

חלוקה הוגנת של

חפצים בדידים

Fair Indivisible Item
Allocation

אראל סגל-הלוי

חלוקת חפצים בדידים

כשהחפצים לא ניתנים לחלוקה, בדרך-כלל אי אפשר למצוא חלוקה פרופורציונלית וללא קנאה (דוגמה: שני שחקנים, מס' איזוגי שם חפצים).

פתרונות מקובלים:

(1) **תשלומים. דוגמה:**

חלוקת חדרים ושכר-דירה.

(2) **קירובים. דוגמה:**

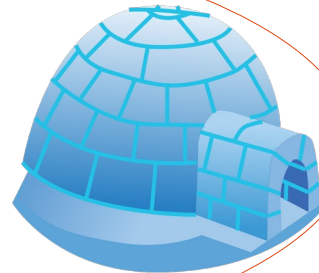
חלוקת תכשיטים, חלוקת מקומות בקורסים.

(3) **שיתופים. חלוקת מספר מינימלי של חפצים.**

דוגמה: חלוקת ירושות.

חלוקה הוגנת בקירוב

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1"
(Envy Free except 1, **EF1**) אם לכל שני
משתתפים א, ב, קיים חפץ כלשהו, שאם נוריד
מהסל של ב, אז שחקן א לא יקנא בו.



חלוקה הוגנת בקירוב

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1"
(Envy Free except 1, **EF1**) אם לכל שני
משתתפים א, ב, קיים חפץ כלשהו, שאם נוריד
מהסל של ב, אז שחקן א לא יקנא בו.

*המשמעות: רמת הקנאה היא הקטנה ביותר
האפשרית, בהתחשב בעובדה שהחפצים
בדידים.*

כשה"עוגה" רציפה – תמיד קיימת חלוקה **EF.**

**האם כשהחפצים בדידים תמיד קיימת חלוקה
EF1?**

אלגוריתם גרף הקנאה

(Lipton, Markakis, Mossel, Saberi, 2004)

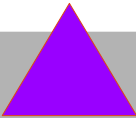
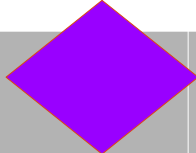
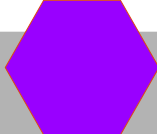



עוברים על החפצים בסדר שרירותי. לכל חפץ:

