

חלוקה הוגנת של

חפצים בדידים

Fair Indivisible Item
Allocation

אראל סגל-הלוי

חלוקת חפצים בדידים

כשהחפצים לא ניתנים לחלוקה, בדרך-כלל אי אפשר למצוא חלוקה פרופורציונלית וללא קנאה (דוגמה: שני שחקנים, מס' איזוגי שם חפצים).

פתרונות מקובלים:

(1) תשלומים. דוגמה:

חלוקת חדרים ושכר-דירה.

(2) קירובים. דוגמה:

חלוקת ממתקים, חלוקת מקומות בקורסים.

(3) שיתופים. חלוקת מספר מינימלי של חפצים.

דוגמה: חלוקת ירושות.

חלוקה הוגנת בקירוב

מקרה פשוט:

- 99 חפצים זהים.

- 2 שחקנים עם זכויות שוות.

מה הן החלוקות שאפשר לקרוא להן "הוגנות בקירוב"?

- 50:49 או 49:50.

- בכל חלוקה אחרת, יש חוסר-הגינות שאי-אפשר להצדיק בכך שהחפצים בדידים.

חלוקה הוגנת בקירוב

מקרה פשוט:

- m חפצים זהים.

- n שחקנים עם זכויות שוות.

מה הן החלוקות שאפשר לקרוא להן "הוגנות בקירוב"?

- כל אחד מקבל m/n מעוגל למטה או למעלה.

- בכל חלוקה אחרת, יש חוסר-הגינות שאי-אפשר להצדיק בכך שהחפצים בדידים.

חלוקה הוגנת בקירוב - הכללות

א. חפצים זהים – זכויות **שונות**.

ב. חפצים **שונים** – זכויות **שוות**.

ג. חפצים **שונים** – זכויות **שונות**.

חפצים זהים – זכויות שונות

בעיית חלוקת המושבים (apportionment):

- איך לחלק את 120 המושבים בכנסת בין המפלגות, באופן יחסי למספר קולותיהן?



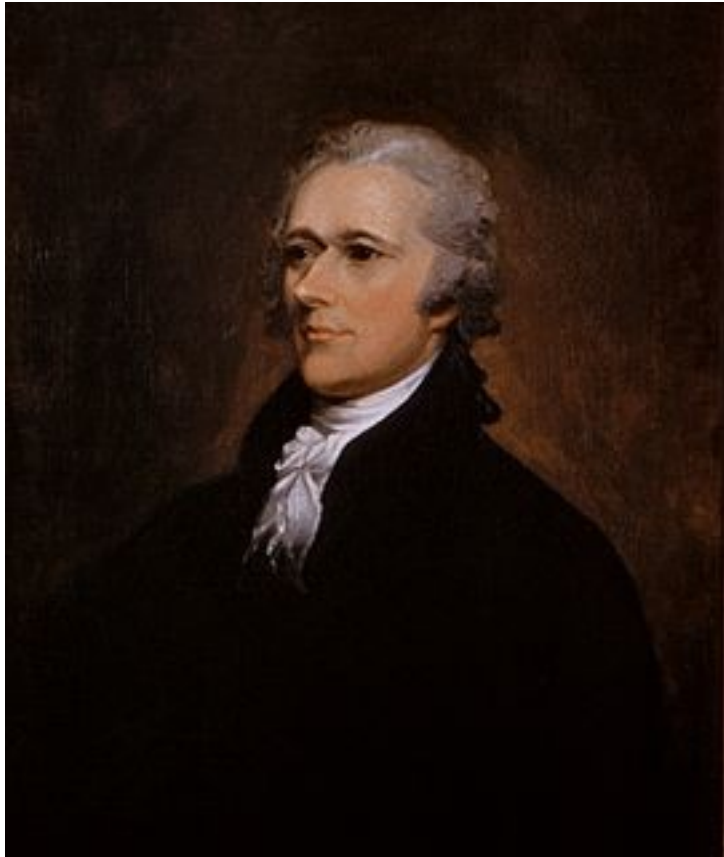
בעיית חלוקת המושבים - דוגמה

- שתי מפלגות.
- מפלגה א: $68.7/120$ מכלל הקולות;
- מפלגה ב: $51.3/120$ מכלל הקולות.
- מהי חלוקה הוגנת של 120 המושבים?
- $51:69$
- מעגלים לשלם הקרוב ביותר.

