מכרזים למיקסום רווח
Revenue-Maximizing Auctions

אראל סגל-הלוי

מקורות:
הקורס של טים, הרצאה 5 והלאה:
http://theory.stanford.edu/~tim/f13/f13.html

מיקסום רווח לעומת מיקסום סכום ערכים

נניח שאנחנו מוכרים *חפץ אחד* ויש *קונה אחד*.

איזה מכרז ממקסם את סכום הערכים?
- זה קל – נותנים לו את החפץ בחינם.

איזה מכרז ממקסם את הרווח של המוכרים?
- זה קשה – תלוי בערך של השחקן!

במקום למקסם רווח – ננסה למקסם **תוחלת** רווח.
- זה דורש מידע סטטיסטי על ערכים של שחקנים ("סקר שוק").

מיקסום רווח – חפץ אחד וקונה אחד

דוגמה: סקר-שוק הראה שערכי-הקונים מתפלגים אחיד בין 10 ל-30. מה תוחלת-הרווח של מכרז מיירסון? - תלוי בכלל הבחירה:

- בכלל-הבחירה "מקסם את סכום הערכים": ערך-הסף=0, התשלום=0, תוחלת הרווח=**0**.
- בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם"ם הערך שלו לפחות 10": ערך-הסף=10, הקונה תמיד נבחר (בהסתברות 1) ותמיד משלם, תוחלת הרווח=**10**.
- בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם"ם הערך שלו לפחות 15", ערך-הסף=15, הקונה נבחר בהסתברות 3/4, תוחלת הרווח =3/4*15 = **11.25**.

מיקסום רווח – חפץ אחד וקונה אחד

דוגמה: סקר-שוק הראה שערכי-הקונים מתפלגים אחיד בין 10 ל-30. מה תוחלת-הרווח של מכרז מיירסון? - תלוי בכלל הבחירה:

- בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם"ם הערך שלו לפחות p", ערך-הסף=p, הקונה נבחר בהסתברות:
- $(30-p)/(30-10)$
- ותוחלת הרווח היא:

$$E[\text{Revenue}(p)] = p * \text{Prob}[v > p]$$
$$= p * (30-p)/(30-10)$$

derivative by p $= (30-2p)/20 \rightarrow \boldsymbol{p_{opt} = 15}$

מיקסום רווח – חפץ אחד וקונה אחד

הכללה: נניח שאספנו נתונים סטטיסטיים על ערכי קונים, והגענו למסקנה שהם מתפלגים כ:

Prob[v<p] = F(p)

איזה מחיר ממקסם את תוחלת הרווח?

$$\mathrm{E}[\mathrm{Revenue}(p)] = p \cdot \mathrm{Prob}[v > p] = p \cdot [1 - F(p)]$$

$$'p = 0 \iff p - \frac{1-F(p)}{F'(p)} = 0$$

נגדיר את **פונקציית הערך הוירטואלי**:

$$r(v) := v - \frac{1 - F(v)}{F'(v)}$$

המכרז האופטימלי הוא: **מכור אם"ם *r(v)>0***.

מיקסום רווח בשיטת מיירסון - כללי

נתון: *שוק חד-פרמטרי:*

- לכל משתתף יש ערך כספי **יחיד** ל"היבחרות".
- הערך של משתתף j לקוח מההתפלגות F_j.
  - *(למה התפלגות שונה לכל משתתף? למשל מאפיינים דמוגרפיים).*

דרושים:

- כלל-בחירה לבחירת תת-קבוצה של משתתפים.
- כלל-תשלומים שאיתו כלל-הבחירה אמיתי.

כזכור, לפי משפט מיירסון, ברגע שיש **כלל-בחירה** – יש **כלל-תשלומים** יחיד שאיתו הכלל אמיתי.

נחפש כלל-בחירה שממקסם את תוחלת הרווח.

מיקסום רווח בשיטת מיירסון - כללי

לכל כלל-תשלומים *p*, תוחלת הרווח היא:

$$E[\text{Revenue}(v_1,\ldots,v_n)] \quad = E[\sum_{j=1}^{n} p_j(v_1,\ldots,v_n)]$$

לפי משפט מיירסון, כלל-התשלומים הוא פונקציה
של כלל-הבחירה *c*. אם מציבים, מקבלים:

$$E[\text{Revenue}(v_1,\ldots,v_n)] \quad = E[\sum_{j=1}^{n} c_j(v_1,\ldots,v_n)\cdot r_j(v_j)]$$

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.
מסקנה: כדי למקסם רווח, צריך למצוא כלל-בחירה
אשר **ממקסם את סכום הערכים הוירטואליים**.

מיקסום רווח בשיטת מיירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F_j'(v)}$$

א. קונה אחד:

תוחלת הרווח = הערך הוירטואלי = *r(v)*.

כלל-הבחירה הוא: מכור אם-ורק-אם *r(v)>0*.

*** *הכלל אמיתי בתנאי ש-r היא פונקציה עולה.*

התשלום הוא ערך-הסף = $r^{-1}(0)$.

מיקסום רווח בשיטת מיירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F_j'(v)}$$

ב. הרבה קונים מאותה התפלגות *F* ועם אותו *r*:

(נניח ש-r פונקציה עולה).

תוחלת הרווח = $r(v_j)$ של המנצח.

כלל-הבחירה הוא: מכור למשתתף עם v_j הכי גבוה,

בתנאי ש $r(v_j)>0$.

התשלום הוא ערך-הסף: הערך השני בגובהו

או $r^{-1}(0)$ - הגבוה מביניהם.

--- שקול למכרז ויקרי עם מחיר מינימום $r^{-1}(0)$!

מיקסום רווח בשיטת מיירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F'_j(v)}$$

ג. שני קונים עם התפלגויות שונות:

תוחלת הרווח = $r_j(v_j)$ של המנצח.

כלל-הבחירה הוא: מכור למשתתף עם $r_j(v_j)$ הכי גבוה,

בתנאי ש $r_j(v_j)>0$. התשלום = ערך-הסף.

דוגמה: F_b=Unif[20,40], F_a=Unif[10,30].

$r_a(v) = 2v-30,\qquad r_b(v) = 2v-40.$

*אם a אמר **23** ו-b אמר **27**, אז a יזכה! וישלם את ערך-הסף שלו שהוא **22** [ערך הסף של b הוא **28**].*

מיקסום רווח במערכת הפירסום של יאהו *

- עד 2008, יאהו השתמשה במחירי-מינימום נמוכים וזהים עבור כל מילות-החיפוש.
- ב-2008 בוצע מחקר סטטיסטי שנועד להעריך את ההתפלגות *F* עבור כל מילה בנפרד.
- חושב מחיר-מינימום שונה עבור כל מילה.
- המנהלים לא הסכימו להשתמש במחירים החדשים אלא עשו ממוצע בין הישנים לחדשים.
- **התוצאה**: עליה גדולה ברווחים בסוף 2008.

* http://theory.stanford.edu/~tim/f13/l/l6.pdf
* Ostrovsky, Michael, and Michael Schwarz. "Reserve prices in internet advertising auctions: A field experiment." Proceedings of the 12th ACM conference on Electronic commerce. ACM, 2011.