

"וְנָחֲלֵתֶם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאָחִיו" (יחזקאל מ' 14)

חלוקה הוגנת של

חפצים בדידים

**Fair Indivisible Item
Allocation**

אראל סגל-הלוי

חלוקה הוגנת בקירוב

מקרה פשוט:

- 99 חפצים זהים.

- 2 שחקנים עם זכויות שוות.

מה הן החלוקות שאפשר לקרוא להן "הוגנות בקירוב"?

- 50:49 או 49:50.

- בכל חלוקה אחרת, יש חוסר-הגינות שאי-אפשר להצדיק בכך שהחפצים בדידים.

חלוקה הוגנת בקירוב - הכללות

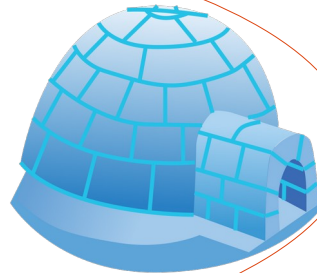
א. חפצים זהים – זכויות **שונות**.

ב. חפצים **שונים** – זכויות **שוות**.

ג. חפצים **שונים** – זכויות **שונות**.

חלוקה הוגנת בקירוב

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1"
(Envy Free except 1, **EF1**) אם לכל שני
משתתפים א, ב, קיים חפץ כלשהו, שאם נוריד
מהסל של ב, אז שחקן א לא יקנא בו.



חלוקה הוגנת בקירוב

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1"
(Envy Free except 1, **EF1**) אם לכל שני
משתתפים א, ב, קיים חפץ כלשהו, שאם נוריד
מהסל של ב, אז שחקן א לא יקנא בו.

*המשמעות: רמת-הקנאה ניתנת להצדקה
בהתחשב בעובדה שהחפצים בדידים.*

*האם תמיד קיימת חלוקה **EF1**?*

אלגוריתם הסֶבֶב (round robin)

1. מסדרים את השחקנים בסדר שרירותי כלשהו.

2. כל שחקן לוקח, מבין החפצים שנשארו, את החפץ שהוא הכי רוצה.

3. אם נשארו חפצים – חוזרים לשלב 2.

משפט. אלגוריתם הסבב מחזיר חלוקה $EF1$.

הוכחה. נוכיח את תנאי $EF1$ לכל שני שחקנים א, ב; נניח בה"כ ששחקן א מופיע בסבב לפני שחקן ב.

• **א לא מקנא כלל: על כל חפץ ש-ב בחר, א בחר לפניו.**

• **עכשיו נניח שמורידים מהסל של א את החפץ הראשון שבחר. על כל חפץ שנשאר בסל של א, ב בחר לפניו. לכן החלוקה $EF1$ גם עבור שחקן ב. *****

חלוקה הוגנת בקירוב - הכללות

א. חפצים זהים – זכויות **שוונות**.

ב. חפצים **שוונים** – זכויות שוות.

ג. חפצים **שוונים** – זכויות **שוונות**.

דוגמה: חלוקת תיקים בממשלה בין מפלגות.

חפצים שונים – זכויות שונות

הגדרה: רמת הקנאה המשוקללת בין שני משתתפים j, i עם זכויות w_j, w_i היא:

$$V_i(X_j) / w_j - V_i(X_i) / w_i$$

- חלוקה ללא קנאה משוקללת (W_{EF}) = רמת הקנאה המשוקללת היא 0 (לכל היותר).
- בחלוקה $EF1$, כשהמשקלים 1 – רמת הקנאה המשוקללת היא לכל היותר $V_i(g)$, כאשר $g =$ החפץ עם הערך הגדול ביותר (עבור i) אצל j .
- מה רמת הקנאה המותרת ב"חלוקה ללא קנאה משוקללת עד-כדי חפץ אחד" (" W_{EF1} ")?

חפצים שונים – זכויות שונות

הגדרה: רמת הקנאה המשוקללת בין שני משתתפים i, j עם זכויות w_i, w_j היא:

$$V_i(X_j) / w_j - V_i(X_i) / w_i$$

- $g =$: החפץ עם הערך הגדול ביותר בסל של j .
- מה רמת הקנאה המותרת ב"חלוקה ללא קנאה משוקללת עד-כדי חפץ אחד" ("WEF1")?
- $V_i(g) / w_j$ – הסרת חפץ מהסל של j ?
- $V_i(g) / w_i$ – שיכפול חפץ לסל של i ?
- ממוצע של שני הביטויים הקודמים?

אלגוריתם סֶבֶב משוקלל

- אתחול: כל שחקן מקבל 0
- כל עוד יש חפצים:
- מחשבים, לכל שחקן:
הזכות שלו

(מספר החפצים נוכחי) f
• השחקן, שהמנה שלו גדולה ביותר, בוחר, מבין החפצים שנשארו, את החפץ שהוא הכי רוצה.

נבחר פונקציה כלשהי f ,
המייחסת לכל מספר שלם s , מספר ממשי כלשהו בתחום $[s, s+1]$.

חפצים שונים – זכויות שונות

משפט: אלגוריתם הסבב המשוקלל עם פונקציית-מחלק $f(s)=s+y$ מחזיר חלוקה שבה לכל שני משתתפים i, j עם זכויות w_i, w_j , רמת הקנאה המשוקללת היא לכל היותר:

$$y * V_i(g) / w_i + (1-y) * V_i(g) / w_j$$

• $f(s) = s$ ~ הסרת חפץ מהסל של j ;

• $f(s) = s+1$ ~ שיכפול חפץ לסל של i ;

• $f(s) = s+0.5$ ~ ממוצע שני הביטויים.

• **אי אפשר להבטיח שני תנאים יחד.**