בעיית חלוקת המושבים - הכללה

- שלוש מפלגות.
- א: 69.4, ב: 30.35, ג: 20.25
- מהי חלוקה הוגנת של 120 המושבים?
- עיגול לשלם הקרוב ביותר יוצא רק 119!
- איך נכליל את העקרון "עיגול לשלם הקרוב ביותר" למספר כלשהו של מפלגות?

אלגוריתם המילטון - Hamilton



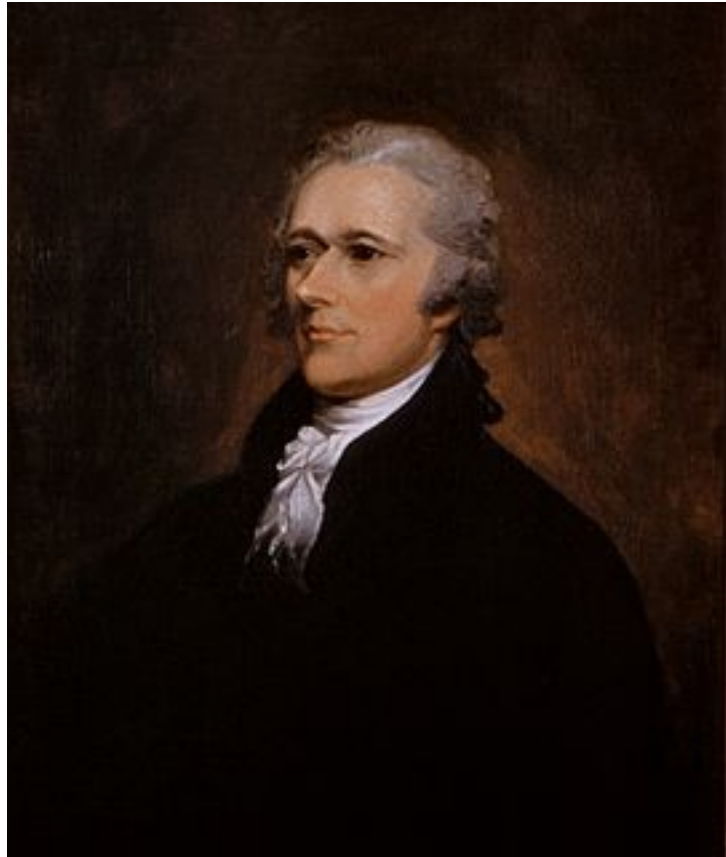
- נותנים לכל מפלגה את מספר-המושבים המדוייק שלה מעוגל כלפי מטה.
- מחלקים את המושבים העודפים לפי סדר יורד של השארית.

