מכרזים למיקסום רווח
Revenue-Maximizing Auctions

אראל סגל-הלוי

מקורות:
הקורס של טים, הרצאה 5 והלאה:
http://theory.stanford.edu/~tim/f13/f13.html

מיקסום רווח לעומת מיקסום סכום ערכים

נניח שאנחנו מוכרים *חפץ אחד* ויש *קונה אחד*.

איזה מכרז ממקסם את סכום הערכים?

- זה קל – נותנים לו את החפץ בחינם.

איזה מכרז ממקסם את הרווח של המוכרים?

- זה קשה – תלוי בערך של השחקן!

במקום רווח – ננסה למקסם **תוחלת** רווח.

- זה דורש מידע סטטיסטי על ערכים של שחקנים ("סקר שוק").

מיקסום רווח – חפץ אחד וקונה אחד

דוגמה: סקר-שוק הראה שהערך של קונה מתפלג אחיד בין 10 ל-30.
איזה מכרז משיג תוחלת-רווח גדולה ביותר?

- **מכרז ויקרי** ממקסם סכום ערכים, אבל הרווח שלו הוא 0!
- **מכרז מאירסון** לא חייב למקסם סכום ערכים, ולכן יש סיכוי שייתן לנו תוחלת רווח חיובית.
- כדי להשתמש בו צריך להגדיר *כלל בחירה*.

מכרז מאירסון – חפץ אחד וקונה אחד

דוגמה: סקר-שוק הראה שהערך של קונה מתפלג אחיד בין 10 ל-30.
איזה מכרז משיג תוחלת-רווח גדולה ביותר?

- כללי-בחירה אפשריים כשיש שחקן אחד:
  - בחר את הקונה אם ורק אם ערכו גדול מ-p.
- התשלום הוא ערך הסף – p.
- איזה p נותן את תוחלת-הרווח הגדולה ביותר?

מכרז מאירסון – חפץ אחד וקונה אחד

- בכלל-הבחירה "מקסם את סכום הערכים": ערך-הסף=0, התשלום=0, תוחלת הרווח=**0**.

- בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם"ם הערך שלו לפחות 10": ערך-הסף=10, הקונה תמיד נבחר (בהסתברות 1) ותמיד משלם, תוחלת הרווח=**10**.

- בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם"ם הערך שלו לפחות 15", ערך-הסף=15, הקונה נבחר בהסתברות 3/4, רווח =3/4*15 = **11.25**.

מכרז מאירסון – חפץ אחד וקונה אחד

בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם"ם הערך שלו לפחות p", ערך-הסף=p, הקונה נבחר בהסתברות:

- $(30-p)/(30-10)$
- תוחלת הרווח:

$$E[\text{Revenue}(p)] = p * \text{Prob}[v > p]$$
$$= p * (30-p)/(30-10)$$

$$\textit{derivative by } p = (30-2p)/20 \rightarrow \boldsymbol{p_{opt} = 15}$$

מכרז מאירסון – חפץ אחד וקונה אחד

הכללה: נניח שאספנו נתונים סטטיסטיים על ערכי קונים, והגענו למסקנה שהם מתפלגים כ:

$$\mathrm{Prob}[v<p] = \mathrm{F}(p)$$

איזה מחיר ממקסם את תוחלת הרווח?

$$\mathrm{E}[\mathrm{Revenue}(p)] = p \cdot \mathrm{Prob}[v > p] = p \cdot [1 - F(p)]$$

$$'p = 0 \iff p - \frac{1-F(p)}{F'(p)} = 0$$

נגדיר את **פונקציית הערך הוירטואלי**:

$$r(v) := v - \frac{1 - F(v)}{F'(v)}$$

המכרז האופטימלי הוא: **מכור אם"ם** $r(v)>0$.

ראו: *code/virtual_valuations_uniform.ggb*

מיקסום רווח בשיטת מאירסון - כללי

נתון: *שוק חד-פרמטרי*:

- לכל משתתף יש ערך כספי **יחיד** ל"היבחרות".
- הערך של משתתף j לקוח מההתפלגות F_j.
  - *(למה התפלגות שונה לכל משתתף? למשל מאפיינים דמוגרפיים).*

דרושים:

- כלל-בחירה לבחירת תת-קבוצה של משתתפים.
- כלל-תשלומים שאיתו כלל-הבחירה אמיתי.

