1. חלוקת עלויות

בימינו יש יותר ויותר אפליקציות המאפשרות לאנשים לחלוק נסיעות, למשל: waze carpool, וגם ב Uber, Lyft ועוד. אחת השאלות המעניינות העולות במקרה זה היא: איך לחלק את עלות הנסיעה בין הנוסעים?

זו בעיה של חלוקה הוגנת - אבל היא שונה מבעיות קודמות שלמדנו:

- מצד אחד, הדבר שאותו מחלקים - כסף - הוא רציף ואחיד, ולכולם יש בדיוק אותן העדפות לגביו - כולם רוצים כמה שיותר כסף (ולשלם כמה שפחות). מבחינה זו, הבעיה קלה יותר מבעיית חלוקה של קרקע או של חדרים בדירה.
- מצד שני, **הזכויות** כאן הן לא שוות. אם נוסע אחד יורד אחרי קילומטר, ונוסע אחד אחרי שני קילומטר - שניהם צריכים לשלם, אבל זה לא הגיוני שהם ישלמו אותו דבר.

מהי חלוקה הוגנת של התשלומים במקרה זה?

אנחנו נציג את הבעיה כמקרה פרטי של בעיה כללית יותר הנקראת משחק שיתופי - cooperative game.

קביעת תשלומים במשחק שיתופי

במשחק שיתופי, יש קבוצה N של שחקנים הרוצים לשתף פעולה לתועלת כולם (במקרה שלנו - N היא קבוצת הנוסעים הרוצים לנסוע יחד כדי לחסוך עלויות).

כלל-התשלומים צריך לקחת בחשבון, שכל "קואליציה" של שחקנים (כל תת-קבוצה של N) יכולה לפרוש ולפעול באופן עצמאי. לכן הכלל צריך לבדוק את כל תת-הקבוצות האפשריות, ולחשב את העלות של כל אחת מהן בנפרד. מכאן, במשחק שיתופי עם n שחקנים, הקלט כולל 2^n מספרים שונים. זה די הרבה, אבל כל עוד מספר הנוסעים במונית המשותפת הוא לא גדול, זה סביר.

עבור כל תת-קבוצה S של N ("קואליציה"), נסמן ב- $c(S)$ את הערך של S. במקרה שלנו, זו עלות הנסיעה במקרה שהאנשים בקבוצה S נוסעים לבד. הנה דוגמה לטבלת-עלויות עבור 3 נוסעים:

קואליציה S	c(S)
0	0
א	10
ב	15
ג	25
א,ב	20
א,ג	25
ב,ג	30
א,ב,ג	37

כלל-חלוקת-עלויות הוא פונקציה p המקבלת כקלט את הטבלה c, ומחזירה לכל שחקן כמה הוא צריך לשלם. אנחנו נחפש כלל-חלוקת-עלויות המקיים כמה תנאים.

א. כיסוי מלא: כשכולם נוסעים יחד, עלות הנסיעה מכוסה במלואה ע"י הנוסעים:

c(N) = p(c,1) + p(c,2) + ... + p(c,n)

ב. הגינות (נקרא גם **סימטריה**): התשלום שכל שחקן משלם צריך להיות תלוי רק בעלות השולית שהוא מוסיף. העלות השולית של שחקן i, ביחס לקבוצה מסויימת S שאינה מכילה את i, מוגדרת כ: c(S U {i}) - c(S), כלומר העלות של הקבוצה כש-i מצטרף, פחות העלות של הקבוצה כש-i לא מצטרף. עקרון הסימטריה קובע, שאם לשני שחקנים, i ו-j, יש בדיוק אותה תרומה שולית לכל תת-הקבוצות שאינן מכילות אותם, אז הם צריכים לשלם את אותו תשלום בדיוק.

ג. עקרון האפס: "שחקן אפס" (באנגלית "null player") הוא שחקן שאינו מוסיף שום עלות לשום תת-קבוצה שהוא מצטרף אליה. תחשבו על "עציץ" שתמיד נמצא במונית - לא עולה ולא יורד, לא מועיל ולא מזיק. עקרון האפס קובע, ששחקן כזה לא צריך לשלם או לקבל כלום.