א: 69.4, ב: 30.35, ג: 20.25

א: 69, ב: 30, ג: 20

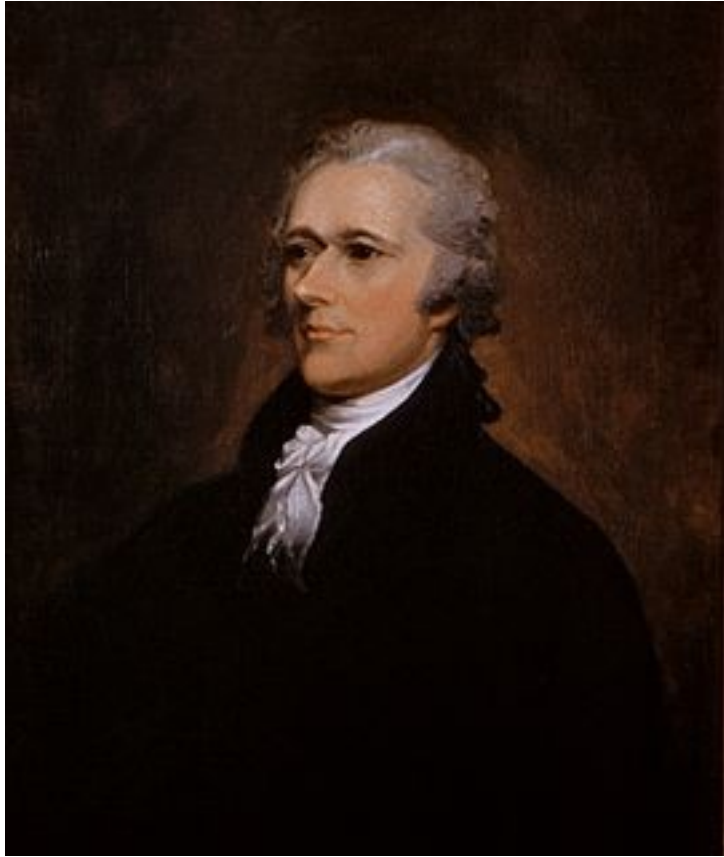
א: 70, ב: 30, ג: 20

אלגוריתם המילטון - Hamilton



- היה בשימוש בישראל
מהבחירות השניות עד
הבחירות השביעיות.
- היה בשימוש בארה"ב בין
1852 ל 1900.
- עדיין בשימוש ברוסיה,
אוקראינה, ליטא, תוניס,
נמיביה, טייוואן, הונג-קונג.
- מה הבעיה איתו?

אלגוריתם המילטון - חוסר-עקביות



- 5 מושבים, 500 בוחרים
- א: 40, ב: 135, ג: 325
- המילטון:

- א: 1, ב: 1, ג: 3

- מפלגות א, ב קיבלו ביחד 175 קולות ו-2 מושבים.

- מהי חלוקה הוגנת של 2 המושבים ביניהן?

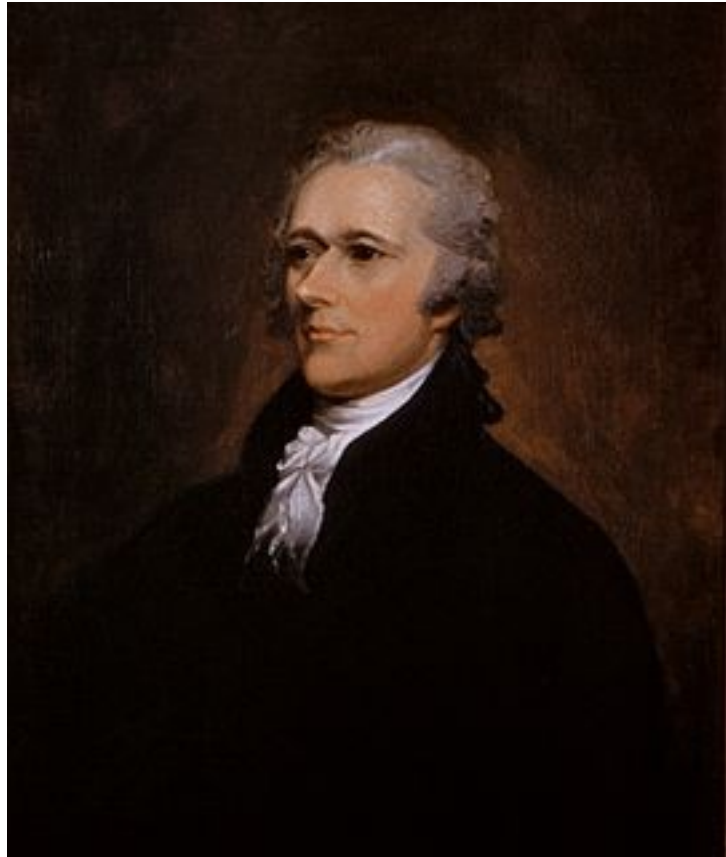
- א: $0.457 = 40/175 * 2$

- ב: $1.543 = 135/175 * 2$

למפלגה א מגיע 0

למפלגה ב מגיע 2!

אלגוריתם המילטון - אסטרטגיה



- 5 מושבים, 500 בוחרים
- א: 25, ב: 140, ג: 335
- המילטון:

