

מטלה - חלוקה הוגנת ויעילה

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול.

* שאלה 1: חלוקה אגליטרית עם פייתון

תזכורת: בבעיית החלוקה שלמדנו בכיתה, יש n אנשים ו- m משאבים, וכל אדם מייחס ערך לכל משאב.

ניתן לייצג כל בעיה כזאת כמטריצה עם n שורות ו- m עמודות, שבה הערך בשורה i ועמודה j הוא הערך שמייחס אדם i למשאב j .

כיתבו פונקציה בפייתון, בעזרת `cvxpy`, המקבלת כקלט מטריצה כזאת (כללית), וכותבת למסך תיאור של חלוקה אגליטרית. לדוגמה, אם הקלט הוא (כמו הדוגמה במצגת):

```
[[81, 19, 1],  
 [70, 1, 29]]
```

אז הפלט הוא (בקירוב):

```
Agent #1 gets 0.47 of resource #1, 1.0 of resource #2, and 0.0 of  
resource #3.
```

```
Agent #2 gets 0.53 of resource #1, 0.0 of resource #2, and 1.0 of  
resource #3.
```

שאלה 2: קריטריון לקסימין

א. כתבו קוד בשפת פייתון, המקבל שני וקטורים באותו אורך, ומשווה ביניהם לפי קריטריון לקסימין. כותרת הפונקציה:

```
def is_leximin_better (x: list, y: list) -> bool  
    # return true iff x is leximin-better than y.
```

ב. כתבו בדיקות-יחידה לפונקציה בעזרת `doctest`. הדגמה של כתיבת בדיקות `doctest` בפייתון ניתן למצוא כאן: https://github.com/erelsgl/fairpy/blob/master/cake/cut_and_choose.py

שאלה 3: יעילות-פארטו חלשה וחזקה

הגדרות:

- מצב א נקרא **שיפור פארטו חזק** של מצב ב, אם מצב א טוב יותר לכל המשתתפים.
- מצב נקרא **יעיל פארטו חלש** אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור-פארטו-חזק שלו.

א. תנו דוגמה לחלוקה שהיא יעילה-פארטו-חלש אבל לא יעילה-פארטו.

ב. הוכיחו, שכל חלוקה אגליטרית היא יעילה-פארטו-חלש.

ג. הוכיחו, שאם פונקציות הערך של כל השחקנים הן חיוביות ממש בכל נקודה ונקודה בעוגה, אז כל חלוקה יעילה-פארטו-חלש היא גם יעילה-פארטו.

שאלה 4: חלוקה הוגנת ויעילה עם נייר ועט

נתונה בעיית חלוקת משאבים עם הערכים הבאים:

- עמי: פלדה 1, נפט 0.

- תמי: פלדה t , נפט 1 פחות t

כאשר t הוא פרמטר כלשהו בין 0 ל-1.

- א. חשבו חלוקה הממקסמת את סכום הערכים, כפונקציה של t . עבור איזה t החלוקה ללא קנאה?
- ב. חשבו חלוקה הממקסמת את סכום השורשים, כפונקציה של t . עבור איזה t החלוקה ללא קנאה?
- ג. חשבו חלוקה הממקסמת את סכום הלוגריתמים, כפונקציה של t . עבור איזה t החלוקה ללא קנאה?

* שאלה 5: מיקסום סכום הערכים תחת אילוצי הגינות

נתונה בעיית אופטימיזציה:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} && V_1(X_1) + V_2(X_2) \\ & \text{such that} && (X_1, X_2) \text{ is a partition} \\ & && \text{and } V_1(X_1) \geq 1/2 \text{ and } V_2(X_2) \geq 1/2 \end{aligned}$$

- א. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה פרופורציונלית.
- ב. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה יעילה-פארטו.
- ג. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה ללא-קנאה.