# חלוקה הוגנת עם שיתוף מינימלי

עד עכשיו ראינו כמה דרכים להתמודד עם חלוקה הוגנת של חפצים בדידים:

(1) שימוש בכסף כדי למנוע קנאה - ראינו דוגמה לזה בבעיית חלוקת שכר-הדירה.

(2) חלוקה הוגנת-בקירוב – אלגוריתם גרף-הקנאה.

(3) פתרון נוסף הוא חלוקה בגורל - שיטה מעניינת ומעשית, החל מחלוקת ארץ ישראל בימי משה רבנו ויהושע בן-נון, ועד ל"מחיר למשתכן" בימי משה כחלון. דיון בשיטה זו דורש ידע רב בהסתברות, ולכן נשאירו לקורס אחר.

אבל מה אם אנחנו לא רוצים להשתמש בכסף (למשל משיקולי מס), והחפצים יקרים מכדי שיהיה אפשר להסתפק בהגינות "בערך" או בהגרלה?

במצב זה, הפתרון המקובל הוא להשאיר חלק מהחפצים בבעלות משותפת. למשל בחלוקת ירושות, אם יש שני יורשים ושלוש דירות, אז כל אחד יקבל דירה, והדירה השלישית תהיה משותפת, כשאחוזי-הבעלות ייקבעו לפי השווי של הדירות האחרות. גם במקומות עבודה מסויימים מקובל לשתף חפצים, למשל, לתת לעובדים "חצי רכב" (= רכב שנמצא ברשותם 50% מהזמן).

שיתוף חפצים עלול להיות מאד לא נוח. תחשבו למשל על אנשים שצריכים לשתף ביניהם רכב: בכל מספר ימים, כשמגיע התור של הצד השני להשתמש ברכב, צריך להעביר לו את המפתח. לכן נעדיף חלוקה שבה מספר השיתופים הוא קטן ככל האפשר. **מהו המספר הקטן ביותר של חפצים שצריך לשתף, על-מנת להשיג חלוקה הוגנת ויעילה?**

## א. שני שחקנים

בשלב ראשון נניח שיש לנו רק שני שחקנים. קל לראות, שבמקרים מסויימים חייבים לשתף חפץ אחד (למשל, אם יש רק חפץ אחד עם ערך גדול מאד, ולכל שאר החפצים ערך קטן משמעותית). האם תמיד אפשר להשיג חלוקה הוגנת ויעילה עם שיתוף חפץ אחד בלבד?

ניסיון ראשון: נסדר את כל החפצים בשורה ונתייחס אליהם כמו עוגה. נבקש מאדם אחד לחתוך ומהשני לבחור (או להיפך). בשיטה זו אין קנאה, ולכל היותר חפץ אחד נחתך. אבל החלוקה לא בהכרח יעילה פארטו (קל למצוא דוגמאות לכך).

ניסיון שני: כל חפץ נמסר למי שמייחס לו את הניקוד הגבוה ביותר. החלוקה ממקסמת את סכום הערכים, ולכן היא יעילה פארטו (כמו שהוכחנו בעבר), ואין בה שיתופים בכלל. אבל עלולה להיות קנאה (קל למצוא דוגמאות לכך).

ניסיון שלישי: נתייחס לחפצים כמו לסחורות, ונמצא חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים. כפי שהוכחנו באחד השיעורים הקודמים, החלוקה תהיה ללא קנאה וגם יעילה פארטו; אבל, לא בטוח שייחתך רק חפץ אחד.

## אלגוריתם המנצח המתוקן

קיים אלגוריתם לשני אנשים, המוצא חלוקה הוגנת ויעילה פארטו עם שיתוף **חפץ אחד** לכל היותר. האלגוריתם פותח ע"י שני פרופסורים אמריקאים - סטיבן בראמס (Steven Brams) שהוא פרופסור למדעי-המדינה, ואלן טיילור (Alan Taylor) שהוא פרופסור למתמטיקה. שיתוף-הפעולה ביניהם הניב הרבה אלגוריתמים, וביניהם גם את האלגוריתם שנראה מייד. האלגוריתם יכול לשמש לא רק לחלוקה של חפצים אלא גם לחלוקה של נושאים שיש עליהם מחלוקת, כמו למשל במשפטי גירושין או פירוק שותפויות. האלגוריתם יכול לשמש לגישור ולמציאת פתרון שיהיה טוב לשני הצדדים, ולכן הוא נקרא "the win-win solution" או "adjusted winner" (המנצח המתוקן).