ד. ליניאריות: התשלומים נמדדים באותן יחידות שבהן מודדים את הערכים. למשל, אם הערכים בשקלים אז גם התשלומים בשקלים. אם הערכים באגורות אז גם התשלומים באגורות. מכאן, אם מכפילים את כל הערכים פי 100 (או קבוע כלשהו k), ומפעילים את אותו כלל-תשלומים - מקבלים תשלומים גדולים פי 100 (או פי k).

באותו אופן, אם מחברים שני משחקים עם אותם שחקנים, ויוצרים משחק חדש שבו הערך של כל תת-קבוצה הוא הסכום של ערכי תת-הקבוצה הזאת במשחקים הקודמים, ומפעילים את אותו כלל-תשלומים - התשלום של כל שחקן יהיה סכום התשלומים שלו במשחקים הקודמים. ובמונחים שלנו: אם קבוצת נוסעים נוסעת היום לירושלים ומחשבת כמה כל אחד צריך לשלם, ונוסעת מחר לאילת ומחשבת כמה כל אחד צריך לשלם, אז הסכום הכולל שכל נוסע ישלם יהיה שווה לתשלום שיתקבל אם נחשב את התשלומים על שתי הנסיעות ביחד.

כל התנאים הללו נראים מאד הגיוניים.

מתברר שיש רק כלל תשלומים **אחד** המקיים את כל הכללים האלו! הכלל הזה נקרא "ערך שאפלי".

ערך שאפלי מחושב באופן הבא:

- עבור על כל n! הסידורים האפשריים של השחקנים.
- עבור כל סידור וכל שחקן, חשב את העלות השולית שלו בסידור זה.
- התשלום של כל שחקן הוא הממוצע החשבוני של העלויות השוליות שלו בכל אחד מהסידורים.

לדוגמה עבור המספרים מלמעלה, ראו בגליון האלקטרוני המצורף.

משפט 1: ערך שאפלי מקיים את התכונות א,ב,ג,ד.

הוכחה: א. צריך להוכיח שהסכום של ערך שאפלי על כל השחקנים, שווה לערך של הקבוצה כולה c(N). נחשב את הסכום עבור כל סידור בנפרד. עבור כל סידור של השחקנים, יש לסכם את התרומות השוליות של כל השחקנים לפי סדר זה. למשל עבור הסדר א-ב-ג, יש לחבר את התרומה השולית של א ביחס לקבוצה הריקה {}, ועוד ב ביחס לקבוצה {א}, ועוד ג ביחס לקבוצה {א,ב}. זה סכום טלסקופי שהערך שלו הוא בדיוק הערך של הקבוצה {א,ב,ג}. כלומר, לכל סידור של השחקנים, הסכום הפנימי יוצא c(N). לכן, גם הממוצע על-פני כל הסידורים יוצא c(N) (ראו הדגמה בגליון האלקטרוני).

ב. ערך שאפלי של שחקן נקבע רק לפי העלויות השוליות שהוא מוסיף לכל קבוצה שאינה כוללת אותו. לכן, לשני שחקנים עם אותן עלויות שוליות יש בדיוק אותו ערך שאפלי.

ג. לשחקן אפס יש עלות שולית 0 ביחס לכל תת-קבוצה, ולכן גם הממוצע שלו 0.

ד. ערך שאפלי הוא פונקציה ליניארית של הערכים בטבלה. לכן, אם מכפילים את כל הערכים בקבוע אז גם ערך שאפלי מוכפל בקבוע, ואם מחברים שתי טבלאות אז גם ערך שאפלי מתחבר.

משפט 2: ערך שאפלי הוא הפונקציה היחידה המקיימת את התכונות א,ב,ג,ד.

הוכחה: נוכיח יחידות לשני שחקנים. פונקציית העלות:

(0,ca,cb,cab)

ניתן להציג אותה כסכום של שלוש פונקציות:גכגג

(0,ca,0,ca) +(0,0,cb,cb) + (0,0,0,cab-ca-cb)

בראשונה, ב הוא שחקן-אפס ולכן א משלם הכל - ca

בשניה, א הוא שחקן-אפס ולכן ב משלם הכל - cb.

בשלישית, א,ב סימטריים ולכן כל אחד משלם בדיוק חצי מהעלות הכוללת – (cab-ca-cb)/2.