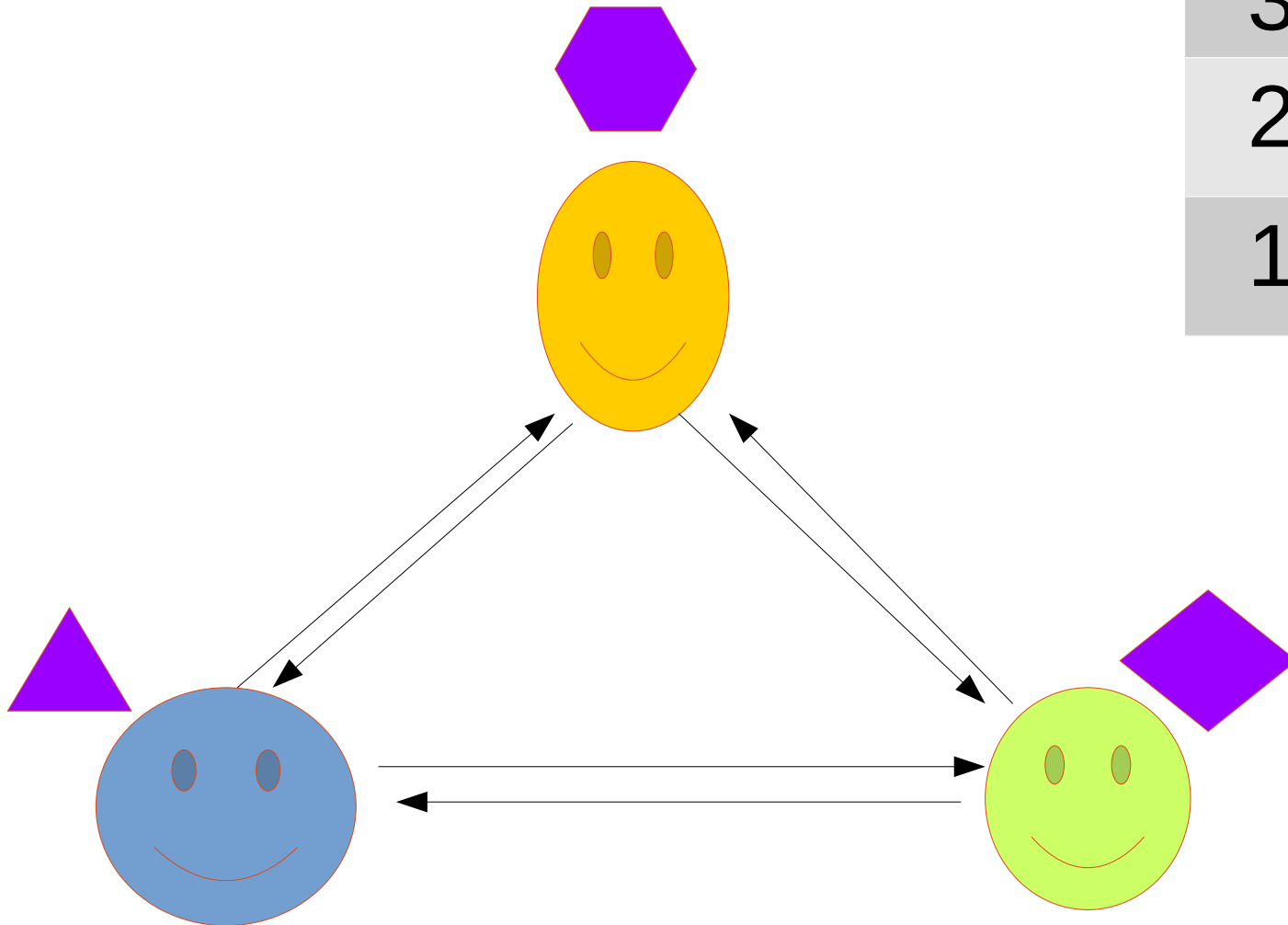
1. נותנים את החפץ לשחקן שאף-אחד לא מקנא בו.

2. אם אין כזה – סימן שיש מעגל-קנאה.
מחליפים סלים במעגל בניגוד לכיוון הקנאה.

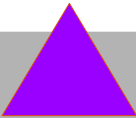
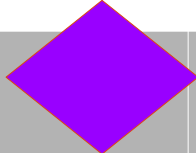
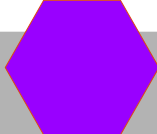



מבצעים את 2 עד שאין מעגלים, ואז חוזרים ל-1.

