אלגוריתמים לחלוקה הוגנת של עוגות וקרקעות

בשיעור הזה נתחיל ללמוד על אלגוריתמים לחלוקה. כפי שאמרנו במבוא, ישנם שיקולים רבים שלפיהם מחליטים איך לחלק דברים. בשיעורים הקרובים נתמקד בשיקול של **הגינות**. יש סוגים רבים של בעיות חלוקה הוגנת, וכיום חלק מהאלגוריתמים כבר מיושמים. אפשר לראות דוגמאות כאן: http://spliddit.org/ וכאן: http://www.fairoutcomes.com/.

בשיעור הזה אנחנו מניחים שלכל המשתתפים ישנן זכויות שוות, אבל יש להם העדפות שונות.

דוגמה מעשית היא **חלוקת קרקע בין יורשים**: לכל היורשים זכויות שוות, אבל חלקם מעדיפים נניח את האיזור שליד הים, אחרים את האיזור שליד הכביש, וכו'. אם שמאי "אובייקטיבי" כביכול יחלק את הקרקע בצורה שנראית לו הוגנת, לא בטוח שהחלוקה תיחשב להוגנת בעיני היורשים.

דוגמה נוספת היא **חלוקת עוגת יום-הולדת בין ילדים**. אנחנו מניחים שלכל ילד יש זכויות שוות, אבל יש להם טעמים שונים - אחד אוהב שוקולד, אחד אוהב קצפת וכו'. אם אנחנו - ההורים - נחלק את העוגה בצורה שנראית לנו שווה - לא בטוח שהילדים יסכימו שהחלוקה שווה. הם עלולים לקנא ולריב וזה לא יהיה נעים... מה עושים? האם אפשר לחלק את הקרקע/העוגה באופן שכל המשתתפים יסכימו שהחלוקה הוגנת?

רוב האנשים יאמרו שזה בלתי-אפשרי - אין סיכוי שכולם יסכימו שהחלוקה הוגנת. למרבה ההפתעה, ישנו אלגוריתם פשוט שפותר את הבעיה עבור שני ילדים (נניח, עמי ותמי):

- עמי חותך את העוגה לשניים;
- תמי בוחרת חלק אחד, ועמי מקבל את החלק שנשאר.

למה זה עובד? כי עמי יכול לחתוך את העוגה לשני חלקים שווים בעיניו, ואם תמי חושבת שהחלוקה לא שווה - היא יכולה פשוט לבחור את החלק הטוב יותר בעיניה!

החלוקה המתקבלת היא הוגנת בשני מובנים:

- כל משתתף חושב שהחלק שלו שווה לפחות 1/2 מהשווי הכללי של העוגה/הקרקע. חלוקה כזאת נקראת **פרופורציונלית (proportional)**.
- כל משתתף חושב שהחלק שלו שווה לפחות כמו החלק שהשני קיבל. חלוקה כזאת נקראת **ללא קנאה (envy-free)**.

זה די מפתיע שאלגוריתם כל-כך פשוט משיג תכונות כל-כך יפות. אבל עדיין מדובר רק בחלוקה לשניים. מה קורה אם רוצים לחלק עוגה/קרקע לשלושה אנשים או יותר - האם אפשר להשיג את שתי התכונות הללו?

שאלה: איזו משתי התכונות שלמעלה - חלוקה פרופורציונלית או חלוקה ללא-קנאה - נראית לכם קשה יותר להשגה?

תשובה: חלוקה ללא-קנאה היא קשה לפחות כמו חלוקה פרופורציונלית. הוכחה: אם חלוקה היא ללא קנאה, אז כל אחד חושב שהחלק שלו טוב לפחות כמו כל n החלקים. לפי כלל שובך היונים, כל אחד חושב שהחלק שלו שווה לפחות 1/n מהשווי הכללי. כלומר החלוקה היא גם פרופורציונלית.

אנחנו נראה שחלוקה ללא-קנאה קשה הרבה יותר מחלוקה פרופורציונלית. אבל נתחיל מהמשימה הקלה יותר - חלוקה פרופורציונלית.

חלוקת-עוגה פרופורציונלית

האלגוריתם הראשון לחלוקת עוגה פרופורציונלית פורסם ע"י המתמטיקאי היהודי-פולני הוגו שטיינהאוס ב-1948. הוא נקרא אלגוריתם "המפחית האחרון" (last diminisher) - עוד מעט נבין למה. האלגוריתם הוא רקורסיבי:

אם נשאר רק שחקן אחד - הוא מקבל את כל העוגה.

אם יש יותר משחקן אחד - אנחנו מסדרים את השחקנים בסדר שרירותי כלשהו, ואז:

- מבקשים מהראשון לסמן על העוגה פרוסה ששווה בעיניו בדיוק n/1.
- שואלים את השני: "האם החלק המסומן שווה בעיניך לכל היותר n/1?". אם הוא אמר "כן" - ממשיכים הלאה. אם הוא אמר "לא - החלק שווה יותר מ-n/1" אז מבקשים ממנו "להפחית" את החלק המסומן כך שיישאר חלק קטן יותר ששווה בעיניו בדיוק n/1.
- עוברים לשלישי ושואלים אותו הדבר: "האם החלק המסומן שווה בעיניך לכל היותר n/1?". אם כן - ממשיכים הלאה, אם לא - הוא מפחית.
- ממשיכים כך עד שעוברים על כל n השחקנים.

בסופו של דבר, השחקן האחרון שנגע בעוגה מקבל את הפרוסה המסומנת והולך הביתה. נשארו n-1 שחקנים, והם ממשיכים לחלק את העוגה ביניהם באופן רקורסיבי.

משפט: אלגוריתם "המפחית האחרון" תמיד נותן חלוקה פרופורציונלית.

