסטודנט אחד.
- כל סטודנט לומד במחלקה אחת.
- לכל מחלקה יש סדר העדפות על הסטודנטים.
- לכל סטודנט יש סדר העדפות על המחלקות.
- האם תמיד קיים שידוך יציב?

ראשי המחלקות

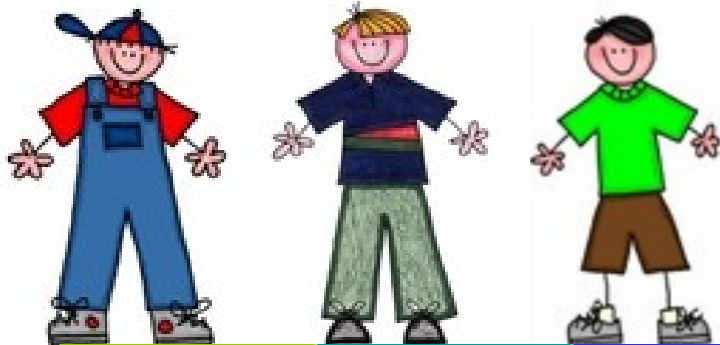


אביבה

בתיה

גליה

הסטודנטים



תומר

שלמה

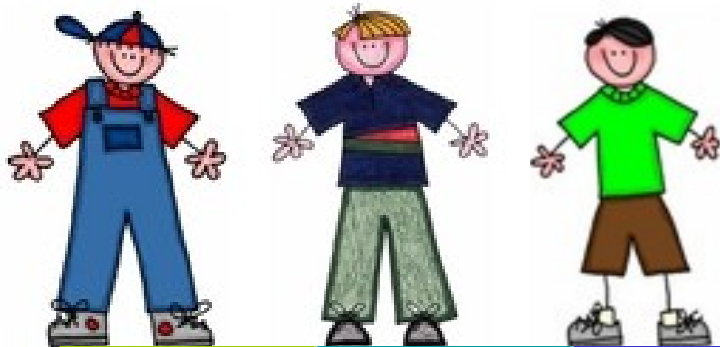
רפי

העדפות המחלקות



	גליה	בתי	אביבה
1	שלמה	שלמה	רפי
2	תומר	רפי	שלמה
3	רפי	תומר	תומר

העדפות הסטודנטים



	רפי	שלמה	תומר
1	אביבה	אביבה	בתי
2	גליה	בתי	גליה
3	בתי	גליה	אביבה

	גליה	בתייה	אביבה
1	שלמה	שלמה	רפי
2	תומר	רפי	שלמה
3	רפי	תומר	תומר



	רפי	שלמה	תומר
1	אביבה	אביבה	בתייה
2	גליה	בתייה	גליה
3	בתייה	גליה	אביבה



שידוכים יציבים

האם תמיד קיים שידוך יציב?

- כן, ויש אלגוריתם יעיל שמוצא אחד כזה!

- אלגוריתם הקבלה על-תנאי

deferred acceptance

- פותח ע"י Gale & Shapley (1962)

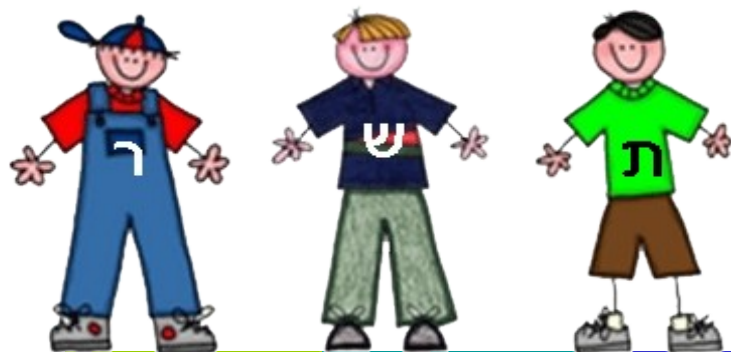
- זכה בפרס נובל בשנת 2012

אלגוריתם "קבלה על-תנאי"