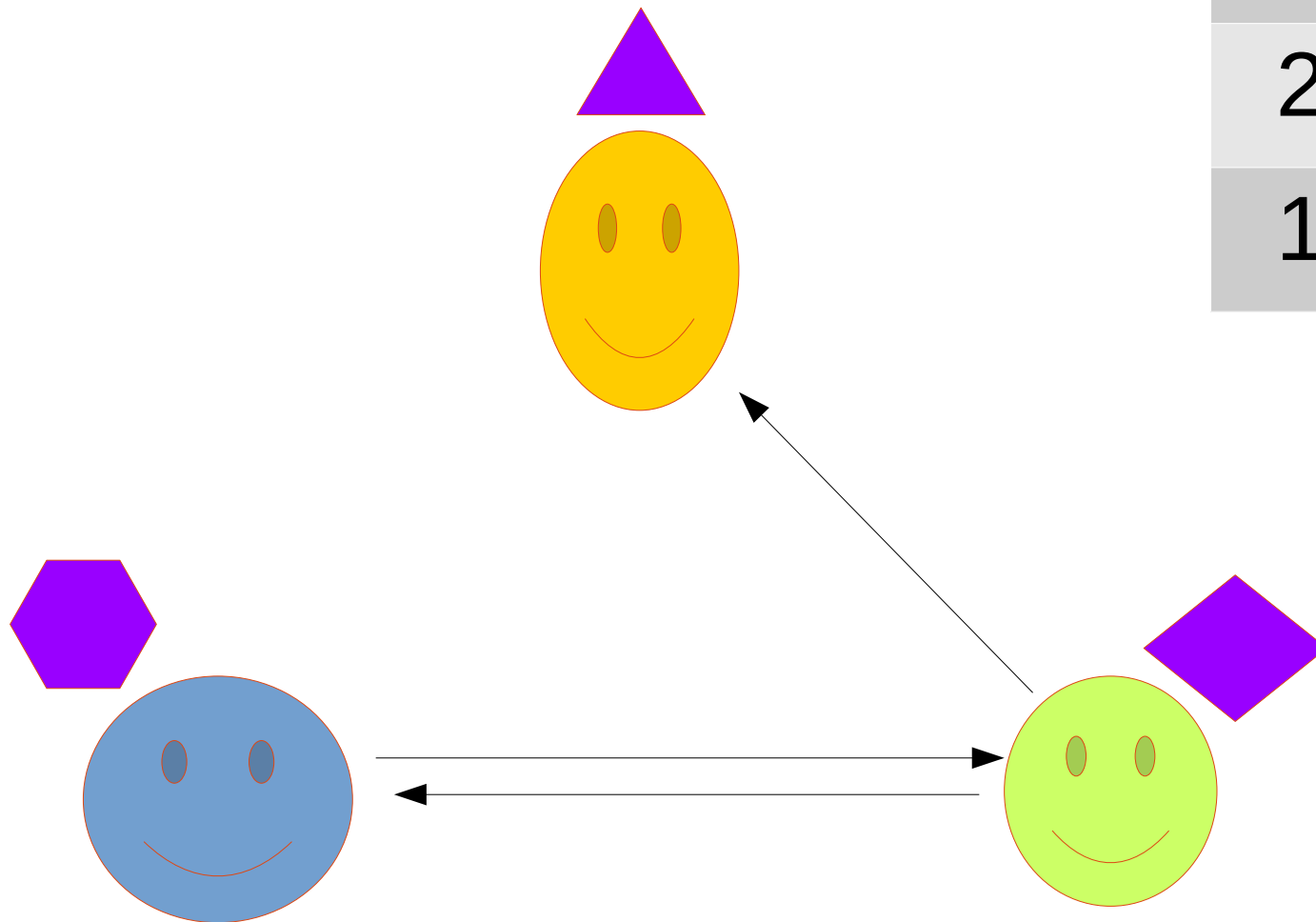
אלגוריתם גרף הקנאה - דוגמה

			
3	2	1	
2	1	3	
1	3	2	

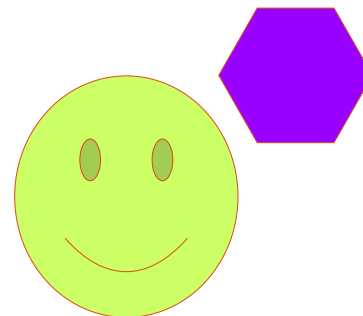
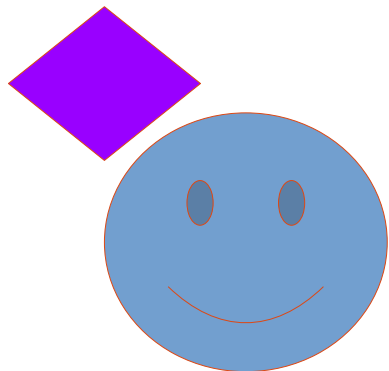
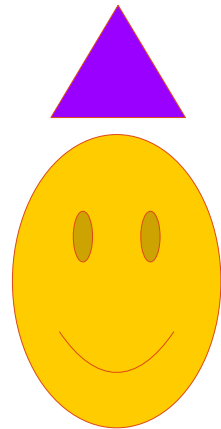


