

## אלגוריתמים כלכליים – תרגיל 10

מגישים: אייל שחימוב 323926147, שלו גולדשטיין 212210280

### שאלה 1:

#### סעיף א'

נגדיר את המושג "שידוך יציב" במצב של מחלקות עם כמה מקומות.

קודם נגדיר מחדש את המושג זוג מערער, כזוג של מחלקה ותת קבוצה לא ריקה של סטודנטים בגודל  $n$  עם המאפיינים הבאים:

- כל סטודנט בתת הקבוצה לא משודך למחלקה הזו.
- כל סטודנט בתת הקבוצה מעדיף את המחלקה הזו על פני זו שמשודכת לו.
- המחלקה מעדיפה את תת הקבוצה הזו על פני תת קבוצה אחרת של סטודנטים בגודל  $k$  שמשודכים לה, ויש למחלקה  $n - k$  מקומות פנויים נוספים.

כעת נגדיר ששידוך יציב במקרה שלנו הוא שידוך בו לא קיימים זוגות מערערים.

(יכולנו להגדיר רק עבור  $n = 1$ , אבל זה לא מכסה מקרים כמו זוגות נשואים).

#### סעיף ב'

נדגים את פעולת האלגוריתם קבלה על תנאי על העדיפויות של שתי המחלקות וחמישה הסטודנטים הבאים (ראש רשימת העדיפויות היא העדיפות הימנית):

#### המחלקות:

- א, ב, ד, ה, ג
- ב, א, ד, ג, ה

#### הסטודנטים:

- א. 2, 1
- ב. 1, 2
- ג. 2, 1
- ד. 2, 1
- ה. 2, 1

#### פעולת האלגוריתם:

- סטודנטים א, ג, ד, ה ילכו למחלקה 1 המועדפת עליהם, וסטודנט ב ילך למחלקה 2.
- מחלקה 1 תקבל את סטודנטים א, ד, ה (המועדפים עליה מבין הארבעה שניגשו) ותדחה את ג (הכי פחות מועדף עליה מבין הארבעה). מחלקה 2 תקבל את סטודנט ב (יש לה מקום).
- סטודנט ג שנדחה יציע את עצמו למחלקה 2 (הבאה בתור).
- מחלקה 2 תקבל אותו (יש לה מקום).

הפלט (השידוך שהתקבל): מחלקה 1: סטודנטים א, ד, ה. מחלקה 2: סטודנטים ב, ג.

#### נבדוק שהשידוך שהתקבל יציב:

סטודנטים א, ד, ה, ב התקבלו למחלקה המועדפת עליהם, לכן לא יהיו בשום זוג מערער. סטודנט ג נדחה על ידי מחלקה 1, כלומר מחלקה 1 מעדיפה כל סטודנט שמשודך לה על פניו (וגם אין לה מקום פנוי), לכן גם ג לא שייך לשום זוג מערער.

לא נשארו סטודנטים (בדקנו את כולם), לכן אין זוגות מערערים ולכן השידוך יציב.

## סעיף ג'

יהיו שתי מחלקות 1, 2, וחמישה סטודנטים ששניים מהם הם הזוג עמי ותמי.  
בלי הגבלת הכלליות נניח שעמי ותמי מעדיפים את מחלקה 1 על פני מחלקה 2.  
נריך את אלגוריתם "קבלה על תנאי" על המחלקות והסטודנטים ונקבל שידוך.

### ראשית נוכיח את הטענה הבאה:

עמי ותמי ישודכו למחלקה 1 אם ורק אם קיים לכל היותר סטודנט אחד **אחר** שמקיים:

1. הסטודנט מעדיף את מחלקה 1 על פני מחלקה 2.
2. מחלקה 1 מעדיפה את הסטודנט על פני לפחות אחד מהזוג עמי ותמי.

### הוכחת הטענה:

( $\Leftarrow$ ) עמי ותמי משודכים שניהם למחלקה 1.

