

מטלה - חלוקת חפצים עם שיתופים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול.

שאלה 3: מיקסום מכפלת הערכים - חפצים רציפים

כזכור, למדנו שאלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים נותן חלוקה שהיא ללא קנאה כאשר החפצים הם רציפים (ניתנים לחיתוך). תנו דוגמאות לחלוקה של 3 חפצים רציפים בין 2 אנשים, שבהן:

- אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים לא צריך לחתוך אף חפץ.
- אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים צריך לחתוך חפץ אחד בדיוק.
- אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים צריך לחתוך שני חפצים בדיוק.
- אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים צריך לחתוך שלושה חפצים בדיוק.

שאלה 3: חלוקת תיקים בין מפלגות בקואליציה

לאחר הבחירות, שתי מפלגות החליטו להקים ממשלה ביחד, אבל הן בזבוזו חודש שלם בויכוחים על איזה מפלגה תקבל איזה תיק. לאחר שהתייאשו מהויכוחים, הן פנו אליכם כדי שתעזרו להם להחליט.

א. הציעו אלגוריתם שיאפשר לשתי המפלגות להחליט על חלוקת-תיקים עם התכונות הבאות:

- יעילה פארטו.
 - מותר שתהיה רוטציה בין המפלגות בתיק אחד לכל היותר.
 - החלוקה תהיה הוגנת, בהתחשב בגדלים השונים של המפלגות.
- הגדירו במדויק את תכונת ההגינות, והוכיחו את נכונות האלגוריתם.

ב. הדגימו את פעולת האלגוריתם שלכם על אוסף התיקים שהיו באחת מממשלות ישראל האחרונות (לבחירתכם), ועל שתי מפלגות לבחירתכם.

שאלה 4: חלוקה הוגנת ויעילה עם מספר שיתופים קטן ביותר

נתונים שני אנשים ו- m חפצים. יש למצוא חלוקה ללא-קנאה ויעילה-פארטו של החפצים, כך שמספר החפצים ה"נחתכים" (או נשארים בבעלות משותפת) הוא הקטן ביותר האפשרי.

א. הוכיחו שהבעיה היא NP-שלמה (כפונקציה של m). רמז:

https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_problem

ב. הוכיחו, שאם הערכים שהאנשים מייחסים לחפצים נבחרים באקראי (למשל כל ערך הוא מספר ממשי המתפלג אחיד בין 0 ל-1, כל ההגרלות בלתי-תלויות סטטיסטית), אז בהסתברות 1, הבעיה ניתנת לפתרון בזמן $O(m \log m)$.

שאלה 7: כמה חלוקות יעילות-פארטו יש?

תארו בעיית חלוקה של חמישה חפצים בין שני שחקנים, שבה מספר החלוקות היעילות-פארטו ללא שיתופים הוא:

ברוך ה' חונן הדעת

א. בדיוק 6; ב. בדיוק 7; ג. בדיוק 10; ד. בדיוק 17; ה. בדיוק 32.
(למה דווקא מספרים אלה?)