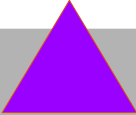
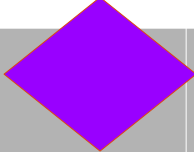
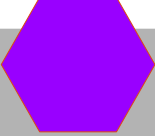



אלגוריתם גרף הקנאה - דוגמה

			
3	2	1	
2	1	3	
1	3	2	



אלגוריתם גרף הקנאה - דוגמה



			
3	2	1	
2	1	3	
1	3	2	

אלגוריתם גרף הקנאה – זמן ריצה

משפט: אם יש m חפצים ו- n שחקנים, אז זמן-הריצה של אלגוריתם גרף הקנאה הוא $O(m n^3)$.

הוכחה: מציאת מעגל – DFS - בזמן $O(n^2)$.

הסרת מעגל לא מוסיפה קשתות (כי אוסף הסלים לא משתנה), ומסירה לפחות שתי קשתות.

כל חפץ מוסיף לכל היותר $n-1$ קשתות.

לכן יש להסיר לכל היותר $m(n-1)/2$ מעגלים.

אלגוריתם גרף הקנאה - הגינות

משפט: האלגוריתם מחזיר חלוקה EF1.

הוכחה: החלוקה ההתחלתית (הריקה) היא EF1.

מסירת חפץ לשחקן שלא מקנאים בו, אולי
גורמת לשאר השחקנים לקנא בו, אבל רק עד
כדי חפץ 1.

הסרת מעגל משפרת את התועלת של כל
השחקנים במעגל, ולא משנה את אוסף הסלים.
לכן, אם החלוקה היתה EF1, היא תישאר EF1
גם אחרי הסרת המעגל.

אלגוריתם גרף הקנאה - יעילות

משפט: אלגוריתם גרף הקנאה עלול להחזיר תוצאה שאינה יעילה-פארטו.

הוכחה: נניח שמחלקים ארבע אבנים יקרות:

ספיר	יהלום	ברקת	אודם	
2	1	0	10	א
1	2	10	0	ב

כשמחלקים את החפצים מימין לשמאל, א מקבל אודם ויהלום, ב מקבל ברקת וספיר.

החלוקה לא יעילה פארטו – היה עדיף לתת ל-א

את אודם וספיר ול-ב את ברקת ויהלום. ***

חלוקת חפצים הוגנת ויעילה

כשה"עוגה" רציפה – תמיד קיימת חלוקה EF ויעילה.

האם כשהחפצים בדידים קיימת חלוקה $EF1$ ויעילה?

כשה"עוגה" רציפה – החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא ללא-קנאה ויעילה.

האם כשהחפצים בדידים – החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא $EF1$ ויעילה פארטו?

כן! התגלה ב-2016.

מיקסום מכפלת הערכים

(Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, Wang, 2016)

משפט: נניח ש:

* ההעדפות אדיטיביות – ערך של סל הוא סכום הערכים של החפצים בסל.

* קיימת לפחות חלוקה אחת שבה כל שחקן מקבל ערך גדול מאפס.

אז, כל חלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא גם יעילה-פארטו וגם EF1.

הוכחה: יעילות פארטו – ברורה.

EF1 – בשקף הבא.

מיקסום מכפלת הערכים – הוכחת EF1

המשך: נניח ש- i מקנא ב- j . נסתכל על כל החפצים בסל של j . לכל חפץ g , נבדוק את יחס הערכים:

$$V_i(g) / V_j(g)$$

נבחר את החפץ שיחס-הערכים שלו הכי גדול, ונעביר אותו מ- j ל- i . המכפלה בחלוקה החדשה שווה-או-קטנה מהמכפלה בחלוקה הקודמת, ולכן:

$$\begin{aligned} [V_i(X_i) + V_i(g)] * [V_j(X_j) - V_j(g)] &\leq V_i(X_i) * V_j(X_j) \\ \rightarrow V_j(X_j) * V_i(g) / V_j(g) &\leq V_i(X_i) + V_i(g) \end{aligned}$$

