

"וְנָחֵלְתֶם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאָחִיו" (יחזקאל מז 14)

חלוקה הוגנת עם שיתוף מינימלי Fair Division with Minimal Sharing

אראל סגל-הלוי



חלוקת חפצים בדידים

כשהחפצים לא ניתנים לחלוקה, בדרך-כלל אי אפשר למצוא חלוקה פרופורציונלית וללא קנאה (דוגמה: בית).

פתרונות מקובלים:

(1) הוספת כסף למערכת.

דוגמה: אלגוריתמי חלוקת שכר-דירה.

(2) חלוקה ללא-קנאה-בקירוב.

דוגמה: חלוקת תכשיטים ומקומות בקורסים.

(3) שיתוף מספר מינימלי של חפצים.

דוגמה: אלגוריתם "המנצח המתוקן".

איך "חותכים" חפץ בדיד?

החפץ שצריך "לחתוך" נשאר בבעלות משותפת.

לא קל, אבל בדרך-כלל אפשרי:

- ילדים - משמורת משותפת;
- דירת מגורים – השכרה וחלוקת הרווחים;
- דירת נופש, רכב – שימוש בזמנים שונים;
- חפצים לא יקרים - הגרלה;
- פשרה יצירתית כלשהי.

חלוקת חפצים בין שני אנשים

נתונים:

- שני שותפים (למשל: דונאלד ואיוואנה).
- m חפצים או נושאים שיש עליהם מחלוקת.
- כל שותף מייחס ערך באחוזים לכל נושא.

האתגר – להחליט מי יקבל כל חפץ/נושא כך ש:

- לא תהיה קנאה.
- התוצאה תהיה יעילה פארטו.
- נצטרך לחתוך/לשתף חפץ אחד לכל היותר.

אלגוריתם "המנצח המתוקן" (Adjusted Winner) Brams and Taylor, 1996

א. סדר חפצים בסדר עולה של יחס הערכים:
ערך-עבור-דונאלד / ערך-עבור-איוואנה.

ב. אתחול: תן את כל החפצים לדונאלד.

ג. העבר חפצים לאיוואנה לפי הסדר, עד ש:

- (1) הסכום של דונאלד שווה לסכום של איוואנה, או -
- (2) יש חפץ אחד שאם "נחתוך" אותו הסכום ישתווה.

ראו גליון אלקטרוני מצורף winner.ods.

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

משפט: אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה יעילה פארטו.

הוכחה: יהי r יחס-הערכים של החפץ האחרון שהועבר מדונאלד לאיואנה (או שותף ביניהם). נגדיר: $v_i =$ הערך לאיואנה, $v_d =$ הערך לדונאלד;

$$v_j = r * v_i$$

לכל החפצים מימין לחפץ המשותף,

$$v_d / v_i \leq r \rightarrow v_j \geq v_d.$$

לכל החפצים משמאל לחפץ המשותף,

$$v_d / v_i \geq r \rightarrow v_j \leq v_d.$$

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

המשך הוכחה: בחלוקה הסופית,

לחפצים מימין $v_j \geq v_d$ והם נמסרים לאיוואנה;

לחפצים משמאל $v_j \leq v_d$ והם נמסרים לדונאלד;

מכאן - החלוקה הסופית ממקסמת את הסכום:

$$\begin{aligned} & v_j + v_d \\ &= r^* v_i + v_d \end{aligned}$$

כל חלוקה הממקסמת סכום של פונקציה עולה
של הערכים, היא יעילה פארטו. ***

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

משפט: אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה ללא קנאה.

הוכחה: לשני השותפים ניקוד שווה.

אילו הניקוד היה קטן מ-50, הם היו יכולים להתחלף וזה היה שיפור פארטו – סתירה למשפט הקודם. ***

שיתוף מספר מינימלי של חפצים

אלגוריתם "המנצח המתקן" מחזיר חלוקה יעילה
והוגנת עם שיתוף של חפץ אחד לכל היותר.

שיתוף זה לא נוח. לכן נעדיף חלוקה יעילה והוגנת בלי
שיתוף בכלל, אם אפשר.

משפט: כל חלוקה יעילה פארטו בין שני אנשים,
מתקבלת ע"י סידור החפצים בסדר עולה של יחס
הערכים, ו"חיתוך" הסדרה בנקודה כלשהי.

הוכחה <

שיתוף מספר מינימלי של חפצים

הוכחת המשפט: נניח שדונאלד קיבל את חפץ 1 או חלק ממנו, ואיוואנה קיבלה את חפץ 2 או חלק ממנו, ויחס הערכים הוא לא לפי הסדר הנכון:

$$v_{d1} / v_{i1} < v_{d2} / v_{i2}$$

$$v_{d1} / v_{d2} < v_{i1} / v_{i2}$$

נעביר קצת (y) חפץ 1 מדונאלד לאיוואנה, בתמורה לקצת (z) חפץ 2, כאשר:

$$v_{d1} / v_{d2} < z / y < v_{i1} / v_{i2}$$

זה שיפור פארטו (חזק), כי:

$$z v_{d2} > y v_{d1}$$

$$y v_{i1} > z v_{i2}$$

שיתוף מספר מינימלי של חפצים

הוכחת המשפט - דוגמה מהקובץ winner.ods, שני החפצים מימין:

נושא:	תכשיטים	אחוזת גריניץ
דונאלד:	15	15
איואנה:	40	25
יחס:	0.375	0.6

נניח שדונאלד קיבל את התכשיטים (חפץ 1) ואיואנה את האחוז (חפץ 2). אז:

$$v_{d1} = 15, v_{d2} = 15, v_{d1}/v_{d2} = 1$$

$$v_{i1} = 40, v_{i2} = 25, v_{i1}/v_{i2} = 1.6$$

נבחר למשל: $z/y = 1.2$; $z = 0.6, y = 0.5$

דונאלד נותן לאיואנה 0.5 מהתכשיטים תמורת 0.6 מהאחוז. הוא מפסיד 7.5 אבל מרויח 9;

איואנה מפסידה 15 אבל מרויחה 20. שיפור פארטו חזק!

