

שאלה 1

בהרצאה הוכחנו, כי אלגוריתם מעגלי המסחר הוא יעיל פארטו כאשר כל יחסי ההעדפה הם חזקים (אין אדישות בין שני בתים).

א. הוכיחו (ע"י דוגמה), שאלגוריתם מעגלי המסחר אינו יעיל פארטו (כלומר – ניתן למצוא שידוך שממקסם יותר את ערכי המשתתפים) כאשר יחסי ההעדפה הם לא חזקים (כלומר – יש אדם שהוא אדיש בין שני בתים)

פתרון: נתאר את האנשים בעזרת אותיות (א, ג, ר, ש), ואת הבתים בעזרת אותיות באנגלית (A, G, R, S), כאשר התו מתאים לבית המקורי של כל אחד. רשימת ההעדפות תהיה:

ר: $R < G < S = A$

א: $G < A < S < R$

ש: $A < G < S = R$

ג: $R < G < S < A$

סידור שניתן לקבל בעזרת האלגוריתם הינו: ר-S, א-A, ש-R, ג-G. (אני אצייר בכיתה)

אמנם, יש נו סידור יעיל פארטו לסידור זה: ר-A, א-R, ש-S, ג-G.

הסיבה לבעייתיות היא בעצם, שברגע שישנה אדישות, קיימים מצבים בהם יכולים להיווצר שני מעגלים חופפים (או יותר, תלוי בכמה 'אדישות' יש). לכן, כיוון שהאלגוריתם לא מבדיל בין מעגלים, הוא עלול לקחת מעגל שאינו יוצר פתרון יעיל פארטו, כנדרש.

ב. הציעו שיפור לאלגוריתם, כך שיהיה יעיל פארטו גם כשיש אנשים שהם אדישים בין שני בתים (האלגוריתם עדיין יצטרך לעודד השתתפות).

פתרון: עבור כל אדישות, האלגוריתם יפעל ברקורסיה בצורה הבאה: הוא יפעל פעם אחת כאשר הוא עצמו מתעדף את אחד הבתים, ופעם נוספת כאשר הוא מתעדף את הבית השני. כאשר כל אחד מהם יסיים את הריצה, הוא יחזיר את שתי התוצאות שנבעו מ'הפיצול' בנקודה הזו, יבדוק מי מבין השניים יעיל פארטו, ויחזיר אותו אחורה. האלגוריתם אינו יעיל במיוחד (הוא הופך לאקספוננציאלי בכמות האנשים האדישים לאורך הדרך), אבל הוא משאיר את שאר התכונות של האלגוריתם (עידוד השתתפות, יעילות פארטו, וכו'), ולכן יש לו היתרונות שלו.