חלוקה הוגנת מלבד חפץ אחד

חפצים שונים וזכויות שוות

כשיש חפצים זהים וזכויות שוות, ברור לנו שכל שחקן צריך לקבל כמעט את אותו מספר חפצים – ההפרש צריך להיות לכל היותר 1. הכללה טבעית לעקרון זה כשהחפצים שונים היא:

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1" (Envy Free except 1, EF1) אם לכל שני שחקנים i, j קיים חפץ בסל של שחקן j, שאם נסיר אותו - אז שחקן i לא יקנא.

במקרה הפרטי של חפצים זהים, חלוקה היא EF1 אם-ורק-אם ההפרש בין מספרי החפצים שמקבל כל שחקן הוא לכל היותר 1.

האם תמיד קיימת חלוקה ***EF1***? התשובה היא כן. הנה אחד האלגוריתמים הפשוטים למציאת חלוקה כזאת; אלגוריתם שילדים משתמשים בו עד היום כדי לבחור שחקנים לקבוצות כדורגל. הוא נקרא באנגלית *round robin*. בעברית אפשר לקרוא לו "אלגוריתם הסֶבֶב":

1. מסדרים את השחקנים בסדר שרירותי כלשהו.
2. כל שחקן לוקח, מבין החפצים שנשארו, את החפץ שהוא הכי רוצה.
3. אם נשארים חפצים – חוזרים לשלב 2.

משפט: החלוקה המוחזרת ע"י אלגוריתם הסבב היא EF1.

הוכחה: קודם-כל נוכיח, שעבור השחקן הראשון בסבב (שחקן 1), החלוקה היא ללא-קנאה לגמרי. נשווה את הסל שמקבל שחקן 1 לסל שמקבל שחקן אחר כלשהו, נניח j. לכל חפץ x שנמצא בסל של שחקן j, נתאים את החפץ y ששחקן 1 בחר באותו סבב. כיוון ששחקן 1 בחר לפני שחקן j, החפץ x היה זמין כשהוא בחר את חפץ y, ומכאן שחפץ y שווה עבורו לפחות כמו חפץ x. נחבר את כל הערכים של החפצים x בסל של שחקן j, ואת כל הערכים של החפצים y בסל של שחקן 1, ונקבל שהסל של שחקן 1 שווה בעיניו לפחות כמו הסל של שחקן j.

עכשיו נתבונן בשחקן אחר כלשהו, i. אם נוריד מהסלים של השחקנים 1, 2, ..., i-1 את החפץ הראשון שהם בחרו, נקבל סדרה חדשה של בחירות, שבה שחקן i בוחר ראשון. לפי הפיסקה הקודמת, בסלים הנוצרים על-ידי בחירה זו, שחקן i אינו מקנא בכלל. לכן, בסלים הנוצרים ע"י הסדרה כולה, שחקן i אינו מקנא עד-כדי חפץ אחד – וזו בדיוק ההגדרה של חלוקה EF1. ***

חפצים שונים וזכויות שונות

עכשיו נשלב את שתי ההכללות: נניח שהחפצים שונים וגם הזכויות שונות. דוגמה לבעיה כזאת היא חלוקת תיקים בין מפלגות בקואליציה. בישראל, חלוקת התיקים נקבעת על-ידי משא-ומתן מייגע בין המפלגות, שיכול להימשך שבועות רבים, ועלול גם לגרום לכישלון בהרכבת ממשלה. אבל במדינות אחרות (כגון בצפון אירלנד, דנמרק, וכן בפרלמנט של האיחוד האירופי) משתמשים בשיטה אחרת: כל מפלגה בתורה בוחרת תיק, כאשר סֶבֶב הבחירות נקבע לפי גודלה של כל מפלגה.

כדי לקבוע את סדר בחירת התיקים, נשתמש באותו אלגוריתם שלמדנו לגבי חלוקת מושבים בשיטת-מחלק. נבחר פונקציה מונוטונית-עולה כלשהי f, ונבצע את הלולאה הבאה:

- כל עוד יש חפצים פנויים:
  - מחשבים, עבור כל שחקן, את המנה (הזכות) \ f(s), כאשר s הוא מספר החפצים הנוכחי של השחקן;

- ○ השחקן, שעבורו המנה הזאת גדולה ביותר, לוקח מבין החפצים שנשארו את החפץ שהוא הכי רוצה.

