

אלגוריתמים מגלי-אמת מתקדמים

Advanced Truthful Algorithms

אראל סגל-הלוי

בעיית התרמיל (knapsack)

- נתון תרמיל המסוגל לשאת עד 100 ק"ג (= 100 שניות המיועדות לפירסום).
- נתונים חפצים עם משקלים שונים וערכים שונים (= לכל מפרסם יש מודעה באורך אחר וערך אחר).
- צריך למלא את התרמיל בחפצים במשקל כולל עד 100, כך שסכום הערכים גבוה ככל האפשר (= צריך למלא את הזמן בפרסומות באורך כולל עד 100, כך שסכום הערכים גבוה ככל האפשר).
- הבעיה היא NP-קשה, אבל יש לה אלגוריתמי-קירוב טובים.

אלגוריתמי קירוב למילוי תרמיל

אלגוריתם חמדני א:

- סדר את החפצים בסדר יורד של הערך.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

הקירוב עלול להיות גרוע (גודל התרמיל = 100):

\$100/100k, \$20/2k, \$20/2k, \$20/2k ...

אלגוריתמי קירוב למילוי תרמיל

אלגוריתם חמדני ב:

- סדר את החפצים בסדר יורד של ערך/משקל.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

הקירוב עלול להיות גרוע:

\$3/2k, \$100/100k.

"טובים השנים מן האחד

אֲנֹכִי יֵשׁ לָהֶם שָׂכָר טוֹב בְּעַמְלָם" (קהלת ד 9)

אלגוריתם א+ב: הפעל את שני האלגוריתמים
החמדניים. בחר את התוצאה עם הסכום הגבוה.

משפט: אלגוריתם א+ב נותן קירוב $1/2$ (=משיג לפחות
 $1/2$ מהערך הגבוה ביותר האפשרי).

הוכחה: נניח שאלגוריתם ב עוצר אחרי k חפצים.
עם החפץ ה- $k+1$ – הסכום הוא מקסימלי++.
הסכום של אלגוריתם א הוא לפחות החפץ ה- $k+1$.
--< הסכום של אלגוריתמים א+ב מקסימלי++.
--< הסכום של א או ב הוא מקסימלי++ $\setminus 2$.

אלגוריתם אמיתי למילוי תרמיל

אלגוריתם $A+B$ ללא תשלומים הוא לא אמיתי.

האם אלגוריתם $A+B$ עם תשלומי VCG הוא אמיתי?

דוגמה:

\$54/52k, \$52/51k, \$49/49k.

הראשון זוכה ומשלם \$101.

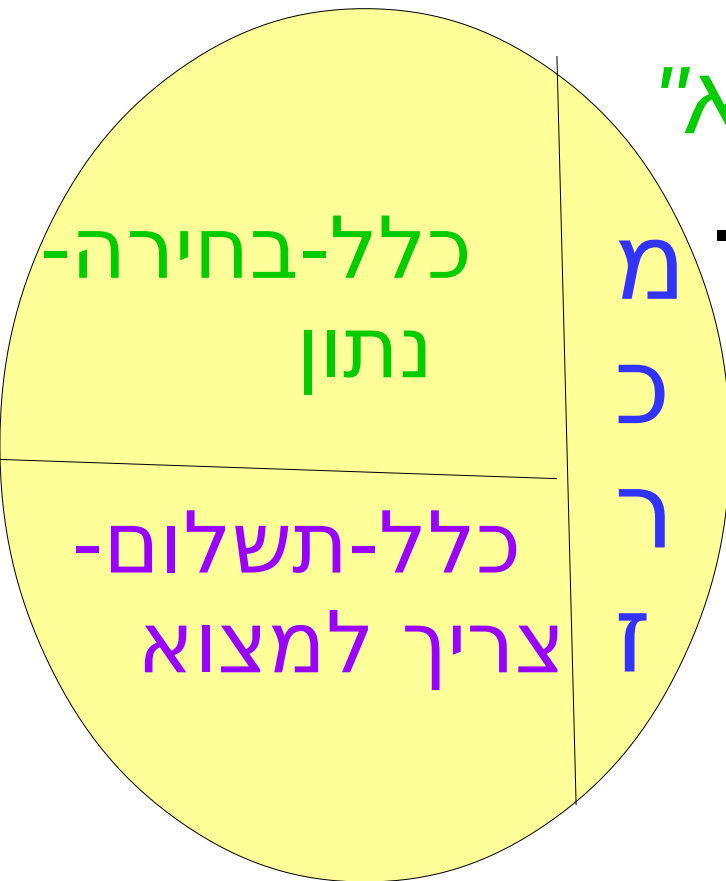
--< האלגוריתם לא אמיתי.

