

"וְנִחַלְתֶּם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאֻחִיו" (יחזקאל מ"א 14)

תקציב השתתפותי רציף

אראל סגל-הלוי ע"פ:

Brandl, Brandt, Greger, Peters, Stricker, Suksompong
(2021).

איפה הכסף?

הקלט:

- כסף בקופה: C .
- נושאים: $1, \dots, m$ (עמותות, סעיפי תקציב...).
- אזרחים: $1, \dots, n$.
- התועלת של אזרח i לנושא j היא: $u_{i,j}$.
- הנחה: התועלות בינאריות – 0 או 1.

הפלט:

- וקטור d המייצג תקציב: d_1, \dots, d_m .
- $d_1 + \dots + d_m = C$.
- התועלת של אזרח i מהתקציב d היא:
 - $u_i(d) = \text{Sum}[j=1, \dots, m] u_{i,j} * d_j$

מהו תקציב הוגן?

א. הגינות ליחידים (Individual Fair Share):

$$u_i(d) \geq C/n.$$

- הכרחי, אבל לא מספיק. לדוגמה:

- 99 תומכים בנושא א, 1 תומך בנושא ב.
- נותנים 1% לנושא א, 99% לנושא ב.

ב. הגינות לקבוצות (Group Fair Share):

לכל קבוצה בגודל k , הסכום הכולל המועבר לנושאים שאחד מחברי-הקבוצה תומך בהם הוא לפחות:

$$k \cdot C/n$$

האם קיים תקציב הוגן לקבוצות? <

תקציב אנארכי

הגדרה. תקציב אנארכי נותן לכל אזרח את חלקו בתקציב C/n , ואומר לו לחלק את הכסף כרצונו בין כל הנושאים שהוא תומך בהם.

משפט. כל תקציב אנארכי הוא הוגן-לקבוצות. הוכחה. לכל קבוצה בגודל k , סכום הכסף הניתן לחברי-הקבוצה הוא $k \cdot C/n$, וכל הסכום הזה מפוזר על נושאים שלפחות אחד מחברי-הקבוצה תומך בהם. ***

משפט. תקציב אנארכי עלול להיות לא-יעיל <

חוסר-יעילות

- דוגמה:** ביישוב יש 3 מבנים שצריך לתפעל:
מגרש כדורסל, מועדון שחמט, ספריה.
- 1000 ש"ח מאפשרים לתפעל את המבנה לשעה ביום. התקציב הכולל: 6000.
 - עמי אוהב תחרויות (כדורסל, שחמט).
 - תמי בעד מקומות סגורים (שחמט, ספריה)
 - תקציב אנארכי יכול להיות: 1500, 3000, 1500. התועלת – 4.5 שעות לכל אחד.
 - קיים שיפור פארטו: תקציב 0, 6000, 0. התועלת – 6 שעות לכל אחד. ***

תקציב אוטיליטרי

הגדרה. תקציב אוטיליטרי הוא תקציב הממקסם את סכום התועלות של האזרחים.

• אלגוריתם: תן את כל התקציב לנושאים שיש להם הכי הרבה תומכים.

משפט. כל תקציב אוטיליטרי הוא יעיל-פארטו.
הוכחה. הוכחנו בשיעור 2. ***

משפט. תקציב אוטיליטרי עלול להיות לא-הוגן אפילו ליחידים.

דוגמה. אזרחים 1,2 בעד א, אזרח 3 בעד ב. ***

האם יש תקציב הוגן-לקבוצות וגם יעיל-פארטו? <

תקציב פריק

הגדרה: תקציב d_1, \dots, d_m נקרא פריק

(decomposable) אם קיימים סכומים $d_{i,j}$ לכל אזרח i ולכל נושא j כך ש:

- $\sum_i d_{i,j} = d_j$; לכל נושא -
- $\sum_j d_{i,j} = C/n$ – לכל אזרח -
- $d_{i,j} > 0$ only if $u_{i,j} > 0$.

משמעות: אפשר לממש את התקציב באופן הבא: נותנים לכל אזרח את החלק היחסי שלו בתקציב C/n , ואומרים לו לפזר את התקציב בין הנושאים שהוא תומך בהם, לפי $d_{i,1}, \dots, d_{i,m}$.

