אלגוריתמים למיקסום רווח

מכרזים בשיטת מאירסון - חזרה על השיעור הקודם

רוג'ר מאירסון (Roger Myerson) פיתח שיטה כללית לבניית מנגנונים. השיטה עובדת בכל מקרה שבו יש קבוצה של שחקנים שצריך לבחור חלק מהם, ולכל אחד מהם יש ערך שונה ל"היבחרות".

השלב הראשון בשיטה הוא לקבוע **כלל-בחירה**. כלל-בחירה הוא אלגוריתם שהקלט שלו הוא הערכים של כל אחד מהשחקנים, והפלט שלו הוא קבוצת השחקנים הנבחרים. הנה כמה דוגמאות לכללי-בחירה:

- בחר את השחקן עם הערך הגבוה ביותר (- כמו מכרז על חפץ אחד).
- בחר את שלושת השחקנים עם הערך הגבוה ביותר (- כמו מכרז על שלושה חפצים זהים).
- בחר את השחקן עם הערך הגבוה ביותר אם הוא מעל 10; אחרת אל תבחר אף אחד (- מכרז על חפץ אחד עם מחיר מינימום).
- אם הערך של השחקן הראשון מעל 20 - בחר אותו; אחרת, אם הערך של השחקן השני מעל 10 - בחר אותו; אחרת אל תבחר אף אחד (- מכרז עם פילוח שוק - מחיר מינימום שונה לכל שחקן).
- בחר שחקנים בעזרת אלגוריתם למילוי תרמיל (בשיעור הקודם ראינו ארבעה אלגוריתמים כאלה; כל אחד מהם מהווה כלל-בחירה בפני עצמו).

כפי שאפשר לראות, כללי-בחירה יכולים להיות פשוטים או מורכבים, סימטריים או לא-סימטריים.

השלב השני בשיטה הוא לקבוע **כלל-תשלומים**. למה צריך את זה? כי בלי תשלומים, רוב כללי-הבחירה לא יהיו אמיתיים - השחקנים לא יגידו לנו מה הערך האמיתי שלהם.

מאירסון גילה, שכדי להפוך כלל-בחירה לאמיתי, דרושים שני תנאים, שהם הכרחיים ומספיקים.

תנאי א: כלל-הבחירה חייב להיות **מונוטוני**. "כלל מונוטוני" הוא כלל שבו כל שחקן שמעלה את הערך שלו, כאשר ערכי כל שאר השחקנים קבועים, מעלה את הסיכוי שלו לזכות (לא ייתכן ששחקן זוכה כשהערך שלו 10, ואז הוא מעלה את הערך שלו ל-15 ומפסיד). בדקו ווזאו שכל הכללים שהזכרנו למעלה הם מונוטוניים. כמה דוגמאות לכללים לא-מונוטוניים הם: "בחר את השחקן עם הערך הנמוך ביותר", "בחר את השחקן עם הערך הגבוה ביותר בתנאי שהוא קטן מ-100", וכו'.

תנאי ב: התשלום הנגבה מכל שחקן חייב להיות שווה ל**ערך הסף** שלו. ערך הסף הוא בדיוק הערך שבו השחקן עובר מהפסד לזכיה. שימו לב: ערך הסף יכול להיות שונה משחקן לשחקן. ערך הסף תלוי גם בכלל הבחירה, וגם בערכים של השחקנים האחרים. הנה כמה דוגמאות:

- אם כלל-הבחירה הוא "בחר את השחקן עם הערך הגבוה ביותר", אז ערך הסף של הזוכה הוא הערך השני בגובהו.
- אם כלל-הבחירה הוא "בחר את השחקן עם הערך הגבוה ביותר בתנאי שהוא מעל 10", אז ערך הסף של הזוכה הוא המקסימום בין הערך השני ל-10 (בפרט, אם יש רק שחקן אחד במכרז, אז ערך הסף שלו הוא 10).
- אם כלל-הבחירה הוא "בחר לפי אלגוריתם למילוי תרמיל", אז צריך לחשב את ערך-הסף בכל מקרה לגופו לפי האלגוריתם, המשקלים והערכים של השחקנים האחרים. דרך פשוטה למצוא את ערך-הסף של שחקן מסויים באופן אינטואיטיבי היא לחשוב מה היה קורה אם הערך שלו היה 0, 1, 2 וכו', ולראות באיזה ערך הוא עובר מהפסד לזכיה (כמובן, הערך לא חייב להיות מספר שלם - זה תלוי בבעיה). יש כמה דוגמאות במצגת.