איפה ההוכחה "נופלת"?

מכרז מיירסון (Myerson)

נתונים:

- כלל-בחירה הקובע לכל משתתף אם נבחר או לא:
- "בחר את השלושה עם הערכים הגבוהים"
- "בחר את כל מי שערכו גדול מ-10"
- "בחר את המסלול הזול ביותר"
- "בחר בעזרת אלגוריתם חמדני א"
- לכל משתתף יש ערך ל"היבחרות".



דרוש: כלל-תשלום,

שאיתו המכרז יהיה אמיתי.

האם לכל כלל-בחירה קיים
כלל-תשלום אמיתי?

כלל-בחירה מונוטוני

הגדרה: כלל-בחירה נקרא *מונוטוני* אם, עבור כל i , ההסתברות ש- i נבחר היא פונקציה עולה של v_i .

• כלל-בחירה *דטרמיניסטי* הוא מונוטוני אם עבור כל i , אם הוא נבחר כשהערך שלו x , אז הוא נבחר גם כשהערך שלו הוא כל מספר הגדול מ- x .

דוגמאות לכללים מונוטוניים:

- בחר את 3 הערכים הגדולים ביותר.
- בחר את הערך הגדול ביותר, בתנאי שהוא מעל 10.
- בחר בעזרת אלגוריתם חמדני $a / b / a + b$.

דוגמאות לכללים לא מונוטוניים:

- בחר את הערך השני מלמעלה.
- בחר את הערך הגדול ביותר, אם הוא מתחת ל-7.

משפט מיירסון

משפט מיירסון: מונוטוניות היא תנאי הכרחי ומספיק לאמיתיות. כלומר:

(א) **לכל כלל-בחירה לא-מונוטוני - אין כלל-תשלום אמיתי.**

(ב) **לכל כלל-בחירה מונוטוני - קיים כלל-תשלום אמיתי.**

(ג) **אם כל שחקן שלא נבחר – לא משלם, אז כלל-התשלום הוא יחיד.**

בשקפים הבאים:

- נוכיח את משפט מיירסון.
- נגדיר במדויק את כלל-התשלומים.

הוכחת משפט מיירסון

סימונים:

- כלל-הבחירה – c - פונקציה המקבלת כקלט את הערכים של כל המשתתפים, ומחזירה וקטור בינארי ($= 1$ "נבחרת!", $= 0$ "לא נבחרת."). c נתון וקבוע.
- כלל התשלום – p - פונקציה המקבלת כקלט את הערכים של כל המשתתפים, ומחזירה וקטור מספרי של תשלומים. את p אנחנו מחפשים.

הוכחת משפט מיירסון - המשך

התועלת של משתתף עם ערך v שאומר x היא:

$$v * c(x) - p(x)$$

במכרז אמיתי, חייב להתקיים, לכל v, x :

$$v * c(v) - p(v) \geq v * c(x) - p(x)$$

התועלת של משתתף עם ערך x שאומר v היא:

$$x * c(v) - p(v)$$

במכרז אמיתי חייב להתקיים, לכל v, x :

$$x * c(x) - p(x) \geq x * c(v) - p(v)$$

מחברים את המשוואות ומקבלים:

$$v * [c(v) - c(x)] \geq p(v) - p(x) \geq x * [c(v) - c(x)]$$



הוכחת משפט מיירסון - המשך

נתון: כלל-בחירה c . דרוש: כלל-תשלום אמיתי p :

$$v[c(v)-c(x)] \geq p(v)-p(x) \geq x[c(v)-c(x)]$$

מצב א: $c(v)=c(x)$

$$0 \geq p(v)-p(x) \geq 0$$

מכאן: $p(v)=p(x)$ - התשלום על בחירה לא תלוי בערך.

מצב ב: $c(v)>c(x)$, כלומר $c(v)=1$ וגם $c(x)=0$:

$$v \geq p(v)-p(x) \geq x$$

מכאן: $v>x$ – הפונקציה c חייבת להיות מונוטונית.

