חלוקה הוגנת עם שיתוף מינימלי
Fair Division with Minimal Sharing

אראל סגל-הלוי

http://haris-aziz.blogspot.com/2015/05/new-results-about-adjusted-winner.html

חלוקת חפצים בדידים

כשהחפצים לא ניתנים לחלוקה, בדרך-כלל אי אפשר למצוא חלוקה פרופורציונלית וללא קנאה (דוגמה: בית).

פתרונות מקובלים:

1) הוספת כסף למערכת.
דוגמה: אלגוריתמי חלוקת שכר-דירה.

2) חלוקה ללא-קנאה-בקירוב.
דוגמה: חלוקת תכשיטים ומקומות בקורסים.

3) שיתוף מספר מינימלי של חפצים.
דוגמה: אלגוריתם "המנצח המתוקן".

איך "חותכים" חפץ בדיד?

החפץ שצריך "לחתוך" נשאר בבעלות משותפת.

לא קל, אבל בדרך-כלל אפשרי:

- **ילדים** - משמורת משותפת;
- **דירת מגורים** – השכרה וחלוקת הרווחים;
- **דירת נופש, רכב** – שימוש בזמנים שונים;
- **חפצים לא יקרים** - הגרלה;
- פשרה יצירתית כלשהי.

חלוקת חפצים בין שני אנשים

נתונים:

- שני שותפים *(למשל: דונאלד ואיוואנה)*.
- m חפצים או נושאים שיש עליהם מחלוקת.
- כל שותף מייחס ערך באחוזים לכל נושא.

האתגר – להחליט מי יקבל כל חפץ/נושא כך ש:

- לא תהיה קנאה.
- התוצאה תהיה יעילה פארטו.
- נצטרך לחתוך/לשתף חפץ אחד לכל היותר.

אלגוריתם "המנצח המתוקן"
(Adjusted Winner)
Brams and Taylor, 1996

א. סדר חפצים בסדר עולה של יחס הערכים:

ערך-עבור-*דונאלד* / ערך-עבור-*איוואנה*.

ב. אתחול: תן את כל החפצים לדונאלד.

ג. העבר חפצים לאיוואנה לפי הסדר, עד ש:

(1) הסכום של דונאלד שווה לסכום של איוואנה, **או** -

(2) יש חפץ אחד שאם "נחתוך" אותו הסכום ישתווה.

ראו גליון אלקטרוני מצורף winner.ods.

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

משפט: אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה יעילה פארטו.

הוכחה: יהי r יחס-הערכים של החפץ האחרון שהועבר מדונאלד לאיוואנה (או שותף ביניהם). נכפיל את הערכים של איוואנה ב-r. עכשיו בחלוקה הסופית, כל חפץ נמסר למי שנותן לו ניקוד מירבי. מכאן - החלוקה הסופית ממקסמת את הסכום: $r*v_i + v_d$.

כל חלוקה הממקסמת סכום של פונקציה עולה של הערכים, היא יעילה פארטו. ***

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

משפט: אלגוריתם “המנצח המתוקן” מחזיר תמיד חלוקה ללא קנאה.

הוכחה: לשני השותפים ניקוד שווה.

אילו הניקוד היה קטן מ-50, הם היו יכולים להתחלף וזה היה שיפור פארטו – סתירה למשפט הקודם. ***

שיתוף מספר מינימלי של חפצים

אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר חלוקה יעילה והוגנת עם שיתוף של **חפץ אחד לכל היותר**.

שיתוף זה לא נוח. לכן נעדיף חלוקה יעילה והוגנת **בלי שיתוף בכלל**, אם אפשר.

משפט: כל חלוקה יעילה פארטו בין שני אנשים, מתקבלת ע"י סידור החפצים *בסדר עולה של יחס הערכים*, ו"חיתוך" הסדרה בנקודה כלשהי.

הוכחה ->

שיתוף מספר מינימלי של חפצים

הוכחת המשפט: נניח שדונאלד קיבל את חפץ 1 או חלק ממנו, ואיוואנה קיבלה את חפץ 2 או חלק ממנו, ויחס הערכים הוא לא לפי הסדר הנכון:

$$v_{d1} / v_{i1} < v_{d2} / v_{i2}$$

$$v_{d1} / v_{d2} < v_{i1} / v_{i2}$$

נעביר קצת (y) חפץ 1 מדונאלד לאיוואנה, בתמורה לקצת (z) חפץ 2, כאשר:

$$v_{d1} / v_{d2} < z / y < v_{i1} / v_{i2}$$

זה שיפור פארטו (חזק), כי:

$$\boldsymbol{z \, v_{d2} > y \, v_{d1}} \qquad \boldsymbol{y \, v_{i1} > z \, v_{i2}}$$

שיתוף מספר מינימלי של חפצים

מסקנה: אם יחס-הערכים הוא *שונה* לכל חפץ, אז יש רק דרך *אחת* לסדר את החפצים לפי יחס-הערכים.