לפי ליניאריות, התשלום של a הוא סכום התשלומים בשלושת המשחקים:

pa = ca + 0 + (cab-ca-cb)/2 = [ca+(cab-cb)]/2

וזה בדיוק ערך שאפלי.

אותו הדבר נכון לגבי b.

ההוכחה לשלושה שחקנים או יותר היא דומה, אבל יותר מסובכת מבחינה אלגברית.

חישוב ערך שאפלי

באופן כללי, כדי לחשב את ערך שאפלי צריך לעבור על n! צירופים. זה אפשרי עבור ערכים קטנים של n, אבל כש-n גדל (נניח מעל 15) זה כבר נעשה קשה מאד. ואכן, הבעיה הכללית של חישוב ערך שאפלי היא NP-קשה. אבל, במקרים מסויימים אפשר לנצל את מבנה הבעיה כדי לחשב את ערך שאפלי בצורה יעילה יותר.

דוגמה אחת היא בעיית שדה התעופה (airport problem): יש n חברות-תעופה, כל אחת צריכה מסלול-המראה באורך אחר (בגלל גודל המטוסים שלה וכד'). רוצים לבנות מסלול-המראה אחד לכל החברות, והשאלה היא איך לחלק את התשלומים ביניהן?

בבעיה זו, העלות של כל תת-קבוצה נקבעת לפי מקסימום פשוט. נניח, בלי הגבלת הכלליות, שחברה 1 צריכה את המסלול הקצר ביותר, אחריה חברה 2, וכו'. אז העלות של כל תת-קבוצה נקבעת לפי עלות המסלול של החברה המקסימלית (למשל: העלות של 1, 3, 5 היא העלות של 5). אפשר לחשב את ערך שאפלי בדרך הרגילה (ראו בקובץ airport.py), אבל אפשר לחשב באופן יעיל יותר ע"פ העקרונות של שאפלי.

לפי עקרון הליניאריות, אפשר לפרק את הבעיה לסכום של כמה תת-בעיות:

לכל i בין 1 ל-n, נגדיר תת-בעיה שבה צריך לשלם רק על הקטע בין i-1 לבין i. הבעיה המקורית היא סכום של כל ה-n תת-בעיות, ולכן, אם נפתור כל בעיה בנפרד, נוכל פשוט לחבר את התוצאות ולקבל את הפתרון לבעיה המקורית.

כדי לפתור את תת-בעיה i, נשים לב שבבעיה זו, כל השחקנים הקטנים מ-i הם "שחקני אפס", ולכן לפי עקרון האפס הם לא משלמים כלום. כל השחקנים מ-i ומעלה הם סימטריים, ולכן לפי עקרון הסימטריה כל אחד מהם משלם אותו הדבר. המסקנה היא, שבתת-בעיה i, העלות של הקטע בין i-1 לבין i מתחלק שווה בשווה בין השחקנים i,…,n, כל אחד מהם משלם 1 חלקי (n-i+1) מעלות הקטע.

מצאנו נוסחה פשוטה המאפשרת לחשב את ערכי שאפלי בבעיית מסלול-ההמראה בזמן ליניארי.

האם ישנן בעיות כלליות יותר שבהן אפשר לחשב את ערך שאפלי במהירות?

בעיה אחת כזאת נמצאה ממש לאחרונה ע"י חיה לוינגר (סטודנטית לתואר שני באריאל) בהנחיית נועם חזון ועמוס עזריה (בוגרי בר-אילן). מדובר בבעיית שיתוף-נסיעות, כאשר סדר הורדת הנוסעים נקבע מראש.

הקלט לבעיה הוא גרף מכוון של כבישים. נתונים n נוסעים, כולם עולים במקום אחד, וצריך להסיע אותם ל-n יעדים שונים, לפי הסדר 1,...,n (למשל, לפי סדר הדחיפות, לפי סדר ההגעה למונית, וכד'). כאשר כולם נמצאים, המונית נוסעת במסלול הקצר ביותר מ-0 ל-1, ואז במסלול הקצר ביותר מ-1 ל-2, וכו'. אבל כשאחד הנוסעים לא נמצא, המונית יכולה "לחתוך" ולקצר. למשל, אם 1 לא נמצא, אז המונית יכולה לנסוע במסלול הקצר ביותר מ-0 ל-2 – ובזה הבעיה שונה מבעיית מסלול-ההמראה.