הגינות-לקבוצות ופריקות

משפט. כל תקציב פֶּרִיק הוא הוגן לקבוצות.

הוכחה. נניח שהתקציב d הוא פריק. לכל קבוצה בגודל k , סכום הכסף הניתן לחברי-הקבוצה על-ידי הפירוק של d הוא $k \cdot C/n$. לפי הגדרת הפירוק, כל הסכום הזה מפוזר רק על נושאים שלפחות אחד מחברי-הקבוצה תומך בהם. לכן התקציב פרופורציונלי לקבוצות. ***

הערה. גם הכיוון ההפוך נכון: כל תקציב הוגן לקבוצות הוא פריק [הוכחה בסיכום בגיטהאב].

אלגוריתם נאש – מיקסום המכפלה

הגדרה. תקציב נאש הוא תקציב הממקסם את מכפלת התועלות של האזרחים:

$$\max[d] \text{ product}[i] u_i(d).$$

- הגדרה שקולה: מיקסום סכום הלוגריתמים:
 $\max[d] \sum[i] \log(u_i(d))$.

- חישוב: פתרון בעיית אופטימיזציה קמורה – ראו בתיקיית הקוד.

משפט. כל תקציב נאש הוא יעיל-פארטו.
הוכחה. הוכחנו בשיעור 2. ***

משפט. כל תקציב נאש הוא פְּרִיק <

תקציב נאש - פריקות

משפט. כל תקציב נאש הוא פְּרִיק.

הוכחה. נתון תקציב d הממקסם סכום הלוגריתמים.
נבנה תקציב חדש d' ע"י העברת סכום קטן e מנושא 1 לנושא 2. השינוי בתועלת של כל שחקן i הוא:

$$u_i(d') - u_i(d) = e^*(u_{i,2} - u_{i,1})$$

השינוי בפונקציה כלשהי f של התועלת שווה בקירוב:

$$f(u_i(d')) - f(u_i(d)) \approx e^*(u_{i,2} - u_{i,1}) * f'(u_i(d))$$

בפרט, כאשר f היא לוגריתם:

$$\log(u_i(d')) - \log(u_i(d)) \approx e^*(u_{i,2} - u_{i,1}) / u_i(d)$$

--> השינוי בסכום הלוגריתמים הוא:

$$\text{Sum}[i=1, \dots, n] e^*(u_{i,2} - u_{i,1}) / u_i(d)$$

$$= e * [\text{Sum}[i] u_{i,2} / u_i(d) - \text{Sum}[i] u_{i,1} / u_i(d)].$$

תקציב נאש - פריקות

הוכחה [המשך].

התקציב המקורי d ממקסם סכום לוגריתמים. לכן השינוי בסכום הלוגריתמים הוא לכל היותר 0:

$$\text{Sum}[i] \, u_{i,2}/u_i(d) - \text{Sum}[i] \, u_{i,1}/u_i(d) \leq 0$$

אותו הדבר נכון אם הופכים את התפקיד של 1,2:

$$\text{Sum}[i] \, u_{i,1}/u_i(d) - \text{Sum}[i] \, u_{i,2}/u_i(d) \leq 0$$

ולכן חייב להתקיים שיוויון:

$$\text{Sum}[i] \, u_{i,1}/u_i(d) = \text{Sum}[i] \, u_{i,2}/u_i(d)$$

ולכן הסכום הנ"ל קבוע לכל נושא j :

$$\text{Sum}[i] \, u_{i,j}/u_i(d) = Z \quad \text{for all } j \text{ in } 1, \dots, m.$$

[בהמשך נראה למה שווה הקבוע Z].