מיקסום רווח

כאמור השיטה של מאירסון עובדת עבור כל כלל-בחירה שאנחנו רוצים (בתנאי שהוא מונוטוני). עכשיו השאלה היא, איזה כלל-בחירה אנחנו רוצים? ובכן זה תלוי במטרה שלנו. אם אנחנו "מושלים נדיבים", אנחנו רוצים למקסם את הרווחה החברתית - כלומר את סכום הערכים של כולם. במקרה זה, כלל-הבחירה שלנו ינסה לבחור תת-קבוצה שסכום הערכים בה הוא גדול ביותר, ואם בעיית המקסימיזציה היא קשה מדי מבחינה חישובית אז נשתמש בקירוב (כמו בבעיית התרמיל).

אבל אם אנחנו חברה עסקית, ייתכן שהמטרה שלנו היא למקסם את הרווח שלנו - כלומר את סכום התשלומים שמשלמים הזוכים. במקרה זה, כלל-בחירה שממקסם את סכום הערכים לא יביא לנו תוצאות טובות. דוגמה קיצונית: נניח שאנחנו מוכרים חפץ אחד לשחקן אחד. כלל הבחירה שממקסם את סכום הערכים הוא פשוט לתת לו את החפץ. ערך הסף שלו הוא אפס - כי הוא זוכה בכל מקרה. לכן הרווח שלנו יהיה אפס.

האם ישנו כלל-בחירה שממקסם את סכום התשלומים? לפני שנענה צריך להסביר מה בכלל הכוונה ב"מיקסום רווח" - הרי הרווח המירבי תלוי במצב. למשל, אם מוכרים חפץ אחד ויש קונה שהערך שלו 5, אז הרווח המירבי הוא 5 פחות אגורה; אם יש קונה שהערך שלו 10, אז הרווח המירבי היא 10 פחות אגורה; וכו'... כשאנחנו מדברים על "מיקסום רווח", אנחנו מדברים על רווח ממוצע - מה שנקרא בשפה מתימטית "תוחלת הרווח". אנחנו מניחים שיש לנו מידע סטטיסטי כלשהו על התפלגות הערכים של קונים. לדוגמה, נניח שאנחנו מוכרים חפץ אחד לקונה אחד, ואנחנו יודעים לפי סקר-שוק שעשינו, שהערך שלו הוא בין 10 ל-30, עם התפלגות אחידה (סיכוי שווה לכל מספר בין 10 ל-30). עכשיו אפשר לחשב את תוחלת הרווח של כללי-בחירה שונים:

- בכלל-הבחירה "בחר באופן שממקסם את סכום הערכים", ערך-הסף הוא אפס, ולכן התשלום הוא אפס, ולכן תוחלת הרווח היא אפס.
- בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם הערך שלו לפחות 10", ערך-הסף הוא 10, הקונה תמיד נבחר (בהסתברות 1) ותמיד משלם, ולכן תוחלת הרווח היא 10.
- בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם הערך שלו לפחות 20", ערך-הסף הוא 20, הקונה נבחר בהסתברות 1/2 (כי לחצי מכל הקונים יש ערך לפחות 20), ולכן תוחלת הרווח היא $20/2 = 10$.
- בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם הערך שלו לפחות 15", ערך-הסף הוא 15, הקונה נבחר בהסתברות 3/4, ולכן תוחלת הרווח היא $3/4*15 = 11.25$.

כפי שאפשר לראות, כלל-הבחירה קובע באופן חד-משמעי את כלל-התשלומים (לפי משפט מאירסון), ולכן הוא קובע באופן חד-משמעי את תוחלת-הרווח שלנו (עבור התפלגות נתונה של ערכים).