האלגוריתם מתייחס לשני שותפים/בני זוג הרוצים להיפרד (לצורך הדיון נקרא להם "דונאלד" ו"איואנה"). יש m חפצים או נושאים שיש עליהם מחלוקת. כל שותף מייחס ערך שונה לכל נושא; הערכים נמדדים באחוזים (כך שעבור כל שותף, סכום הערכים של כל החפצים הוא 100). האתגר הוא להחליט מי יקבל כל חפץ/נושא כך שיתקיימו התכונות הבאות:

1. אין קנאה;
2. התוצאה היא יעילה-פארטו;
3. צריך לחתוך חפץ אחד לכל היותר.

בנוסף ל-3 התכונות שלמעלה, האלגוריתם מקיים תכונה נוספת - שיוויוניות (equitability) - סכום הנקודות של כל שחקן יהיה שווה. התיאור כאן שונה ופשוט יותר מהתיאור המקורי.

צעד א. עבור כל חפץ, חשב את יחס הניקוד בין דונאלד לאיואנה. סדר את החפצים מימין לשמאל בסדר עולה של יחס זה - כך שבצד ימין נמצאים החפצים שאיואנה מייחסת להם ניקוד גבוה יותר, ובצד שמאל - החפצים שדונאלד מייחס להם ערך גבוה יותר.

צעד ב. איתחול: תן את כל החפצים לדונאלד.

צעד ג. עבור על החפצים מימין לשמאל. העבר חפץ אחר חפץ לאיואנה. חשב את סכום הנקודות שאיואנה מייחסת לחפצים שברשותה, ואת סכום הנקודות שדונאלד מייחס לחפצים שברשותו. אם הסכומים של שני השחקנים שוים - סיים.

צעד ד. אם הגעת לחפץ, שאם יתנו אותו לאיואנה - סכום הנקודות שלה יהיה גדול יותר, ואם יתנו אותו לדונאלד - סכום הנקודות שלו יהיה גדול יותר, חלק אותו ביחס שיגרום לסכום הנקודות להיות שווה (פתרון משוואה בנעלם אחד).

להדגמה, ראו בגליון האלקטרוני winner.ods.

**משפט**: אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה יעילה פארטו.

**הוכחה**: יהי r יחס-הניקוד של החפץ שנחתך (או, אם אף חפץ לא נחתך - החפץ האחרון שהועבר מדונאלד לאיואנה). נכפיל את הניקוד של איואנה ב-r. כיוון שהחפצים סודרו בסדר עולה של יחס הערכים, בחלוקה הסופית, כל חפץ נמסר למי שנותן לו ניקוד מירבי (עבור החפצים שכבר הועברו לאיוואנה, הניקוד של איוואנה אחרי ההכפלה גדול יותר; עבור החפץ שנחתך, הניקוד של שניהם שווה; עבור החפצים שנשארו אצל דונאלד, הניקוד של דונאלד גדול יותר). מכאן, שהחלוקה הסופית

ממקסמת את הסכום: r*v[ivana] + v[donald]. כפי שהוכחנו בהרצאה קודמת, חלוקה הממקסמת את סכום הערכים, או סכום של פונקציה עולה כלשהי של הערכים, היא יעילה פארטו. ***

**משפט**: אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה ללא קנאה.

**הוכחה**: לשני השותפים ניקוד שווה. אילו הניקוד היה קטן מ-50, הם היו יכולים להתחלף וזה היה שיפור פארטו – סתירה למשפט הקודם. מכאן שהניקוד של שניהם הוא לפחות 50. כיוון שהסכום של כל אחד הוא 100, הערך שכל אחד מהם מייחס לסל של השחקן השני הוא לכל היותר 50, ולכן אין קנאה. ***

## שיתוף מינימלי

אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר חלוקה יעילה והוגנת עם שיתוף של חפץ אחד לכל היותר. במקרים מסויימים אכן חייבים לשתף חפץ אחד, אבל במקרים אחרים ייתכן שקיימת חלוקה בלי שיתופים בכלל. זה מעורר את השאלה: **האם אפשר לברר, עבור בעיית חלוקה מסויימת, אם קיימת חלוקה הוגנת ויעילה ללא שיתופים כלל?**