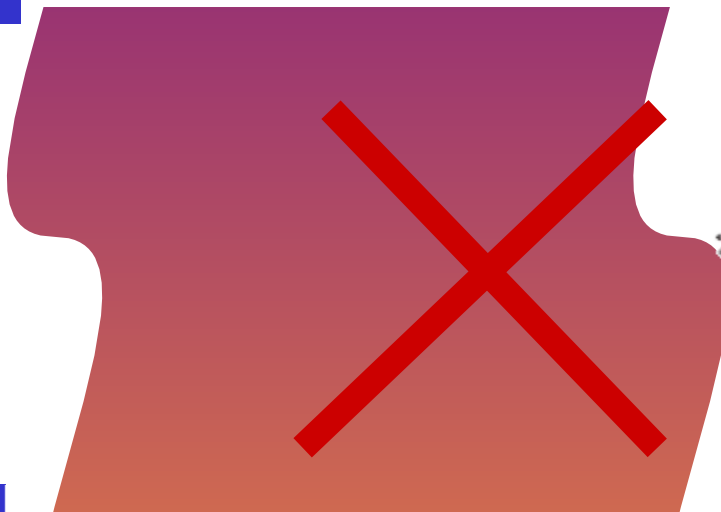
deferred acceptance

- א. כל סטודנט הולך למחלקה שהוא הכי רוצה, מבין המחלקות שעדיין לא דחו אותו.
- ב. כל מחלקה "מקבלת על תנאי" את הסטודנט שהיא הכי רוצה, מבין אלה שנמצאים בה, ודוחה את כל השאר.
- ג. חוזרים על שלבים א ו-ב עד שכולם משודכים.

	גליה	בתיא	אביבה
1	שלמה	שלמה	רפי
2	תומר	רפי	שלמה
3	רפי	תומר	תומר



	רפי	שלמה	תומר
1	אביבה	אביבה	אביבה
2	גליה	בתיא	גליה
3	בתיא	גליה	אביבה







	גליה	בתייה	אביבה
1	שלמה	שלמה	רפי
2	תומר	רפי	שלמה
3	רפי	תומר	תומר



	רפי	שלמה	תומר
1	אביבה	אביבה	בתייה
2	גליה	בתייה	גליה
3	בתייה	גליה	אביבה



משפט: האלגוריתם מסתיים בשידוך יציב

מסתיים: כי כל סטודנט מציע לכל מחלקה פעם אחת לכל היותר.

בשידוך: נניח שיש מחלקה לא-משודכת. אז אף סטודנט לא הגיע אליה. כיוון שמספר הסטודנטים והמחלקות שווה, יש גם סטודנט לא משודך. הוא עובר על כל הרשימה שלו מלמעלה למטה, לכן בהכרח הוא יגיע מתישהו למחלקה הלא-משודכת וישתדך איתה. כלומר האלגוריתם עוד לא הסתיים.

יציב: מצבה של כל מחלקה הולך ומשתפר.

לעומת זאת, כל סטודנט הולך ומתפשר.

מכאן, אם זוג מסויים (ס,מ) לא נוצר אז יש שתי אפשרויות:

א. ס עוד לא היה ב-מ: מכאן ש-ס נמצא במחלקה טובה יותר.

ב. ס כבר היה ב-מ: מכאן של-מ יש סטודנט טוב יותר. ***

מי מציע ומי מקבל?

באלגוריתם שהצגנו למעלה, הסטודנטים מציעים למחלקות, והמחלקות מחליטות את מי לקבל.

יכולנו גם לנהל את האלגוריתם בסדר הפוך: המחלקות מציעות לסטודנטים, והסטודנטים מחליטים את מי לקבל. האם לדעתכם יש הבדל בין שתי הגישות? כסטודנטים, איזה אלגוריתם תעדיפו? כמנהלי מחלקות, איזה אלגוריתם תעדיפו?

מי מציע ומי מקבל?

