החלפות ומעגלים

היום נדבר על החלפות. נניח שכמה עובדים משובצים לתורניות, וחלק מהם היו מעדיפים להתחלף עם אחרים. או, כמה סטודנטים משובצים לחדרים במעונות והיו מעוניינים להתחלף. אנחנו רוצים ליצור שיבוץ חדש שיהיה יעיל פארטו. בניגוד לבעיות של חלוקה הוגנת, כאן - בניגוד לאנשים יש זכויות קודמות עוד לפני הפעלת האלגוריתם. כדי שאנשים יסכימו להשתתף באלגוריתם שלנו, אנחנו חייבים להבטיח להם שלא ייגרם להם נזק. אז בנוסף לתכונות של יעילות-פארטו ושל אמיתיות, אנחנו דורשים תכונה שלישית.

הגדרה: אלגוריתם נקרא **מעודד השתתפות** (במקור individually rational – רציונלי ליחידים – ביטוי פחות ברור לדעתי), אם כל משתתף מעדיף את תוצאת האלגוריתם על-פני המצב לפני האלגוריתם (או לפחות אדיש בין התוצאות).

האם קיים אלגוריתם שהוא גם מעודד השתתפות, וגם מוצא שיבוץ יעיל פארטו?

אלגוריתם מעגלי המסחר - Top Trading Cycles

האלגוריתם פותח ע"י אותם חוקרים שפיתחו את האלגוריתם לשידוך יציב - Gale ו Shapley, עם חוקר שלישי בשם Scarf. הקלט לאלגוריתם הוא שיבוץ של **אנשים** ל**בתים** - לכל איש יש בית אחד.

האלגוריתם מחזיק גרף מכוון שבו:

- הצמתים הם האנשים והבתים;
- יש קשת מכל אדם אל הבית שהוא הכי רוצה, ומכל בית אל האדם שהוא שייך אליו.

מעדכנים את הגרף באופן הבא:
א. מוצאים מעגל מכוון בגרף (למשל ע"י אלגוריתם DFS שלמדתם בקורס קודם).
ב. מבצעים את ההחלפה במעגל: כל אדם מקבל את הבית שהוא מצביע עליו.
ג. מוחקים מהגרף את הצמתים של האנשים והבתים שהשתתפו בהחלפה.
ד. לכל איש שנשאר בגרף, מעדכנים את הקשת שלו כך שתצביע לבית שהוא הכי רוצה מאלה שנשארו.
ה. חוזרים על סעיפים א-ד עד שהגרף ריק.

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר מסתיים.
הוכחה: מספיק להוכיח שבשלב א תמיד קיים מעגל. הסיבה היא שמכל צומת יוצאת קשת אחת בדיוק. כיוון שהגרף סופי, אם נתחיל מצומת כלשהו ונלך בכיוון החצים, מתישהו בהכרח נגיע לצומת שכבר היינו בו - זה מעגל. ***

מה סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם? - מציאת מעגל דורשת זמן $O(n)$. אחרי כל מציאת מעגל, מוחקים לפחות צומת אחד, כך שמספר השלבים הוא לכל היותר n. לכן זמן הריצה הכולל הוא $O(n^2)$.

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר מעודד השתתפות.
הוכחה: האלגוריתם משבץ כל משתתף בבית שהוא הצביע עליו בשלב כלשהו. כל משתתף מצביע תמיד על הבית של עצמו או על בית טוב יותר. ***

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר הוא אמיתי.
הוכחה: האבחנה החשובה כאן היא, שהקשת היוצאת מאדם מסויים משפיעה על הגרף רק באותו סיבוב שהוא סוחר, ואז הוא יוצא מהמשחק. למשל, אם יוסי סוחר במעגל 3 כשהוא אמיתי ובמעגל 5 כשהוא

מתחכם, אז המסחר עד למעגל 3 מתנהל בדיוק באותו אופן בשני המצבים - העובדה שיוסי שינה את הקשת שלו, לא גרמה שום שינוי בקשתות אחרות ובמעגלים אחרים.
נניח שיוסי סוחר במעגל k כשהוא אמיתי ובמעגל j כשהוא מתחכם. נשווה בין מצבים אלו בשני מקרים.

- מקרה א: $k \geq j$. במקרה זה, המסחר עד למעגל k-1 זהה בשני המצבים. לכן קבוצת הבתים שנשארו זמינים אחרי מעגל k-1 היא זהה בשני המצבים. וכשיוסי אמיתי, הוא מקבל את הבית הטוב ביותר בקבוצה זו, כך שההתחכמות לא יכולה להועיל לו.
- מקרה ב: $k < j$. במקרה זה, המסחר עד למעגל j-1 זהה בשני המצבים. בסיבוב הבא, כל הקשתות זהות בשני המצבים, פרט לקשת היוצאת מיוסי. כשיוסי מתחכם, הקשת היוצאת ממנו סוגרת מעגל (מעגל j); נניח שהוא סוגר מעגל עם בית כלשהו x. כשיוסי אמיתי, הוא נמצא בסופה של שרשרת המתחילה בבית x. כל עוד יוסי בגרף, כל השרשרת הזאת נשארת בגרף: הבית של יוסי נשאר בגרף ומצביע על יוסי; מי שהכי רוצה את הבית הזה (נניח, עמי) עדיין נשאר בגרף ומצביע על הבית של יוסי, לכן גם הבית של עמי נשאר בגרף ומצביע על עמי; וכן הלאה עד x. בפרט, בית x עדיין נמצא בגרף כאשר מעגל k נסגר. לכן הבית שמקבל יוסי כשהוא אמיתי הוא טוב לפחות כמו x.
  - ההוכחה הזאת מזכירה את דברי בן עזאי בתלמוד: "אין אדם נוגע במוכן לחבירו" (יומא לח.): אם בית x שייך לך – אף אחד לא ייגע בו. הוא יגיע אליך גם אם תגיד אמת – אתה לא צריך לשקר כדי להשיג אותו...