כמובן, אפשר לבדוק את כל החלוקות האפשריות ללא שיתופים, אבל מספר החלוקות הללו הוא 2 בחזקת m. האם קיים אלגוריתם יעיל יותר? - באופן כללי, התשובה היא "כנראה שלא":

**משפט**. בעיית ההחלטה, האם קיימת חלוקה הוגנת ויעילה בין שני שחקנים ללא שיתוף חפצים כלל, היא בעיה NP-קשה.

**הוכחה**. כאשר לשני השחקנים יש פונקציות-ערך זהות, כל החלוקות הן יעילות-פארטו. חלוקה היא ללא-קנאה אם-ורק-אם לשני השחקנים יש ערך זהה. לכן בעיית מציאת חלוקה ללא-קנאה שקולה לבעיה הנקראת Partition, וידוע שבעיה זו היא NP-קשה. ***

שימו לב שבהוכחת המשפט הנחנו שלשני השחקנים יש פונקציות-ערך זהות. במקרים רבים, סביר להניח שפונקציות-הערך של השחקנים לא לגמרי זהות. למרבה ההפתעה, דווקא כשפונקציות-הערך שונות, בעיית ההחלטה הנ"ל (החלטה אם קיימת חלוקה הוגנת ויעילה ללא שיתופים) קלה יותר מבחינה חישובית. ליתר דיוק, הבעיה נעשית קלה חישובית אם מתקיים התנאי הבא:

**הגדרה**. פונקציות-ערך של שני שחקנים כלשהם נקראות גנריות (generic) אם כל יחסי-הערכים שהם מייחסים ל-m החפצים שונים זה מזה.

אם פונקציות-הערך זהות אז כל יחסי-הערכים זהים (יחס הערכים הוא תמיד 1); מצב של פונקציות-ערך גנריות נמצא בקיצוניות השניה – כל יחסי-הערכים שונים זה מזה.

כעת נציג אלגוריתם למציאת חלוקה עם שיתוף מינימלי בין שני שחקנים עם פונקציות-ערך גנריות:

1. סדר את החפצים לפי סדר עולה של יחס הערכים;
2. העבר חפצים בהתאם לאלגוריתם "המנצח המתוקן";
3. אם תוך-כדי ההעברה התגלתה חלוקה ללא-קנאה בלי שיתוף כלל – החזר אותה.
4. אחרת, החזר חלוקה ללא-קנאה עם שיתוף אחד, כמו באלגוריתם "המנצח המתוקן".

כבר הוכחנו למעלה, שהאלגוריתם תמיד מחזיר חלוקה יעילה וללא-קנאה, עם שיתוף אחד לכל היותר. עכשיו נשאר להוכיח, שאם קיימת חלוקה יעילה וללא-קנאה, אז היא תתגלה בשלב 3. לשם כך נוכיח את המשפט הבא.

**משפט**: כל חלוקה יעילה-פארטו בין שני אנשים מתקבלת ע"י סידור החפצים בסדר עולה של יחס הערכים, ו"חיתוך" הסדרה בנקודה כלשהי.

**הוכחת המשפט**:

נניח שדונאלד קיבל את חפץ 1 או חלק ממנו, ואיוואנה קיבלה את חפץ 2 או חלק ממנו, ויחס הערכים הוא לא לפי הסדר הנכון:

$$r_1 = v_{d1} / v_{i1} < v_{d2} / v_{i2} = r_2$$

$$v_{d1} / v_{d2} < v_{i1} / v_{i2}$$

נעביר קצת (y) חפץ 1 מדונאלד לאיוואנה, בתמורה לקצת (z) חפץ 2, כאשר:

$$v_{d1} / v_{d2} < z / y < v_{i1} / v_{i2}$$

זה שיפור פארטו (חזק), כי:

$$z\, v_{d2} > y\, v_{d1} \qquad\qquad y\, v_{i1} > z\, v_{i2}$$

***

עכשיו נחזור לאלגוריתם שלנו. כיוון שפונקציות-הערך של השחקנים הן גנריות, יש רק דרך אחת לסדר את החפצים בסדר עולם של יחס הערכים. האלגוריתם מסדר את החפצים בסדר זה, ובודק את כל הדרכים "לחתוך" את הסדרה באמצע ללא שיתופים כלל. האלגוריתם למעשה עובר על כל החלוקות היעילות-פארטו ללא שיתופים כלל. לכן, אם קיימת חלוקה יעילה-פארטו וללא קנאה, האלגוריתם ימצא אותה בשלב 3.

