חלוקת עלויות
Cost-sharing

אראל סגל-הלוי

https://www.innovationtoronto.com/2016/10/an-algorithm-for-taxi-sharing/

דוגמה: שיתוף נסיעה במונית

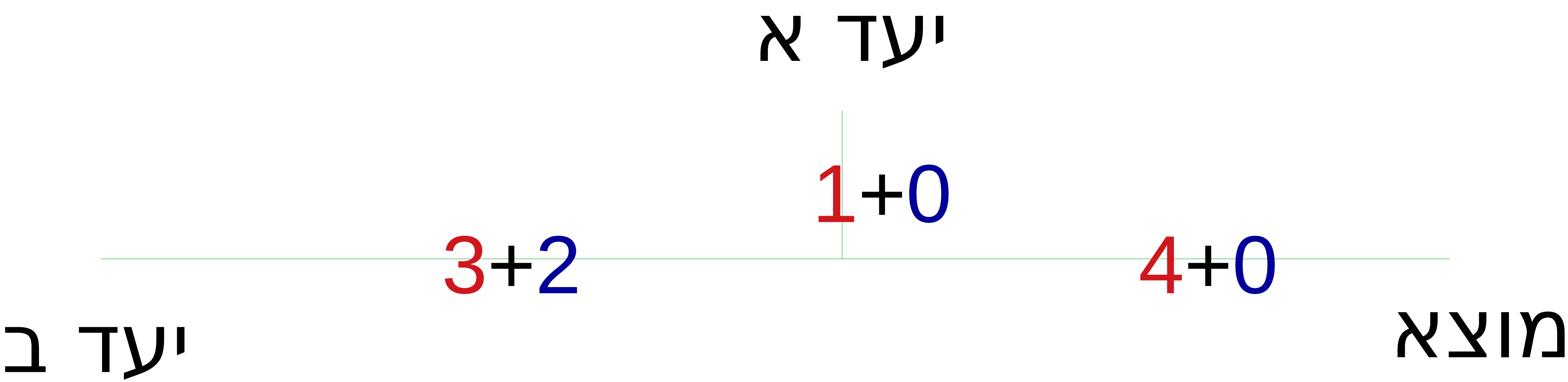
נסיעה משותפת במונית יכולה לחסוך עלויות.

- אם כל הנוסעים עושים את אותו מסלול – הגיוני לחלק את דמי-הנסיעה שווה בשווה.
- אבל מה אם כל אחד נוסע במסלול אחר?

שאלה א – חלוקה הוגנת: *איך לחלק את דמי-הנסיעה בין הנוסעים?*

שאלה ב – מכרז: *איך להחליט מי ישתתף בנסיעה?*

דוגמה – חלוקה הוגנת של עלויות



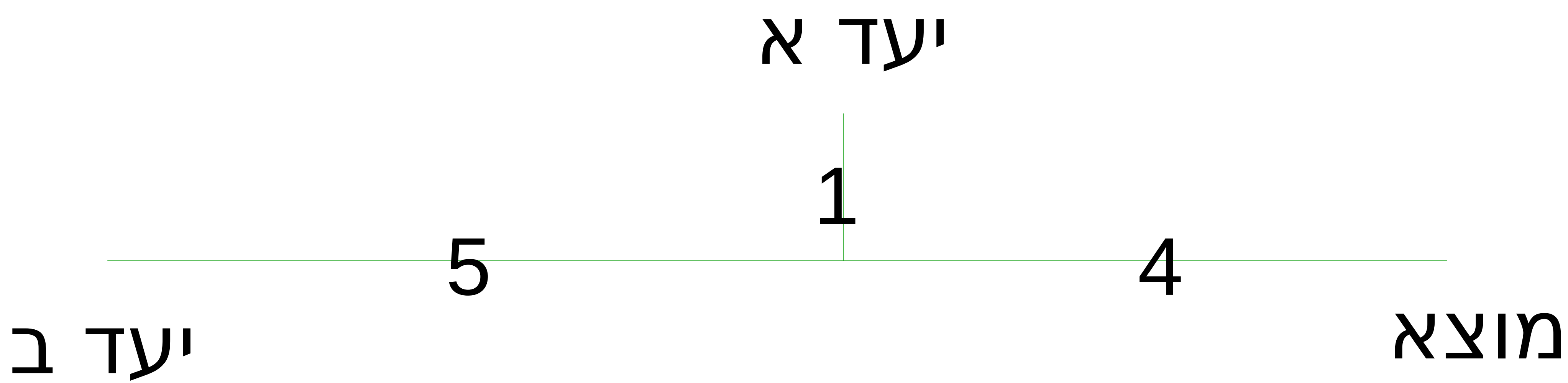
עלות כוללת = 5+1+1+4=**11**

עלות של א לבד = **5**

עלות של ב לבד = **9**

כמה ישלם כל אחד?

