

## מטלה - חלוקת עלויות ומכרזי שירות

[שאלות שנחתכו בעריכה - לא להגשה].

### שאלה 1: חלוקת רווחי עסק

כדי להקים עסק, צריך מנהל אחד ו- $n$  עובדים.

הרווח של העסק הוא 1000 כפול מספר העובדים (אם יש מנהל) ו-0 (אם אין מנהל).

לפי כלל שאפלי, איך יתחלקו רווחי העסק בין המנהל לבין העובדים?

הזרכה: חשבו קודם את הערך עבור מנהל אחד ועובד אחד, ועבור מנהל אחד ושני עובדים, ואז הכלילו את הפתרון ל- $n$  עובדים.

### שאלה 4: פונקציה תת-מודולרית

**תזכורת:** פונקציה  $v$  על קבוצות נקראת תת-מודולרית (submodular) אם, לכל שתי קבוצות  $S, T$  ולכל איבר  $i$ , יש עלות שולית פוחתת:

$$\text{If } S \leq T, \text{ then } v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

**הגדרה:** פונקציה  $v$  על קבוצות נקראת תת-חיבורית (subadditive) אם, לכל שתי קבוצות  $S, T$ :

$$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$$

א. תנו דוגמה לפונקציה שהיא גם תת-אדיטיבית וגם תת-מודולרית.

ב. תנו דוגמה לפונקציה שהיא תת-אדיטיבית אבל לא תת-מודולרית.

ג. תנו דוגמה לפונקציה שהיא לא תת-אדיטיבית ולא תת-מודולרית.

ד. הוכיחו שכל פונקציה תת-מודולרית היא תת-אדיטיבית.

אם אתם מסתבכים תסתכלו כאן:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Utility\\_functions\\_on\\_indivisible\\_goods](https://en.wikipedia.org/wiki/Utility_functions_on_indivisible_goods)

### שאלה 6: מכרז VCG - איזון תקציבי

לפניכם גירסה משופרת של מכרז וק"ג, שאמורה להשיג איזון תקציבי.

המכרז מקבל כקלט כלל-תשלום  $p(S, i)$ , הקובע, עבור כל תת-קבוצה של נוסעים  $S$ , כמה ישלם כל נוסע  $i$  אם הקבוצה הזאת היא הקבוצה הנבחרת. הכלל צריך להיות מאוזן-תקציבית - לכל תת-קבוצה, סכום התשלומים של חברי הקבוצה שווה לעלות הנסיעה של תת-הקבוצה.

עבור כל נוסע  $i$  וכל תת-קבוצה  $S$ , הערך של  $i$  לבחירת הקבוצה  $S$  הוא:

- $p(S, i) - v[i]$  אם  $i$  נמצא בקבוצה (נסמן ערך זה ב  $u(i, S)$ ).
- אפס - אם  $i$  לא נמצא בקבוצה.

(שימו לב - בגירסה שלמדנו בכיתה, הערך של  $i$  לבחירת  $S$  היה  $v[i]$  אם  $i$  נמצא בקבוצה).  
בגירסה הזאת אין שחקן המייצג את ה"נהג".

המכרז בוחר את האפשרות  $S$  שבה סכום התועלות -  $u(i, S)$  - הוא הגבוה ביותר, ומחשב את התשלום של כל נוסע לפי כלל VCG.

- א. תנו דוגמה עם 2 נוסעים לפעולת המכרז, כאשר כלל-התשלום גובה סכום זהה מכל נוסע.
- ב. תנו דוגמה עם 2 נוסעים לפעולת המכרז, כאשר כלל-התשלום גובה מכל נוסע את ערך שאפלי.
- ג. תנו דוגמה שבה, לכל כלל-תשלום שנבחר, עלול להיות מצב שבו לאחד הנוסעים יש תועלת שלילית (הוא משלם יותר מהערך שלו).

## שאלה 5: מכרז מולין-שנקר - דוגמאות

- א. הראו דוגמה עם 2 או 3 שחקנים, שבה כלל-התשלום של שאפלי אינו מונוטוני. הראו את טבלת העלויות, חשבו את ערכי שאפלי לכל תת-קבוצה, והסבירו מדוע זה לא מונוטוני.
- ב. הראו דוגמה עם 2 או 3 שחקנים, שבה מכרז מולין-שנקר עם כלל-התשלום של שאפלי אינו אמיתי (אפשר להיעזר בסעיף א). הסבירו בפירוט מה יעשה המכרז בדוגמה זו, ומדוע זה לא אמיתי.
- ג. הראו דוגמה עם 2 או 3 שחקנים, שבה מכרז מולין-שנקר עם כלל-התשלום של שאפלי אינו יעיל-פארטו. הסבירו בפירוט מה יעשה המכרז בדוגמה זו, ומדוע זה לא יעיל-פארטו.