דוגמה:

	אביבה	בתיה	גילה
1	רפי	שלמה	שלמה
2	שלמה	רפי	רפי
3	תומר	תומר	תומר

• אם הסטודנטים מציעים –

השידוך הוא:

ר-ב, ש-א, ת-ג

• אם המחלקות מציעות,

השידוך הוא:

ר-א, ש-ב, ת-ג

	תומר	שלמה	רפי
1	בתיה	אביבה	בתיה
2	אביבה	בתיה	אביבה
3	גילה	גילה	גילה

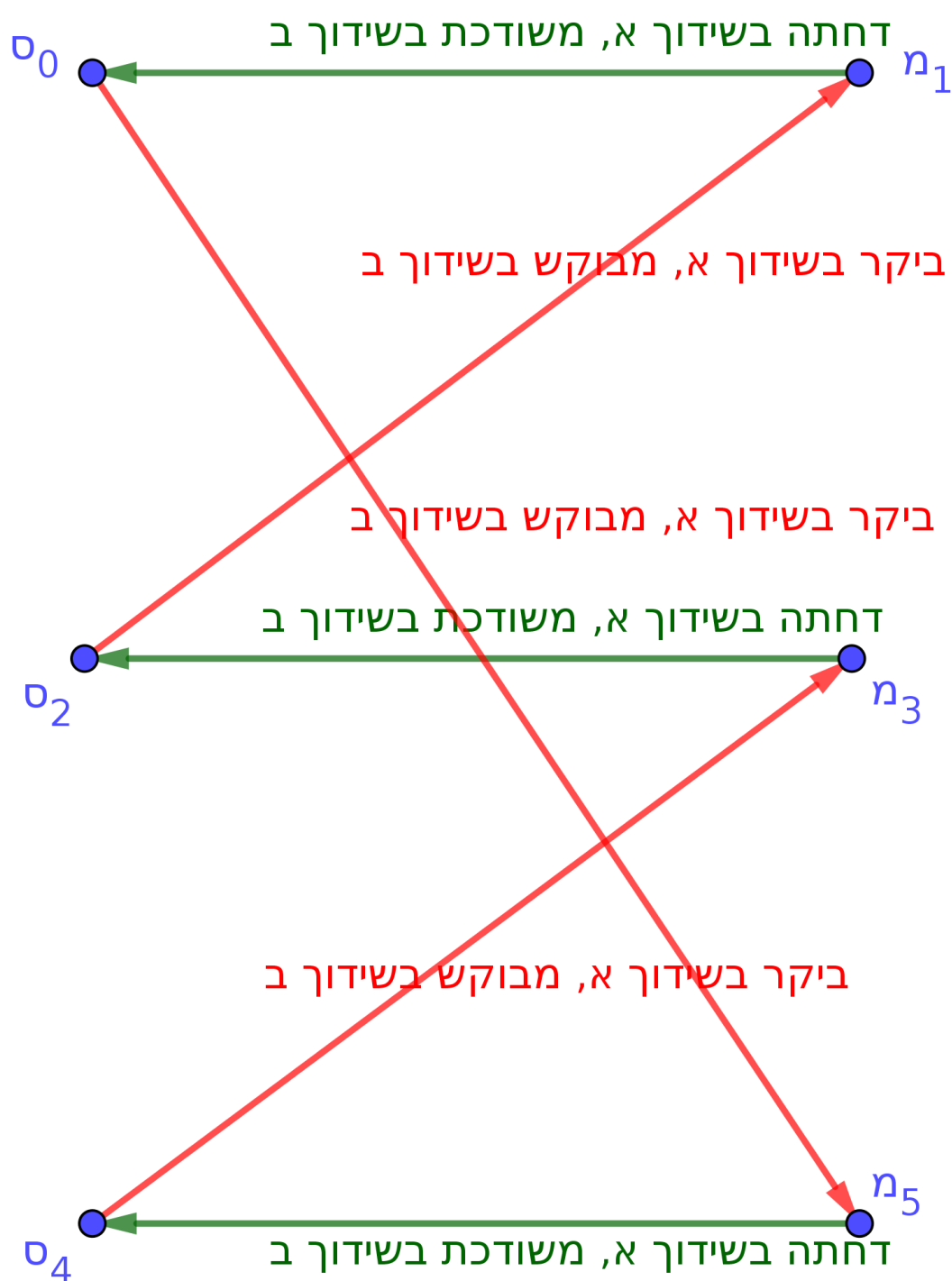
• מה עדיף לסטודנטים?