- א: 0, ב: 2, ג: 3

- אם מפלגה א פורשת,
ותומכיה נשארים בבית -

- $140 * 5 / 475 = 1.47$

- $335 * 5 / 475 = 3.53$

- א: 0, ב: 1, ג: 4

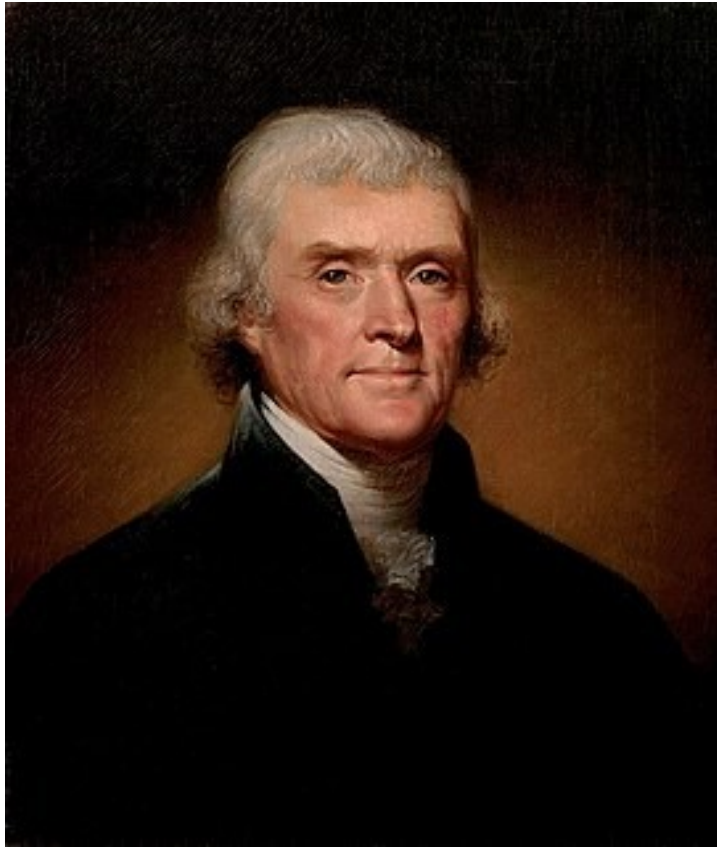
מפלגה א בלי מושבים
השפיעה על חלוקת
המושבים!

עקביות

הגדרה. אלגוריתם לחלוקת-מושבים נקרא עקבי אם עבור כל תת-קבוצה X של מפלגות, שקיבלו ביחד n מושבים בחלוקה הכללית – אם נשתמש באותו אלגוריתם כדי לחלק את n המושבים בין המפלגות בקבוצה X בלבד, נקבל אותה חלוקה בדיוק כמו בחלוקה הכללית.

אלגוריתם המילטון אינו עקבי.
האם קיים אלגוריתם עקבי?

אלגוריתם ג'פרסון - Jefferson



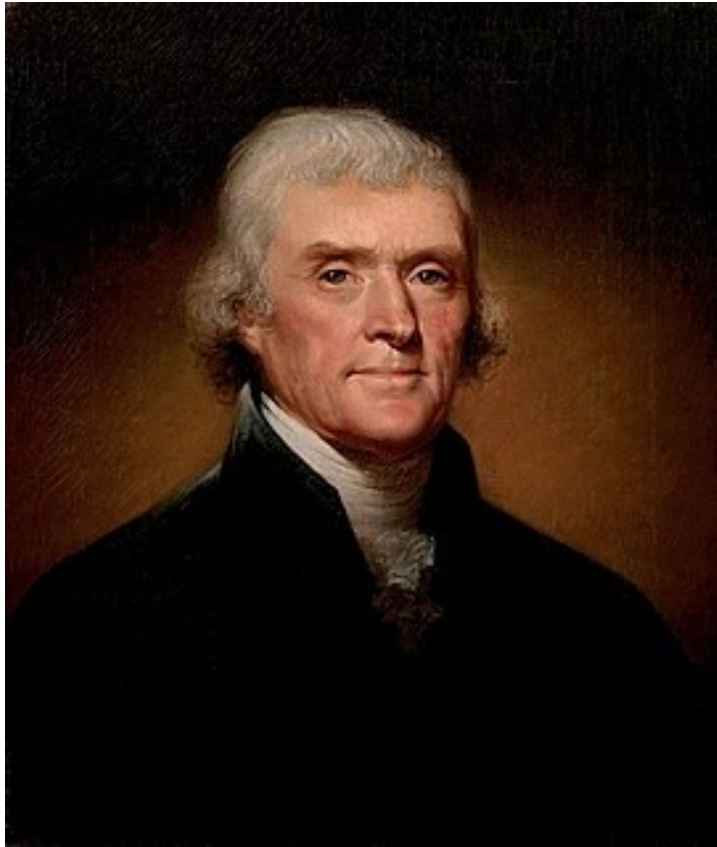
- אתחול: כל מפלגה מקבלת 0
- כל עוד יש מושבים:
- מחשבים, לכל מפלגה:
(מספר קולות)

(מספר מושבים נוכחי + 1)

- נותנים את המושב הבא
למפלגה שהמנה שלה
גדולה ביותר.

