

מטלה - שידוכים יציבים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

שאלה 1. שידוכים עם כמה מקומות בכל מחלקה

נניח שבכל מחלקה יש מקום לשלושה סטודנטים.

א. הגדירו באופן פורמלי את המושג "שידוך יציב" במצב זה.

ב. הדגימו את פעולת אלגוריתם "קבלה על תנאי" על שתי מחלקות וחמישה סטודנטים.

ג. עמי ותמי הם שניים מתוך חמשת הסטודנטים מהסעיף הקודם. הם זוג, יש להם סדר עדיפות זהה על המחלקות, והם חייבים להיות באותה מחלקה. האם אלגוריתם "קבלה על תנאי" עדיין מחזיר שידוך יציב?

שאלה 2. תכנון מערכת לשידוך יציב

בעקבות תלונות על תהליך השיבוץ בין מתנדבות שירות-לאומי לבין מקומות-שירות, קיבלתם מכתב מרשות השירות הלאומי המבקש מכם לתכנן מערכת שיבוץ חדשה. המערכת אמורה לקבל קלט מהמתנדבות וממקומות-השירות, ולהחזיר כפלט את השיבוץ.

א. תארו את המערכת בפירוט באופן שראש הרשות לשירות לאומי יוכל להבין.

ב. מהו הקלט למערכת? מה הם מסכי-הקלט הדרושים, מי צריך להשתמש בכל מסך ומה בדיוק להקליד שם? תנו דוגמה לכל מסך.

ג. מתי ואיך בדיוק מתבצע האלגוריתם, ואיך נראה הפלט?

שאלה 3: מי נשאר בחוץ?

נניח שמספר הסטודנטים גדול ממספר המחלקות (ובכל מחלקה יש מקום אחד). במצב זה, בכל שידוך, חלק מהסטודנטים יישארו בחוץ.

א. הראו דוגמה עם 3 סטודנטים ו-2 מחלקות, שבה יש לפחות שני שידוכים יציבים. מיצאו את שניהם והראו איזה סטודנט נשאר בחוץ בכל שידוך יציב.

ב. הוכיחו, שבכל שידוך יציב (לא משנה באיזה אלגוריתם מצאנו אותו), אותם סטודנטים יישארו בחוץ. כלומר, אם משהו נשאר בחוץ בשידוך יציב א, אז הוא נשאר בחוץ גם בשידוך יציב ב.

אם אתם נתקעים, קראו בויקיפדיה על "Rural hospitals theorem".

שאלה 4: כמה שידוכים יציבים יש?

כשיש 3 סטודנטים ו-3 מחלקות, יש 6 שידוכים אפשריים (3 עצרת). כמה מהם יציבים?

- א. הראו דוגמה שבה יש רק שידוך יציב אחד.
ב. הראו דוגמה שבה יש בדיוק 2 שידוכים יציבים.
ג. הראו דוגמה שבה יש בדיוק 3 שידוכים יציבים.
ד. האם ייתכן שכל 6 השידוכים הם יציבים? אם כן - הראו דוגמה, אם לא - הוכיחו.

שאלה 5: שידוך יציב ויעילות

- א. הוכיחו שכל שידוך יציב הוא יעיל-פארטו, אבל ההיפך לא נכון.
ב. נניח שכל סטודנט מייחס ערך מספרי לכל מחלקה, כאשר המחלקה הכי גרועה בעיניו מקבלת 1, המחלקה הבאה מקבלת 2, וכו' (אם יש m מחלקות אז המחלקה הכי טובה מקבלת m). גם כל מחלקה מייחסת ערך מספרי לכל סטודנט באותו אופן. האם כל שידוך יציב ממקסם את סכום הערכים? הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.

שאלה 6: שידוכים יציבים עם אדישות

- בשיעור הנחנו, שלסטודנטים ולמחלקות יש סדרי עדיפות חזקים (ללא אדישות). במציאות ייתכן שסדרי העדיפות הם חלשים, כלומר ייתכן שסטודנט מסוים אדיש בין שתי מחלקות או יותר (מדרג אותן באותו מקום), ושמחלקה מסויימת אדישה בין שני סטודנטים או יותר.
הציעו שלוש דרכים שונות להגדיר "שידוך יציב" במצב זה. עבור כל הגדרה, תנו דוגמה לשידוך יציב המקיים הגדרה זו ואינו מקיים את ההגדרות החזקות יותר.
אם אתם נתקעים, קראו בויקיפדיה על "Stable marriage with indifference".

שאלה 7: בדיקת יציבות בפיתון

- כיתבו פונקציה בפיתון, המקבלת שידוך ובודקת אם הוא יציב. בדקו את הפונקציה בעזרת doctest.