מה עדיף למחלקות?

משפט:

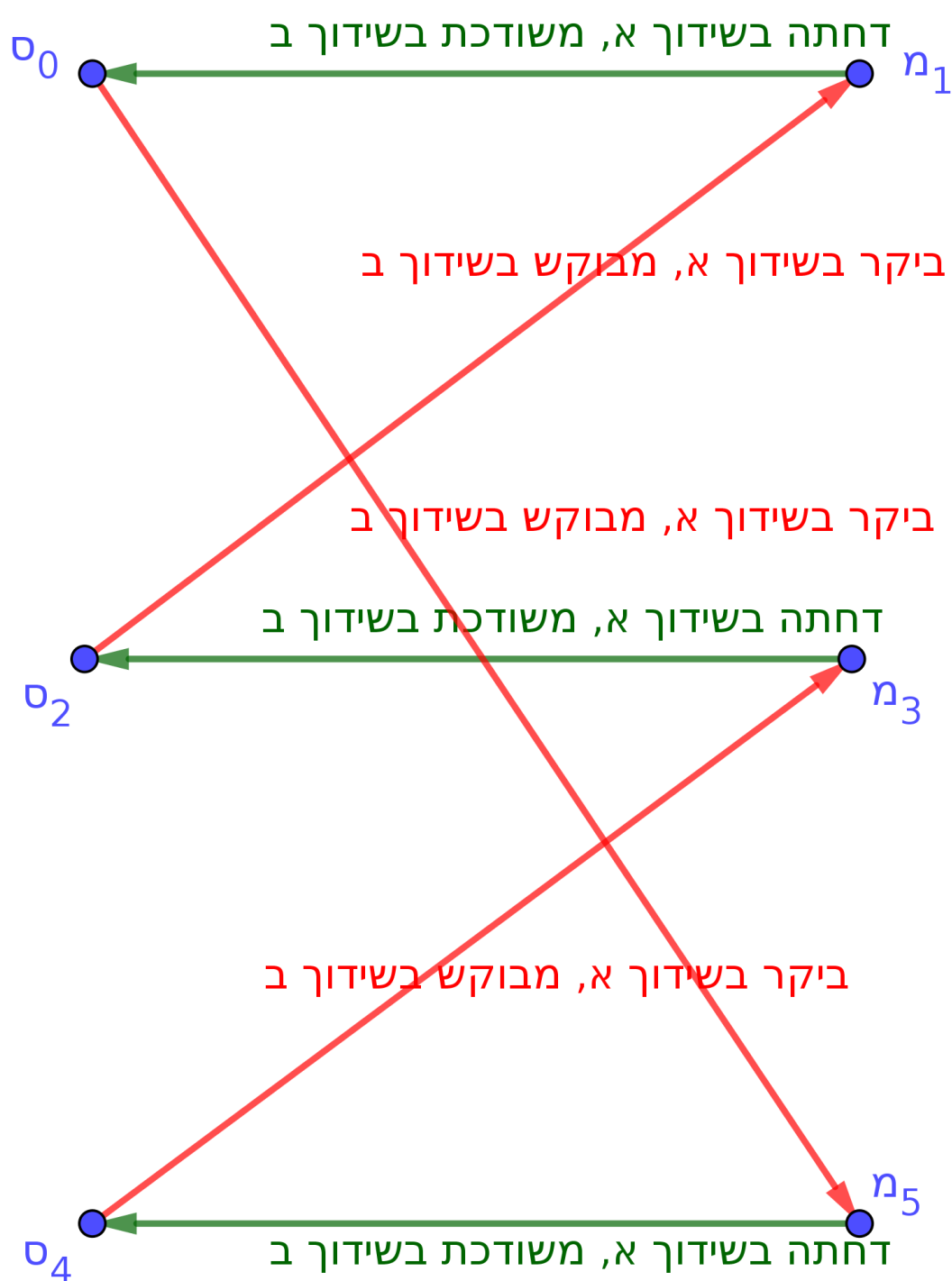
כשסטודנטים מציעים

–
השידוך המתקבל
הוא הטוב ביותר לכל
הסטודנטים מכל
השידוכים היציבים.
הוכחה: נסמן: $A =$
שידוך האלגוריתם,
 $B =$ שידוך יציב אחר
כלשהו. נניח בשלילה
ששידוך B טוב יותר
לסטודנט כלשהו 0 .
נגיע למעגל \rightarrow



הוכחה (המשך):

כל סטודנט מעדיף
את המחלקה
המחוברת אליו
בירוק (שידוך ב);
כל מחלקה מעדיפה
את הסטודנט שביקר
אצלה **באדום (א)**.
סדר האירועים
באלגוריתם א הוא
בכיוון החיצים.
אבל זה לא ייתכן כי
זה מעגל. ***



מחלקות גדולות

מה עושים כשבכל מחלקה יש כמה מקומות?
- כל מחלקה "מקבלת על תנאי" את הסטודנטים
הטובים ביותר שפנו אליה, עד לכמות המקומות
הפנויים אצלה, ודוחה את כל השאר.

זה עובד כש אין תלות בין סטודנטים שונים.

זה לא עובד, למשל, כאשר:

- זוגות סטודנטים נשואים רוצים להתקבל לאותה מחלקה.

- מחלקות רוצות לקבל מספר מסויים של סטודנטים מקבוצות-מיעוט מסויימות (גיוון / אפליה מתקנת).

האם "קבלה על תנאי" אמיתי?

	גילה	בתיא	אביבה
1	שלמה	שלמה	רפי
2	רפי	רפי	שלמה
3	תומר	תומר	תומר

	רפי	שלמה	תומר
1	בתיא	אביבה	בתיא
2	אביבה	בתיא	אביבה
3	גילה	גילה	גילה

משפט: אלגוריתם "קבלה על תנאי" שבו הסטודנטים מציעים הוא לא אמיתי עבור המחלקות.

ההוכחה בדוגמה:

- אם הסטודנטים מציעים –

השידוך הוא:

ר-ב, ש-א, ת-ג

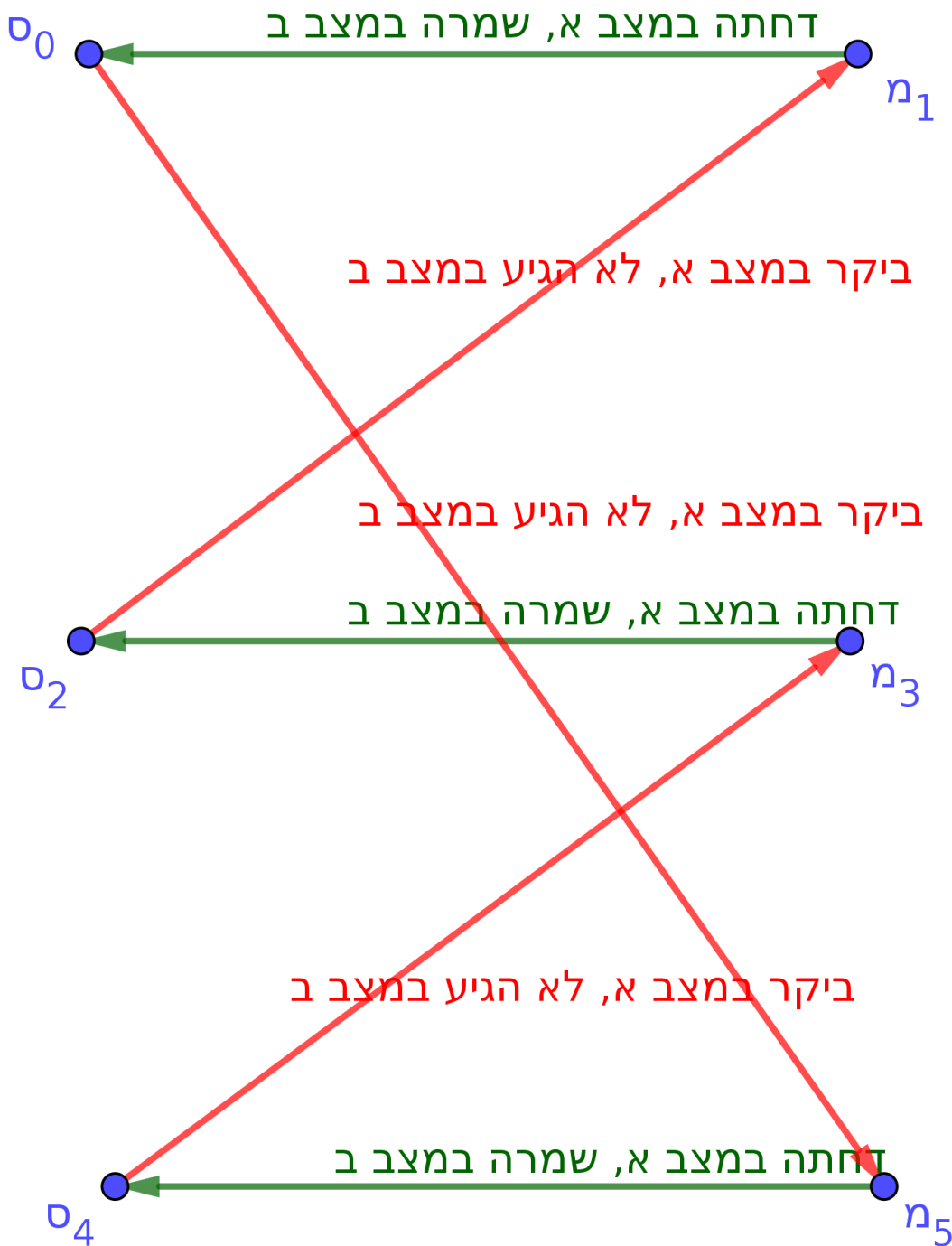
- מה יכולה בתיא לעשות כדי לזכות בשלמה?

- תשובה: להגיד שהסדר שלה הוא: ש<ת<ר.

- מסקנה: האלגוריתם לא אמיתי עבור המחלקות.

משפט:

