

## אלגוריתמים כלכליים שבוע 10:

שאלה 4: כמה שידוכים יציבים יש?

כשיש 3 סטודנטים ו-3 מחלקות, יש 6 שידוכים אפשריים (3 עצרת). כמה מהם יציבים?  
א. הראו דוגמה שבה יש רק שידוך יציב אחד.

פתרון נניח והבנים שלנו מוגדרים באותיות א', ב' ו-ג', והבנות באותיות 1, 2 ו-3  
כל בחירה מוגדרת להיות קבוצה מימין לשמאל:

א{...,1}	1{...,א}
ב{...,2}	2{...,ב}
ג{...,3}	3{...,ג}

כתבתי שלוש נקודות לאחר הבחירה הראשונה משום שזה בכלל לא משנה מה הם יבחרו אח"כ, כי המחלקות והסטודנטים מתואמים, כל שינוי מהבחירה שלהם יפרום את השידוך ויוליד שידוך לא יציב.

👉	א → 1	👉
👉	ב → 2	👉
👉	ג → 3	👉

ב. הראו דוגמה שבה יש בדיוק 2 שידוכים יציבים.

א{3,1,2}	1 {א, ב, ג}
ב{3,2,1}	2 {ג, א, ב}
ג {...,3}	3 {...,ג}

א' רוצה רק 2 אח"כ 1 ואח"כ 3, ב' רוצה את אחד קודם ואז שתיים (ובסוף שלוש)  
ומבחינת הבנות: 1 רוצה את א' ואז את ב' ולבסוף ג', ו-2 רוצה כמו 1 רק ש-א' ו-ב' מתחלפים.  
מבחינת הזוג השלישי (שלוש ו-ג') זה לא משנה כי הם רוצים רק אחד את השנייה, אז אם נפריד  
בניהם הם יפרמו את השידוך.  
לכן היחידים שיכולים להשפיע במקרה זה הם רק הארבעה העליונים:

שידוך יציב 2:	שידוך יציב 1:
👉	👉
👉	👉
👉	👉

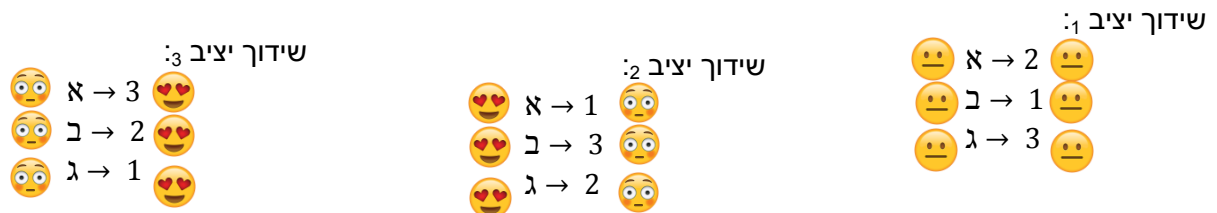
ג. הראו דוגמה שבה יש בדיוק 3 שידוכים יציבים.

א {3,2,1}	1 {א, ב, ג}
ב {2,1,3}	2 {ג, א, ב}
ג {1,3,2}	3 {א, ג, ב}

הסדר הוא מימין לשמאל: בבנות: 1 מעדיפה את ג' הכי הרבה, אח"כ את ב' ולבסוף את א',

ובבנים סדר הבחירה הוא בדיוק הפוך : א' מעדיף הכי הרבה את זאת שהכי פחות רוצה אותו-1, אח"כ הוא אמביוולנטי לגבי 2 (לא כל כך אכפת לו ממנה) ולבסוף הוא הכי פחות מעוניין ב-3 שדווקא הכי רוצה אותו. וככה כל שאר המשתתפים(רוצים את מי שהכי פחות רוצה אותם, והכי פחות רוצים את מי שהכי רוצה אותם).

כאן יתכנו שלושה שידוכים יציבים:



נשים לב ששידוך יציב, הוא שידוך אמביוולנטי, כולם לא "מבסוטים" מהשידוך(אבל לא "מבואסים"), אך מצד שני אף אחד לא יכול לשפר את המצב, כי כל שיפור כלשהו יגרום לצד אחד להתפשר שלא לצורך, ולכן לא ניתן לשפר את המצב.

שידוכים יציבים<sup>2,3</sup> זהים ברעיון, יש שלישיה שנהנה והשלישייה השנייה חייבת להתפשר כי אף אחד מהצד השני לא ירצה אותם.

כל שידוך אחר שננסה עשות במצב הזה יגרור שיהיה זוג מבואס ממש מהשידוך ואינו מחובר אחד לשנייה, כך שתמיד יהיה ניתן לחבר אותם ביחד וכך לפרום את השידוכים.

#### ד. האם ייתכן שכל 6 השידוכים הם יציבים? אם כן - הראו דוגמה, אם לא - הוכיחו.

תשובה: ייתכן מצב כזה רק אם נתיר מצבים מיוחדים כמו אדישות, שאז אם כולם אדישים אחד לשנייה, לא משנה מה יסודך כולם תמיד יהיו אמביוולנטיים (לא נשמע כמו התחלה מבטיחה לקשר). אבל, אם לבנים ולבנות יש סדרי עדיפויות חזקים, אז לא ייתכן שידוך כזה שכל שש הפרמוטציות שלו הן שידוך יציב.

**הוכחה:** לצורך הנוחות נמשיך באותם מושגים שהשתמשנו בהם מקודם: אם מישהו "מבואס" מהשידוך זה אומר שהוא שודך למי שהוא הכי פחות רצה, אם מישהו אמביוולנטי זה אומר שהוא שודך לבחירה השנייה שלו, ואם מישהו "מבסוט" זה אומר שהוא קיבל את שחפצה נפשו. נניח בשלילה מצב שבו כל שש הפרמוטציות מניבות שידוך יציב.