גם כאן, אפשר לחשב את ערך שאפלי בצורה הרגילה (ראו ridesharing.py), אבל אפשר גם לחשב ביעילות ע"י פירוק הבעיה לסכום של תת-בעיות:

- לכל k, נגדיר תת-בעיה שבה אנחנו משלמים רק על נסיעה **ישירה** מ-0 ל-k (במסלול הקצר ביותר). שימו לב שאנחנו משלמים את הנסיעה הזאת, אם ורק אם נוסע k נמצא וגם אין במונית אף נוסע שמספרו קטן מ-k. לכן:
  - כל הנוסעים שמספרם גדול מ-k הם שחקני-אפס ולא משלמים כלום.
  - ערך שאפלי של k בבעיה זו הוא המרחק הישיר בין 0 ל-k, מחולק ב-k – כי רק באחד מכל k סדרים נוסע k מופיע לפני כל הנוסעים 1,...,k-1, ורק במקרה זה העלות השולית שלו חיובית.
  - ערך שאפלי של כל נוסע j>k הוא **מינוס** המרחק הישיר בין 0 ל-k, מחולק ב k(k-1) – כי מתוך הסדרים שבהם k מופיע לפני כל הנוסעים 1,...,k-1, באחד מכל **k-1** סדרים, הנוסע j הוא הראשון שמופיע מייד אחרי k, ובמקרה זה הוא גורם לכך שאנחנו **לא** נוסעים במסלול הישיר מ-0 ל-k, כלומר הוא מפחית את עלות המסלול.
- לכל k>i, נגדיר תת-בעיה שבה אנחנו משלמים רק על נסיעה **ישירה** מ-i ל-k. באופן דומה לחישוב למעלה:
  - כל הנוסעים שמספרם קטן מ-i או גדול מ-k הם שחקני אפס.
  - ערך שאפלי של i,k הוא המרחק הישיר בין i ל-k, מחולק ב (k-i)(k-i+1).
  - ערך שאפלי של כל נוסע j שעבורו i<j<k הוא **מינוס** המרחק הישיר בין i ל-k, מחולק ב (k-i)(k-i+1), כפול (k-i-1)/2.

מספר הבעיות הכולל הוא $O(n^2)$, ולכן זמן החישוב של ערך שאפלי הוא פולינומיאלי!

מה קורה אם סדר הורדת הנוסעים לא קבוע מראש, אלא נקבע בכל פעם מחדש (למשל ע"י חישוב המסלול הקצר ביותר שעובר בין כל הנקודות)? - במקרה זה, חיה נועם ועמוס הוכיחו שהבעיה היא כבר NP-קשה.

2. איך מחליטים מי יקבל שירות?

עד עכשיו הנחנו שכולם נוסעים, וכל השאלה היתה איך לחלק ביניהם את העלות.

אבל, מה אם העלות היא כל-כך גבוהה עד שחלק מהאנשים בכלל לא ירצו לנסוע?

איך מחליטים כמה ואיזה נוסעים בדיוק ישתתפו בנסיעה?

כדי לענות לשאלה זו, צריך להוסיף נתון לבעיה: לא מספיק לדעת מהי העלות של כל קבוצת-נוסעים - צריך גם לדעת מהו הערך שכל נוסע מפיק מהשתתפות בנסיעה. אנחנו מניחים שההשתתפות היא בינארית - נוסע j שמשתתף בנסיעה, הערך שלו הוא v_j, וזה מידע פרטי שלו - רק הנוסע עצמו יודע מהי התועלת שלו. אנחנו צריכים לפתח אלגוריתם אמיתי - שישכנע את הנוסעים לחשוף את הערך האמיתי שלהם.

פתרון אחד, שכבר למדנו, הוא **מכרז VCG:**

- יש 2^n אפשרויות - כל תת-קבוצה של N היא אפשרות.
- הערך של כל שחקן j הוא v[j] אם הוא בקבוצה, ו-0 אם הוא לא בקבוצה.
- יש שחקן נוסף (נקרא לו "הנהג"), שהערך שלו לכל אפשרות הוא שלילי - מינוס עלות הנסיעה.
- עבור כל תת-קבוצה, חשב את סכום הערכים (כולל הערך השלילי של הנהג).
- בחר את תת-הקבוצה עם הסכום הגדול ביותר.
- עבור כל נוסע, התשלום הוא הסכום של הנוסעים האחרים (כולל הנהג) אילו הוא לא היה משתתף, פחות הסכום של הנוסעים האחרים (כולל הנהג) כשהוא משתתף.