שימו לב: אם פונקציות-הערך אינן גנריות, אז יש כמה דרכים אפשריות לסדר את החפצים בסדר עולה של יחס הערכים. כיוון שהאלגוריתם בוחר רק סידור אחד מביניהם, ייתכן שהוא "יפספס" חלוקה יעילה וללא-קנאה בלי שיתופים. לכן התנאי של פונקציות-ערך גנריות הוא הכרחי.

## ב. שלושה שחקנים או יותר

עכשיו נעבור למצב שיש בו n שחקנים. כמה שיתופים צריך כדי להשיג חלוקה יעילה וללא-קנאה? במקרה הגרוע, קל לראות שצריך לפחות n-1 שיתופים, למשל כשיש n-1 חפצים זהים, חלוקה ללא-קנאה מחייבת לשתף את כולם. האם תמיד אפשר להשיג חלוקה עם n-1 שיתופים? - התשובה היא כן, אבל ההוכחה מעט מורכבת יותר מבמקרה של שני שחקנים. אנחנו נוכיח משפט מעט יותר כללי.

**משפט**. נתונה חלוקת-משאבים כלשהי (נקרא לה חלוקה א), שבה ערכו של כל שחקן i הוא $t_i$. קיימת חלוקת-משאבים אחרת (נקרא לה חלוקה ב) המקיימת את התנאים הבאים:

- הערך של כל שחקן i בחלוקה ב הוא לפחות $t_i$.
- בחלוקה ב יש לכל היותר n-1 חפצים משותפים.

קיים אלגוריתם מהיר המוצא חלוקה ב המקיימת תנאים אלו.

**הוכחה**. נניח שיש m חפצים ו-n שחקנים. נכתוב תוכנית ליניארית המגדירה את חלוקה ב. בתוכנית יהיו m*n+n משתנים:

- המשתנה $z_{ij}$ הוא החלק שמקבל שחקן i מתוך משאב j; יש m*n משתנים כאלו.
- המשתנה $y_i$ הוא הערך העודף שמקבל שחקן i, מעל הסף הדרוש שהוא $t_i$.

נסמן ב- $v_{ij}$ את הערך שמייחס שחקן i למשאב j כולו. הערך הכללי שמקבל שחקן כלשהו מהחלוקה המיוצגת ע"י המטריצה z הוא ביטוי שניתן להציג כמכפלה סקלרית של שני וקטורים – וקטור הערכים של שחקן i כפול וקטור החלקים שמקבל שחקן i מהמשאבים השונים (שני הוקטורים באורך m):

$v_i \cdot z_i = v_{i1}*z_{ij} + .. + v_{im}*z_{im}$

אנחנו דורשים שהביטוי הזה יהיה שווה ל $t_i+y_i$ - הערך של $i$ בחלוקה א ועוד העודף.

עכשיו נציג את התוכנית הליניארית:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & v_n \cdot z_n \\
\text{Subject to:} \quad & \\
& v_i \cdot z_i = t_i + y_i && \text{for all } i \text{ in } 1,..,n-1 \\
& z_{1j} + .. + z_{nj} = 1 && \text{for all } j \text{ in } 1,..,m \\
& z_{ij} \geq 0 && \text{for all } i \text{ in } 1,..,n \ \&\ j \text{ in } 1,..,m \\
& y_i \geq 0 && \text{for all } i \text{ in } 1,..,n-1
\end{aligned}
$$

האילוצים השני והשלישי מבטיחים שהחלוקה תקנית – כל שחקן מקבל חלק לפחות אפס מכל משאב, וסכום החלקים הנמסרים מכל משאב שווה בדיוק 1. האילוצים הראשון והרביעי מבטיחים שכל השחקנים 1 עד $n-1$ מקבלים לפחות את הערך שקיבלו בחלוקה א. מדוע לא צריך אילוצים דומים עבור שחקן $n$? - כיוון שקיימת חלוקה כלשהי (חלוקה א) המקיימת את כל האילוצים ונותנת לשחקן $n$ ערך $t_n$, ואנחנו מוצאים את החלוקה שבה ערכו של שחקן $n$ הוא גדול ביותר תחת האילוצים הנתונים, ודאי ששחקן $n$ יקבל לפחות $t_n$.