נחזור שוב: ***לכל כלל-בחירה יש תוחלת-רווח***.

האם ישנה נוסחה המאפשרת לדעת מראש, בהינתן כלל-בחירה מסויים, מה תהיה תוחלת-הרווח שלו?

התשובה היא כן, וגם זו המצאה של מאירסון (הוא זכה בפרס נובל לכלכלה בשנת 2007 על כל ההמצאות האלו). ההמצאה הזאת היא מעט מורכבת מבחינה מתימטית ודורשת כמה הגדרות.

כדי להשתמש בנוסחה של מאירסון, אנחנו צריכים לדעת, עבור כל אחד מהשחקנים, מה התפלגות הערך שלו. ההתפלגות יכולה להיות שונה לכל שחקן, למשל, בגלל מאפיינים דמוגרפיים שונים. המפרסמים

באינטרנט יודעים את זה טוב מאד וגם מנצלים את זה - זה נקרא "פילוח שוק". יש הבדל בין התפלגות הערכים של אנשים במקומות שונים בעולם, בין נשים לגברים, בין אנשים במצב משפחתי שונה, וכד'.

אז לכל שחקן i, אנחנו מניחים שידועה לנו פונקציה F_i, המייצגת את התפלגות הערכים שלו, ומוגדרת כך:

$$F_i(x) = Prob[v_i < x]$$

כלומר$F_i(x)$ זה ההסתברות שהערך של קונה אקראי היא קטנה מ-x. שימו לב - הפונקציה הזאת היא 0 עבור מספרים קטנים מאד, ואז עולה בהדרגה עד שהיא מגיעה ל-1 (היא תמיד בין 0 ל-1).

חישוב הפונקציה F_i נעשה ע"י סטטיסטיקאים וסוקרי-שוק. למשל, אם הם רואים שכל הערכים של קונים הם בין 10 ל-30 ויש בערך מספר שווה של קונים בכל אחד מהערכים האלה, אז הפונקציה תהיה:

$$F_i(x) = (x-10)/(30-10) \qquad [30 \geq x \geq 10]$$

(כמובן, עבור $x<10$ ערך הפונקציה 0, ועבור $x>30$ ערך הפונקציה 1 - לא כתבנו את זה כדי לחסוך מקום).

עכשיו, אנחנו יכולים לגזור את הפונקציה הזאת ונקבל פונקציה שנקראת צפיפות הערכים. מקובל לסמן אותה ב $F_i'(x)$ או ב $f_i(x)$. למשל, הנגזרת של הפונקציה הקודמת היא:

$$F_i'(x) = 1/(30-10) \qquad [30 \geq x \geq 10]$$

מאירסון הגדיר את "פונקציית הערך הוירטואלי" (virtual valuation function). באופן הבא:

$$r_i(x) = x - [1-F_i(x)]/F_i'(x)$$

לדוגמה, עבור ההתפלגות הקודמת מקבלים:

$$r_i(x) = 2x-30 \qquad [30 \geq x \geq 10]$$

שימו לב שהערך הוירטואלי קטן מהערך האמיתי (במקרה זה הוא מתחיל במינוס 10 ועולה עד 30).

הפונקציה הזאת היא המפתח לשאלה ששאלנו קודם - איך מקשרים בין כלל-הבחירה לבין תוחלת-הרווח.

בהינתן כלל-בחירה מסויים, אפשר לחשב את סכום הערכים הוירטואליים של השחקנים הנבחרים; הסכום הזה יהיה בדרך-כלל קטן מסכום הערכים האמיתיים שלהם. למשל, אם למכרז שלנו מגיע שחקן שהערך שלו 25, והוא זוכה, אז סכום הערכים הוירטואליים הוא 20. שימו לב - כדי לחשב את סכום הערכים הוירטואליים, אין צורך לחשב את ערכי-הסף ואת כלל-התשלומים - מספיק לדעת את כלל-הבחירה.

