

חלוקה הוגנת של

חפצים בדידים

Fair Indivisible Item  
Allocation

אראל סגל-הלוי

# חלוקה הוגנת בקירוב

מקרה פשוט:

- 99 חפצים זהים.

- 2 שחקנים עם זכויות שוות.

מה הן החלוקות שאפשר לקרוא להן "הוגנות בקירוב"?

- 50:49 או 49:50.

- בכל חלוקה אחרת, יש חוסר-הגינות שאי-אפשר להצדיק בכך שהחפצים בדידים.

# חלוקה הוגנת בקירוב - הכללות

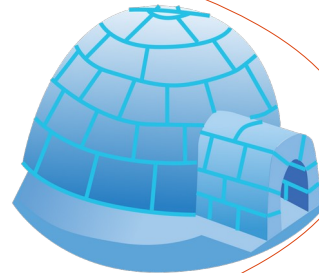
א. חפצים זהים – זכויות **שונות**.

ב. חפצים **שונים** – זכויות **שוות**.

ג. חפצים **שונים** – זכויות **שונות**.

# חלוקה הוגנת בקירוב

**הגדרה:** חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1"  
(Envy Free except 1, **EF1**) אם לכל שני  
משתתפים א, ב, קיים חפץ כלשהו, שאם נוריד  
מהסל של ב, אז שחקן א לא יקנא בו.



# חפצים שונים – זכויות שוות

**הגדרה:** חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1"  
(Envy Free except 1, **EF1**) אם לכל שני  
משתתפים א, ב, קיים חפץ כלשהו, שאם נוריד  
מהסל של ב, אז שחקן א לא יקנא בו.

*המשמעות: רמת הקנאה היא הקטנה ביותר  
האפשרית, בהתחשב בעובדה שהחפצים  
בדידים.*

**כשה"עוגה" רציפה – תמיד קיימת חלוקה **EF**.**

**האם כשהחפצים בדידים תמיד קיימת חלוקה  
**EF1**?**

# אלגוריתם הסֶבֶב (round robin)

1. מסדרים את השחקנים בסדר שרירותי כלשהו.

2. כל שחקן לוקח, מבין החפצים שנשארו, את החפץ שהוא הכי רוצה,

3. אם נשארו חפצים – חוזרים לשלב 2.

**משפט.** אלגוריתם הסבב מחזיר חלוקה  $EF1$ .

**הוכחה.** נוכיח את תנאי  $EF1$  לכל שני שחקנים א, ב; נניח בה"כ ששחקן א מופיע בסבב לפני שחקן ב.

• **א לא מקנא כלל:** על כל חפץ ש-ב בחר, א בחר לפניו.

• **עכשיו נניח שמורידים מהסל של א את החפץ הראשון שבחר.** על כל חפץ שנשאר בסל של א, ב בחר לפניו. לכן החלוקה  $EF1$  גם עבור שחקן ב. \*\*\*

# חלוקה הוגנת בקירוב - הכללות

א. חפצים זהים – זכויות **שונות**.

ב. חפצים **שונים** – זכויות שוות.

ג. חפצים **שונים** – זכויות **שונות**.

**דוגמה:** חלוקת תיקים בממשלה בין מפלגות.

# אלגוריתם סֶבֶב משוקלל

- אתחול: כל שחקן מקבל 0
  - כל עוד יש חפצים:
  - מחשבים, לכל שחקן:  
הזכות שלו
- 

**(מספר החפצים נוכחי)  $f$**

- השחקן, שהמנה שלו גדולה ביותר, בוחר, מבין החפצים שנשארו, את החפץ שהוא הכי רוצה.

נבחר פונקציה  
כלשהי  $f$ ,  
המייחסת לכל  
מספר שלם  $s$ ,  
מספר ממשי  
כלשהו בתחום  
 $[s, s+1]$ .



# חפצים שונים – זכויות שונות

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה משוקללת"  
(Weighted Envy Free, WEF) אם לכל שני  
משתתפים  $i, j$  עם זכויות  $w_i, w_j$ :

$$V_i(X_i) \geq V_i(X_j) * (w_i / w_j) .$$

# חפצים שונים – זכויות שונות

**משפט:** אלגוריתם הסבב המשוקלל מחזיר חלוקה שבה לכל שני משתתפים  $j$ ,  $i$  עם זכויות  $w_j$ ,  $w_i$ , תנאי WEF מתקיים כאשר:

- **מסירים** חפץ אחד מהסל של  $j$  –  
אם  $f(s) = s + 1$ ;
- **משכפלים** חפץ אחד מהסל של  $j$  לסל של  $i$  –  
אם  $f(s) = s$ ;
- **משתתפים** חפץ אחד מהסל של  $j$  עם שחקן  $i$  –  
אם  $f(s) = s + 0.5$ .