מטלה שבוע 6:

שאלה 6 :פתרונות מקוריים לבעיית התרמיל

א. הציעו שלושה אלגוריתמים מקוריים)שונים מהאלגוריתמים שנלמדו בכיתה(והגיוניים לפתרון בעיית התרמיל.

(1) שימוש באלגוריתם החמדני א+ב רק שנוסיף להם את האילוץ (החמדני) הבא:
נמיין את ה"פריטים" גם לפי המשקל שלהם ולא רק לפי הערך שלהם או הערך חלקי המשקל,
ונבדוק עבור איזה אלגוריתם קיבלנו את הערך הגבוה ביותר (חמדני א' ,ב' או ג').
זה טוב במיוחד כאשר הפריטים בעלי ערכים כמעט שווים ככה מה שהוא שוקל פחות בעצם מועיל לנו יותר. בנוסף זה פותר לנו את הבעיה שבגללה האלגוריתם הקודם נפל:
$54/52k , $52/51k, $49/49k
אם נשתמש באלגוריתם שלנו נקבל שעבור אלגוריתמים א' או ב' נצטרך להכניס לתיק $54
אבל לפי האלגוריתם החמדני ג' הערך עבור $52 ו- $49 גדול יותר.

(2) נשתמש במרחק מהתוחלת(מהממוצע): נחשב את ממוצע הערכים חלקי המשקל :

$$\frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{w_i} = \text{AVG}$$

ונמיין את הפריטים לפי כמה הם רחוקים מהממוצע שקיבלנו (בערך מוחלט):

$$1 \le i \le n\,, \qquad Sort\left(\left|AVG - \frac{v_i}{w_i}\right|\right)$$

לפי המיון נדחוף לתיק עד שלא יישאר מקום להכניס עוד, ואם הגענו לערך שהוא גדול מידי מכדי שנוכל להכניס אותו נמשיך הלאה עד שיתמלא לנו התיק, במידה ויש לנו שני ערכים (ולא ניתן להשתמש בממוצע במקרה כזה) ניקח את הפריט עם הערך הגדול יותר.
אלגוריתם זה עובד גם במקרה שבו **נפלו** האלגוריתמים החמדניים א', ב' ו- א'+ב'.
ב-ב' קל לראות שזה מתקיים כי יש רק שני פריטים, ב-א' זה מתקיים כי הממוצע יותר קרוב ל- 20/1 כי הם מהווים יותר כוח מה- 100/100.
ובמקרה השלישי זה מתקיים גם כן:

$$AVG = \frac{\frac{54}{52} + \frac{52}{51} + \frac{49}{49}}{3} \approx 1.019356$$

$$\left|1.019356 - \frac{54}{52}\right| \approx 0.190\ldots$$

$$\left|1.019356 - \frac{52}{51}\right| \approx 0.000251$$

$$\left|1.019356 - \frac{49}{49}\right| \approx 0.193\ldots$$

לכן יצא לנו מהמיון :

$$\frac{52}{51},\frac{54}{52},\frac{49}{49}$$

בהתחלה ניקח את ה-$52 אח"כ ננסה לקחת את $54 ונגלה שאין מקום להכניס אותו אז נמשיך לפריט הבא שערכו $49 ולו כן יהיה לנו מקום בתיק.

(3) אלגוריתם 3:
נחלק לקבוצות לפי המשקל של כל אחד מהפריטים, ונמיין את הקבוצות מבחוץ (לפי משקל), ובתוך כל קבוצה לפי ערך (בסדר יורד).
נחבר את האיברים בצורה הבאה: ניקח את האיבר הראשון מהקבוצה הראשונה ונחבר אותו לאיבר הראשון מהקבוצה האחרונה, במידה ואפשר להכניס עוד איבר נוסיף עוד איבר מהקבוצה של הקטנים (השני בערכו). במקביל נעשה שילוב מהקבוצה השנייה במשקלה עם הקבוצה השנייה בתת-משקלה באותו אופן, וכן הלאה וכן הלאה.
דוגמא:

$$\frac{10}{1},\frac{4}{1},\frac{30}{98},\frac{54}{55},\frac{48}{45},\frac{100}{98}$$