ניתן לפתור את התוכנית בקלות בעזרת כל כלי לפתרון בעיות אופטימיזציה קמורות (למשל cvxpy). אבל איך נוודא שבפתרון שמצאנו יש לכל היותר $n-1$ שיתופים? לשם כך נשתמש בעובדה ידועה על תוכניות ליניאריות. ניתן להציג תוכנית ליניארית כללית, עם N משתנים ו-M אילוצים, באופן הבא:

$$
\begin{aligned}
& \text{maximize } c\,x \\
& \text{subject to } A\,x = b \\
& \qquad\qquad\quad x \geq 0
\end{aligned}
$$

כאשר $x$ הוא וקטור באורך N המייצג את המשתנים; $c$ הוא וקטור קבוע באורך N המייצג את הביטוי שרוצים למקסם; $A$ היא מטריצה M על N ו-$b$ הוא וקטור באורך M והם מייצגים את אילוצי השיוויון.

**עובדה**. נתונה תוכנית ליניארית בצורה המתוארת למעלה, עם M אילוצי שיוויון. אם יש לה פתרון אופטימלי, אז יש לה פתרון אופטימלי שבו לכל היותר M משתנים שונים מאפס, וקיים אלגוריתם מהיר המוצא פתרון כזה.

הוכחה מלאה של עובדה זו היא מעבר להיקפו של הקורס הנוכחי, אבל קל להבין אותה אינטואיטיבית. אם $N \leq M$ אז המשפט נכון באופן טריביאלי. אחרת, אם נבחר M מתוך N המשתנים, ונציב אפס בכל $N-M$ המשתנים האחרים, נקבל מערכת של M משוואות ב-M נעלמים. לכל מערכת כזאת, שבה המשוואות בלתי-תלויות ליניארית, קיים פתרון אחד ויחיד. פתרון כזה נקרא פתרון יסודי – *basic solution* – של התוכנית הליניארית. מספר הפתרונות היסודיים הוא לכל היותר N מעל M - מספר הדרכים לבחור M משתנים מתוך N.

כמובן, לא כל פתרון יסודי מקיים את התנאי $x \geq 0$, ולא כל פתרון יסודי הוא אופטימלי. אבל ניתן להוכיח, שמבין כל הבחירות האפשריות של M משתנים מתוך ה-N, קיימת לפחות בחירה אחת שעבורה הפתרון היסודי הוא חיובי ואופטימלי (פתרון כזה נקרא פתרון יסודי אפשרי אופטימלי – *optimal basic feasible solution*). לכן, אם נעבור על כל הפתרונות היסודיים, נמצא פתרון אופטימלי עם לכל היותר M משתנים שונים מאפס. מספר הפתרונות היסודיים הוא מעריכי בגודל הקלט (סדר גודל של N בחזקת M), אבל ישנם אלגוריתמים היודעים לסרוק את מרחב הפתרונות היסודיים באופן יעיל.

המפורסם ביותר מביניהם הוא אלגוריתם הסימפלקס – Simplex algorithm. בכל היישומים המעשיים, האלגוריתם מוצא פתרון יסודי אפשרי אופטימלי במהירות רבה.[1]

עכשיו נחזור לתוכנית הליניארית שלנו. אצלנו מספר אילוצי-השיוויון M הוא m+n-1. לכן קיים פתרון שבו לכל היותר m+n-1 משתנים במטריצה $z_{ij}$ שונים מאפס. בפרט, קיימים לכל היותר n-1 חפצים עם שניים או יותר משתנים שונים מאפס. עבור שאר החפצים, יש רק משתנה אחד שונה מאפס, וערכו של המשתנה הזה חייב להיות 1 (כי סכום כל המשתנים עבור כל חפץ הוא 1). לכן, יש לכל היותר n-1 חפצים משותפים. כפי שהוסבר בהוכחה למעלה, ניתן למצוא חלוקה כזאת בעזרת אלגוריתם הסימפלקס. ***

**משפט**. בכל בעיית חלוקת-משאבים עם n שחקנים, קיימת חלוקה פרופורציונלית ויעילה-פארטו, שבה היותר n-1 חפצים משותפים. קיים אלגוריתם מהיר המוצא חלוקה כזאת.
**הוכחה**. חלוקה פרופורציונלית קל מאד למצוא – פשוט נותנים לכל שחקן 1 חלקי n מכל משאב. נגדיר אותה כ"חלוקה א" ונפעיל עליה את המשפט הקודם: נקבל חלוקה יעילה-פארטו, עם לכל היותר n-1 שיתופים, שבה כל שחקן מקבל לפחות את הערך שקיבל בחלוקה א – שהוא הערך הפרופורציונלי. ***