מאירסון הוכיח את המשפט הבא:

לכל כלל-בחירה, כאשר התשלומים נקבעים לפי ערכי-הסף,
תוחלת הרווח שווה לתוחלת סכום הערכים הוירטואליים של הנבחרים.

נבדוק את המשפט הזה על כללי-בחירה שראינו קודם:

- בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם הערך שלו לפחות 10", הקונה נבחר בהסתברות 1. הערך הוירטואלי שלו מתפלג אחיד בין 10- לבין 30 ולכן התוחלת שלו 10.
- בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם הערך שלו לפחות 20", הקונה נבחר בהסתברות 1/2. במקרה שהוא נבחר, הערך הוירטואלי שלו מתפלג אחיד בין 10 לבין 30. לכן התוחלת היא 1/2 מ-20 שזה 10.

- בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם הערך שלו לפחות 15", הקונה נבחר בהסתברות 3/4. במקרה זה הערך הוירטואלי שלו מתפלג אחיד בין 0 לבין 30, לכן התוחלת היא 3/4 מ-15 שזה 11.25.

אכן, בכל המקרים הללו תוחלת הערך הוירטואלי שווה לתוחלת התשלום שחישבנו קודם.

למה זה עוזר לנו? כי עכשיו אנחנו יודעים איזה כלל-בחירה אנחנו רוצים: כדי למקסם רווח, כלל-הבחירה שלנו צריך להיות **בחר את הקבוצה שבה סכום הערכים הוירטואליים הוא הגדול ביותר**.

כזכור, תנאי הכרחי עבור שימוש במשפט מאירסון הוא שכלל-הבחירה יהיה מונוטוני. במקרה זה, כלל-הבחירה הוא מונוטוני אם ורק אם פונקציית הערך הוירטואלי של כל קונה היא פונקציה מונוטונית עולה של הערך (כמו הפונקציה r_i שראינו למעלה). אם פונקציית הערך הוירטואלי היא מונוטונית, אז ההתפלגות נקרא **התפלגות רגולרית**. כפי שראינו למעלה, התפלגות אחידה היא רגולרית, ויש עוד הרבה התפלגויות שהן רגולריות; בקורס זה נעסוק רק בהתפלגויות אחידות כך שאנחנו לא צריכים לדאוג בנושא זה - הכלל שלנו יהיה מונוטוני. נבחן כמה דוגמאות, מהפשוטה למורכבת.

מכירת חפץ אחד לקונה אחד

כלל-הבחירה של מאירסון במקרה זה הוא: "בחר את הקונה אם"ם הערך הוירטואלי שלו גדול מאפס". עבור ההתפלגות שראינו למעלה הכלל יוצא:

$$2x-30 > 0 \quad\quad <==> \quad\quad x > 15$$

וכלל-הבחירה הוא "בחר את הקונה אם"ם הערך שלו גדול מ-15". כלל-הבחירה מייד קובע לנו את כלל-התשלומים - הקונה יצטרך לשלם 15 (אם יזכה). אם כך, תוחלת-הרווח המירבית שאפשר להשיג כאן היא 11.25 כפי שחישבנו למעלה. בגיליון האלקטרוני המצורף, בדף "SingleBuyer", נמצאת סימולציה המראה שממוצע הרווח על-פני 1000 מכרזים אכן קרובה לערך התיאורטי.

שאלה: האם המכרז המתקבל הוא יעיל פארטו?

תשובה: לא! כי אם הערך של הקונה הוא, נניח, 12 - אז הקונה לא מקבל את החפץ ולא משלם. ויש שיפור-פארטו ברור - לתת את החפץ לקונה תמורת סכום סמלי (נניח שקל).

באופן כללי, מיקסום רווח לא הולך ביחד עם יעילות פארטו: כפי שהוכחנו בשיעור הקודם, בשוק קוואזי-ליניארי, תוצאה היא יעילה-פארטו אם"ם היא ממקסמת את סכום הערכים של כולם, אבל מיקסום-רווח מתייחס לתוחלת הרווח של המוכר בלבד - וזה בא על-חשבון היעילות הכללית.

