

## מטלה - חלוקת עלויות ומכרזי שירות

[שאלות שנחתכו בעריכה - לא להגשה].

### שאלה 2: חלוקת רווחי עסק

כדי להקים עסק, צריך משקיע ועובדים.

הרווח של העסק הוא 1000 כפול מספר העובדים.

לפי ערך שאפלי, איך יתחלקו רווחי העסק בין המשקיע לבין העובדים?

הזרכה: חשבו קודם את הערך עבור משקיע ועובד אחד, ועבור משקיע ושני עובדים, ואז הכלילו למספר כלשהו של עובדים.

### שאלה 4: פונקציה תת-מודולרית

**תיכונה:** פונקציה  $v$  על קבוצות נקראת תת-מודולרית (submodular) אם, לכל שתי קבוצות  $S, T$  ולכל איבר  $i$ , יש עלות שולית פוחתת:

$$\text{If } S \leq T, \text{ then } v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

**הגדרה:** פונקציה  $v$  על קבוצות נקראת תת-חיבורית (subadditive) אם, לכל שתי קבוצות  $S, T$ :

$$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$$

א. תנו דוגמה לפונקציה שהיא גם תת-אדיטיבית וגם תת-מודולרית.

ב. תנו דוגמה לפונקציה שהיא תת-אדיטיבית אבל לא תת-מודולרית.

ג. תנו דוגמה לפונקציה שהיא לא תת-אדיטיבית ולא תת-מודולרית.

ד. הוכיחו שכל פונקציה תת-מודולרית היא תת-אדיטיבית.

אם אתם מסתבכים תסתכלו כאן:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Utility\\_functions\\_on\\_indivisible\\_goods](https://en.wikipedia.org/wiki/Utility_functions_on_indivisible_goods)

### שאלה 6: מכרז VCG - איזון תקציבי

לפניכם גירסה משופרת של מכרז וק"ג, שאמורה להשיג איזון תקציבי.

המכרז מקבל כקלט כלל-תשלום  $p(S, i)$ , הקובע, עבור כל תת-קבוצה של נוסעים  $S$ , כמה ישלם כל נוסע  $i$  אם הקבוצה הזאת היא הקבוצה הנבחרת. הכלל צריך להיות מאוזן-תקציבית - לכל תת-קבוצה, סכום התשלומים של חברי הקבוצה שווה לעלות הנסיעה של תת-הקבוצה.

עבור כל נוסע  $i$  וכל תת-קבוצה  $S$ , הערך של  $i$  לבחירת הקבוצה  $S$  הוא:

•  $v[i] - p(S, i)$  אם  $i$  נמצא בקבוצה (נסמן ערך זה ב  $u(i, S)$ ).

• אפס - אם  $i$  לא נמצא בקבוצה.

(שימו לב - בגירסה שלמדנו בכיתה, הערך של  $i$  לבחירת  $S$  היה  $v[i]$  אם  $i$  נמצא בקבוצה).

בגירסה הזאת אין שחקן המייצג את ה"נהג".

המכרז בוחר את האפשרות  $S$  שבה סכום התועלות  $-u(i, S)$  הוא הגבוה ביותר, ומחשב את התשלום של כל נוסע לפי כלל VCG.

- א. תנו דוגמה עם 2 נוסעים לפעולת המכרז, כאשר כלל-התשלום גובה סכום זהה מכל נוסע.  
ב. תנו דוגמה עם 2 נוסעים לפעולת המכרז, כאשר כלל-התשלום גובה מכל נוסע את ערך שאפלי.  
ג. תנו דוגמה שבה, לכל כלל-תשלום שנבחר, עלול להיות מצב שבו לאחד הנוסעים יש תועלת שלילית (הוא משלם יותר מהערך שלו).

## שאלה 5: מכרז מולין-שנקר - דוגמאות

- א. הראו דוגמה עם 2 או 3 שחקנים, שבה כלל-התשלום של שאפלי אינו מונוטוני. הראו את טבלת העלויות, חשבו את ערכי שאפלי לכל תת-קבוצה, והסבירו מדוע זה לא מונוטוני.  
ב. הראו דוגמה עם 2 או 3 שחקנים, שבה מכרז מולין-שנקר עם כלל-התשלום של שאפלי אינו אמיתי (אפשר להיעזר בסעיף א). הסבירו בפירוט מה יעשה המכרז בדוגמה זו, ומדוע זה לא אמיתי.  
ג. הראו דוגמה עם 2 או 3 שחקנים, שבה מכרז מולין-שנקר עם כלל-התשלום של שאפלי אינו יעיל-פארטו. הסבירו בפירוט מה יעשה המכרז בדוגמה זו, ומדוע זה לא יעיל-פארטו.

## שאלה 6: מכרז SN

מכרז SN בוחר תת-קבוצה של נוסעים באופן הבא:

- הרץ VCG: בחר את תת-הקבוצה הממקסמת את סכום ערכי-הנוסעים פחות עלות הנהג, וחשב את התשלום  $p_i$  שכל שחקן  $i$  צריך לשלם לפי נוסחת VCG.
- חשב את סכום התשלומים של כל השחקנים; נסמן סכום זה ב  $S$ .
- חשב את העלות של תת-הקבוצה הנבחרת; נסמן עלות זו ב  $C$ .
- גבה מכל שחקן  $i$  תשלום  $p_i * C / S$ .

מטרת ההכפלה בשלב האחרון היא לוודא שהמכרז הוא מאוזן תקציבית – סכום התשלומים של כל השחקנים אחרי ההכפלה שווה לעלות.

- א. האם מכרז SN אמיתי? הוכיחו או הפריכו.  
ב. האם מכרז SN יעיל פארטו (בהנחה שכל השחקנים אומרים אמת)? הוכיחו או הפריכו.

## מאמרים להרחבה ולמטלת רשות

1. Shahar Dobzinski, Aranyak Mehta, Tim Roughgarden, Mukund Sundararajan (2018): "[Is Shapley cost sharing optimal?](#)"
2. Yuhui Jin, Chuei-Tin Chang, Shaojun Li, Da Jiang (2018), "[On the use of risk-based Shapley values for cost sharing in interplant heat integration programs](#)"
3. Dongshuang Hou, Hao Sun, Panfei Sun, Theo Driessen (2018): "[A note on the Shapley value for airport cost pooling game](#)"
4. Khaled Maafa, Lhouari Nourine, Mohammed Said Radjef (2018): "[Algorithms for computing the Shapley value of cooperative games on lattices](#)"
5. Christoph M.: "Interpretable machine learning - Shapley values"  
<https://christophm.github.io/interpretable-ml-book/shapley.html>
6. Tjeerd van Campen, Herbert Hamers, Bart Husslage, Roy Lindelauf: "A new approximation method for the Shapley value applied to the WTC 9/11 terrorist attack" - ערך שאפלי והפיגוע במגדלי התאומים