אזי הקבוצות יתחלקו כך:

$$\overbrace{\frac{10}{1},\frac{4}{1}}\quad\overbrace{\frac{48}{45}}\quad\overbrace{\frac{54}{55}}\quad\overbrace{\frac{100}{98},\frac{30}{98}}$$

התיק יתמלא או מ- 10+4+100 או מ- 54+48
לכן ,משום שזה הסכום הגדול יותר, התיק ימלא מ- $10+$4+$100

ב. עבור כל אלגוריתם שמצאתם בסעיף א, תנו דוגמה למשקלים וערכים, המראה שהאלגוריתם אינו אופטימלי.

(1) האלגוריתם הראשון שהצגנו יפול בבעיה הבאה:

$$\frac{52}{51},\frac{54}{52},\frac{49}{49},\frac{30}{30}$$

לפי חמדני א' אנחנו אמורים לקחת את $54 ו- $30 אבל המקסימום הוא $49+$52
וכנ"ל לפי חמדי ב' היינו אמורים לקחת גם את $54 ו- $30,
ולפי חמדני ג' היינו אמורים בכלל לקחת את $49+$30.

(2) האלגוריתם השני ייפול ב-

$$\frac{1}{100},\frac{3}{100},\frac{100}{100}$$

לפי האלגוריתם נצטרך לקחת את מה שהכי קרוב לממוצע, לכן המיון שלנו יהיה כך:

$$\frac{3}{100},\frac{1}{100},\frac{100}{100}$$

נצטרך לקחת את $3 למרות שהמקסימום הוא $100

(3)האלגוריתם השלישי ייפול במקרה הבא:

$$\overbrace{\frac{10}{1},\frac{4}{1}},\overbrace{\frac{48}{45},\frac{4}{45}},\overbrace{\frac{3}{98}}$$

היינו יכולים לקבל $58 אם היינו לוקחים את $48+$10, אבל לפי האלגוריתם קיבלנו $4+$48.

ג. עבור אחד האלגוריתמים שמצאתם בסעיף א, חשבו את כלל-התשלומים של מאירסון .
הערה: משקלי החפצים יכולים להיות מספרים ממשיים חיוביים כלשהם (לא דווקא מספרים שלמים.)

נחשב עבור האלגוריתם הראשון (השילוב בין השלושה):
החישוב כלל-השלומים של האלגוריתם הוא כמו החישוב במקרה של אלגוריתמים חמדניים א'+ב' כי לשחקן אין אפשרות לשקר בנוגע למשקל שלו(המשקל ידוע), וכפי שראינו לא משתלם לשקר בנוגע לערכים.
דוגמא:

$$\frac{100}{100},\frac{20}{2},\frac{20}{2}$$

לפי האלגוריתם המנצח הוא $100 (אלגוריתם חמדני א' מניב את הסכום הגדול ביותר), והוא יצטרך לשלם (כדי שלא ינצחו האלגוריתמים האחרים), לפחות 40: אם הוא יבקש פחות מארבעים- אלגוריתם ב' ינצח את א' והסכום המקסימלי יהיה $20+$20, לכן ,כדי שהוא ימשיך לנצח, ובמקביל לשלם כמה שפחות, הוא צריך לשלם לפחות ארבעים.

דוגמא ב':

$$\frac{100}{100},\frac{60}{2},\frac{50}{2}$$

המנצחים הם שני האחרונים(לפי אלגוריתם ב' או ג'), אבל התשלום שלהם יהיה:
1) אם השחק שערכו 60 היה מעריך פחות מחמישים, אזי שאלגוריתם א' יניב סכום גבוה יותר. לכן הוא יצטרך לשלם $50
2) אם השחקן שערכו 50 היה מעריך מתחת לארבעים ,כנ"ל אלגוריתם א' היה מנצח והסכום המקסימלי היה 100, לכן הוא צריך לשלם $40