ראו דוגמה בגליון המצורף.

כפי שלמדנו בעבר, מכרז וק"ג הוא אמיתי ויעיל פארטו, אבל יש בו בעיה רצינית - סכום התשלומים של כל השחקנים לא בהכרח מכסה את עלות הנסיעה. במילים אחרות: יש **גירעון**! אם נרצה להשתמש במכרז כזה באופן קבוע, הממשלה תצטרך לסבסד אותו.

פתרון אפשרי הוא לגבות מכל נוסע תשלום מסויים, כך שסכום התשלומים יכסה את עלות הנסיעה (למשל: ערך שאפלי), ואז לחסר את התשלום הזה מהערך של הנוסע.

הבעיה היא, שהעלות של חלק מהנוסעים עלולה להיות שלילית - הם ישלמו יותר מהערך שלהם. כלומר: המכרז אינו מעודד השתתפות.

מכרז מולין-שנקר

במקום וק"ג אפשר להשתמש במכרז אחר, שהוא גם מעודד-השתתפות וגם מאוזן תקציבית. המכרז נקרא על-שם ממציאיו - Moulin, Shenker. במכרז זה, אנחנו קובעים מראש את כלל-התשלום.
כלל-התשלום הוא פונקציה p(S,i). הוא קובע, עבור כל תת-קבוצה של נוסעים S, כמה ישלם כל נוסע

i אם הקבוצה הזאת היא הקבוצה הנבחרת. הכלל צריך לקיים איזון תקציבי (*budget balance*) - לכל תת-קבוצה, סכום התשלומים של חברי הקבוצה שווה לעלות הנסיעה של תת-הקבוצה.

בתחילת השיעור ראינו דוגמה לכלל-תשלום: ערך שאפלי. ראינו שהוא מאוזן תקציבית. ישנם כללים נוספים עם איזון תקציבי. למשל, אפשר לסדר את הנוסעים בסדר קבוע כלשהו (מהזוטר לבכיר), ולגבות מכל אחד את העלות השולית שלו בסדרה זו. ערך שאפלי עושה ממוצע על כל הסדרים, אבל אפשר לבחור סדר אחד כלשהו, והכלל עדיין יהיה מאוזן-תקציבית.

בהינתן כלל-התשלום, המכרז מתנהל באופן הבא (בדומה ל"מכרז יפני"):

1. **איתחול**: מכניסים את כל הנוסעים הפוטנציאליים לחדר.
2. אומרים לכל משתתף כמה הוא צריך לשלם (לפי כלל-התשלום p), בהנחה שכל הנוסעים הנמצאים עכשיו בחדר משתתפים בנסיעה.
3. כל משתתף שאינו רוצה לשלם - יוצא מהחדר.
4. אם מישהו יצא מהחדר - חזור לצעד 2.
5. אחרת - סיים ושלח את הנוסעים שנשארו בחדר למונית.

במקום להכניס נוסעים לחדר, אפשר לבצע הדמיה של התהליך - מבקשים מכל נוסע לדווח את הערך שלו, ומריצים את התהליך במחשב, כאשר בשלב 3, מוציאים מה"חדר" את כל המשתתפים שהערך שלהם קטן מהמחיר שהם אמורים לשלם.

כדי שהמכרז הזה יהיה אמיתי, כלל-התשלום צריך להיות מונוטוני במובן הבא: אם נוסע עוזב את הקבוצה, אז התשלומים של כל הנוסעים הנשארים גְדֵלים (או שווים). כלומר לכל שתי קבוצות S,T ולכל שחקן i בקבוצה S, מתקיים:

If $S \le T$ then $p(S, i) \ge p(T, i)$

משפט: אם כלל-התשלום הוא מונוטוני, אז מכרז מולין-שנקר הוא אמיתי.