דוגמה – חלוקה הוגנת של עלויות



עלות כוללת = 5+1+1+4=**11**

עלות של א לבד = **5**

עלות של ב לבד = **9**

כמה ישלם כל אחד?

ומה קורה אם יש הרבה ביעד ב?

בעיה כללית: משחק שיתופי

נתונים:

- קבוצה של שחקנים - N;
- לכל תת-קבוצה S – העלות של מתן שירות רק לתת-הקבוצה הזאת - $c(S)$.

המטרה: לגבות מכל שחקן j תשלום $p(j)$, כך שסכום התשלומים הכללי הוא $c(N)$ – התשלומים מכסים את העלות של כל הקבוצה.

מהו כלל תשלום הוגן?

עלות שולית

הגדרה: *העלות השולית* של שחקן j, ביחס לקבוצת שחקנים S, היא התוספת שהוא מוסיף לעלות כשהוא מצטרף לקבוצה:

$$c\,(\,S \cup \{j\}\,) - c(S)$$

עקרון ההגינות: כלל תשלום נקרא *סימטרי* אם הוא תלוי רק בעלויות השוליות: אם לשני שחקנים יש עלויות שוליות *זהות* ביחס לכל הקבוצות, אז הם צריכים לשלם אותו הדבר.

עקרון העציץ (null player): שחקן שכל העלויות השוליות שלו הן אפס, משלם 0.

ליניאריות

עקרון הליניאריות:

- אם מכפילים את העלויות בקבוע – כל התשלומים נכפלים באותו קבוע.
  - דוגמה: המרה משקלים לאגורות.

- אם מחברים שתי טבלאות-עלויות – כל התשלומים מתחברים.
  - דוגמה: חישוב עלות דלק בנפרד ועלות אגרת-כביש בנפרד אמור לתת תוצאה זהה לחישוב העלויות יחד.

משפט שאפלי (Shapley)

משפט: ישנו כלל-תשלומים אחד ויחיד המקיים את כל שלושת העקרונות:

- א. עקרון הסימטריה,
- ב. עקרון העציץ (null player),
- ג. עקרון הליניאריות.

כלל-התשלומים הזה נקרא **ערך שאפלי**.

ערך שאפלי (Shapley Value)

אלגוריתם לחישוב ערך שאפלי:

- לכל אחד מ-$n!$ הסדרים האפשריים:
  - לכל שחקן:
    - חשב את *העלות השולית* שלו בסידור זה.

- לכל שחקן:
- חשב את הממוצע של $n!$ העלויות השוליות.

משפט שאפלי – הוכחה (1)

כיסוי מלא: נכון לכל סדר בנפרד ← נכון גם לממוצע על כל הסדרים.

א. **סימטריה**: ערך שאפלי של כל שחקן נקבע רק לפי העלויות השוליות שלו.

ב. **עציץ**: העלויות השוליות 0 ← הממוצע 0.

ג. **ליניאריות**: ערך שאפלי הוא פונקציה ליניארית של הערכים בטבלה.

משפט שאפלי – הוכחה (2)

נוכיח יחידות לשני שחקנים. פונקציית העלות:
(0,ca,cb,cab)
ניתן להציג אותה כסכום של שלוש פונקציות:
(0,ca,0,ca) +(0,0,cb,cb) + (0,0,0,cab-ca-cb)
בכחולה, ב הוא עציץ ולכן א משלם הכל - ca
בירוקה, א הוא עציץ ולכן ב משלם הכל - cb.
באדומה, א,ב סימטריים ולכן כל אחד משלם
בדיוק חצי מהעלות הכוללת – 2/(cab-ca-cb).
לפי ליניאריות:
pa=ca+0+(cab-ca-cb)/2 = [ca+(cab-cb)]/2
= בדיוק ערך שאפלי.

חישוב ערך שאפלי

- במקרה הכללי, חישוב ערך שאפלי הוא בעיה NP-קשה – צריך לעבור על $n!$ סדרים.
- במקרים פרטיים, ניתן לנצל את מבנה הבעיה כדי לחשב את ערך שאפלי ביעילות.

- דוגמה: חלוקת עלויות של *מסלול המראה*.