מכירת חפץ אחד להרבה קונים עם אותה התפלגות

נניח שיש הרבה קונים עם אותם מאפיינים דמוגרפיים - עם אותה התפלגות ערכים שראינו קודם. במקרה זה, לכל הקונים יש אותה פונקציית ערך וירטואלי. אנחנו צריכים לבחור את הקבוצה שממקסמת את סכום הערכים הוירטואליים; הקבוצה הזאת כוללת את הקונה עם הערך הגדול ביותר אם ערכו גדול מ-15, וקבוצה ריקה אם כל הערכים קטנים מ-15. ערך-הסף של הזוכה הוא המקסימום בין 15 לבין הערך השני בגודלו. מכאן שהמנגנון ממקסם-הרווח במקרה זה הוא פשוט מכרז ויקרי עם מחיר-מינימום 15.

נחשב את תוחלת הרווח של מכרז זה כשיש שני קונים. למכרז יש 4 תוצאות אפשריות:

- בהסתברות 1/16, שני הערכים קטנים מ-15, והרווח הוא 0.
- בהסתברות 3/16, הערך הראשון קטן מ-15 והשני גדול מ-15 והרווח הוא 15.
- בהסתברות 3/16, הערך הראשון גדול מ-15 והשני קטן מ-15 והרווח הוא 15.

- בהסתברות 9/16, שני הערכים גדולים מ-15 והרווח הוא הערך הקטן יותר. ידוע שכששני ערכים מתפלגים בהתפלגות אחידה וזהה, תוחלת הרווח של הערך הקטן היא 1/3 המרחק בין הקצה הנמוך לקצה הגבוה, ושל הערך הגדל - 2/3 המרחק בין הערך הנמוך לערך הגבוה (באופן כללי, כש-n ערכים מתפלגים אחיד וזהה, תוחלת הרווח של הערך הקטן היא 1/(n+1) המרחק, של השני מלמטה 2/(n+1), וכן הלאה, עד ושל הגדול n/(n+1) המרחק). במקרה שלנו, כששני הערכים גדולים מ-15, שניהם מתפלגים אחיד בין 15 ל-30, כך שהתוחלת של הערך הקטן מביניהם היא 20.

כשמסכמים את כל 4 המקרים מקבלים שתוחלת הרווח היא 270/16 = 16.875. הסימולציה נמצאת בגיליון האלקטרוני המצורף בדף "TwoIdenticalBuyers".

מכירת חפץ אחד לשני קונים עם התפלגות שונה

נניח שיש שני קונים עם מאפיינים דמוגרפיים שונים, ולכל אחד יש התפלגות-ערכים אחרת. לדוגמה, נניח שאנחנו עושים מכרז על מכונית, ויש שני קונים - אמריקאי וישראלי. לאמריקאי יש התפלגות אחידה בין 10 ל-30 ולישראלי יש התפלגות אחידה בין 20 ל-40 (אולי כי בארה"ב מחירי המכוניות זולים יותר).
במקרה הזה כלל הבחירה הוא מורכב כי פונקציית הערך הוירטואלי שונה. נסמן את הערך של האמריקאי ב-x ושל הישראלי ב-y. אז כלל-הבחירה הוא:

- If $2x - 30 > 2y - 40$ and $2x - 30 > 0$ - sell to American;
- If $2y - 40 > 2x - 30$ and $2y - 40 > 0$ - sell to Israeli;
- If $0 > 2x - 30$ and $0 > 2y - 40$ - do not sell at all.

לפי זה ניתן גם לחשב בכל מקרה את כלל-התשלומים.

במקרה זה יש תופעה מעניינת - במקרים מסויימים ייתכן שהכלל יבחר את האמריקאי למרות שהערך של הישראלי גבוה יותר (בניגוד למכרז ויקרי). לדוגמה, אם הערך של האמריקאי הוא 23 ושל הישראלי הוא 27, אז האמריקאי ייבחר! (הוא ישלם את ערך-הסף שלו שהוא 22 - הערך שבו הוא עובר מהפסד לזכיה - הערך שבו הוא בדיוק ב"תיקו" עם הישראלי).