הוכחה: בכל פעם שנוסעים יוצאים מהחדר, התשלום של כל הנוסעים הנשארים נשאר קבוע או גָדֵל. לכן, לנוסע שיצא, אף פעם לא כדאי לחזור. לכן ההתנהגות האופטימלית של נוסע היא לצאת מהחדר אם-ורק-אם התשלום הנוכחי גדול מהערך שלו. זה בדיוק מה שההדמיה של מכרז מולין-שנקר עושה עבורו כשהוא אומר את ערכו האמיתי. ***

האם אפשר להשתמש במכרז מולין-שנקר עם כלל-התשלום של שאפלי? לשם כך צריך לוודא שהכלל הזה מונוטוני. והוא אכן מונוטוני כאשר יש עלות שולית פוחתת.

הגדרה: פונקציית-עלות נקראת תת-מודולרית (submodular) אם יש לה עלות שולית פוחתת (decreasing marginal cost), כלומר, העלות השולית של כל שחקן ביחס לקבוצה מסויימת, קטֵנה (או שווה) כאשר הקבוצה גדֵלה. פורמלית, לכל שתי קבוצות S,T ולכל שחקן i:

If $S \le T$, then $c(S \cup \{i\}) - c(S) \ge c(T \cup \{i\}) - c(T)$

טבלת העלויות שהוצגה למעלה מקיימת תכונה זו.

משפט: במשחק עם עלות שולית פוחתת, כלל-התשלום של שאפלי הוא מונוטוני.

הוכחה: נניח שחישבנו את ערך שאפלי של שחקן א בקבוצה מסויימת בגודל n. שחקן חדש, ב, הצטרף לקבוצה, ואנחנו מחשבים שוב את ערך שאפלי של שחקן א. צריך להוכיח שהערך החדש שווה או קטן מהערך הישן.
הערך הישן הוא ממוצע של n-עצרת מספרים - אחד עבור כל סדר של השחקנים הישנים.

הערך החדש הוא ממוצע של (n+1)-עצרת מספרים - אחד עבור כל סדר של השחקנים עם שחקן ב.
עבור כל סדר ישן, יש n+1 סדרים חדשים, כי יש n+1 אפשרויות להכניס את שחקן ב לתוך הסדר (לפני הראשון, לפני השני, ..., לפני האחרון, אחרי האחרון).
אם מכניסים את שחקן ב אחרי שחקן א - אז העלות השולית של שחקן א בסדר זה לא משתנה.
אם מכניסים את שחקן ב לפני שחקן א - אז העלות השולית של שחקן א בסדר זה קְטֵנָה - כי יש עלות שולית פוחתת.
לכן, הממוצע על כל הסדרים קטן או שווה לממוצע הישן. ***

לסיכום, מכרז מולין-שנקר הוא מאוזן תקציבית ואמיתי (כשכלל-התשלום מונוטוני), אבל הוא לא מושלם:

משפט: מכרז מולין-שנקר אינו בהכרח יעיל-פארטו.

הוכחה: שיעורי בית.

סיכום

לסיכום, ראינו שלוש תכונות - יעילות, אמיתיות ואיזון תקציבי:

- מכרז וק"ג הוא יעיל ואמיתי אבל לא מאוזן;
- מכרז מולין-שנקר הוא אמיתי ומאוזן אבל לא יעיל;
- קל לחשוב על מכרז יעיל ומאוזן אבל לא אמיתי, למשל - כל אחד משלם את הערך שלו.

האם קיים מכרז המקיים את כל התכונות? התשובה היא לא! כמו בשיעורים קודמים, יש "טרילמה" - צריך לבחור שתיים מתוך שלוש תכונות, אי אפשר לקבל את כל מה שרוצים...

מקורות

- ישראל אומן על ערך שאפלי: http://www.ma.huji.ac.il/raumann/pdf/The%20Shapley%20Value.pdf
- מנגנון מולין-שנקר: Moulin, Hervé; Shenker, Scott (2001). "Strategyproof sharing of submodular costs:budget balance versus efficiency". Economic Theory. **18** (3): 511. doi:10.1007/PL00004200.
- Herve Moulin, "Fair Division and Collective Welfare", pages ...
- ויקיפדיה, Shapley Value
- ויקיפדיה, Cost-sharing_mechanism
- Levinger, Hazon, Azaria (2019) https://arxiv.org/abs/1909.04713

סיכם: אראל סגל-הלוי.