שיתוף מספר מינימלי של חפצים

מסקנה: אם יחס-הערכים הוא שונה לכל חפץ, אז יש רק דרך אחת לסדר את החפצים לפי יחס-הערכים.

לכן, יש רק $m+1$ חלוקות יעילות-פארטו בלי שיתופים.

אפשר לבדוק את כולן בזמן פולינומיאלי:

- אם אחת מהן ללא קנאה – מחזירים אותה;

- אחרת – מריצים את "המנצח המתוקן".

האלגוריתם הזה מוצא את החלוקה היעילה וללא-קנאה עם מספר השיתופים המינימלי. ***

הערה: אם יחס-הערכים הוא שווה לכל החפצים, אז בעיית השיתוף המינימלי היא NP-קשה.

שיתוף מינימלי עם n שחקנים

משפט 1. כשיש n שחקנים, ייתכן שנצטרך $n-1$ שיתופים כדי להשיג חלוקה הוגנת.

הוכחה. ייתכן שיש $n-1$ חפצים זהים.

משפט 2. אם קיימת חלוקה A עם מספר שיתופים כלשהו, אז קיימת חלוקה B עם עד $n-1$ שיתופים, הנותנת לכל שחקן לפחות את הערך שהיה לו בחלוקה A .

מסקנות.

- קיימת חלוקה פרופורציונלית עם עד $n-1$ שיתופים.
- הדבר נכון גם כשלשחקנים יש זכויות שונות.

שיתוף מינימלי עם n שחקנים

הוכחת משפט 2. סימונים:

- t_i = הערך שקיבל שחקן i בחלוקה א.
- $t_i + y_i$ = הערך שיקבל שחקן i בחלוקה ב.
- v_{ij} = הערך ששחקן i מייחס לחפץ j .
- z_{ij} = החלק ששחקן i מקבל מחפץ j בחלוקה ב.

נמצא את חלוקה ב בעזרת תוכנית ליניארית:

Maximize $v_{n1} \cdot z_{n1} + \dots + v_{nm} \cdot z_{nm}$ [value of player n]

Subject to:

$$v_{i1} \cdot z_{i1} + \dots + v_{im} \cdot z_{im} = t_i + y_i \quad \text{for all } i \text{ in } 1, \dots, n-1$$

$$z_{1j} + \dots + z_{nj} = 1 \quad \text{for all } j \text{ in } 1, \dots, m$$

$$z_{ij} \geq 0 \quad \text{for all } i \text{ in } 1, \dots, n \text{ \& } j \text{ in } 1, \dots, m$$

$$y_i \geq 0 \quad \text{for all } i \text{ in } 1, \dots, n-1$$

משפט על תוכניות ליניאריות

משפט. נתונה תוכנית ליניארית כלשהי, עם N משתנים x_1, \dots, x_N ו- M אילוצי שיוויון, מהצורה:

Maximize $c_1x_1 + \dots + c_Nx_N$

Subject to $a_{11}x_1 + \dots + a_{1N}x_N = b_1$

...

$a_{M1}x_1 + \dots + a_{MN}x_N = b_M$

$x_i \geq 0$ for all i in $1, \dots, N$

אם קיים לה פתרון אופטימלי כלשהו, אז קיים לה פתרון אופטימלי עם לכל היותר M משתנים שונים מאפס.

הרעיון. אם בוחרים M משתנים כלשהם, ומציבים 0 בשאר המשתנים, אז מקבלים מערכת של M משוואות ב- M נעלמים, ו"בדרך כלל" למערכת כזאת יש פתרון.

הערה: ניתן למצוא פתרון כזה בעזרת אלגוריתם "סימפלקס".

שיתוף מינימלי - המשך

Maximize $V_{n1} \cdot Z_{n1} + \dots + V_{nm} \cdot Z_{nm}$

Subject to:

$$V_{i1} \cdot Z_{i1} + \dots + V_{im} \cdot Z_{im} = t_i + y_i \quad \text{for all } i \text{ in } 1, \dots, n-1$$

$$Z_{1j} + \dots + Z_{nj} = 1 \quad \text{for all } j \text{ in } 1, \dots, m$$

$$Z_{ij} \geq 0 \quad \text{for all } i \text{ in } 1, \dots, n \text{ \& } j \text{ in } 1, \dots, m$$

$$y_i \geq 0 \quad \text{for all } i \text{ in } 1, \dots, n-1$$

בתוכנית למציאת חלוקה ב, יש $m+n-1$ אילוצי שיוויון.

לכן יש לה פתרון אופטימלי עם עד $m+n-1$ משתנים

(Z_{ij}) שונים מאפס. אז יש לכל היותר $n-1$ חפצים

מתוך m , ששניים או יותר מהמשתנים שלהם שונים

מאפס. לכן: יש לכל היותר $n-1$ חפצים משותפים. ***

מסקנה

ניתן להקים ממשלה עם n מפלגות,
ולחלק את התיקים בהגינות מדוייקת
(לא בקירוב),
בהתאם לגדלים השונים של המפלגות,
כך שיהיו לכל היותר $n-1$ תיקים עם רוטציה.