## שאלה 6: מכרז SN

מכרז SN בוחר תת-קבוצה של נוסעים באופן הבא:

- הרץ VCG: בחר את תת-הקבוצה הממקסמת את סכום ערכי-הנוסעים פחות עלות הנהג, וחשב את התשלום  $p_i$  שכל שחקן  $i$  צריך לשלם לפי נוסחת VCG.
- חשב את סכום התשלומים של כל השחקנים; נסמן סכום זה ב  $S$ .
- חשב את העלות של תת-הקבוצה הנבחרת; נסמן עלות זו ב  $C$ .
- גבה מכל שחקן  $i$  תשלום  $p_i * C / S$ .

מטרת ההכפלה בשלב האחרון היא לוודא שהמכרז הוא מאוזן תקציבית - סכום התשלומים של כל השחקנים אחרי ההכפלה שווה לעלות.

- א. האם מכרז SN אמיתי? הוכיחו או הפריכו.
- ב. האם מכרז SN יעיל פארטו (בהנחה שכל השחקנים אומרים אמת)? הוכיחו או הפריכו.

## שאלה 4: ערך שאפלי-שיויוני

בסקרי דעת-קהל שנעשו לאחרונה, התברר שאנשים רבים נוטים לתמוך בכלל-התשלום הבא, שנקרא "שאפלי-שיויוני" (egalitarian-Shapley):

- חשב את ערך שאפלי של כל שחקן;
  - חשב את העלות הממוצעת לכל שחקן (העלות הכוללת / מספר השחקנים);
  - גבה מכל שחקן את הממוצע בין א לבין ב (לדוגמה, אם העלות הכוללת 66, יש שלושה שחקנים, וערך שאפלי שלך הוא 32, אז התשלום שלך יהיה הממוצע בין 66/3 לבין 32, כלומר 27).
- הוכיחו שכלל-התשלום הזה מקיים בדיוק שני עקרונות מתוך שלושת העקרונות של שאפלי.
- מדוע לדעתכם לא מתקיים העקרון השלישי?

## שאלה 5: בעיית מסלול-ההמראה ובעיית שיתוף-הנסיעות

הראו שאפשר להגיע לנוסחה של התשלומים בבעיית מסלול-ההמראה, מתוך הנוסחה של התשלומים בבעיית שיתוף-הנסיעות עם סדר הורדה קבוע (כלומר בעיית מסלול-ההמראה היא מקרה פרטי של בעיית שיתוף-הנסיעות).

## שאלה 2: אלגוריתם אקראי לחישוב ערך שאפלי

כזכור, כשמספר השחקנים גדול, חישוב ישיר של ערך שאפלי עלול לקחת הרבה זמן. אחד הפתרונות הוא לחשב את ערך שאפלי בקירוב, ע"י האלגוריתם האקראי הבא:

- חזור הרבה פעמים:
    - בחר פרמוטציה אקראית  $P$
    - חשב את העלויות השוליות של כל השחקנים בפרמוטציה  $P$
  - חשב את הממוצע של כל העלויות השוליות בחישובים הקודמים.
- א. כיתבו תוכנית בפייתון המבצעת את האלגוריתם האקראי הנ"ל.
- ב. בידקו את התוכנית שלכם על בעיה כלשהי עם 3 שחקנים (למשל אחת הבעיות שפתרנו בשיעור). עד כמה התוצאות קרובות לתוצאות המדויקות?
- ג. בידקו את התוכנית שלכם על בעיה כלשהי של עלות מסלול-המראה, עם 30 שחקנים. עד כמה התוצאות קרובות לתוצאות המדויקות?

## שאלה 5: איחוד מפלגות

[נכתב לקראת הבחירות לכנסת, אדר א ה'תשע"ט]

- שלוש מפלגות קטנות שוקלות להתאחד למפלגה אחת לקראת הבחירות, אבל הן לא מצליחות להסכים על קביעת המקומות ברשימה המשותפת. סקרי דעת-קהל אמינים מראים ש:
- כל אחת מהמפלגות לא עוברת את אחוז החסימה כשהיא רצה לבד.
  - המפלגה המאוחדת מקבלת 10 מנדטים.
  - אם רק מפלגות א+ב מתאחדות, הן מקבלות 4 מנדטים; ב+ג - 5 מנדטים, ג+א - 6 מנדטים.
- עיצרו למפלגות למצוא פתרון הוגן לחלוקת המקומות בעשיריה הראשונה.