

אלגוריתמים כלכליים תרגיל מטלה 10

שאלה 3: מי נשאר בחוץ?

נניח שמספר הסטודנטים גדול יותר ממספר המחלקות (ובכל מחלקה יש מקום אחד). במקרה כזה, בכל שידוך, חלק מהסטודנטים יישארו בחוץ.

א. הראו דוגמה עם 3 סטודנטים ו-2 מחלקות, שבה יש לפחות שני שידוכים יציבים. מצאו את שניהם, והראו איזה סטודנט נשאר בחוץ.

פתרון: נביט בטבלאות הבאות, שמתארות את יחסי ההעדפות של כל סטודנט וכל ראש מחלקה:

	אביבה	בתיה	
שלמה	רפי	העדפה ראשונה	
רפי	שלמה	העדפה שניה	
תומר	תומר	העדפה שלישית	

	תומר	שלמה	רפי
העדפה ראשונה	אביבה	בתיה	אביבה
העדפה שניה	בתיה	אביבה	בתיה

בהצגה של יחסים:

אביבה: שלמה < רפי < תומר.

בתיה: רפי < שלמה < תומר.

רפי: אביבה < בתיה.

שלמה: בתיה < אביבה.

תומר: אביבה < בתיה.

נציג את שני השידוכים היציבים:

1. אביבה-שלמה, בתיה-רפי.

פירוט: הצירוף של אביבה-תומר ושל בתיה-תומר לא עדיף לאביבה ובתיה (שתיהן מעדיפות את רפי ושלמה על פניו). הצירוף של אביבה-רפי לא עדיף לאביבה (כי היא מעדיפה את שלמה). הצירוף של בתיה-שלמה לא עדיף לבתיה (כי היא מעדיפה את רפי על פניו).

2. אביבה-רפי, בתיה-שלמה.

פירוט: הצירוף של אביבה-תומר ושל בתיה-תומר לא עדיף לאף אחת מהן (כמקודם). הצירוף של אביבה-שלמה לא עדיף לשלמה (שמעדיף את בתיה על פניה). הצירוף של בתיה-רפי לא עדיף לרפי (שמעדיף את אביבה על פניה).

הסטודנט שנשאר בחוץ במקרה זה הינו תומר. (אגב, ההעדפותיו לא משנות, גם אם היה מחליף לא היה נבחר).

ב. הוכיחו, שבכל שידוך יציב, (לא משנה באיזה אלגוריתם מצאנו אותו), אותם סטודנטים יישארו בחוץ. כלומר – אם מישהו נמצא בחוץ בשידוך יציב A , אז הוא נמצא בחוץ גם בשידוך יציב B .

פתרון: נביט על מחלקה כלשהי M_0 , שהשידוך שלה ב- A וב- B שונים. נסמן את השידוך ב- A בשם s_1 . כיוון שיש שידוך יציב B אחר, M_0 מעדיפה או את השידוך ב- A על פני B , או להיפך, בלי הגבלת הכלליות נניח שהיא מעדיפה את השידוך ב- A . כיוון שגם B יציב, s_1 מעדיף את המחלקה שהוא משודך אליה ב- B (אחרת בשני השידוכים s_1 היה משתדך עם M_0), ונסמן אותה בתור M_2 . באותו אופן, A יציב ולכן M_2 מעדיף את השידוך שלו ב- A . כעת נזכיר כי כמות המחלקות והסטודנטים סופית, ומתישהו יהיה שידוך של סטודנט למחלקה M_0 ב- B . כעת נגיע לשלב שסגרנו מעגל מכון, כשהמחלקות מצביעות על מי הן העדיפו והשתדכו אליו בשידוך A , והסטודנטים מצביעים על מי הם העדיפו והשתדכו אליו ב- B . נניח כי בשידוך B לא קיימת קשת שמצביעה מסטודנט כלשהו למחלקה M_0 . במקרה כזה לא ניתן לסגור מעגל. בנוסף, לכל סטודנט s_i אין מצב בו הוא מעדיף שלא להשתדך על פני להשתדך למחלקה כלשהי, שכן אחרת השידוך A היה לא יציב (סטודנט היה מעדיף שלא להשתדך למחלקה שלו בשידוך A מאשר כן להשתדך, וזה לא יציב). כלומר, קיים מסלול שמתחיל ב- M_0 ולא מסתיים אף פעם במעגל, כלומר – מסלול אינסופי, אבל כמות המחלקות והסטודנטים סופית וזו סתירה! לכן, כל מחלקה שאינה משודכת בשידוך A אינה משודכת אף בשידוך B , הטענה נכונה גם עבור הסטודנטים. כיוון שיש יותר סטודנטים ממחלקות, בהכרח יישארו סטודנטים מסוימים בחוץ, ולפי ההוכחה הנ"ל יהיו אלו אותם האנשים תמיד. מ.ש.ל.