

# חלוקת עלויות אמיתית

# Truthful Cost-sharing

אראל סגל-הלוי



# איך מחליטים מי יקבל שירות?

- עד כאן הנחנו שכולם נוסעים.
- אבל מה קורה אם העלות גבוהה מדי עבור חלק מהנוסעים - איך נחליט מי ייסע?
- נתון: לכל שחקן  $j$ , ערך הנסיעה הוא  $v_j$ .
- אם תת-קבוצה מסויימת נוסעת, הרווחה החברתית היא סכום הערכים של הנוסעים בתת-הקבוצה, פחות עלות הנסיעה.
- דרוש: כלל-החלטה שהוא:
  - א. יעיל פארטו – ממקסם רווחה החברתית.
  - ב. אמיתי – מעודד כל שחקן  $j$  לגלות את  $v_j$ .

# מכרז לקבלת שירות בשיטת VCG

- התוצאות האפשריות – כל  $2^n$  תת-הקבוצות.
- הערך של שחקן  $j$  הוא  $v_j$  אם נוסע, 0 לא.
- הערך של ה"נהג" הוא מינוס עלות הנסיעה.
- בוחרים את התוצאה הממקסמת את הסכום.
- תשלום שחקן  $j$  =: הסכום בלי  $j$ , פחות הסכום של אחרים (כולל ה"נהג") כש- $j$  נמצא.

מכרז VCG הוא:

- יעיל-פארטו – לפי הגדרה.
- אמיתי – הוכחנו.
- הבעיה – גירעון! ראו גליון מצורף.

# מכרז לקבלת שירות - מולין-שנקר (Moulin & Shenker, 2001)

קלט: כלל-תשלום.  $p(S, j) =$  כמה משלם שחקן  $j$   
אם הקבוצה שמקבלת שירות היא  $S$ .

אלגוריתם:

- (1) **איתחול:** כולם נכנסים לחדר.
- (2) אומרים לכל אחד כמה הוא צריך לשלם לפי  $p$ , בהנחה שכל הנוכחים בחדר משתתפים.
- (3) מי שחושב שזה יקר מדי - יוצא מהחדר.
- (4) אם מישהו יצא מהחדר - חזור לצעד 2.
- (5) אחרת - סיים ושלח את הנשארים למונית.

# מכרז מולין-שנקר - אמיתיות

האם מכרז מולין-שנקר הוא אמיתי?

הגדרה: כלל תשלום  $p$  נקרא מונוטוני אם

כשהקבוצה קטנה, התשלום גדל (או שווה):

If  $S \leq T$  then for all  $j$ :  $p(S, j) \geq p(T, j)$

משפט: ההדמיה של מכרז מולין-שנקר עם

כלל-תשלום מונוטוני היא אמיתית.

הוכחה: התשלום של כל הנוסעים הנשארים לא

קטן ← לנוסע שיצא לא כדאי לחזור ←

ההתנהגות האופטימלית של נוסע היא לצאת

אם"ם התשלום הנוכחי גדול מהערך שלו. זה

בדיוק מה שההדמיה עושה כשהוא אמיתי. \*\*\*

# מכרז מולין-שנקר + ערך שאפלי

טוב, אז האם ערך שאפלי הוא מונוטוני?

**הגדרה:** פונקציית עלות נקראת תת-מודולרית אם יש לה עלות שולית פוחתת, כלומר:

If  $S \leq T$ , then  $c(S \cup \{j\}) - c(S) \geq c(T \cup \{j\}) - c(T)$

**משפט:** במשחק עם עלות שולית פוחתת, כלל-התשלום של שאפלי הוא מונוטוני.

**הוכחה:** שחקן א – בקבוצה, שחקן ג – מצטרף. נחשב את ערך שאפלי של שחקן א לפני ואחרי: \* לפני (בלי ג) – ממוצע על  $n!$  סדרים.

\* אחרי (עם ג) – ממוצע של  $(n+1)!$  סדרים:

אם שחקן ג נכנס אחרי א – הערך שווה.

אם שחקן ג נכנס לפני א – הערך קטן או שווה. \*\*\*

# מכרז מולין-שנקר + ערך שאפלי

**יתרונות:**

- מאוזן תקציבית;
- הוגן;
- אמיתי (אם יש עלות שולית פוחתת).

**חסרון:**

- לא יעיל פארטו.
- הוכחה: שיעורי בית.

# מכרז למתן שירות – טְרִילָמָה

אמיתי	מאוזן תקציבית	יעיל פארטו	
כן	לא	כן	VCG
כן	כן	לא	מולין- שנקר
לא	כן	כן	תשלום = ערך