האלגוריתם הזה מכליל את שני האלגוריתמים הקודמים שלמדנו:

- כאשר הזכויות שוות והחפצים שונים, מקבלים את אלגוריתם הסֶבֶב – כי המנה תמיד תהיה גדולה יותר עבור שחקן שבחר פחות פעמים;
- כאשר הזכויות שונות והחפצים זהים, מקבלים את אלגוריתם שיטת-המחלק עם פונקציה f.

האלגוריתם מקיים תנאי-הגינות המכליל את התנאי EF1. כדי להסביר אותו, נגדיר קודם הכללה של חלוקה ללא קנאה עבור שחקנים עם זכויות שונות.

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה משוקללת" (באנגלית: Weighted envy-free או WEF), אם לכל שני שחקנים i, j עם זכויות w_i, w_j, מתקיים:

$$V_i(X_i)/w_i \geq V_i(X_j)/w_j.$$

כלומר: שחקן i מעריך את הסל שלו, ביחס למשקל שלו, לפחות כמו שהוא מעריך את הסל של כל שחקן אחר j, ביחס למשקל של j.

עכשיו נגדיר הכללה של EF1 לשחקנים עם זכויות שונות. במחשבה ראשונה נראה שהכללה הנכונה היא: לכל שני שחקנים i, j, קיים חפץ בסל של j, שאם נסיר אותו, אז יתקיים התנאי WEF. אבל זו לא האפשרות היחידה; ניתן להציג את EF1 גם באופן אחר. במקום להתייחס למצב היפותטי שאנחנו מסירים את החפץ מהסל של j, אפשר להתייחס למצב היפותטי שאנחנו משכפלים את החפץ אל הסל של i, או לחלופין משתפים את החפץ בין שני השחקנים כך שכל אחד מהם מקבל חצי ממנו. כאשר הזכויות שוות, כל המצבים ההיפותטיים האלה שקולים, כי בסופו של דבר, הקנאה נקבעת על-פי הפרש הערכים בין הסל של i לבין הסל של j – האם הביטוי $V_i(X_i) - V_i(X_j)$ חיובי או שלילי. אבל כאשר הזכויות שונות, המצבים האלה לא שקולים, כי הקנאה הממושקלת נקבעת על-ידי הפרש ממושקל של הערכים: $V_i(X_i)/w_i - V_i(X_j)/w_j$, ולכן יש חשיבות לשאלה אם מסירים חפץ משחקן אחד או מוסיפים חפץ לשחקן השני.

מתברר, שיש שלוש "שיטות מחלק", שכל אחת מהן, אם משתמשים בה כשיטה לבחירת חפצים ע"פ האלגוריתם שתואר למעלה, מבטיחה את אחת ההכללות לתנאי EF1.

משפט.

- שיטת אדאמס נותנת חלוקה שהיא ללא-קנאה-ממושקלת לאחר הסרת חפץ אחד (לכל שני שחקנים קיים חפץ, שאם מסירים אותו מהסל של שחקן אחד, אז מתקיים תנאי WEF עבור השחקן השני).
- שיטת ג'פרסון נותנת חלוקה שהיא ללא-קנאה-ממושקלת לאחר שיכפול חפץ אחד (לכל שני שחקנים קיים חפץ, שאם משכפלים אותו אל הסל של שחקן אחד, אז מתקיים תנאי WEF עבור שחקן זה).
- שיטת וובסטר נותנת חלוקה שהיא ללא-קנאה-ממושקלת לאחר שיתוף חפץ אחד (לכל שני שחקנים קיים חפץ, שאם משתפים אותו בין שני השחקנים, כך שכל אחד מהם מקבל ½ מערכו, אז מתקיים תנאי WEF).

כאמור, כשהזכויות שוות, כל ההכללות זהות ושקולות ל EF1.

הוכחת המשפט. נוכיח את כל שלוש הטענות יחד בכך שנתייחס לשיטת-מחלק כללית, עם פונקציית-מחלק $f(s)=s+y$. נתמקד בשני שחקנים כלשהם i, j, ונוכיח שהתנאי מתקיים עבור שחקן i ביחס לשחקן j, אחרי כל חפץ ששחקן j בוחר. נניח ששחקן j בחר בסך-הכל J חפצים. נחלק את סדרת הבחירות ל-J שלבים, כאשר כל שלב L כולל את כל הבחירות של שחקן i עד וכולל הבחירה ה-L של שחקן j. נשתמש בסימונים הבאים:

- T_L - מספר הפעמים ששחקן i בחר בשלב L (בין הבחירה ה $L-1$ לבין הבחירה ה-L של שחקן j). מספר זה יכול להיות אפס או גדול יותר.
- a_L = סכום הערכים שמייחס שחקן i לכל T_L החפצים שהוא בחר בשלב L (אפס או יותר).
- b_L = הערך שמייחס שחקן i לחפץ שבחר שחקן j בסוף שלב L.