נניח בשלילה שקיימים לפחות שני סטודנטים **אחרים** שכל אחד מהם מקיים:

1. הסטודנט מעדיף את מחלקה 1 על פני מחלקה 2.
2. מחלקה 1 מעדיפה את הסטודנט על פני לפחות אחד מהזוג עמי ותמי.

על פי ההנחה, לפחות שני סטודנטים כאלה יגיעו גם בתחילת האלגוריתם ישר אל מחלקה 1, בנוסף על עמי ותמי.

כמובן, מחלקה 1 תדחה את עמי ותמי, מכיוון שעל פי ההנחה היא מעדיפה לפחות שני סטודנטים אחרים שהגיעו אליה על פני לפחות אחד מהזוג עמי ותמי.

בסתירה לנתון שעמי ותמי שניהם משודכים למחלקה 1.

( $\Rightarrow$ ) כעת נוכיח שאם קיים לכל היותר סטודנט אחד **אחר** שמקיים את התנאים הנ"ל, עמי ותמי ישודכו למחלקה 1.

בתחילת האלגוריתם, כל הסטודנטים שמעדיפים את מחלקה 1, ילכו אליה קודם, ביניהם עמי ותמי.

מתוך כל הסטודנטים האלה, יש לכל היותר סטודנט אחד אותו מחלקה 1 מעדיפה על פני לפחות אחד מהזוג עמי ותמי. יש שלושה מקומות במחלקה, לכן עמי ותמי יתקבלו אליה בהכרח.

נוכח שהשידוך שקיבלנו הוא שידוך יציב:

נחלק למקרים:

מקרה ראשון: בשידוך שהתקבל, עמי ותמי משודכים שניהם למחלקה 1.

מכיוון שעמי ותמי מעדיפים את מחלקה 1, שניהם ילכו אליה בתחילת האלגוריתם.

עמי ותמי מעדיפים את מחלקה 1, לכן לא שייכים לזוג מערער.

על פי הטענה, קיים לכל היותר סטודנט אחד **אחר** שמקיים את שני התנאים הנ"ל.

כלומר לפחות שני סטודנטים **אחרים** לא מקיימים לפחות אחד מהתנאים הנ"ל, והם ישודכו בהכרח למחלקה 2. כלומר או שמחלקה 1 דחתה אותם, או שהם מעדיפים את מחלקה 2. בכל מקרה, לא יהיו שייכים לזוג מערער.

אם נותר סטודנט, הוא ישודך למחלקה שהוא מעדיף, שכן יש מקום אחד פנוי בכל אחת. גם הוא לא יהיה בשום זוג מערער.

בסך הכל, אף אחד מהסטודנטים לא שייך לזוג מערער ולכן השידוך יציב.

מקרה שני: בשידוך שהתקבל, עמי ותמי משודכים שניהם למחלקה 2.

עמי ותמי משודכים שניהם למחלקה 2, כלומר לא משודכים למחלקה 1, לכן על פי הטענה, קיימים לפחות שני סטודנטים **אחרים** שכל אחד מהם מקיים:

1. הסטודנט מעדיף את מחלקה 1 על פני מחלקה 2.

2. מחלקה 1 מעדיפה את הסטודנט על פני לפחות אחד מהזוג עמי ותמי.

סטודנטים אלה יתקבלו למחלקה 1 בתחילת האלגוריתם, ולכן לא יהיו בשום זוג מערער.

בנוסף ברור על פי הטענה כי מחלקה 1 לא מעדיפה את הזוג עמי ותמי על פני אף אחד מבין הסטודנטים שנמצאים בה, לכן גם הם לא יהיו שייכים לאף זוג מערער.

לבסוף, אם נותר סטודנט, הוא יתקבל ישירות למחלקה שיעדיף כי יש מקום בכל מחלקה לסטודנט אחד, ולכן לא יהיה שייך לזוג מערער.