מיקסום מכפלת הערכים – הוכחת EF1

$$\rightarrow V_j(X_j) * V_i(g) / V_j(g) \leq V_i(X_i) + V_i(g)$$

המשך: יחס הערכים של g הוא הכי גדול ב- X_j , ולכן:

$$V_i(X_j) / V_j(X_j) \leq V_i(g) / V_j(g)$$

מציבים למעלה ומקבלים:

$$V_i(X_j) \leq V_i(X_i) + V_i(g)$$

$$V_i(X_j) - V_i(g) \leq V_i(X_i)$$

מכאן: אם מורידים את g מהסל של j , אז i כבר לא מקנא. ***

מיקסום מכפלת הערכים – אלגוריתם

הבנו שהחלוקה ה"אידיאלית" של חפצים בדידים היא חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים. אבל איך מוצאים חלוקה כזאת?

• נסמן: $V_i(g)$ = Value of good g to player i .

• $x_{i,g}$ = quantity of good g given to player i

• אנחנו רוצים לפתור את הבעיה:

• כאשר ה- $x_{i,g}$ רציפים, זה קל.

• כאשר ה- $x_{i,g}$ בדידים, זה קשה!

$$\max \sum_{i=1}^n \log \left(\sum_{g=1}^m x_{i,g} \cdot V_i(g) \right)$$

$$\text{s.t. } \forall g : \sum_{i=1}^n x_{i,g} = 1$$

קושי של בעיות אופטימיזציה

משתנים בדידים	משתנים רציפים	
קשה מאד	קשה	בעיה כללית:
קשה	קל (גרדיינט)	בעיה קמורה:
בינוני	קל מאד	בעיה ליניארית:

מיקסום מכפלת הערכים – אלגוריתם

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n \log\left(\sum_{g=1}^m x_{i,g} \cdot V_i(g)\right) \\ \text{s.t.} \quad & \forall g : \sum_{i=1}^n x_{i,g} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n W_i \\ \text{s.t.} \quad & W_i \leq \log\left(\sum_{g=1}^m x_{i,g} \cdot V_i(g)\right) \\ & \forall g : \sum_{i=1}^n x_{i,g} = 1 \end{aligned}$$

הבעיה המקורית היא
קמורה אבל לא
ליניארית, ולכן קשה.

משפט: בעיית מיקסום
מכפלת הערכים עם
חפצים בדידים היא
NP-קשה.

הטריק: ננסה להפוך
את הבעיה לליניארית.

צעד ראשון:

מיקסום מכפלת הערכים – אלגוריתם

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n W_i \\ \text{s.t.} \quad & W_i \leq \log\left(\sum_{g=1}^m x_{i,g} \cdot V_i(g)\right) \\ & \forall g : \sum_{i=1}^n x_{i,g} = 1 \end{aligned}$$

צעד ראשון:
הבעיה עדיין לא
ליניארית.

$$\begin{aligned} W_i &\leq \log k + \\ &[\log(k+1) - \log k] \cdot \\ &\left[\sum_{g=1}^m x_{i,g} \cdot V_i(g) - k \right] \\ \forall k &\in \{1, 2, \dots, 999, 1000\} \end{aligned}$$

