אלגוריתמים כלכליים שבוע 11

עשינו שתי שאלות הפעם!

שאלה 2 :הסתברות להחלפה מוצלחת

נניח שיש n אנשים ו-n בתים, וההעדפות של כל אדם מתפלגות באופן אחיד (ההסתברות שאדם i הכי רוצה את בית j היא 1 חלקי n) מה ההסתברות שאדם מסוים יהיה חלק ממעגל-החלפה בסיבוב הראשון?

למעשה ניתן להציג את הבעיה שלנו בצורה אחרת:
נניח יש לנו גרף **מכוון** של N צלעות על N קדקודים.
*לכל קדקוד מותר להוציא קשת אחת בלבד לאחד הקדקודים השכנים
*מותר לקדקוד לשלוח קשת לעצמו(יכולה להתקבל לולאה עצמית).
*היעד של כל קדקוד נבחר בצורה אקראית.
מה הסיכוי שקדקוד מסוים יהיה חלק ממעגל?

דבר ראשון: למה זה בכלל דומה למקרה שלנו? במקרה שלנו יש קשת בין כל חפץ לבעלים, ומכל אדם לאיזה חפץ הוא רוצה.
אז ברמת העיקרון, אם ניקח את הגרף שלנו ונאחד את הבעלים של החפץ עם החפץ נקבל גרף בדיוק כמו בבעיה, כי כל אדם יהווה קדקוד והוא ישלח צלע לבעלים של החפץ במקום לחפץ, בגלל שאנחנו מתייחסים רק לסיבוב הראשון אז לכל אדם יש העדפה אחת בלבד, אז יהיו לנו N קדקודים, שמייצגים את האנשים, ו-N צלעות שמייצגות את הרצונות של האנשים,
(כמובן כל זה בהנחה שכל אחד רוצה חפץ כלשהו בטוח).

ניקח לדוגמא את המקרה של שני קדקודים: א' ו-ב'. הסיכוי שא' יהיה חלק ממעגל על הסיבוב הראשון, זה אם הוא חלק ממעגל כלשהו בגרף.
א' יכול להיות **או** חלק ממעגל בגודל אחד **או** חלק ממעגל בגודל 2.
כדי שא' יהיה חלק ממעגל בגודל 1 נצטרך לדרוש ש-א' יבחר בעצמו. הסיכוי שהוא יבחר בעצמו הוא $\frac{1}{2}$ כי הוא יכול לבחור או ב-ב' או בעצמו. לכן הסיכוי ש-א' יהיה חלק ממעגל עצמי הוא 1/2 מהמקרים.
כדי ש-א' יהיה חלק ממעגל בגודל שתיים נדרוש ש-ב' יבחר ב-א' וש-א' יבחר במי שנשאר שזה ב'.
כלומר הסיכוי של א' להיות חלק ממעגל בגודל 2 הוא $\frac{1}{2}*\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.
סה"כ הסיכוי של א' להיות חלק ממעגל כלשהו הוא: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

במקרה של שני קדקודים נקבל: שהקדקוד א' יכול להיות חלק ממעגל בגודל 3 או 2 או 1.
כדי שהוא יהיה במעגל בגודל 1 נדרוש מ-א' לבחור בעצמו. במקרה הזה יש לו סיכוי של שליש.
כדי שהוא יהיה במעגל בגודל 2 ניתן ל-א' לבחור קדקוד מתוך שתי אופציות שיש לו לבחור, אח"כ נדרוש מהקדקוד אותו הוא בחר שיבחר ב-א' חזרה, לכן סה"כ נקבל: $\frac{1}{3}*\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$
כדי ש-א' יהיה חלק ממעגל בגודל שלוש נדרוש מ-א לבחור קדקוד שהוא לא הוא, מאותו קדקוד נדרוש לבחור את הקדקוד השלישי (זה ש-א' לא בחר בו) וממנו נדרוש לבחור את א'.
כלומר, הסיכוי של א' להיות חלק ממעגל בגודל שלוש הוא: $\frac{2}{3}*\frac{1}{3}*\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$.
סה"כ הסיכוי של א' להיות חלק ממעגל הוא: $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}=\frac{17}{27}$.