*** הוכחנו את חלק (א) של משפט מיירסון.

משפט מיירסון – ערך הסף

לפונקציית-בחירה מונוטונית יש ערך סף =
הערך שבו הפונקציה c מתחלפת מ-0 ל-1.

- ערך-הסף יכול להיות שונה משחקן לשחקן. דוגמאות:
- אם הכלל הוא "בחר את כל הערכים הגדולים מ-10", אז ערך-הסף לכל השחקנים הוא 10.
 - אם הכלל הוא "בחר את הערך הגבוה ביותר", אז ערך-הסף של הנבחר הוא המחיר השני.
 - אם הכלל הוא "הרץ אלגוריתם חמדני ב", אז ערך-הסף של כל שחקן יהיה תלוי במשקל שלו.

הוכחת משפט מיירסון - המשך

נתון: כלל-בחירה c . דרוש: כלל-תשלום אמיתי p :

$$v[c(v)-c(x)] \geq p(v)-p(x) \geq x[c(v)-c(x)]$$

נשים את x קצת מתחת ל"סף" ואת v קצת מעל ל"סף", ונקבל:

$$v \geq p(v)-p(x) \geq x$$

מכאן: $p(v)-p(x)$ חייב להיות שווה לערך הסף.

מכאן: אם שחקן שלא נבחר – לא משלם ($p(x)=0$), אז כלל התשלום הוא יחיד.

*** הוכחנו את חלק (ג) של משפט מיירסון.

הוכחת משפט מיירסון - סיום

מצאנו כלל-תשלום אחד ויחיד המועמד להיות אמיתי:

- לכל שחקן i יש ערך-סף מסויים t_i . נקבע לפי c .
- אם $v_i > t_i$, אז השחקן נבחר ומשלם t_i .
- אחרת, השחקן לא נבחר ולא משלם.

הוכחה שכלל-תשלום זה הוא אמיתי:

- אם נבחרת ותכריז מעל t_i , או לא נבחרת ותכריז מתחת ל t_i - כלום לא ישתנה.
- אם נבחרת, ותכריז מתחת ל- t_i - לא תיבחר, והתועלת שלך תהיה 0, אבל קודם התועלת שלך היתה חיובית (כי $v_i > t_i$).
- אם לא נבחרת, ותכריז מעל t_i - תיבחר ותשלם t_i , והתועלת שלך תהיה שלילית (כי $v_i < t_i$). ***

מכרז מיירסון למילוי תרמיל

הנחה: המשקל של כל משתתף ידוע. כל משתתף צריך להגיד רק את הערך שלו.

אלגוריתם חמדני א:

- סדר את החפצים בסדר יורד של הערך.
 - בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.
- $\$100/100k, \$20/2k, \$20/2k, \$20/2k \dots$
- הראשון נבחר ומשלם את ערך הסף שלו - $\$20$.

אלגוריתם חמדני ב:

- סדר את החפצים בסדר יורד של ערך/משקל.
 - בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.
- $\$20/2k, \$5/1k, \$98/98k$.

שני הראשונים נבחרים:

הראשון משלם $\$2$, השני משלם $\$1$.

מכרז מיירסון למילוי תרמיל

• אלגוריתם א+ב: הפעל את שני האלגוריתמים החמדניים. בחר את התוצאה עם הסכום הגבוה.

\$54/52k, \$52/51k, \$49/49k.

הראשון זוכה ומשלים: $(52k/51k) * \$52$

\$100/100k, \$20/2k, \$20/2k.

הראשון זוכה ומשלים \$40.

\$100/100k, \$60/2k, \$50/2k.

שני האחרונים זוכים ומשלים: ?

ויקרי-קלארק-גרובס לעומת מיירסון

מיירסון	וק"ג	
אחד (הערך ל"היבחרות")	הרבה (למשל: בחירת מסעדה)	פרמטרים לכל משתתף
כל כלל מונוטוני (למשל: קירוב בעיית התרמיל, מיקסום רווח)	מיקסום סכום ערכים	כלל בחירה

שאלה פתוחה

- האם יש אלגוריתם אמיתי המשלב את
היתרונות של וק"ג ומיירסון, כלומר:
- עובד עם שחקנים רב-פרמטריים,
 - עובד גם בלי למקסם את סכום הערכים

?