הוכחה: לשם ההוכחה נניח ששווי העוגה עבור כל השחקנים הוא n. נוכיח שכל שחקן מקבל פרוסה בשווי 1. ההוכחה באינדוקציה על n.

הבסיס - n=1 - שחקן אחד מקבל את כל העוגה והשווי שלה עבורו הוא 1.

הצעד - נניח שזה נכון עבור n-1 שחקנים, ונניח שיש לנו n שחקנים. האלגוריתם נותן לשחקן אחד, פרוסה אחת שהוא סימן, ואם הוא סימן נכון - הפרוסה הזו שווה בעיניו בדיוק 1. עבור שאר השחקנים, הפרוסה הזו שווה לכל היותר 1. לכל, ערך העוגה הנשארת עבור שאר השחקנים הוא לפחות n-1. לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מהם יקבל פרוסה ששויה בעיניו לפחות 1.

מבחינה כלכלית השגנו את מה שרצינו - חלוקה פרופורציונלית. אבל בקורס הזה אנחנו לא רק כלכלנים - אנחנו גם אנשי מדעי-המחשב. ובמדעי-המחשב מתעניינים גם בשאלת היעילות החישובית. בפרט, מהי סיבוכיות זמן-הריצה של האלגוריתם הזה?

משפט: אלגוריתם "המפחית האחרון" משתמש ב- $O(n^2)$ שאילתות.
הוכחה: בכל צעד שחקן אחד יוצא – n צעדים.
בכל צעד צריך לשאול כל שחקן שאילתה אחת. סה"כ $O(n^2)$ שאילתות.

זה יפה אבל לא מספיק - אנחנו מחפשים אלגוריתם מהיר יותר. ואכן יש אלגוריתם כזה! הוא פותח ע"י שני מדענים ישראליים (מהטכניון) - שמעון אבן ז"ל ועזריה פז יבדל"א. גם האלגוריתם הזה הוא רקורסיבי:

אם נשאר רק שחקן אחד - הוא מקבל את כל העוגה.

אם יש יותר משחקן אחד, ומספר השחקנים זוגי -

- מבקשים מכל שחקן לסמן קו המחלק את העוגה לשני חצאים שוים בעיניו.
- חותכים את העוגה בחציון של n הקוים (מי זוכר איך מחשבים חציון?).
- שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו - n/2 שחקנים לצד ימין ו n/2 שחקנים לצד שמאל.
- מחלקים כל חצי באופן רקורסיבי בין ה n/2 שחקנים.

אם מספר השחקנים איזוגי - מריצים צעד אחד של אלגוריתם "המפחית האחרון".

משפט: אלגוריתם אבן-פז נותן חלוקה פרופורציונלית - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות n/1 מערך העוגה בעיניו.
הוכחה: נניח שערך העוגה כולה הוא n. נוכיח שכל שחקן מקבל חלק ששווה בעיניו לפחות 1. נוכיח באינדוקציה על n. בסיס: שחקן אחד מקבל הכל.
צעד: נניח שהמשפט נכון לכל מספר שחקנים עד n-1. עכשיו יש n. כל מי שמשחק לפי הכללים, מגיע לחלק ששווה בעיניו לפחות k, ויש בו k שחקנים, כאשר k הוא n/2 או 1 או n-1. לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1. ***

עכשיו נוכיח שהאלגוריתם באמת יותר מהיר.

משפט: אלגוריתם אבן-פז משתמש ב- O(n log n) שאילתות.
הוכחה: נעגל את n למעלה לחזקה הקרובה של 2. הגדלנו אותו בפחות מ-2. עכשיו, בכל צעד, גודל הקבוצות קטֵן פי 2. לכן מספר הצעדים הוא לכל היותר $\log_2(2n)$. בכל צעד, שואלים כל שחקן שאילתה אחת. לכן הסיבוכיות $O(n \log n)$.

האם אפשר לשפר עוד יותר את זמן הריצה? התשובה היא לא! אבל זה בכלל לא פשוט להוכיח. זה הוכח רק בשנת 2007 - ראו במאמרים להרחבה, "On the complexity of cake cutting".

חלוקת עוגה על נתונים אמיתיים

לאחרונה השתתפתי במחקר שנעשה ע"י איתי שטכמן (סטודנט לתואר שני בהנחיית ד"ר ריקה גונן מהאוניברסיטה הפתוחה), המחקר השווה את הביצועים של אלגוריתם אבן-פז לשיטות החלוקה המקובלות, שהן (1) מכירת הקרקע וחלוקת הכסף בין השותפים, ו (2) הערכת שמאי וחלוקת הקרקע לחלקים שווי-מחיר, על נתונים אמיתיים של ערכי-קרקע מאתר מדל"ן הישראלי, וכן נתונים של ערכי קרקע של מכון motu בניו-זילנד. נבדקו מדדים רבים, למשל, הערך הנמוך ביותר של משתתף.

אלגוריתם אבן-פז ניצח ברוב המדדים. למשל, אם מנרמלים את הערכים כך שהערך של כל העוגה הוא *n*, אז מכירה נותנת לכל משתתף בדיוק 1; אלגוריתם אבן-פז נותן לכל משתתף יותר מ-1 – אפילו המשתתף שמקבל את הערך הנמוך ביותר, מקבל בסביבות 5% מעל הערך של "1" שמגיע לו; זאת משום שאלגוריתם חלוקה הוגנת מנצל את העובדה שלאנשים שונים יש ערכים שונים כדי לתת לכל אחד מהם את מה שהוא רוצה. לעומת זאת, בחלוקת שמאי, המתעלמת מהערכים האישיים של המשתתפים, היו משתתפים שקיבלו הרבה פחות מ-1. ראו גרפים במצגת.

סיכם: אראל סגל-הלוי.