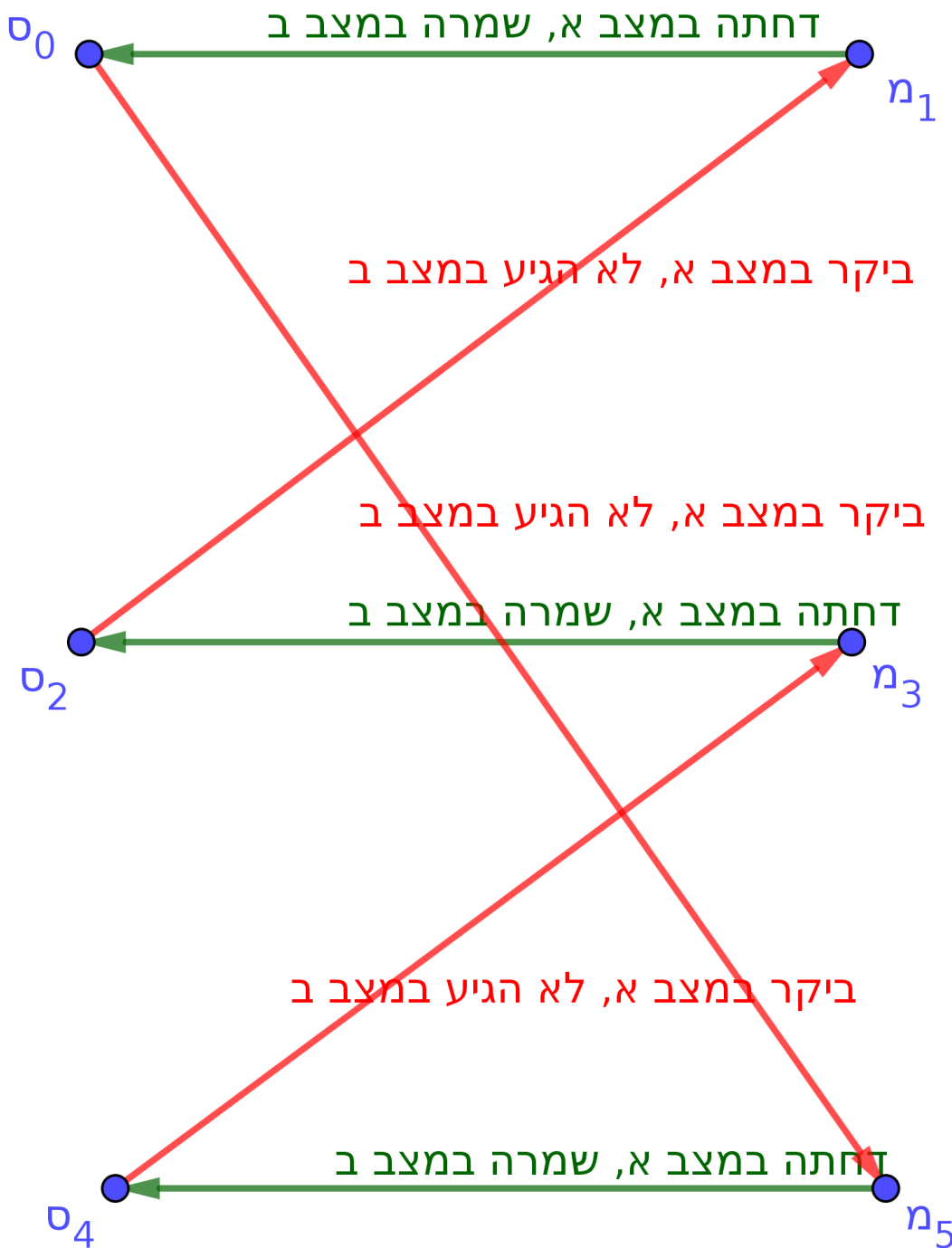
"קבלה על תנאי"
כשהסטודנטים
מציעים, הוא אמיתי
עבור הסטודנטים.
הוכחה: נסמן: $A =$
תוצאה כשכולם
אמיתיים, $B =$
תוצאה כשכולם
אמיתיים חוץ מ-0.
נניח בשלילה ש-0
מרויח מהשינוי. נגיע
למעגל \leftarrow



הוכחה (המשך):



סדר האירועים
באלגוריתם א הוא
בכיוון החיצים.
אבל זה לא ייתכן כי
זה מעגל. ***



מנגנון שידוך יציב אמיתי?

מנגנון קבלה על תנאי:

- כשהסטודנטים מציעים – אמיתי לסטודנטים אך לא למחלקות.
 - כשהמחלקות מציעות – אמיתי למחלקות אך לא לסטודנטים.
- משפט. לא קיים מנגנון לשידוך יציב שהוא אמיתי לשני הצדדים!
הוכחה. נניח שההעדפות הן:

	אביבה	בתיה	גילה
1	רפי	שלמה	שלמה
2	שלמה	רפי	רפי
3	תומר	תומר	תומר

	תומר	שלמה	רפי
1	בתיה	אביבה	בתיה
2	אביבה	בתיה	אביבה
3	גילה	גילה	גילה

בכל שידוך יציב, גילה ותומר משודכים. לכן יש 2 שידוכים יציבים.

- אם המנגנון בוחר ר-ב ש-א, אז אביבה יכולה להרויח מ: ר<ת<ש.
- אם המנגנון בוחר ר-א ש-ב, אז רפי יכול להרויח מ: ב<ג<א.