

מטלה - אלגוריתמים אמיתיים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

שאלה 1: אלגוריתמים אמיתיים לחלוקת משאבים

נתונה בעייה של חלוקת משאבים רציפים, ללא כסף.

א. הוכיחו שאלגוריתם "חתוך ובחר" אינו אמיתי.

ב. הציעו אלגוריתם חלוקה שהוא אמיתי ויעיל פארטו.

ג. הציעו אלגוריתם חלוקה שהוא אמיתי וללא-קנאה.

שאלה 2: מכרז מחיר שני מוכלל

מכרז מחיר שני מוכלל (Generalized Second Price Auction, GSP) הומצא ע"י גוגל, והוא מתנהל באופן הבא:

- כל מפרסם מכריז על הערך של קליק בעיניו;
- המפרסם שהכריז את הערך הגבוה ביותר זוכה במקום הראשון ומשלם את המחיר השני;
- המפרסם שהכריז את הערך השני זוכה במקום השני ומשלם את המחיר השלישי;
- וכו'...

א. הוכיחו, שכאשר ישנם שני מקומות או יותר, מכרז GSP אינו אמיתי.

ב. הוכיחו שהתשלומים במכרז GSP תמיד גבוהים לפחות כמו התשלומים במכרז VCG.

שאלה 3: עידוד השתתפות

תזכורת: אלגוריתם הוא מעודד השתתפות אם התועלת של כל שחקן המשתתף באלגוריתם היא לפחות 0 (אף אחד לא ניזוק מהשתתפות באלגוריתם).

נתונה בעיה כללית של החלטה בין אפשרויות שונות (כמו בעיית "בחירת המסעדה" שהודגמה בשיעור).

א. הוכיחו, שאם כל שחקן מייחס ערך לפחות 0 לכל אפשרות שאינה כוללת אותו, אז אלגוריתם VCG מעודד השתתפות.

ב. הראו, שאם התנאי לא מתקיים, אז אלגוריתם VCG אינו מעודד השתתפות.

שאלה 4: מכרז VCG – שינויים ושיפורים

א. למדנו שמכרז "מחיר ראשון" הוא לא אמיתי, ומכרז "מחיר שני" הוא אמיתי. האם מכרז "מחיר שלישי" הוא אמיתי? מה לגבי "מחיר רביעי", "מחיר חמישי" וכו'?

ב. למדנו שהצעד הראשון במכרז VCG הוא מציאת האפשרות הממקסמת את סכום ערכי המשתתפים. מה קורה אם במקום זה, מוצאים את האפשרות הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים (= מיקסום סכום הלוגריתמים) – האם המכרז עדיין אמיתי?

ג. למדנו שבמכרז VCG, התשלומים הם מעין "קנס" המוטל על המשתתפים, ומנהל המכרז צריך לקחת אותם לעצמו (או לחלק לצדקה, או לתת תשר למלצר וכו'...). מה קורה אם מנהל המכרז לוקח את כל הכסף שהתקבל מהמכרז, ומחלק אותו שווה בשווה בין המשתתפים – האם המכרז עדיין אמיתי?

שאלה 5: אלגוריתם אמיתי להקצאת מעונות לסטודנטים

משרד המעונות של האוניברסיטה מקצה מעונות לסטודנטים בעזרת האלגוריתם הבא:

- כל סטודנט רושם את שלושת סוגי המעונות שהוא הכי רוצה, לפי הסדר.
- המשרד מסדר את הסטודנטים לפי סדר עדיפות כלשהו (ותק, ציונים וכד').
- המשרד עובר על הסטודנטים לפי הסדר, ונותן לכל סטודנט את החדר הכי גבוה בדירוג שלו שעדיין זמין. אם כל השלושה לא זמינים, הסטודנט מקבל חדר זמין כלשהו באקראי.

א. הוכיחו שהאלגוריתם אינו אמיתי.

ב. הוכיחו, שגם אם כל הסטודנטים מדווחים את ההעדפות האמיתיות שלהם, האלגוריתם אינו יעיל פארטו.

ג. הציעו שיפור קטן לאלגוריתם, שיהפוך אותו לאמיתי וגם יעיל פארטו.

שאלה 6: עיצוב דף פירסום

בדף-אינטרנט מסויים אפשר אפשר לשים **או** פירסומת אחת ארוכה, **או** שתי פרסומות קצרות.

ישנם מספר מפרסמים המתחרים על מקום בדף. ההעדפות של כל מפרסם מיוצגות ע"י המחלקה:

```
class Advertiser:
    longvalue = ...
    # כמה המפרסם מרויח (בשקלים) אם פרסומת ארוכה שלו מופיעה בדף
    shortvalue = ...
    # כמה המפרסם מרויח (בשקלים) אם פרסומת קצרה שלו מופיעה בדף
```

מפרסם שאינו מופיע בדף מרויח 0 שקלים. מנהלי האתר רוצים שהמפרסמים יהיו מרוצים - המטרה שלהם היא למקסם את סכום רווחי המפרסמים. עיזרו להם להחליט איזה פירסומות לשים באתר!

א. כיתבו אלגוריתם, בעברית או בפסאודו-קוד, המקבל כקלט את רשימת המפרסמים, ומחזיר כפלט:

- כמה פירסומות יהיו בעמוד (אחת או שתיים);
- איזה מפרסם/מפרסמים יופיעו בעמוד.

ב. תכננו מכרז הממקסם את סכום רווחי המפרסמים, וגם מעודד כל מפרסם לחשוף את הערכים `longvalue`, `shortvalue` **האמיתיים** שלו. המנגנון מקבל כקלט את רשימת המפרסמים, ומחזיר כפלט: כמה פירסומות יהיו בעמוד, איזה מפרסם/מפרסמים יופיעו בעמוד, ואיזה מחיר ישלם/ישלמו המפרסם/מפרסמים למנהל האתר (בשקלים).

הערה: אם מפרסם מסויים מופיע בדף ומשלם מחיר, התועלת שלו היא הרווח מהפירסום פחות המחיר.
ג. הדגימו את פעולת המכרז שכתבתם על הקלט הבא, ובו ארבעה מפרסמים:

```
ad[0].longvalue=10;  ad[0].shortvalue=8;  
ad[1].longvalue=9;   ad[1].shortvalue=1;  
ad[2].longvalue=8;   ad[2].shortvalue=4;  
ad[3].longvalue=7;   ad[3].shortvalue=3;
```

שאלה 7: תיכנות – אלגוריתם אמיתי למציאת מסלול קל ביותר

כיתבו פונקציה בפייתון, המקבלת גרף ממושקל ושני צמתים, מוצאת את המסלול הזול ביותר בין שני הצמתים, ומדפיסה כמה כסף צריכה לקבל כל קשת במסלול זה, בהתאם לאלגוריתם VCG:

```
def vcg_cheapest_path(graph, source, target): ...
```

לצורך חישוב המסלול הקל ביותר, אפשר להשתמש בספריה networkx

https://networkx.github.io/documentation/stable/reference/algorithms/shortest_paths.html

בפונקציה `dijkstra_path`.