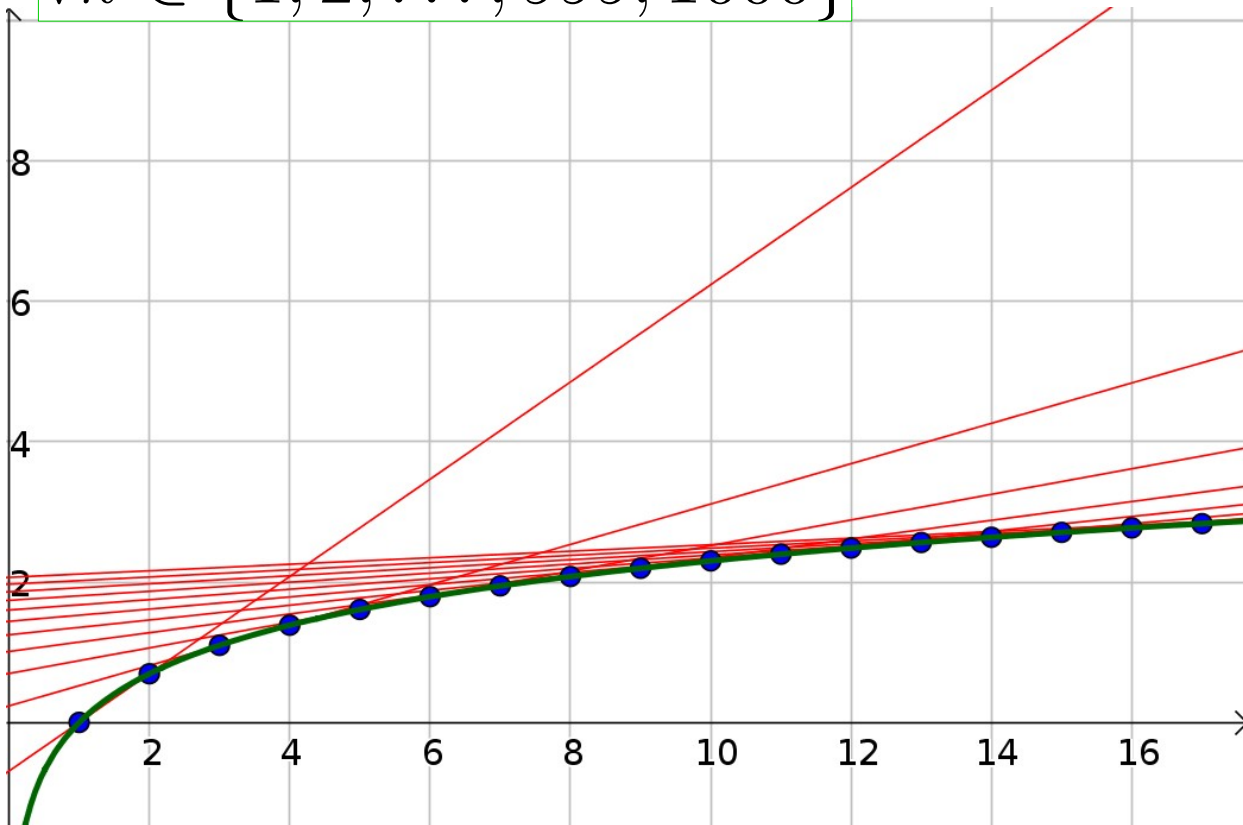
צעד שני: נניח שכל
הערכים הם בין 1
ל-1000. נחליף את
האילוץ האמצעי
ב-1000 אילוצים
ליניאריים:

מיקסום מכפלת הערכים – אלגוריתם

$$W_i \leq \log k + [\log(k+1) - \log k] \cdot$$

$$\left[\sum_{g=1}^m x_{i,g} \cdot V_i(g) - k \right]$$

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, 999, 1000\}$$



הרעיון: מחליפים את
הפונקציה
הלוגריתמית באוסף
של 1000 פונקציות
ליניאריות שחוסמות
אותה מלמעלה.
פתרון אופטימלי
לבעיה הליניארית
הוא גם פתרון
אופטימלי לבעיה
המקורית!

מיקסום מכפלת הערכים – מימוש

<http://www.spliddit.org/apps/goods>

שאלה פתוחה

בעיית מיקסום מכפלת הערכים היא NP-קשה.

אבל, המטרה שלנו היא לא מיקסום מכפלת הערכים – המטרה שלנו היא חלוקה יעילה-פארטו וללא-קנאה-עד-חפץ-1.

תיאורטית, אפשר להשיג את המטרה הזאת גם בדרכים אחרות.

האם קיים אלגוריתם פולינומיאלי המוצא חלוקה יעילה-פארטו ו-EF1?