בכל שלב L, שחקן i בוחר את T_L החפצים הטובים ביותר עבורו מאלה שנשארו. בפרט, הם טובים לפחות כמו החפצים ששחקן j עדיין לא בחר:

$$a_L \geq T_L * \max_{[r=L..J]} b_r$$

בכל שלב s, האלגוריתם שלנו נותן לשחקן j לבחור חפץ, כאשר לשחקן j יש $s-1$ חפצים, ולשחקן i יש: $T_1+...+T_s$ חפצים. לפי הגדרת שיטת-המחלק, משמעות הדבר היא ש:

$$w_j/(s+y-1) \geq w_i/(y + \mathrm{sum}_{[L=1..s]} T_L)$$

נסמן את יחס הזכויות ב- $R := w_i/w_j$. הביטוי למעלה שקול ל:

$$y + \mathrm{sum}_{[L=1..s]} T_L \geq R*(s+y-1) \qquad (1)$$

אי-שיוויון (1) מתייחס רק למספר החפצים שיש בידי כל שחקן. אנחנו צריכים להוכיח אי-שיוויון דומה עבור ערכי החפצים שבידי כל שחקן (הערכים בעיני שחקן i):

$$y * \max_{[r=1..s]} b_r + \mathrm{sum}_{[L=1..s]} a_L \geq R*(\mathrm{sum}_{[L=1..s]} b_L - (1-y)*b_1). \qquad (2)$$

מתברר, שכדי להוכיח את אי-שיוויון (2), צריך להוכיח טענה חזקה יותר:

$$y * \max_{[r=1..J]} b_r + \mathrm{sum}_{[L=1..s]} a_L \geq R*(\mathrm{sum}_{[L=1..s]} b_L - (1-y)*b_1) + (y+\mathrm{sum}_{[L=1..s]} T_L - R*(s+y-1))*\max_{[r=s..J]} b_r. \qquad (3)$$

טענה (3) חזקה יותר מטענה (2), כי הביטוי בשורה התחתונה הוא תמיד חיובי, בגלל אי-שיוויון (1).

הוכחת טענה (3) היא באינדוקציה על s, היא כוללת הרבה פיתוחים טכניים, ונשמיט אותה מכאן. מטענה (3) נובעת טענה (2), ואם נציב בה $s=J$ ונקבל:

$$y * \max_{[r=1..J]} b_r + \mathrm{sum}_{[L=1..J]} a_L \geq R*(\mathrm{sum}_{[L=1..J]} b_L - (1-y)*b_1). \qquad (4)$$

הביטוי "$\mathrm{sum}_{[L=1..J]} a_L$" הוא הערך הכולל שמייחס שחקן i לסל שקיבל. הביטוי "$\mathrm{sum}_{[L=1..J]} b_L$" הוא הערך הכולל שמייחס שחקן i לסל של שחקן j. הביטוי "$\max_{[r=1..J]} b_r$" הוא הערך הגבוה ביותר שמייחס שחקן i לחפץ כלשהו בסל של שחקן j; נסמן ערך זה ב $V_i(g_j)$. שימו לב שערך זה גדול לפחות כמו b_1, שהוא ערכו של אחד החפצים בסל של שחקן j. לכן הביטוי (4) שקול ל:

$$[y * V_i(g_j) + V_i(X_i)] / w_i \geq [V_i(X_j) - (1-y)*V_i(g_j)] / w_j. \qquad (5)$$

הביטוי (5) דומה לתנאי של חלוקה ללא-קנאה-ממושקלת (WEF), פרט לעובדה שאנחנו מורידים מהסל של שחקן j, חלק כלשהו (1 פחות y) של חפץ g_j, ובמקביל, מוסיפים לסל של שחקן i, חלק כלשהו (y) של אותו חפץ g_j. עכשיו נציב את ערכי y המתאימים לשלושת השיטות שנזכרו במשפט:

- עבור שיטת אדאמס $y=0$, ואנחנו מקבלים שהחלוקה היא WEF לאחר הורדת חפץ כלשהו מהסל של שחקן j;
- עבור שיטת ג'פרסון $y=1$, ואנחנו מקבלים שהחלוקה היא WEF לאחר שכפול חפץ כלשהו לסל של שחקן i;
- עבור שיטת וובסטר $y=1/2$, ואנחנו מקבלים שהחלוקה היא WEF לאחר שיתוף חפץ כלשהו בין שחקן i לשחקן j.