אם נשים לב יש כאן בעצם סכימה של הסיכויים של א' להיות חלק ממעגל מגודל 1 עד גודל N. אם

נחפש נוסחא כללית לבעיה:
נניח ש-א' הוא חלק ממעגל בגודל N מתוך N קדקודים אז הנוסחה שלו היא:

$$\frac{N-1}{N}*\frac{N-2}{N}*\frac{N-3}{N}*\dots*\frac{1}{N}=\frac{N!}{N^N}$$

כי בהתחלה א' מחפש את הקדקוד שאליו הוא רוצה להתחבר, ויש לו n-1 אופציות כאלו מתוך n (הוא לא יכול להתחבר לעצמו כדי לא לסגור מעגל).
אח"כ הקדקוד השני צריך לבחור למי להתחבר, הוא לא יכול להתחבר ל-א' כי א' מחובר אליו ואז הם "סוגרים מעגל", ואנחנו רוצים מעגל בגודל N, ואז הקדקוד השלישי צריך לבחור למי להתחבר מהנותרים וכן הלאה, עד שמגיעים לקדקוד האחרון שצריך להתחבר ל-א' (כלומר יש לו אופציה אחת להתחבר למישהו).
אם א' הוא חלק ממעגל בגודל N-2 למשל נקבל:

$$\frac{N-1}{N}*\frac{N-2}{N}*\frac{N-3}{N}*\dots*\frac{3}{N}*\frac{1}{N}=$$
$$\left(\frac{N-1}{N}*\frac{N-2}{N}*\frac{N-3}{N}*\dots*\frac{3}{N}*\frac{1}{N}\right)*\frac{2!}{2!}=\frac{\boldsymbol{N}!}{\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N-2}}*\boldsymbol{2}!}$$

נשים לב שלבחור האחד לפני אחרון היו שתי אופציות לבחור כי נשארו שלושה אנשים, ולבחור שאותו הוא בחר הייתה רק אופציה אחת(לבחור את א')
הכפלנו בשתיים עצרת חלקי שתיים עצרת כדי לקבל ביטוי יפה יותר.
אם נסכם את זה עבור מעגל בגודל N-a כללי נקבל:

$$\frac{N-1}{N}*\dots*\frac{a+1}{N}*\frac{1}{N}=\frac{\mathrm{N}!}{N^{N-a}*a!}$$

והסיכוי ש-א' הוא חלק ממעגל הוא בעצם הסכום של כל המעגלים האפשריים:

$$\mathrm{P}_{\text{א}}=\sum_{a=0}^{N-1}\frac{(N-a)!}{a!*N^{N-a}}=\sum_{a=0}^{N-1}\frac{(N-a)!}{a!*N^{N-a}}*\frac{N^a}{N^a}=\frac{(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{1})!}{\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}}*\sum_{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{N}-\boldsymbol{1}}\frac{\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{a}}}{\boldsymbol{a}!}$$

ואם יש סיכוי לכל צלע צריך גם לקחת את זה בחשבון ובכל בחירה של קדקוד להכפיל כפול הסיכוי לבחור את אותו קדקוד.

הערה חשובה:

את הפתרון לשאלה לא מצאנו בעצמנו, אלא לקחנו מהאתר הזה:
https://math.stackexchange.com/questions/136932/probability-of-cycle-in-random-graph
במקרה השאלה הייתה דומה מאוד לשאלה מהמטלה (-;

שאלה 1: החלפת בתים – יעילות ואדישות

בהרצאה הוכחנו, שאלגוריתם מעגלי המסחר הוא יעיל פארטו כאשר כל יחסי ההעדפה הם חזקים (אין אדישות)

א. הוכיחו (ע"י דוגמה) שאלגוריתם מעגלי המסחר אינו יעיל פארטו כאשר יחסי ההעדפה הם לא חזקים -(יש אדם שהוא אדיש בין שני בתים.)

