

אלגוריתמים כלכליים תרגיל 6 - עמית אליהו 211774070

שאלה 4

א. נניח ישנם 3 שחקנים שערכם הוא 1, 2, 3. כעת אף אחד לא נבחר (וגם לא משלם). אבל אם אחד השחקנים ישנה את ערכו ל-10 (או גדול מ-10) אז הוא יבחר אבל ישלם 0 כי:

- סכום האחרים איתו הוא 0 (כי אף אחד אחר לא נבחר).
- סכום האחרים בלעדיו הוא 0 (כי אף אחד לא נבחר).

ולכן כדאי לשקר במקרה זה כי השחקן שישקר יקבל את החפץ ללא תשלום.

באופן כללי נוכל להגיד:

במקרה בו $\forall v_i: v_i < 10$, כדאי לשקר כדי להרוויח את החפץ ללא תשלום.

ב. כאשר קיים ערך שגדול מ-10 אז האדם היחיד שנבחר (ולכן שעליו לשלם) הוא האדם עם הערך הגבוה ביותר וערך הסף שלו הוא המקסימום המבין שאר הערכים ל-10 שהרי רק אם ערכו גדול מ-10 וגם משאר הערכים אז הוא יבחר וכמו כן כל שחקן אחר לא ישלם כי הוא לא נבחר. כאשר לא קיים ערך שגדול מ-10 אז אף לא נבחר ולכן גם לא משלם. ולכן נוסחת התשלום תהיה:

$$p(v) = \begin{cases} \max(\max\{v_i | v_i \neq v\}, 10), & v = \max\{v_i\} \wedge v \geq 10 \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

הדגמת הנוסחה:

בדוגמה בסעיף א' כל הערכים קטנים מ-10 ולכן כולם ישלמו 10.

דוגמה נוספת: הערכים הם 3, 6, 11, 15.

ערך הסף של השחקן שערכו 15 הוא 11 (המקסימום מבין {3, 6, 11, 10}) ולכן הוא ישלם 11 וכל השאר ישלמו 0.

דוגמה נוספת: הערכים הם 3, 6, 9, 15.

ערך הסף של השחקן שערכו 15 הוא 10 (המקסימום מבין {3, 6, 9, 10}) ולכן הוא ישלם 10 וכל השאר ישלמו 0.

ג. נניח המשקלים והערכים הם:

שחקן 3	שחקן 2	שחקן 1	
0.1	1	10	משקל
3	2	1	ערך
0.3	2	10	מכפלה

כעת שחקן 1 יבחר ויאלץ לשלם 2 ("ע"פ תשלומי וק"ג), אבל כעת הוא משלם יותר מהערך שלו (כלומר מפסיד) ולכן עדיף לו לשקר ולהגיד שערכו קטן יותר בכדי לא להיבחר אפילו.

ד. נגדיר את פונקציית הכפלה:

$$m(i) = w_i \cdot v_i$$

השחקן שמכפלתו הגבוהה ביותר הוא היחיד שנבחר ולכן הוא היחיד שמשלם.
נסמן את השחקן שמכפלתו הגבוהה ביותר ב- j , ואת הערך שמכפלתו השנייה הגבוהה ביותר ב- k :

$$j = \arg \max_{1 \leq i \leq n} m(i)$$

$$k = \arg \max_{i \neq j} m(i)$$

ערך הסף של שחקן j ביותר הוא v' המקיים:

$$v' = \frac{v_k \cdot w_k}{w_j}$$

וזאת כי:

$$\forall i \neq j: v' \cdot w_j = \frac{v_k \cdot w_k}{w_j} \cdot w_j = v_k \cdot w_k \geq v_i \cdot w_i$$

וכן לכל $\varepsilon > 0$:

$$(v' - \varepsilon) \cdot w_j < v_k \cdot w_k$$

לכן נוסחת התשלום תהיה:

$$p(i) = \begin{cases} \frac{m(\arg \max_{i \neq j} m(i))}{w_i}, & i = \arg \max_{1 \leq i \leq n} m(i) \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

או על פי הסימונים שלעיל:

$$p(i) = \begin{cases} \frac{m(k)}{w_i}, & i = j \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

הדגמת הנוסחה:

נשתמש בדוגמה מסעיף ג':

שחקן 3	שחקן 2	שחקן 1	
0.1	1	10	משקל
3	2	1	ערך
0.3	2	10	מכפלה

$$1 = \arg \max_{1 \leq i \leq 3} m(i)$$

$$2 = \arg \max_{i \neq 2} m(i)$$

$$\frac{m(2)}{10} = \frac{1 \cdot 2}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2$$

ולכן שחקן א' ישלם: 0.2
וכל שאר השחקנים ישלמו 0.