נשים לב לדבר הבא, בכל סדר פרמוטציות אפשרי, תמיד תהיה פרמוטציה אחת(לפחות) שבה גם גבר וגם אישה יהיו מבואסים ממה שקיבלו, כלומר הם יקבלו את הבחירה האחרונה שלהם. אם נגיד שהצמד לא שודך אחד לשנייה, הרי שהם זוג פורם, שכן עדיף להם להתחבר ביחד ואז ליצור זוגיות טובה יותר ממה שהם קיבלו.

לכן נגיד שהם שודכו אחת לשנייה, ולצורך הפשטות נקרא להם "הזוג החלש". הרי ששאר הזוגות חייבים להיות לפחות אמביוולנטיים לשידוך שלהם(שכן אם היה אחד שהוא מבואס גם כן מהשידוך הוא היה יכול להחליף את השידוך שלו עם אחד מ"הזוג החלש" וכך לפרום את השידוכים). נשחק את המשחק הבא: מבין הזוגות שהם לא "הזוג החלש" נחליף את סדר השידוכים, כלומר הבת תשודך לבן שהיא לא הייתה איתו קודם. אם קיים מישהו שהוא מבואס מהזיווג שהוצע לו, הרי הוא פורם את השידוכים מאותה סיבה שאמרנו מקודם- הוא יכול להחליף את הזיווג שלו עם המקבילה מה-"זוג החלש", היא/הוא בטוח ירצו לקבל אותה (או אותו) כי נכון לעכשיו הם משודכים למי שהם הכי פחות רוצים.

אם לא קיים מישהו כזה, כלומר כולם עדיין אמביוולנטיים לפחות לזוגיות שלהם, סימן ש"הזוג החלש" הוא חלש לא רק אחד לשנייה, אלא כולם לא ממש רוצים אותם. אזי קיימת פרמוטציה(אפילו יותר) שעלולה לפרום את השידוכים- פשוט כל פרמוטציה שבה "הזוג החלש" לא ביחד. סתירה לכך שכל הפרמוטציות מניבות שידוך יציב.

במהלך ההוכחה לעיל יצאנו מנקודת הנחה שתמיד קיימת פרמוטציה של צמד <גבר, אישה> ששודכו למי שהם הכי פחות רוצים, אבל לא הוכחנו את זה עדיין.

תה. **הוכחה<sub>2</sub>**: נשים לב שבקבוצת הפרמוטציות תהיה קיימת פרמוטציה שבה שני בנים ישודכו לשתי הבנות שהם הכי לא רוצים, למעט המקרה בו כולם לא רוצים את אותה בחורה. אם כל הבנים לא רוצים את אותה בחורה, אזי תהיה קיימת פרמוטציה שבה אותה הבחורה תשודך לבחור שהיא הכי לא רוצה.

בטבלה למטה ניתן לראות את כל הפרמוטציות האפשריות.

אם נבחר בחורה שרירותית כלשהי מתוך השלוש נראה שיצא שהיא תמיד תשתדך לכל אחד, כך שבטוח שהיא תצא באחת הפרמוטציות עם אחד מהבנים שהיא הכי פחות רוצה. הרי שקיבלנו מקרה בו גבר ואישה משודכים למי שהם הכי פחות רוצים.

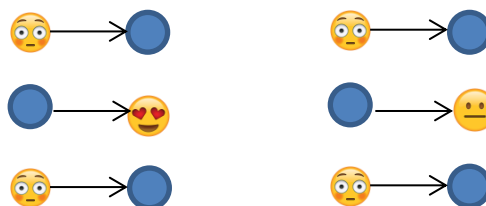
א'	ב'	ג'
3	2	1
2	3	1
3	1	2
1	3	2
2	1	3
1	2	3

לכן אנחנו חייבים להגיד שלפחות שניים מהבנים, כל אחד מהם, הכי פחות רוצה בחורה אחרת. וכמו שאמרנו קודם תמיד תהיה פרמוטציה כזאת שהם ישודכו למי שהכי מבאסת אותם, כי כל בן משודך פעמיים לבחורה שהוא הכי פחות רוצה, באחד מהשניים גם הבן השני ישודך לזאת שהוא הכי פחות רוצה.

ניתן לוודא עם הטבלה שזה אכן קורה, פשוט ניקח שני בנות ושתי בנות שרירותיים כשידוך "המבאס" שלהם, ונראה שתמיד תהיה פרמוטציה שהם נפגשים במקביל.

נניח בה"כ שהבנים הם ג' ו-א' והבנות הן 1 ו-3.

נסתכל על הבת 2 ששודכה לבן ב', אם היא מבאסת מהשידוך הרי שהגענו למצב שממנו ניסינו להימנע (שיש שידוך שבו יש בן מבאס ובת מבאסת באותה פרמוטציה), לכן אנחנו חייבים להגיד שהיא מרוצה מהשידוך או לפחות אמביוולנטית ממנו:



אם ניקח את המקרה הראשון: בו 2 אמביוולנטית לשידוך שלה, הרי שאחד משני האחרים (א' או ג') חייב להיות השידוך המבאס שלה. נניח שהשידוך המבאס שלה הוא ג', אזי אם נשדך אותה ל-ג' (כלומר נשדך את ג' ל-2 ואת ב' ל-3) נקבל שגם א' וגם 2 יהיו מבאסים מהשידוך שלהם, הרי קיבלנו זוג מערער.

ובאותו הדרך אם ב' מאושרת מהשידוך שלה - אחד מהשניים חייב להיות הזיווג המבאס שלה וכו'. קיבלנו שתמיד תהיה פרמוטציה שבה יש בן ובת מבאסים מהשידוך שלהם.