

שאלה 7: יעילות פארטו בחלוקת שכר דירה

א. בבעיית חלוקת שכר-דירה במודל הקרדינלי, הוכיחו שהשמה היא יעילה-פארטו אס-ורק-אס היא ממקסמת את סכום הערכים.

פתרון: כיוון אחד נכון תמיד וכבר הוכחנו – מיקסום סכום ערכים גורר יעילות פארטו. צריך להוכיח את הכיוון השני. נניח שהשמה X (עם וקטור-מחיר כלשהו P) לא ממקסמת את סכום הערכים, כלומר קיימת השמה Y (פרמוטציה כלשהי של X) עם סכום ערכים גדול יותר מ- X . כזכור, הוכחנו בשיעור שהשמה ממקסמת את סכום הערכים גם עם המחירים. לכן, קיים לפחות שחקן אחד i , שהתועלת שלו גדולה יותר בהשמה Y , כלומר:

$$V_i(Y_i) - P(Y_i) > V_i(X_i) - P(X_i)$$

עכשיו ניצור וקטור-מחיר חדש, Q , באופן הבא. ניקח את כל השחקנים שהתועלת שלהם גדולה יותר בהשמה Y , ונעלה להם את המחיר, עד שהתועלת שלהם תהיה שווה לתועלת שהיתה להם בהשמה X . את עודף-הכסף שקיבלנו, נחלק לשחקנים שהתועלת שלהם בהשמה Y קטנה יותר. כיוון שסכום התועלות ב- Y גדול מסכום התועלות ב- X , ניתן לעשות זאת כך שהתועלות של כל השחקנים בהשמה (Y, Q) גדולות או שוות לתועלות שהיו להן בהשמה (X, P) , ולחלק מהשחקנים תועלות ממש גדולות יותר. לכן, (Y, Q) היא שיפור פארטו של (X, P) . כלומר, (X, P) לא יעילה פארטו.

ב. כזכור, המשפט של סעיף א לא היה נכון בבעיית חלוקת המשאבים מההרצאה הקודמת. איך זה מסתדר – מה ההבדל העקרוני בין שתי הבעיות?

• **פתרון:** הכסף מאפשר להעביר תועלות בין שחקנים.