אלגוריתמים כלכליים תרגיל 4 - עמית אליהו 211774070

שאלה 1

א. נניח כי העדפות השחקנים אדיטיביות וזהות וערכי החפצים הם 4,5,6.
שחקן א' יקבל: 4,6.
שחקן ב': 5.
שחקן א' לא מקנא בשחקן ב'.
חלוקה זו היא $\mathrm{EF1}$ כי שחקן ב' לא יקנא בשחקן א' אם נוריד לשחקן א' את 6.
מנגד חלוקה זו אינה EFX כי שחקן ב' ימשיך לקנא בשחקן א' גם אם נוריד לשחקן א' את 4.

ב. ההעדפות זהות ולכן $V_1 = V_2 = V$.

<u>האלגוריתם:</u>

1. מיין את החפצים בסדר יורד
2. $X_1 \coloneqq \emptyset, X_2 \coloneqq \emptyset$
3. לכל חפץ g בצע:
   3.1. אם $V(X_1) > V(X_2)$:
      3.1.1. $X_2 = X_2 \cup \{g\}$
   3.2. אחרת:
      3.2.1. $X_1 = X_1 \cup \{g\}$

<u>זמן ריצה</u>

זמן ריצת האלגוריתם הוא:

$$T(m) = \overbrace{O(m \cdot \log m)}^{Sorting} + \overbrace{O(m)}^{Main\ Loop} = O(m \cdot \log m)$$

כאשר מספר החפצים הוא m.

<u>הוכחת נכונות:</u>

נסמן את השחקן שקיבל את החפץ האחרון ב-i והשחקן השני ב-j.

נחלק למקרים:

- <u>$V(X_i) = V(X_j)$:</u>
  ברור כי i לא מקנא ב jולהפך ולכן על כל חפץ שנוריד ל-i או ל-j אזי j או i לא יקנאו בשני בהתאמה.

- $\underline{V(X_i) > V(X_j):}$

מצד אחד ברור כי i לא מקנא ב j ולכן על כל חפץ שנוריד ל- iהרי עדיין j לא יקנא בו.

כעת ידוע כי החפץ האחרון ניתן ל-i, נסמנו ב-g וע"פ הגדרת האלגוריתם נקבל כי:

$$V(X_i - \{g\}) < V(X_j)$$

שהרי האלגוריתם מוסיף לשחקן אחד כל עוד ערך הסל של השחקן השני גדול מערכו של השחקן.

וכעת קיבלנו כי החלוקה $EF1$, אבל g הוא החפץ שערכו קטן ביותר ובפרט החפץ שערכו קטן ביותר בסל של i שהרי האלגוריתם ממיין את החפצים מהגדול לקטן, כלומר לכל g' מתקיים $V(g) \le V(g')$ ובפרט זה מתקיים לכל $g' \in X_i$ ולכן:

$$V(X_i - \{g'\}) \overset{Additivity}{\cong} V(X_i) - V(g') \le V(X_i) - V(g) \overset{Additivity}{\cong} V(X_i - \{g\}) < V(X_j)$$

וכעץ קיבלנו כי החלוקה EFX.

- $\underline{V(X_i) < V(X_j):}$

מצד אחד ברור כי i לא מקנא ב jולכן על כל חפץ שנוריד ל- iהרי עדיין j לא יקנא בו.

נסמן את החפץ האחרון שניתן ל-j ב-g.

נסמן את המצב שלאחר מתן g ל- jב-X_i', X_j' וברור כי:

$$V(X_i') < V(X_j')$$

שהרי כעת האלגוריתם מתחיל להביא חפצים ל-i (עד החפץ האחרון) כי g הוא החפץ האחרון שניתן ל-j.

וברור כי $V(X_i') \ge V(X_j' - \{g\})$, שהרי כעת מביאים חפצים ל- i (עד החפץ האחרון) וזה נובע מהגדרת האלגוריתם.

בנוסף ברור כי $V(X_i) > V(X_i')$שהרי רק נוספו חפצים ל-i ולכן:

$$V(X_i) > V(X_j' - \{g\})$$

אבל $X_j' = X_j$ שהרי החפץ האחרון שניתן ל-j הוא g וזה הרי המצב שהגדרנו ב- X_j'וב-X_j.

ולכן נקבל:

$$V(X_i) > V(X_j - \{g\})$$

וכעת קיבלנו כי החלוקה $EF1$, אבל g הוא החפץ שערכו קטן ביותר ב-X_j כלומר לכל $g' \in X_j$ מתקיים $V(g) \le V(g')$ ולכן מתקיים:

$$V(X_j - \{g'\}) \overset{Additivity}{\cong} V(X_j) - V(g') \le V(X_j) - V(g) \overset{Additivity}{\cong} V(X_j - \{g\}) < V(X_i)$$

וכעץ קיבלנו כי החלוקה EFX.

■

ג. נשלב את האלגוריתם שראינו בסעיף ב' ואלגוריתם "חתוך ובחר":

<u>האלגוריתם:</u>

1. שחקן 1 יריץ את האלגוריתם הקודם עם 2 עותקים של עצמו ויקבל חלוקה X_1, X_2
2. שחקן 2 יבחר את הסל המועדף עליו
3. שחקן 1 יקבל את הסל שנותר

<u>זמן ריצה</u>

זמן ריצת האלגוריתם הוא:

$$T(n) = \overbrace{O(n \cdot \log n)}^{Previous\ Algorithm} + \overbrace{O(1)}^{Choosing} = O(n \cdot \log n)$$

<u>הוכחת נכונות:</u>

שחקן 2 בוחר ראשון ולכן לא מקנא (או שווה) בשחקן 1 ולכן על כל חפץ שנוריד ל1 אזי 2 לא יקנא בו.

שחקן 1 חילק לחלוקה EFX ע"פ פונקציית הערך שלו ולכן לא משנה איזה סל שחקן 2 ייבחר מהגדרת החלוקה EFX (ביחס לשחקן 1) נקבל כי לכל חפץ שנורדי ל2 אזי 1 לא יקנא בו.

ד. ממה שמצאתי באינטרנט לא מובטח שקיימת חלוקה כזו אך לא הצלחתי למצוא הפרכה לכך.

<u>הערה:</u>

ניתן להכליל את האלגוריתם בסעיף ב' עבור n שחקנים (בעלי העדפות אדיטיביות זהות) ע"י שימוש באלגוריתם "מעגלי הקנאה" שראינו בהרצאה אך במקום לעבור על החפצים בסדר שרירותי נעבור על החפצים בסדר יורד (הסדר הוא ביחס לכולם כי ההעדפות של כולם זהות).

<u>הוכחה:</u>

- בכל שלב האלגוריתם נותן את החפץ הבא לשחקן שאף אחד לא מקנא בו.
- נוצרת קנאה רק ע"י החפץ שהעברנו באיטרציה הנוכחית.
- אבל לחפץ הזה יש ערך קטן יותר משאר החפצים.
- ולכן החלוקה הזו נשארת EFX לאורך כל האלגוריתם.

<u>זמן ריצה:</u>

זמן ריצת האלגוריתם הוא:

$$T(m) = \overbrace{O(m \cdot \log m)}^{Sorting} + \overbrace{O(m \cdot n^3)}^{Cycle\ Elimination\ Algorithm}$$

כאשר מספר החפצים הוא m ומספר השחקנים הוא n.