# שאלה 8 -4 מטלה

## מגישות: דנה אנגל ואיזבלה אורן

כלל תשלום שאפל שוויוני עובד כך:

א. חשב ערך שאפלי של כל שחקן.
ב. חשב את העלות הממוצעת לכל שחקן.
ג. גבה מכל שחקן את הממוצע בין א׳ ל-ב׳.

עלינו להוכיח שכלל תשלום שאפל שוויוני מקיים רק שני עקרונות מתוך שלושת העקרונות של שאפלי.

תחילה נראה ששאפל שוויוני לא מקיים את עקרון העציץ של שאפלי:

נניח כי יש שחקן שערך שאפלי שלו הוא 0, לפי שאפלי הרגיל עליו לשלם 0. אבל, במקרה של שאפל שוויוני בגלל סעיף ג׳ אותו שחקן לא ישלם אפס, אלא ישלם יותר. בסעיף ג׳ אנו עושים ממוצע בין ערך השאפלי לעלות הממוצעת עבור כל שחקן וכאשר עושים ממוצע בין שחקן בעל ערך שאפלי אפס, כאשר אצל שאר השחקים בערך הוא לא אפס (מספיק שחקן אחד שצריך לשלם) אז נוצר מצב כזה: $\frac{\text{total}}{\text{n}}$ יהיה העלות הממוצעת לכל שחקן, כלומר מספר כלשהו שלא יכול להיות אפס כי קיימת עלות כלשהי, נסמן אותו ב-s. כעת בשלב ג׳ יהיה עלינו לבצע ממוצע בין א׳ ו-ב׳ ולגבות אותו מכל שחקן, לכן עבור שחקן שערך שאפל שלו היה 0- נקבל: $\frac{s+0}{2}$ כלומר הוא יצטרך לשלם 0.5*s וזה בהכרח יהיה שונה מ0.

כעת נוכיח שכלל תשלום שאפל שוויוני מקיים את עקרון הסימטריות: זה הוא עקרון ההגינות, והוא אומר שאם לשני שחקנים יש עלויות שוליות זהות ביחס לכל הקבוצות, אז הם צריכים לשלם אותו הדבר.

נניח שלשני שחקנים יש עלויות שוליות זהות ביחס לכל הקבוצות, משמע שערך השאפלי שלהם זהה. העלות הממוצעת לכל שחקן זהה עבור כל השחקים שכן היא הסכום חלקי כמות השחקנים והממוצע הוא זהה עבוד כולם. מכאן- כאשר נגיע לשלב ג׳ שני השחקנים יצטרכו לשלם את אותו התשלום מכיוון שעושים ממוצע בין התוצר של א׳ שהוא זהה אצל שניהם לפי ההנחה, והתוצר של ב׳ שהוא זהה לכלל השחקנים. לכן ניתן להגיד כי כלל תשלום שאפל שוויוני מקיים את עקרון הסימטריות.

לבסוף נוכיח כי כלל תשלום שאפל שוויוני מקיים את עיקרון הלינאריות: הוא אומר שאם מכפילים את העלויות בקבוע- כל התשלומים נכפלים באותו קבוע, ואם מחברים שתי טבלאות עלויות- כל התשלומים מתחברים.

עבור כל שחקן i מתוך n השחקנים, נקרא לערך השאפלי שלו $t_i$. נשווה בין התוצאות לפני ההכפלה בערך קבוע לבין אלו שלפני.

לפני ההכפלה בקבוע בשלב א׳ נקבל ערך השאפלי של כל שחקן יהיה $t_i$, והעלות הממוצעת בשלב ב׳ לכל שחקן תהיה זהה והיא תהיה $\frac{\text{total}}{\text{n}}$. לכן בשלב ג׳ נקבל שעל כל שחקן לשלם: $\frac{\frac{\text{total}}{\text{n}}+t_i}{2}$.

אם נכפיל את העלויות של כולם בקבוע k נקבל $kt_i$ יהיה ערך השאפל החדש, והעלות הממוצעת לכל שחקן תהיה: $\frac{\text{k* total}}{\text{n}}$ כלומר גם היא תגדל פי k. לאחר ההכפלה- התשלום של כל אחד מהשחקנים לפי סעיף ג׳ תהיה: $\frac{\frac{\text{k* total}}{\text{n}}+kt_i}{2}$ שזה שווה ל: $\text{k*}\frac{\frac{\text{total}}{\text{n}}+t_i}{2}$.

כעת אם נשווה את מה שכל שחקן צריך היה לשלם לפני הכפלת העלויות בקבוע למה שכל שחקן צריך לשלם אחרי ההכפלה בקבוע- נראה שההבדל הוא אכן פי הקבוע! כלומר, אם מכפילים את העלויות בקבוע- כל התשלומים נכפלים באותו קבוע, וזה בדיוק מה שהיינו צריכים להוכיח.

לסיכום, שאפל שוויוני מקיים את עקריון הלינאריות ואת עקרון הסימטריות אך אינו מקיים את עקרון העציץ.