1.12.2019

אלגוריתמים כלכליים – תרגיל 5

מגישים: אייל שחימוב 323926147, שלו גולדשטיין 212210280

שאלה 2

סעיף א'

צריך להוכיח: כאשר יש שני מקומות או יותר, מכרז GSP אינו אמיתי.

הוכחה: נראה מקרה בו יש שני מקומות, בו מכרז GSP אינו אמיתי, וזה יספיק להוכיח את הטענה.

יהיו שיעורי ההקלקה הבאים: $r_1 = 0.5,\ r_2 = 0.4$,

ויהיו שלושה מפרסמים עם הערכים: $v_1 = 20,\ v_2 = 15,\ v_3 = 10$.

במכרז GSP כידוע, המפרסם ה-k משלם את המחיר של המפרסם ה-$k + 1$.

נתבונן במפרסם הראשון (v_1):

אם המפרסם הראשון אמיתי, הוא יגלה את הערך האמיתי 20 ויזכה במקום הראשון במכרז. במקרה זה הוא ישלם את המחיר השני בגובהו 15, כלומר התועלת שלו תהיה $(v_1 - v_2) \cdot r_1 = (20 - 15) \cdot 0.5 = 2.5$.

אחרת, אם המפרסם הראשון לא אמיתי, הוא יוכל לגלות את הערך 14 למשל, ויזכה במקום השני במכרז. במקרה זה הוא ישלם את המחיר השלישי בגובהו 10, כלומר התועלת שלו תהיה $(v_1 - v_3) \cdot r_2 = (20 - 10) \cdot 0.4 = 4$.

במקרה זה ניתן לראות כי עדיף למפרסם הראשון לא לחשוף את ערכו האמיתי, ולכן כאשר יש שני מקומות או יותר, מכרז GSP אינו אמיתי.

סעיף ב'

צריך להוכיח: התשלומים במכרז GSP תמיד גבוהים לפחות כמו התשלומים במכרז VCG.

הוכחה:

התשלום של מפרסם i עבור הקלקה במכרז GSP:

$$v_{i+1}$$

נחשב את התשלום של מפרסם i עבור הקלקה במכרז VCG:

הסכום של כל המפרסמים אם המפרסם ה-i לא משתתף:

$$v_1 \cdot r_1 + \cdots + v_{i-1} \cdot r_{i-1} + v_{i+1} \cdot r_i + \cdots + v_k \cdot r_{k-1} + v_{k+1} \cdot r_k$$

הסכום של כל שאר המפרסמים ללא המפרסם ה-i:

$$v_1 \cdot r_1 + \cdots + v_{i-1} \cdot r_{i-1} + v_{i+1} \cdot r_{i+1} + \cdots + v_k \cdot r_k$$

ההפרש בין הסכומים:

$$v_{i+1} \cdot r_i + \cdots + v_k \cdot r_{k-1} + v_{k+1} \cdot r_k - v_{i+1} \cdot r_{i+1} - \cdots - v_k \cdot r_k =$$
$$= v_{i+1} \cdot (r_i - r_{i+1}) + \cdots + v_k \cdot (r_{k-1} - r_k) + v_{k+1} \cdot r_k$$

המשך בעמוד הבא...

<u>המשך סעיף ב'</u>

התשלום עבור הקלקה:

$$\frac{v_{i+1}\cdot(r_i-r_{i+1})+\cdots+v_k\cdot(r_{k-1}-r_k)+v_{k+1}\cdot r_k}{r_i}$$

כעת נראה כי התשלום במכרז GSP גבוה לפחות כמו התשלום במכרז VCG:

$$\frac{v_{i+1}\cdot(r_i-r_{i+1})+\cdots+v_k\cdot(r_{k-1}-r_k)+v_{k+1}\cdot r_k}{r_i}\leq$$

$$\leq\frac{v_{i+1}\cdot(r_i-r_{i+1})+\cdots+v_{i+1}\cdot(r_{k-1}-r_k)+v_{k+1}\cdot r_k}{r_i}=$$

$$=\frac{v_{i+1}\cdot r_i}{r_i}=v_{i+1}$$

אכן

$$\frac{v_{i+1}\cdot(r_i-r_{i+1})+\cdots+v_k\cdot(r_{k-1}-r_k)+v_{k+1}\cdot r_k}{r_i}\leq v_{i+1}$$

וסיימנו.