אלגוריתם ג'פרסון - דוגמה

5 מושבים, 500 בוחרים. א: 40, ב: 135, ג: 325.



• חלוקה: 0 0 0

• מנות: 325, 135, 40

• חלוקה: 1 0 0

• מנות: 162.5, 135, 40

• חלוקה: 2 0 0

• מנות: 108.33, 135, 40

• חלוקה: 2 1 0

• מנות: 108.33, 67.5, 40

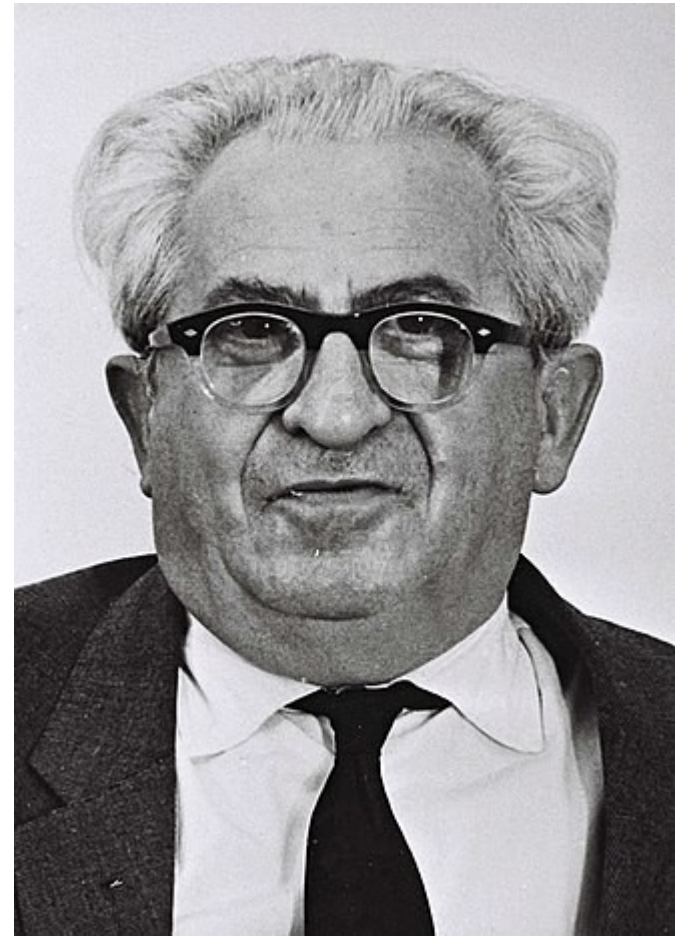
• חלוקה: 3 1 0

• מנות: 80.25, 67.5, 40

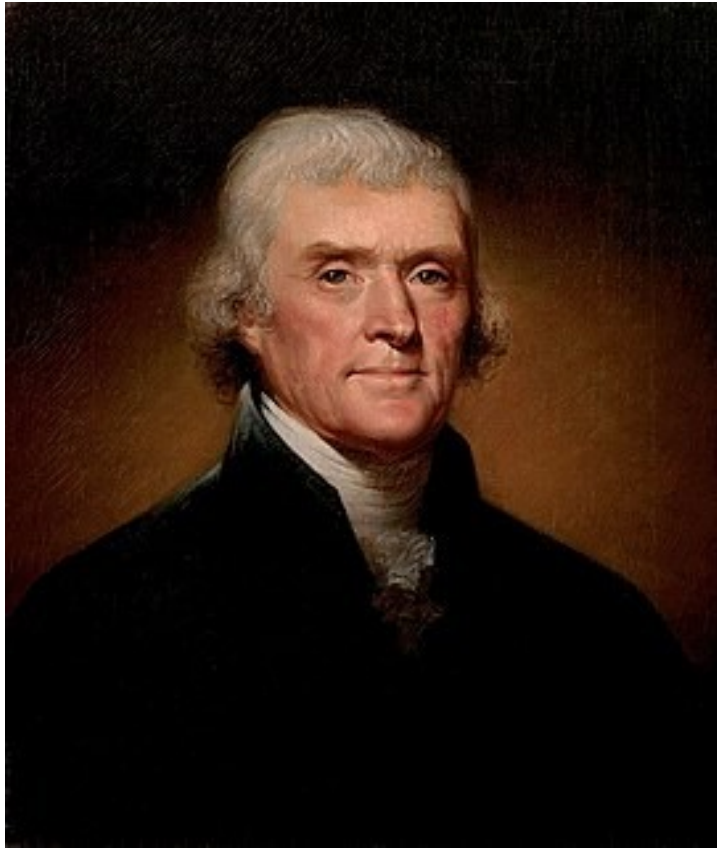
• חלוקה: 4 1 0

אלגוריתם ג'פרסון = חוק בדד-עופר

- בשימוש בישראל החל מהכנסת השמינית –
חוק בדד-עופר - ועד היום.
- בשימוש בעוד עשרות מדינות בעולם.



