

## מטלה - חלוקת עלויות ומכרזי שירות

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

### שאלה 1: אלגוריתם אקראי לחישוב ערך שאפלי

כזכור, כשמספר השחקנים גדול, חישוב ישיר של ערך שאפלי עלול לקחת הרבה זמן. אחד הפתרונות הוא לחשב את ערך שאפלי בקירוב, ע"י האלגוריתם האקראי הבא:

- חזור הרבה פעמים:

- בחר פרמוטציה אקראית  $P$

- חשב את העלויות השוליות של כל השחקנים בפרמוטציה  $P$

- חשב את הממוצע של כל העלויות השוליות בחישובים הקודמים.

א. כיתבו תוכנית בפייתון המבצעת את האלגוריתם האקראי הנ"ל.

ב. בידקו את התוכנית שלכם על בעיה כלשהי עם 3 שחקנים (למשל אחת הבעיות שפתרנו בשיעור). עד

כמה התוצאות קרובות לתוצאות המדויקות?

ג. בידקו את התוכנית שלכם על בעיה כלשהי של עלות מסלול-המראה, עם 30 שחקנים. עד כמה התוצאות

קרובות לתוצאות המדויקות?

### שאלה 2: חלוקת עלות נסיעה לאוניברסיטה

שאלה זו מיועדת לצוותים עם 3 חברים ומעלה (אפשר להתחבר עם צוות נוסף לצורך השאלה).

א. לכל אחד מחברי הצוות, חשבו בקירוב את עלות הנסיעה במונית מהבית לאוניברסיטה. לצורך החישוב

אפשר להשתמש ב-Google Maps. אם אתם לא מצליחים לחשב עלות מדויקת, חשבו את זמן

הנסיעה לפי Waze והכפילו בעלות נסיעה במונית לפי מונה.

ב. חשבו את עלות הנסיעה כאשר כל חברי הצוות נוסעים יחד, במסלול הקצר ביותר העובר דרך כולם.

ג. חשבו כמה כל אחד יצטרך לשלם לפי ערך שאפלי. האם זה משתלם?

### שאלה 3: איחוד מפלגות

[נכתב לקראת הבחירות לכנסת, אדר א ה'תשע"ט]

שלוש מפלגות קטנות שוקלות להתאחד למפלגה אחת לקראת הבחירות, אבל הן לא מצליחות להסכים על

קביעת המקומות ברשימה המשותפת. סקרי דעת-קהל אמינים מראים ש:

- כל אחת מהמפלגות לא עוברת את אחוז החסימה כשהיא רצה לבד.

- המפלגה המאוחדת מקבלת 10 מנדטים.

- אם רק מפלגות א+ב מתאחדות, הן מקבלות 4 מנדטים; ב+ג - 5 מנדטים, ג+א - 6 מנדטים.

עיצרו למפלגות למצוא פתרון הוגן לחלוקת המקומות בעשיריה הראשונה.

## שאלה 4: ערך שאפלי-שיוויוני

בסקרי דעת-קהל שנעשו לאחרונה, התברר שאנשים רבים נוטים לתמוך בכלל-התשלום הבא, שנקרא "שאפלי-שיוויוני" (egalitarian-Shapley):

- חשב את ערך שאפלי של כל שחקן;
- חשב את העלות הממוצעת לכל שחקן (העלות הכוללת / מספר השחקנים);
- גבה מכל שחקן את הממוצע בין א לבין ב (לדוגמה, אם העלות הכוללת 66, יש שלושה שחקנים, וערך שאפלי שלך הוא 32, אז התשלום שלך יהיה הממוצע בין 66/3 לבין 32, כלומר 27).

הוכיחו שכלל-התשלום הזה מקיים בדיוק שני עקרונות מתוך שלושת העקרונות של שאפלי.

מדוע לדעתכם לא מתקיים העקרון השלישי?

## שאלה 5: בעיית מסלול-ההמראה ובעיית שיתוף-הנסיעות

הראו שאפשר להגיע לנוסחה של התשלומים בבעיית מסלול-ההמראה, מתוך הנוסחה של התשלומים בבעיית שיתוף-הנסיעות עם סדר הורדה קבוע (כלומר בעיית מסלול-ההמראה היא מקרה פרטי של בעיית שיתוף-הנסיעות).

## שאלה 6: אלגוריתמים אמיתיים לבחירת הנוסעים

עד עכשיו הנחנו שכל השחקנים משתתפים בנסיעה. עכשיו, נניח שכל שחקן  $i$  מפיק מהנסיעה תועלת של  $V_i$ , ואם הנסיעה יקרה יותר – הוא לא רוצה בכלל לנסוע. אנחנו רוצים לבחור תת-קבוצה של שחקנים, כך שסכום הערכים הכולל (= סכום הערכים של הנוסעים פחות עלות הנסיעה) הוא הגדול ביותר.

א. בחרים את הנוסעים בעזרת אלגוריתם וק"ג. הראו דוגמה שבה האלגוריתם לא מאוזן תקציבית (סכום התשלומים לא מכסה את עלות הנסיעה).

ב. מחליטים מראש, שעלות הנסיעה תתחלק בין הנוסעים לפי ערך שאפלי, ואז בחרים את הנוסעים בעזרת אלגוריתם וק"ג. הראו דוגמה שבה האלגוריתם לא מעודד-השתתפות (יש נוסע שהתועלת שלו שלילית).

ג. בחרים את הנוסעים בעזרת אלגוריתם וק"ג, ואם צריך עוד כסף כדי לכסות את עלות הנסיעה – גובים אותו מהנוסעים באופן שיוויוני. הראו דוגמה שבה האלגוריתם לא מגלה-אמת.