מטלה 5 – שאלה 2: חלוקת תורנויות בדידות – נעה מנצבך

א. התנאי של EF1 אומר שאם לכל 2 משתתפים א',ב' קיים חפץ כלשהו, שאם נוריד מהסל של ב', אז שחקן א לא יקנא בו. תנאי זה לא מתקיים כאשר לחפצים יש ערך שלילי מאחר ואם נוריד חפץ עם ערך שלילי מהסל של ב' אזי כעת סכום החפצים שבסל שלו **גדול** יותר ולכן שחקן א' לא רק שיקנא בו, הוא **יקנא בו יותר.**

לדוגמה:

	חפץ 1	חפץ 2	סה"כ
שחקן א	-5	-2	**-7**
שחקן ב	-3	-2	**-5**

ניתן לראות ששחקן א' מקנא בשחקן ב' ($-7 < -5$) כעת לא משנה איזה חפץ נוריד מהסל של ב', שחקן א' תמיד יקנא בו, כי תמיד מגדילים את הערך של ב'. (אם נוריד את 3- , אז הערך יהיה 2- ושחקן א עדיין יקנא, ואם נוריד את 2- אז הערך יהיה 3- ועדיין שחקן א' יקנא).

ב. תנאי חדש: חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1" אם לכל שני משתתפים א,ב, קיים חפץ כלשהו מהסל של א', שאם **נסיר** אותו, שחקן א' לא יקנא בשחקן ב'.

ג.

אלגוריתם הסֶבֶב (round robin)

1. מסדרים את השחקנים בסדר שרירותי כלשהו.
2. כל שחקן לוקח, מבין החפצים שנשארו, את החפץ שהוא הכי רוצה.
3. אם נשארו חפצים – חוזרים לשלב 2.

משפט: אלגוריתם הסבב מחזיר חלוקה EF1.

הוכחה:

נוכיח את תנאי EF1 לכל שני שחקנים א,ב: נניח בה"כ ששחקן א מופיע בסבב לפני שחקן ב.

נחלק ל2 מקרים:

<u>מקרה ראשון: כמות החפצים מתחלקת באופן שווה.</u>

- שחקן א' לא מקנא כלל: על כל חפץ ששחקן ב' בחר, שחקן א' בחר לפניו.
- כעת נניח שמורידים מהסל של ב' את החפץ האחרון שבחר יהי זה x. מכאן שלשחקן א' יש חפץ אחד יותר מלשחקן ב'. ניתן להשוות את זה לכך ששחקן ב' קיבל בסבב האחרון חפץ עם שווי 0 , כלומר V(x)=0. מכאן ניתן להסיק שחפץ x יותר שווה מהחפץ הראשון ששחקן א' בחר (כי ערכו שלילי). נשווה כעת את יתר הסל. לכל חפץ y שנשאר בסל של שחקן ב' (חוץ מx) נתאים את החפץ z ששחקן א' בחר בסבב <u>שאחריו</u>. כיוון ששחקן ב' בחר חפץ זה לפני שחקן א' הוא שווה בעיניו לפחות כמו חפץ z. נחבר את כל הערכים של y בסל של שחקן ב', ואת כל הערכים של החפצים z של שחקן 1. ונקבל שהסל של שחקן ב' שווה בעיניו לפחות כמו הסל של שחקן א'.

  לכן החלוקה היא EF1 גם עבור שחקן ב'.

<u>מקרה שני: שחקן א' קיבל חפץ אחד יותר משחקן ב'.</u>

- שחקן ב' לא מקנא – בדומה להסבר הקודם, בו הורדנו חפץ לשחקן ב' (ולשחקן א' יש חפץ אחד יותר).
- כעת נניח שמורידים מהסל של א' את החפץ האחרון שבחר יהיה זה x. מכאן שכמות החפצים כעת היא שווה. על כל חפץ שנשאר בסל של א' , שחקן ב' בחר אחריו.

  לכן החלוקה היא EF1 גם עבור שחקן א'.

ד. <u>טענה</u>: כשמחלקים חפצים עם ערך חיובי, אלגוריתם "הסבב" מבטיח שהשחקן שבוחר ראשון לא יקנא בכלל.

נראה שטענה זו לא מתקיימת עבור תורניות (חפצים עם ערך שלילי) ע"י דוגמה נגדית הממחישה זאת.
הטענה לא תתקיים כאשר כמות התורניות לא מתחלקות באופן שווה בין כל השחקנים, כלומר שחקן א' (שבחר ראשון) ייאלץ לבחור תורנות נוספת.

לדוגמה:
נניח שיש לנו 5 תורנויות ו2 שחקנים. (ובה"כ שחקן א מופיע בסבב לפני שחקן ב'.)

-1	-2	-3	-4	-5

שחקן א' בוחר את התורנות הקצרה ביותר: -1

-1	-2	-3	-4	-5

שחקן ב' בוחר את התורנות הקצרה ביותר: -2

-1	-2	-3	-4	-5

נמשיך כך עד שיגיע שוב תורו של שחקן א' לבחור, והוא יאלץ לקחת את התורנות האחרונה (-5).

-1	-2	-3	-4	-5

קיבלנו שהסכום של שחקן א' הוא -9 לעומת הסכום של שחקן ב' שהוא -6.
מכאן ששחקן א' מקנא בשחקן ב'.

לעומת זאת כאשר החפצים בעלי ערך חיובי, שחקן א' "יישמח" לקבל חפץ נוסף, כי כך הערך שלו יגדל ולכן לא יקנא כלל בשחקן ב' גם כאשר ייאלץ לקחת חפץ נוסף.

ה. על מנת לתקן את הבעיה מסעיף ד', נבצע רדוקציה למקרה בו כמות החפצים מתחלקת באופן שווה בין כל השחקנים.
נעשה זאת ע"י הוספת חפצי dummy השווים 0 על מנת להשלים את כמות החפצים כך שתתחלק באופן שווה.
לדוגמה- אם יש 2 שחקנים ו3 חפצים, נוסיף חפץ נוסף בשווי 0 ואז נבצע את החלוקה עפ"י האלגוריתם.

מכאן שקיבלנו את המקרה הראשון מסעיף ג' בו כמות החפצים שווה. במקרה זה <u>שחקן א' לא מקנא בכלל</u> כי על כל חפץ ששחקן ב' בחר, שחקן א' בחר לפניו. והחלוקה היא EF1 גם עבור שחקן ב' (לפי ההוכחה מסעיף ג', מקרה 1).