מה ההגיון לבחור מישהו שהערך שלו נמוך יותר? מדוע לא לבחור תמיד את הקונה עם הערך הגבוה - הרי אנחנו רוצים למקסם רווח?!

ננסה להסביר את זה באופן אינטואיטיבי. קודם-כל, ניזכר שגם כשהיה לנו קונה אחד - לא תמיד בחרנו את סכום-הערכים הגבוה ביותר. בחרנו להציב מחיר-מינימום של 15, וכך לפעמים הפסדנו קונה שלכאורה היינו יכולים להרויח. למשל, קונה שהערך שלו 12 לא קנה בכלל - לכאורה היינו יכולים למכור לו ב-11 ולהרויח.

אילו היינו יכול להחליט למי למכור ובכמה, אחרי שראינו מה הערך של כל אחד - ודאי שהיינו מעדיפים למכור לזה שהערך שלו הכי גדול, ולגבות ממנו את הערך המלא שלו. הבעיה, שאנחנו לא יכולים לעשות זאת - אם ננסה לעשות זאת, השחקנים לא יגידו לנו את הערך האמיתי שלהם. האתגר הוא לקבוע כלל-בחירה, לפני שאנחנו רואים מה הערך של כל אחד.

מה היה קורה אילו היינו רוצים כלל-בחירה סימטרי, בסגנון "בחר את השחקן שהערך שלו הכי גדול, בתנאי שהוא מעל מחיר-מינימום קבוע"? איזה מחיר-מינימום היינו בוחרים?

- אם נבחר מחיר-מינימום גבוה, שמתאים לישראלים - המחיר הזה יהיה גבוה מדי לאמריקאים. ואז במקרים רבים, האמריקאי יהיה גבוה מהישראלי אבל נמוך מהמינימום, ואנחנו נפסיד את הרווח שיכולנו להרויח עליו.
- אם נבחר מחיר-מינימום נמוך, שמתאים לאמריקאים - המחיר הזה יהיה נמוך עבור הישראלים. ואז במקרים רבים, הישראלי יהיה גבוה גם מהמינימום וגם מהאמריקאי, הישראלי ישלם את המינימום, ואנחנו נקבל רווח נמוך.

כיוון שהקונים לא סימטריים, צריך כביכול לקבוע לכל אחד מחיר-מינימום אישי. מחיר-המינימום של האמריקאי נמוך מזה של הישראלי, לכן לפעמים יוצא שאנחנו מוכר לו למרות שהערך שלו נמוך יותר.

אגב, זה בדיוק ההגיון שעומד מאחרי "הנחות לסטודנטים/גמלאים/חיילים במדים". ההנחות האלו לא נובעות בהכרח משיקולים אלטרואיסטיים - זה פשוט מחיר-מינימום שונה לאנשים עם מאפיינים דמוגרפיים שונים, שנועד למקסם את הרווח של המוכר.

אם עוד לא השתכנעתם שהרווח במכרז מאירסון גבוה יותר מבמכרז סימטרי, אתם מוזמנים להסתכל בגיליון האלקטרוני המצורף בדף "TwoDifferentBuyers" ולנסות בעצמכם.

מקורות

- טים ראפגרדן על השיטה הכללית של מאירסון (כולל הוכחת משפט מאירסון במקרה כללי יותר): http://theory.stanford.edu/~tim/f13/l/l3.pdf
- טים ראפגרדן על מיקסום רווח (כולל הוכחה שתוחלת סכום התשלומים שווה תוחלת סכום הערכים הוירטואליים): http://theory.stanford.edu/~tim/f13/l/l5.pdf
- סרג'יו הארט על מיקסום רווח (כולל הוכחה חדשה והרבה צחוקים) - מתוך בי"ס קיץ באוניברסיטה העברית על תכנון מנגנונים: https://youtu.be/EUqdodzoa4U .
- ויקיפדיה, Bayesian-optimal mechanism , Virtual valuation , Roger Myerson .

סיכם: אראל סגל-הלוי.