אלגוריתם ג'פרסון - עקביות



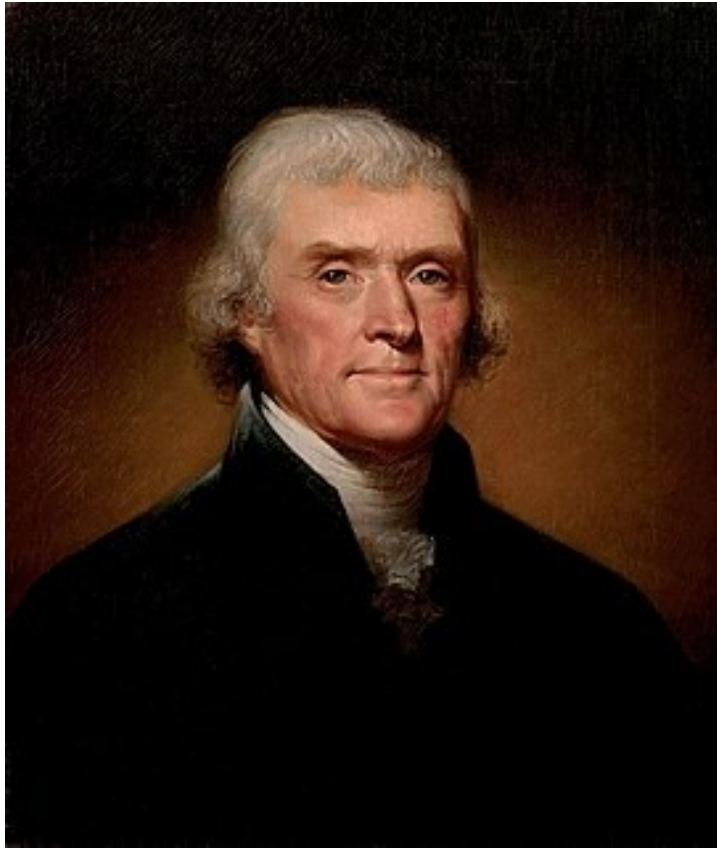
גגאבגבאגבאא

אב בבאא באא

- **משפט.** אלגוריתם ג'פרסון עקבי.
- **הוכחה.** נסתכל על סדרת המפלגות המקבלות מושבים. נניח שמוחקים מהסדרה חלק מהמפלגות, עם המושבים שקיבלו. סדר חלוקת המושבים למפלגות הנותרות נשאר זהה – עדיין, המפלגה המקבלת את המושב הבא היא המפלגה שהמנה (מספר קולות) / (מספר מושבים נוכחי + 1) שלה היא הגדולה ביותר. ***

אלגוריתם ג'פרסון - הגינות

5 מושבים, 500 בוחרים. א: 160, ב: 340.



- המספר המדויק: 1.6 3.4
- עיגלנו הפוך מהכיוון הנכון!
- נראה לא הוגן.

- חלוקה: 0 0
- מנות: 160, 340
- חלוקה: 0 1
- מנות: 160, 170
- חלוקה: 0 2
- מנות: 160, 113
- חלוקה: 1 2
- מנות: 80, 113
- חלוקה: 1 3
- מנות: 80, 85
- חלוקה: 1 4

עקביות והגינות

האם קיים אלגוריתם שהוא גם עקבי,
וגם הוגן (= מעגל לכיוון הנכון)
עבור לכל זוג של מפלגות?

שיטות מחלק – divisor methods

נכליל את שיטת ג'פרסון באופן הבא:

- אתחול: כל מפלגה מקבלת 0
- כל עוד יש מושבים:
- מחשבים, לכל מפלגה:
(מספר קולות)

נבחר פונקציה
כלשהי f ,
המייחסת לכל
מספר שלם s ,
מספר ממשי
כלשהו בתחום
 $[s, s+1]$.