- דוגמה נוספת: חלוקת *עלויות נסיעה* כאשר סדר הורדת הנוסעים *קבוע מראש*.
- Levinger, Hazon, Azaria (2019)

איך מחליטים מי יקבל שירות?

- עד כאן הנחנו שכולם נוסעים.
- אבל מה קורה אם העלות גבוהה מדי עבור חלק מהנוסעים - איך נחליט מי ייסע?
- **נתון**: לכל שחקן j, ערך הנסיעה הוא v_j.
- אם תת-קבוצה מסויימת נוסעת, *הרווחה החברתית* היא סכום הערכים של הנוסעים בתת-הקבוצה, פחות עלות הנסיעה.
- **דרוש**: כלל-החלטה שהוא:
  - א. יעיל פארטו – ממקסם רווחה החברתית.
  - ב. אמיתי – מעודד כל שחקן j לגלות את v_j.

מכרז לקבלת שירות בשיטת VCG

- התוצאות האפשריות – כל 2^n תת-הקבוצות.
- הערך של שחקן j הוא v_j אם נוסע, 0 לא.
- הערך של ה"נהג" הוא מינוס עלות הנסיעה.
- בוחרים את התוצאה הממקסמת את הסכום.
- תשלום שחקן j =: הסכום בלי j, פחות הסכום של אחרים (כולל ה"נהג") כש-j נמצא.

מכרז VCG הוא:

- יעיל-פארטו – לפי הגדרה.
- אמיתי – הוכחנו.
- הבעיה – גירעון! ראו גליון מצורף.

מכרז לקבלת שירות - מולין-שנקר (Moulin & Shenker, 2001)

קלט: כלל-תשלום. $p(S,j)$ = כמה משלם שחקן j אם הקבוצה שמקבלת שירות היא S.

אלגוריתם:

1) **איתחול**: כולם נכנסים לחדר.
2) אומרים לכל אחד כמה הוא צריך לשלם לפי p, בהנחה שכל הנוכחים בחדר משתתפים.
3) מי שחושב שזה יקר מדי - יוצא מהחדר.
4) אם מישהו יצא מהחדר - חזור לצעד 2.
5) אחרת - **סיים** ושלח את הנשארים למונית.

מכרז מולין-שנקר - אמיתיות

האם מכרז מולין-שנקר הוא אמיתי?

הגדרה: כלל תשלום p נקרא *מונוטוני* אם כשהקבוצה קטֵנה, התשלום גדֵל (או שווה):

$$\text{If } S \leq T \quad \text{then for all } j: \quad p(S,j) \geq p(T,j)$$

משפט: ההדמיה של מכרז מולין-שנקר עם כלל-תשלום מונוטוני היא אמיתית.

הוכחה: התשלום של כל הנוסעים הנשארים לא קטן ← לנוסע שיצא לא כדאי לחזור ← ההתנהגות האופטימלית של נוסע היא לצאת אם"ם התשלום הנוכחי גדול מהערך שלו. זה בדיוק מה שההדמיה עושה כשהוא אמיתי. ***

מכרז מולין-שנקר + ערך שאפלי

טוב, אז האם ערך שאפלי הוא מונוטוני?

הגדרה: פונקציית עלות נקראת *תת-מודולרית* אם יש לה עלות שולית *פוחתת*, כלומר:

If $S \leq T$, then $c(S \cup \{j\}) - c(S) \geq c(T \cup \{j\}) - c(T)$

משפט: במשחק עם עלות שולית פוחתת, כלל-התשלום של שאפלי הוא מונוטוני.

הוכחה: שחקן א – בקבוצה, שחקן ג – מצטרף.
נחשב את ערך שאפלי של שחקן א לפני ואחרי:
* *לפני (בלי ג)* – ממוצע על $n!$ סדרים.
* *אחרי (עם ג)* – ממוצע של $(n+1)!$ סדרים:
אם שחקן ג נכנס אחרי א – הערך שווה.
אם שחקן ג נכנס לפני א – הערך קטֵן או שווה. ***

מכרז מולין-שנקר + ערך שאפלי

יתרונות:

- מאוזן תקציבית;
- הוגן;
- אמיתי (אם יש עלות שולית פוחתת).

חיסרון:

- לא יעיל פארטו.
  - *הוכחה: שיעורי בית.*

מכרז למתן שירות – טְרִילֶמָּה

	יעיל פארטו	מאוזן תקציבית	אמיתי
VCG	כן	לא	כן
מולין-שנקר	לא	כן	כן
תשלום = ערך	כן	כן	לא