כזכור, לפי משפט מאירסון, ברגע שיש **כלל-בחירה** – יש **כלל-תשלומים** יחיד שאיתו הכלל אמיתי.

נחפש כלל-בחירה שממקסם את תוחלת הרווח.

מיקסום רווח בשיטת מאירסון - כללי

לכל כלל-תשלומים p, תוחלת הרווח היא:

$$E[\text{Revenue}(v_1,\ldots,v_n)] \quad = E[\sum_{j=1}^{n} p_j(v_1,\ldots,v_n)]$$

לפי משפט מאירסון, כלל-התשלומים הוא פונקציה של כלל-הבחירה c. אחרי פיתוח ארוך, מקבלים:

$$E[\text{Revenue}(v_1,\ldots,v_n)] \quad = E[\sum_{j=1}^{n} c_j(v_1,\ldots,v_n) \cdot r_j(v_j)]$$

במילים: תוחלת הרווח של כלל-בחירה c

= תוחלת סכום הערכים הוירטואליים של הנבחרים.

מיקסום רווח בשיטת מאירסון - כללי

$$E[\text{Revenue}(v_1,\ldots,v_n)] \quad = E[\textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j(v_1,\ldots,v_n)\cdot r_j(v_j)]$$

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים של הנבחרים.

מסקנה:
כלל-הבחירה c הממקסם את תוחלת הרווח הוא:

בחר את הקבוצה שבה סכום הערכים הוירטואליים הוא הגדול ביותר.

מיקסום רווח בשיטת מאירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים של הנבחרים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F_j'(v)}$$

דוגמה א. קונה אחד:

תוחלת הרווח = תוחלת הערך הוירטואלי = $r(v)$.

כלל-הבחירה הממקסם את הרווח הוא:

מכור אם-ורק-אם $r(v)>0$.

*** *הכלל אמיתי בתנאי ש-r היא פונקציה עולה.*

התשלום הוא ערך-הסף = $r^{-1}(0)$.

מיקסום רווח בשיטת מאירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים של הנבחרים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F'_j(v)}$$

דוגמה ב. הרבה קונים מאותה התפלגות F, ולכן עם אותה פונקציה r *(נניח ש-r פונקציה עולה).*

תוחלת הרווח = תוחלת $r(v_j)$ של המנצח.

כלל-הבחירה הוא: מכור למשתתף עם v_j הכי גבוה, בתנאי ש $r(v_j)>0$.

התשלום הוא ערך-הסף: הערך השני בגובהו או $r^{-1}(0)$ - הגבוה מביניהם.

--- שקול למכרז מחיר שני עם מחיר מינימום $r^{-1}(0)$!

מיקסום רווח בשיטת מאירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים של הנבחרים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F_j'(v)}$$

דוגמה ג. שני קונים עם התפלגויות שונות:

תוחלת הרווח = $r_j(v_j)$ של המנצח.

כלל-הבחירה הוא: מכור למשתתף עם $r_j(v_j)$ הכי גבוה, בתנאי ש $r_j(v_j) > 0$. התשלום = ערך-הסף.

דוגמה: F_b=Unif[20,40], F_a=Unif[10,30].

$r_a(v) = 2v\text{-}30, \qquad r_b(v) = 2v\text{-}40.$

*אם a אמר **23** ו-b אמר **27**, אז a יזכה! וישלם את ערך-הסף שלו שהוא **22** [ערך הסף של b הוא **28**].*

הדמיה בקובץ code/revenue_maximization.ods

מיקסום רווח במערכת הפירסום של יאהו *

- עד 2008, יאהו השתמשה במחירי-מינימום נמוכים וזהים עבור כל מילות-החיפוש.
- ב-2008 בוצע מחקר סטטיסטי שנועד להעריך את ההתפלגות F עבור כל מילה בנפרד.
- חושב מחיר-מינימום שונה עבור כל מילה.
- המנהלים לא הסכימו להשתמש במחירים החדשים אלא עשו ממוצע בין הישנים לחדשים.
- **התוצאה**: עליה גדולה ברווחים בסוף 2008.

* http://theory.stanford.edu/~tim/f13/l/l6.pdf

* Ostrovsky, Michael, and Michael Schwarz. "Reserve prices in internet advertising auctions: A field experiment." Proceedings of the 12th ACM conference on Electronic commerce. ACM, 2011.