-
- (מספר מושבים נוכחי) f
- נותנים את המושב הבא
למפלגה שהמנה שלה
גדולה ביותר.

שיטת ג'פרסון = שיטת-מחלק עם $f(s)=s+1$.

שיטות מחלק - עקביות

• **משפט.** לכל פונקציה f , שיטת-המחלק עם פונקציה f היא עקבית.

• **הוכחה** (בדיוק כמו שיטת ג'פרסון). נסתכל על סדרת המפלגות המקבלות מושבים. נניח שמוחקים מהסדרה חלק מהמפלגות, עם המושבים שקיבלו. סדר חלוקת המושבים למפלגות הנותרות נשאר זהה. ***

שיטות-מחלק - דוגמאות

• שיטת אדאמס – $f(s)=s$

• שיטת דין – $f(s)=2/(1/s+1/(s+1))$

• שיטת הנטינגטון-היל – $f(s)=\text{sqrt}(s*(s+1))$

• שיטת וובסטר – $f(s)=s+0.5$

• שיטת ג'פרסון – $f(s)=s+1$

• במה לבחור?!

• לצורך הדיון נתמקד בשיטות הפשוטות יותר:

אדאמס, וובסטר, ג'פרסון. --<

שיטות-מחלק - הטיות

3 מושבים, 300 בוחרים. א: 210, ב: 50, ג: 40

• שיטת אדאמס: 1 1 1

• שיטת וובסטר: 0 1 2

• שיטת ג'פרסון: 0 0 3

זה לא במקרה <--

שיטות-מחלק - הטיות

משפט. לכל y , בשיטת-מחלק עם פונקציה $f(s)=s+y$, אם מספר המושבים המדויק המגיע למפלגה א הוא $a +$ שארית, ולמפלגה ב הוא $b +$ שארית, אז מפלגה א תקבל את המושב הנוסף (ה- $a+1$) אם ורק אם השארית של מפלגה א גדולה מ:
$$0.5 - (a-b)*(y-0.5)/(a+b+2y)$$

מסקנות.

- אם $y < 0.5$, הסף $0.5 >$ עבור המפלגה הקטנה.
- אם $y > 0.5$, הסף $0.5 >$ עבור המפלגה הגדולה.
- אם $y = 0.5$, הסף הוא תמיד 0.5 – תמיד מעגלים לשלם הקרוב ביותר!

שיטות-מחלק - הטיות

הוכחת המשפט. נסמן:

- מפלגה א במדויק: $a+x$ מושבים (a שלם, x שבר).
- מפלגה ב במדויק: $b+1-x$ מושבים.

כיוון א: נניח ש:

$$x > 0.5 - (a-b)*(y-0.5)/(a+b+2y)$$

כל עוד למפלגה א יש a מושבים או פחות, המנה שלה היא לפחות:

$$(a+x)/(a+y) > (a+b+1)/(a+b+2y)$$

בשלב כלשהו מפלגה ב תגיע ל- b מושבים, ואז המנה שלה תהיה:

$$(b+1-x)/(b+y) < (a+b+1)/(a+b+2y)$$

המנה של א גדולה יותר, ולכן היא תקבל את

המושב ה- $a+1$. הוכחת הכיוון השני דומה. ***

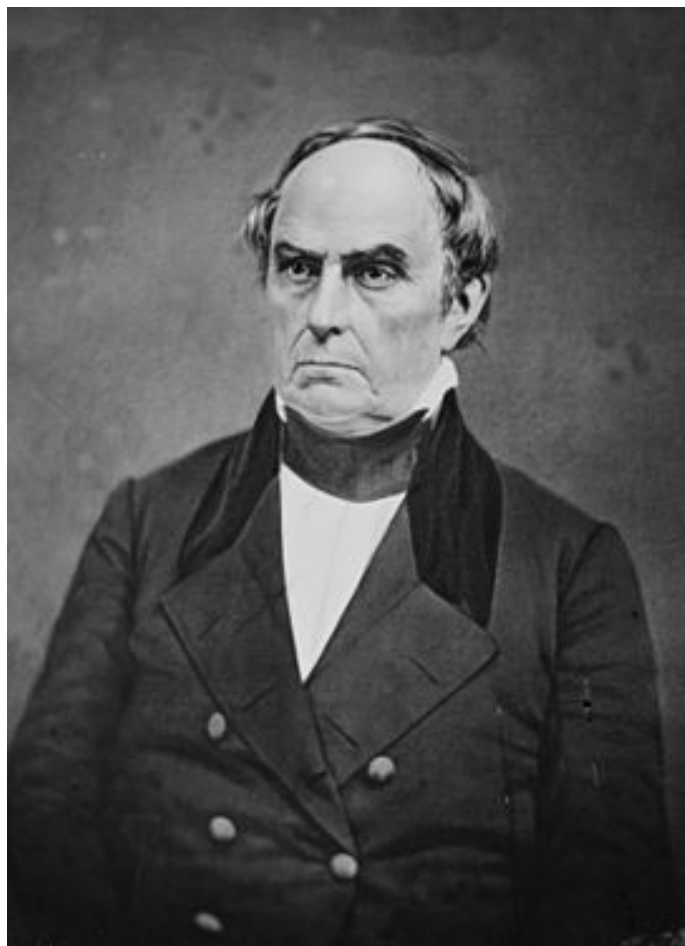
שיטות-מחלק - הטיות

- אם $y < 0.5$, יש הטיות לטובת המפלגה הקטנה.
- אם $y > 0.5$, יש הטיות לטובת המפלגה הגדולה.
- אם $y = 0.5$, אין הטיות לאף צד.



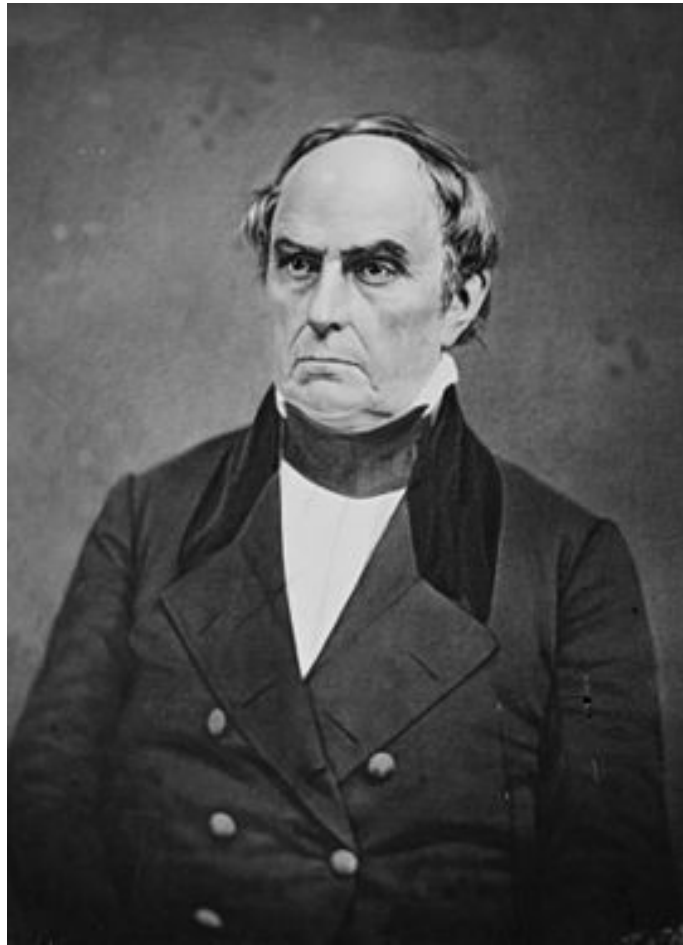
מכאן קל להבין
מדוע ברוב
המדינות
משתמשים
בשיטת ג'פרסון..

שיטת וובסטר



• **מסקנה. בשיטת וובסטר** $=$ שיטת המחלק עם $(s+0.5)$, בחלוקת-המושבים בין כל שתי מפלגות, כל מפלגה מקבלת את החלק היחסי שלה מעוגל לשלם הקרוב ביותר – ללא כל הטיה לטובת מפלגות גדולות או קטנות.

שיטת וובסטר



• **משפט.** שיטת וובסטר היא השיטה היחידה לחלוקת מושבים, שהיא גם עקבית וגם הוגנת (= מעגלת לכיוון הנכון) עבור כל זוג מפלגות.

• שיטת וובסטר בשימוש כיום ב: שוודיה, נורווגיה, ניו-זילנד, בוסניה והרצגובינה, קוסובו, לטביה, עיראק.

• בקרוב אצלנו?