אלגוריתם מעגלי המסחר הוא גם יעיל פארטו. יותר מזה, הוא מקיים תכונה חזקה יותר הנקראת יציבות. בהינתן שיבוץ מסויים של אנשים לבתים, נגדיר **קבוצה מערערת** (blocking coalition) כקבוצה היכולה לפרוש מהמערכת ולבצע מסחר פנימי בתוך הקבוצה, והתוצאה שתתקבל תהיה טובה יותר לפחות לאחד מחברי הקבוצה, ולא פחות טובה לכל שאר חברי הקבוצה. אם אין קבוצה מערערת, השיבוץ נקרא **יציב**. קל לראות, שכל שיבוץ יציב הוא יעיל פארטו ומקיים השתתפות מרצון.

קבוצת השיבוצים היציבים נקראת ה**ליבה** (**core**) של משחק השיבוצים. ניתן להראות שהליבה כוללת בדיוק שיבוץ אחד, והוא השיבוץ המוחזר ע"י אלגוריתם מעגלי המסחר.

משפט: אם כל יחסי ההעדפה חזקים (אין אדישות), אז אלגוריתם מעגלי המסחר מוצא שיבוץ יציב.
הוכחה: נניח שקבוצה כלשהי של שחקנים, שנקרא להם "הבדלנים", שוקלת לפרוש מהאלגוריתם.
נסמן:

- שיבוץ א = השיבוץ לבדלנים כשהם משתתפים באלגוריתם;
- שיבוץ ב = השיבוץ לבדלנים כשהם פורשים ומבצעים החלפה כלשהי ביניהם.

יהי k המספר הקטן ביותר, כך שבדלן כלשהו ממעגל k (נניח יוסי) מקבל בית אחֵר בעקבות הפרישה. בית זה חייב להיות שייך לבדלן אחֵר – כי אחרי הפרישה הבדלנים יכולים רק להתחלף ביניהם.
כיוון ש-k קטן ביותר, כל הבדלנים ממעגלים $k>j$ מקבלים אותו בית. לכן יוסי מקבל בית של מישהו ממעגל k ומעלה. אבל בשיבוץ א, יוסי מקבל את הבית *הטוב ביותר עבורו*, מבין הבתים שעדיין זמינים בזמן מעגל k.
כיוון שבשיבוץ ב הוא מקבל בית אחר, וההעדפות חזקות – הבית האחר בהכרח גרוע יותר עבורו.
***

משפט ב: אם כל יחסי ההעדפה חזקים (אין אדישות), אז יש רק שיבוץ יציב אחד - והוא זה שמחזיר אלגוריתם מעגלי המסחר.
הוכחה: נגדיר: שיבוץ א = השיבוץ של האלגוריתם, שיבוץ ב = שיבוץ אחר כלשהו.
יהי k הקטן ביותר כך שמישהו (נניח יוסי) ממעגל k באלגוריתם, משובץ אחרת בשיבוץ ב.
בשיבוץ א, יוסי מקבל את הבית הטוב ביותר מהבתים שלא נלקחו ע"י מעגלים $k>j$.
כיוון ש k הוא הקטן ביותר, בשיבוץ ב יוסי לא מקבל בית ממעגל $k>j$, ולכן מצבו בשיבוץ ב פחות טוב.
אותו שיקול נכון לגבי כל המשתתפים במעגל k המשובצים אחרת בשיבוץ ב.

לכן, משתתפי מעגל k יכולים לפרוש ולערער על שיבוץ ב.
מכאן: שיבוץ ב אינו יציב. ***

למה זה חשוב שהשיבוץ היציב הוא יחיד? - כי אם מישהו יטען שאלגוריתם "מעגלי המסחר" מפלה אותו לרעה, נוכל להוכיח לו שזה לא נכון – כל אלגוריתם אחר שהיה מוצא שיבוץ יציב, היה מוצא את אותו שיבוץ בדיוק.

אלגוריתם מעגלי המסחר יכול לשמש תחליף למסחר בכסף, במצבים שבהם לא רוצים מסיבה כלשהי להשתמש בכסף. לדוגמה, אפשר להשתמש בו כדי לבנות מערכת להחלפת ספרים משומשים. כל אחד מציע ספר ובוחר את הספר שהוא הכי רוצה מבין הספרים האחרים, והמערכת מבצעת החלפות במעגל.

מעגלי-מסחר יכולים לשמש גם כדי ליישם את מצוות היובל בימינו. ראו מאמרי "אלגוריתם היובל - תהליך הדרגתי לחלוקת קרקעות", בד"ד 28, http://www.tora.us.fm/tryg/yovl/bdd/yovel-bdd-28.pdf.

מקורות

- Parkes and Seuken, "Economics and Computation" (2018), chapter 12

סיכם: אראל סגל-הלוי.