הוכחה: נניח ויש לנו שלושה אנשים עם העדפות הבאות:

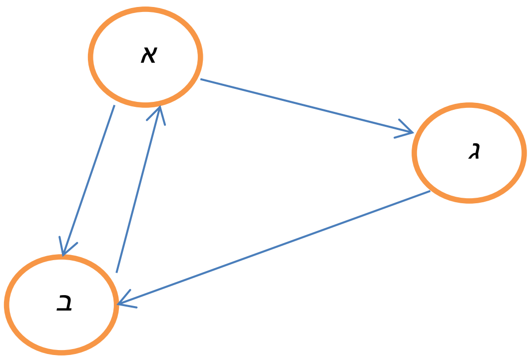
א': (ג' או ב', א')
ב: (א', ג', ב')
ג: (ב' א', ג')

כלומר: א' לא בטוח מה הוא רוצה יותר- לעבור לבית של ב' או לשל ג', הוא אומר: "יאללה שיהיה, לא אכפת לי, העיקר לצאת קצת מהבית"

ב' רוצה להחליף עם א', הוא מוכן להתפשר על הבית של ג' ואם אין ברירה נשארים בבית.

ג' בדומה ל-ב' רוצה לצאת קצת מהבית. הוא רוצה להחליף עם ב' אם לא אז עם א', במקרה הגרוע נשארים בבית, גם ככה עוד מעט תקופת מבחנים.

אם נפעיל את האלגוריתם נקבל שעלול להתרחש המקרה הבא:
א⇔ ב ו- ג יישאר בבית.
כי בעיקרון יש מעגל בין א' ל- ב':



אבל קיים לזה שיפור פארטו:

ב' יחליף עם א' כי זה מה שהוא הכי רוצה, ג' יחליף עם ב' כי זה מה שהוא הכי רוצה, וא' יחליף עם ג' כי בעיקרון לא אכפת לו מבין השניים:

א' <= ג' <= ב' <= א'.

ב [מחקרי] הציעו שיפור לאלגוריתם, כך שיהיה יעיל פארטו גם כשיש אנשים שהם אדישים בין שני בתים (האלגוריתם עדיין צריך לעודד השתתפות). הדגימו את פעולת האלגוריתם שלכם.

הצעת אלגוריתם אפשרי(לא מחייב):

האלגוריתם יעבוד באותו תקן רק עם שינוי, במקרה של אנשים עם אדישויות ניקח מבין שתי האפשרויות את האפשרות הפחות "מבוקשת" באותו סיבוב, ונמקם אותה קודם בסדר העדיפויות של הבחור האדיש, כלומר נהפוך את האדם האדיש לאדם שסגור על עצמו
המוטיבציה: אם ניתן ערך גבוה יותר לאפשרות הפחות מבוקשת מבין השתיים נגדיל את המעגל והסיכוי של הבחור האדיש לפגוע קטן.

הדגמה (מתוך הדוגמא של ויקיפדיה):

סוכן	1	2	3	4	5	6
בחירה ראשונה	3	3	3	2 או 5	1	2 או 4
בחירה שנייה	2	5	1	6	3	5
בחירה שלישית	4	6	...	4	2	6
בחירה רביעית	1	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

לפי האלגוריתם הטבלה תראה כך:

סוכן	1	2	3	4	5	6
בחירה ראשונה	3	3	3	5	1	4
בחירה שנייה	2	5	1	2	3	2
בחירה שלישית	4	6	...	6	2	5
בחירה רביעית	1	...	...	4	...	6
...	...	...	...	...	...	...

נשים לב שבסיבוב הראשון יהיה לנו רק חילוף אחד של שלוש עם עצמו, ולכן נוריד אותו מהרשימה ונשאר עם:

סוכן	1	2	4	5	6
בחירה ראשונה	2	5	5	1	4
שנייה	4	6	2	2	2
שלישית	1		6		5
רביעית			4		6

בסיבוב הזה יש לנו מעגל בין 1 שרוצה את בית 2, 2 שרוצה את 5 ו-5 שרוצה את 1.

נשאר לאחר הסיבוב עם:

4 ו-6: משום שארבע מעדיף בית 6 לפני שהוא מעדיף את הבית שלו , וגם 6 מעדיף את בית ארבע לפני שהוא מעדיף להישאר בביתו נקבל שהם מחליפים.

הערה: לא הוכנס באלגוריתם יותר מידי מחשבה מתמטית. פשוט מחשבה אתית- אם הבחור האדיש אומר שהוא מוכן לקחת את הפחות טוב, הוא כאילו "מתפשר" למען הכלל למרות שהוא בכלל לא מפסיד מזה משהו.