תקציב נאש - פריקות

הוכחה [המשך]. נפרק את התקציב באופן הבא:

$$d_{i,j} := (C/n) * (d_j * u_{i,j} / u_i(d))$$

א. לכל שחקן i , מתקיים:

$$\begin{aligned} \sum_j d_{i,j} &= (C/n) * \sum_j (d_j * u_{i,j}) * (1/u_i(d)) \\ &= (C/n) * u_i(d) * (1/u_i(d)) = C/n. \end{aligned}$$

ב. לכל נושא j , מתקיים:

$$\begin{aligned} \sum_i d_{i,j} &= (C/n) * (d_j) * (\sum_i u_{i,j} / u_i(d)) \\ &= (C/n) * (d_j) * Z \end{aligned}$$

$$\sum_{i,j} d_{i,j} = (C/n) * (C) * Z$$

מצד שני, מסעיף א נובע:

$$\sum_{i,j} d_{i,j} = \sum_{i,j} (C/n) = C \rightarrow Z = n/C.$$

ולכן:

$$\sum_i d_{i,j} = d_j. \quad ***$$

גילוי אמת

הגדרה. אלגוריתם תקצוב השתתפותי נקרא **מגלה-אמת** (truthful) אם לכל אזרח i , כאשר הבחירות של שאר האזרחים קבועות, התועלת של i גדולה ביותר כאשר ה- $u_{i,j}$ אמיתיים.

משפט. האלגוריתם האנארכי מגלה-אמת.
הוכחה. כל אזרח עושה מה שהוא רוצה. ***

משפט. האלגוריתם האוטייליטרי מגלה אמת.
הוכחה. כל הצבעה של אזרח בעד נושא שהוא תומך בו, מגדילה את מספר התומכים בנושא זה, ולכן מגדילה את הסיכוי שיתוקצב. ***

אלגוריתם נאש – גילוי-אמת

משפט. אלגוריתם נאש אינו מגלה-אמת.

הוכחה. בניח שיש ארבעה נושאים (א, ב, ג, ד),
חמישה אזרחים, והסכום הכולל 500.

• קלט: אב, אג, אד, בג, א; פלט (0, 65, 65, 370).
• התועלת של אזרח "א+ב" היא $435 = 370 + 65$.

• קלט: בד, אג, אד, בג, א; פלט (0, 0, 200, 300).
• התועלת של אזרח "א+ב" היא $500 = 300 + 200$.
שווה לו להגיד "ב+ד"! ***

האם קיים אלגוריתם מגלה-אמת, יעיל, והוגן? <

טרילמה

משפט. לא קיים אלגוריתם שהוא: יעיל-פארטו, וגם מגלה-אמת, וגם הוגן (ליחידים או לקבוצות).

ההוכחה המלאה ארוכה מאד. נוכיח משפט חלש יותר: לא קיים אלגוריתם כנ"ל שהוא גם סימטרי

(=מתייחס באופן שווה לאזרחים זהים ולנושאים זהים).

הוכחה. כשהקלט אב, אג, אד, בג, א, הנושאים ב, ג,

סימטריים, לכן הם חייבים לקבל סכום זהה. אם

הסכום אפס, אז אין הגינות לאזרח 4. לכן הסכום חייב

להיות חיובי. בפרט, לא כל התקציב הולך ל: א+ב.

כשהקלט בד, אג, אד, בג, א, הנושאים ג, ד סימטריים,

לכן הם חייבים לקבל סכום זהה. אם הסכום אפס, אז

אזרח 1 מרויח מהשינוי אב<בד; אם הסכום חיובי, אז

קיים שיפור פארטו: ג-<א , ד-<ב. ***

אלגוריתם - אוטיליטרי-על-תנאי

האלגוריתם האוטיליטרי-על-תנאי

(conditional utilitarian) – ממקסם את סכום התועלות תחת האילוץ שהתקציב פריק. איך?
-- כל אזרח תורם לנושאים, מאלה שהוא תומך בהם, עם הכי הרבה תומכים אחרים.

- בדוגמה אב, אג, אד, בג, א: (0, 50, 50, 400).
- בדוגמה בד, אג, אד, בג, א: (50, 50, 100, 300).
- פריק – לפי הגדרה.
- מגלה אמת – כמו האלגוריתם האוטיליטרי.
- לא יעיל פארטו - בדוגמה השניה יש שיפור פארטו: (0, 0, 150, 350).
- אבל לא קיים שיפור-פארטו שהוא פריק.

תקציב השתתפותי רציף - טרילמה

מגלה אמת	הוגן	יעיל פארטו	
כן	לא	כן	אוטיליטרי
כן	כן	לא (*) יעיל מבין התקציבים (הפריקים)	אוטיליטרי על-תנאי
לא	כן	כן	מיקסום המכפלה