

תרגיל 5 באלגוריתמים כלכליים - גיא וולף, 212055966

פתרון לשאלה 5.

(5א) הוכח כי האלגוריתם אינו אמיתי.

נראה את הדבר עם דוגמה נגדית. נניח כי ישנם בדיוק 5 חדרים, חדרים 1 עד 5, ו-5 דיירים, א' עד ה'. כל הדיירים מעדיפים את החדרים על פי סדרם, כלומר חדר 1 עדיף על 2, 2 על 3 וכן הלאה. באופן דומה, כל הסטודנטים מסודרים על ידי האוניברסיטה לקבלת החדרים על פי סדרם – א', ב', ג', ד', ה'.

אם כל הסטודנטים ידווחו על ערך אמת, החדרים 1 עד 3 יינתנו לדיירים א' עד ג' לפי הסדר, ואז דייר ד' יקבל את חדר 4 או 5 באקראי, משום שאף אחד מהם הוא לא בשלושת החדרים המועדפים עליו. על כן עדיף לדייר ד' להכניס את חדר 4 לרשימת החדרים המועדפים שלו למרות שהוא לא שייך לה בכדי לקבל אותו בוודאות, ולכן האלגוריתם אינו אמיתי.

(ב) הוכח כי גם אם כל השחקנים מדווחים את העדפותיהם האמיתיות האלגוריתם אינו בהכרח יעיל פראטו.

נסתכל על אותה דוגמה בדיוק מסעיף א', למעט שינוי אחד – סטודנט ה' מעדיף את חדר 5 על פני חדר 4. בהרצת האלגוריתם יש הסתברות של 50% לכך שסטודנט ד' יקבל את חדר 5 וסטודנט ה' את חדר 4, ובמקרה הזה יש שיפור פראטו – סטודנט ד' וסטודנט ה' יכולים להחליף את החדרים שלהם וכל אחד יקבל חדר אשר הוא מעדיף יותר. על כן האלגוריתם לא יעיל פראטו.

(ג) הציעו שיפור קטן לאלגוריתם אשר יהפוך אותו לאמיתי ויעיל פראטו.

במקום לכתוב רק את שלושת החדרים הראשונים בדירוגם, הסטודנטים ידרגו את כל החדרים. כתוצאה מכך כאשר יגיע תור כל סטודנט הוא יקבל את החדר המועדף עליו שעדיין פנוי.

נשים לב כי האלגוריתם שקול לאלגוריתם הבא:

1: סדר את כל הסטודנטים לפי סדר האוניברסיטה

2: שאל כל סטודנט לפי הסדר מהו החדר המועדף עליו מבין החדרים הפנויים, ותן לו את אותו החדר.

נוכיח את אמיתות ויעילות פראטו של האלגוריתם בהסתמך על האלגוריתם השקול.

האלגוריתם אמיתי: כאשר סטודנט נשאל באשר לחדר האהוב עליו אכן עדיף לענות עם החדר האהוב עליו, משום שאחרת הוא יקבל חדר אשר הוא מעריך פחות מהחדר המועדף עליו, ולכן התועלת שלו תהיה נמוכה יותר.

האלגוריתם יעיל פראטו: נניח בשלילה כי קיים שיפור פראטו לתוצאת האלגוריתם. שיפור כזה חייב לכלול החלפת חדרים בין קבוצה של סטודנטים, אשר נסמן אותה כ-S. כל סטודנט ב-S מקבל חדר שונה מהחדר אשר האלגוריתם נתן עבורו.

נסתכל על הסטודנט ב-S אשר היה ראשון בסדר האוניברסיטה. בפני אותו הסטודנט עמדו לבחירה כל החדרים ב-S ביחד עם חדרים אחרים, והוא בחר את החדר הנכחי שלו כמוערך בעיניו יותר מכל שאר החדרים. אל כן לא ניתן לתת לו חדר אחר ב-S בלי שתיפגע תועלתו, כלומר "שיפור הפראטו" אינו שיפור פראטו כלל וכלל – סטודנט אחד נפגע. על כן האלגוריתם יעיל פראטו.