לכן, יש רק *m+1* חלוקות יעילות-פארטו בלי שיתופים.

אפשר לבדוק את כולן בזמן פולינומיאלי:

- אם אחת מהן ללא קנאה – מחזירים אותה;
- אחרת – מריצים את "המנצח המתוקן".

האלגוריתם הזה מוצא את החלוקה היעילה וללא-קנאה עם מספר השיתופים *המינימלי*. ***

הערה: אם יחס-הערכים הוא שווה לכל החפצים, אז בעיית השיתוף המינימלי היא NP-קשה.

שיתוף מינימלי עם n שחקנים

משפט 1. כשיש n שחקנים, ייתכן שנצטרך n-1 שיתופים כדי להשיג חלוקה הוגנת.

הוכחה. ייתכן שיש n-1 חפצים זהים.

משפט 2. אם קיימת *חלוקה א* עם מספר שיתופים כלשהו, אז קיימת *חלוקה ב* עם עד n-1 שיתופים, הנותנת לכל שחקן *לפחות* את הערך שהיה לו בחלוקה א.

מסקנות.

- קיימת חלוקה פרופורציונלית עם עד n-1 שיתופים.
- הדבר נכון גם כשלשחקנים יש זכויות *שונות*.

שיתוף מינימלי עם n שחקנים

הוכחת משפט 2. סימונים:

- t_i = הערך שקיבל שחקן i בחלוקה א.
- $t_i + y_i$ = הערך שיקבל שחקן i בחלוקה ב.
- v_{ij} = הערך ששחקן i מייחס לחפץ j.
- z_{ij} = החלק ששחקן i מקבל מחפץ j בחלוקה ב.

נמצא את חלוקה ב בעזרת תוכנית ליניארית:

Maximize $\quad v_{n1} \cdot z_{n1} + \ldots + v_{nm} \cdot z_{nm} \quad$ [value of player n]

Subject to:

$v_{i1} \cdot z_{i1} + \ldots + v_{im} \cdot z_{im} = t_i + y_i \quad$ for all i in 1,..,n-1

$z_{1j} + .. + z_{nj} = 1 \quad$ for all j in 1,..,m

$z_{ij} \geq 0 \quad$ for all i in 1,..,n & j in 1,..,m

$y_i \geq 0 \quad$ for all i in 1,..,n-1

משפט על תוכניות ליניאריות

משפט. נתונה תוכנית ליניארית **כלשהי**, עם N משתנים $x_1,\ldots,x_N$, ו-M אילוצי שיוויון, מהצורה:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & c_1x_1 + \ldots + c_Nx_N \\ \text{Subject to} & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\ & \ldots \\ & a_{M1}x_1 + \ldots + a_{MN}x_N = b_M \\ & x_i \geq 0 \qquad \text{for all } i \text{ in } 1,\ldots,N \end{array}$$

אם קיים לה פתרון אופטימלי כלשהו, אז קיים לה פתרון אופטימלי עם לכל היותר *M* משתנים שונים מאפס.

הרעיון. אם בוחרים M משתנים כלשהם, ומציבים 0 בשאר המשתנים, אז מקבלים מערכת של M משוואות ב-M נעלמים, ו"בדרך כלל" למערכת כזאת יש פתרון.

הערה: ניתן למצוא פתרון כזה בעזרת אלגוריתם "סימפלקס".

שיתוף מינימלי - המשך

Maximize $v_{n1} \cdot z_{n1} + \ldots + v_{nm} \cdot z_{nm}$

Subject to:

$\mathbf{v_{i1} \cdot z_{i1} + \ldots + v_{im} \cdot z_{im} = t_i + y_i}$ **for all i in 1,..,n-1**

$\mathbf{z_{1j} + .. + z_{nj} = 1}$ **for all j in 1,..,m**

$z_{ij} \geq 0$ for all i in 1,..,n & j in 1,..,m

$y_i \geq 0$ for all i in 1,..,n-1

בתוכנית למציאת חלוקה ב, יש $m+n-1$ אילוצי שיוויון.
לכן יש לה פתרון אופטימלי עם עד $m+n-1$ משתנים
(z_{ij}) שונים מאפס. אז יש לכל היותר $n-1$ חפצים
מתוך m, ששניים או יותר מהמשתנים שלהם שונים
מאפס. לכן: יש לכל היותר $n-1$ חפצים משותפים. ***

מסקנה

ניתן להקים ממשלה עם n מפלגות,
ולחלק את התיקים **בהגינות מדוייקת**
(לא בקירוב),
בהתאם לגדלים השונים של המפלגות,
כך שיהיו לכל היותר **n-1** תיקים עם רוטציה.