***

ראינו שלוש שיטות שונות, כל אחת מהן מבטיחה הכללה אחרת של התנאי EF1. למעשה, מהוכחת המשפט למעלה נובע שיש אינסוף הכללות – עבור כל ערך של y מקבלים הכללה אחרת. האם אפשר להבטיח בו-זמנית שתי הכללות כאלו (עבור ערכים שונים של y)? התשובה היא לא.

משפט. קיימים מצבים שבהם אף חלוקה לא מקיימת בו-זמנית שתי הכללות של WEF מאלו שנזכרו במשפט הקודם.

הוכחה. המשפט מתקיים אפילו במקרה הפשוט ביותר שבו יש m חפצים זהים ושני שחקנים. נניח שלשחקן 1 יש זכות 1 ולשחקן 2 יש זכות N. נניח שאנחנו רוצים לקיים בו-זמנית שתי הכללות של "הסרת 1 פחות y והוספת y": אחת עם פרמטר y_1 ואחת עם פרמטר y_2, ונניח בלי הגבלת הכלליות ש- $y_1<y_2$. נבחר את N כך שיתקיימו שני אי-השיוויונים הבאים:

$$1 + (m-1)/y_2 \; < \; N \; < \; 1 + (m-1)/y_1$$

כיוון ש- $y_1<y_2$, עבור m מספיק גדול, התחום כולל לפחות מספר שלם אחד, וניתן לבחור N שלם כלשהו הנמצא בתוך התחום.

לפי הכללת תנאי WEF עם פרמטר y_1, שחקן 1 חייב לקבל חפץ אחד - כי אם יקבל אפס חפצים, תנאי WEF לא יתקיים גם אם נוסיף לו y_1 ונוריד 1 פחות y_1 משחקן 2:

$$N < 1 + (m-1)/y_1$$

$$N < (m-1+y_1)/y_1$$

$$(0+y_1)/1 < (m-(1-y_1))/N$$

לכן שחקן 2 מקבל לכל היותר m-1 חפצים. אבל אז תנאי WEF עם פרמטר y_2 לא מתקיים עבורו – הוא "מקנא" (קנאה משוקללת) בשחקן 1 גם אם נוסיף לו y_2 ונוריד 1 פחות y_2 משחקן 2:

$$1 + (m-1)/y_2 < N$$

$$(m-1+y_2)/y_2 < N$$

$$(m-1+y_2)/N < y_2 = (1-(1-y_2))/1$$

מכאן, שאי אפשר לקיים את שני התנאים יחד עבור שני השחקנים. ***

המשפט האחרון מעורר את השאלה: באיזו הכללה לבחור? כמו בבעיית חלוקת המושבים, שיטת אדאמס (וכן התנאי של "WEF עד כדי הסרת חפץ") טובה יותר לשחקנים עם זכויות קטנות, שיטת ג'פרסון (וכן התנאי של "WEF עד כדי שיכפול חפץ") טובה יותר לשחקנים עם זכויות גדולות, ושיטת וובסטר (וכן התנאי של "WEF עד כדי שיתוף חפץ") מאוזנת. כשמחלקים חפצים בין אנשים, נראה ששיטת וובסטר עדיפה, אולם כשמחלקים תיקים בין מפלגות בקואליציה, בדרך-כלל רוצים לתת עדיפות למפלגות קטנות כדי שיקבלו ייצוג, ולכן נראה ששיטת אדאמס עדיפה.

עם זאת, העובדה שיש כל-כך הרבה שיטות מראה, שאולי כל גישת ה"הגינות המקורבת" לא מתאימה למצבים שבהם יש חשיבות רבה לכל חפץ (כמו בבחירת תיקים בממשלה), ודרושה גישה אחרת. בשיעור הבא נראה גישה אחרת, שמטרתה להשיג הגינות מדוייקת.

מקורות

- *Chakraborty, Igarashi, Suksompong, Zick (2021). "Weighted Envy-Freeness in Indivisible Item Allocation".*
- *Chakraborty, Schmidt-Kraeplin, Suksompong (2021). "Picking Sequences and Monotonicity in Weighted Fair Division".*

סיכם: אראל סגל-הלוי.