**משפט**. בכל בעיית חלוקת-משאבים עם n שחקנים עם זכויות שונות, קיימת חלוקה פרופורציונלית ויעילה-פארטו, שבה היותר n-1 חפצים משותפים. קיים אלגוריתם מהיר המוצא חלוקה כזאת.
**הוכחה**. בדיוק כמו קודם, קל מאד למצוא חלוקה עם זכויות שונות. נניח שהזכות של כל שחקן i היא $w_i$, ונרמל את הזכויות כך שסכומן יהיה 1. ניתן לכל שחקן i חלק wi מכל משאב. נגדיר חלוקה זו כ"חלוקה א" ונפעיל עליה את המשפט הקודם. ***

**משפט**. בכל בעיית חלוקת-משאבים עם n שחקנים, קיימת חלוקה יעילה-פארטו וללא-קנאה שבה לכל היותר n-1 חפצים משותפים. קיים אלגוריתם מהיר המוצא חלוקה כזאת.
**הוכחה**. אנחנו יודעים מאחד השיעורים הקודמים, שכל חלוקה הממקסמת את סכום הלוגריתמים של ערכי השחקנים היא יעילה-פארטו וללא קנאה. נתייחס אליה כ"חלוקה א" ונפעיל את המשפט הקודם. מתקבלת חלוקה ב שבה לכל היותר n-1 חפצים משותפים, ובנוסף, הערך של כל שחקן i בחלוקה ב הוא לפחות הערך שהיה לו בחלוקה א. אבל חלוקה א היא יעילה-פארטו. לכן, הערך של כל שחקן בחלוקה ב הוא בדיוק הערך שהיה לו בחלוקה א (אילו לאחד השחקנים היה ערך גדול יותר, אז חלוקה ב היתה שיפור-פארטו של חלוקה א, בסתירה ליעילות-פארטו של חלוקה א). לכן, חלוקה ב גם היא ממקסמת את סכום הלוגריתמים של ערכי השחקנים. לכן גם היא יעילה-פארטו וללא-קנאה. ***

כמו במצב של שני שחקנים, גם במצב של n שחקנים ייתכנו מקרים שבהם אפשר להשיג חלוקה יעילה וללא-קנאה עם פחות מ-n-1 שיתופים. ניתן למצוא חלוקה כזאת בזמן פולינומיאלי במספר החפצים, אם פונקציות-הערך של כל זוג שחקנים הן גנריות, ואם מספר השחקנים הוא קבוע (זמן הריצה הוא מעריכי במספר השחקנים). לשם כך יש לעבור בצורה שיטתית על כל החלוקות היעילות-פארטו, ולכל אחת מהן, לבדוק אם היא ללא-קנאה. האלגוריתם העושה זאת מוסבר במאמרים [המשך יבוא].

## מקורות


- Brams and Taylor: "Fair Division" (1996 book), "The Win-Win Solution" (1999 book).


1 תיאורטית, אלגוריתם הסימפלקס אינו אלגוריתם פולינומיאלי: ישנם מקרים שבהם האלגוריתם צריך לעבור על מספר מעריכי של פתרונות יסודיים עד שהוא מוצא פתרון יסודי אפשרי אופטימלי. אבל המקרים האלה נדירים מאד ואינם מתגלים ביישומים מעשיים. קיימים אלגוריתמים משוכללים יותר למציאת פתרון יסודי אפשרי אופטימלי, שזמן הריצה שלהם הוא תמיד פולינומיאלי. אבל ברוב המקרים המציאותיים, זמן-הריצה של אלגוריתמים אלה איטי יותר משל אלגוריתם הסימפלקס.

- הקורס של ויליאם גסרך – כולל מצגות סטודנטים על יישומים של האלגוריתם במקרים שונים:http://www.cs.umd.edu/~gasarch/COURSES/209/S15
    - מצגת על דונאלד ואיואנה: http://www.cs.umd.edu/~gasarch/COURSES/209/S15/trump.pptx
- האתר של אוניברסיטת ניו-יורק – כולל הדגמה חיה ואפשרות לשלם כדי לקבל הסכם פורמלי:http://www.nyu.edu/projects/adjustedwinner/
- http://fairoutcomes.com/fd.html
- הכללת אלגוריתם "שיתוף מינימלי" לשלושה אנשים או יותר: https://arxiv.org/abs/1908.01669

סיכם: אראל סגל-הלוי.