חלוקה הוגנת מלבד חפץ אחד

חפצים שונים וזכויות שוות

כשיש חפצים זהים וזכויות שוות, ברור לנו שכל שחקן צריך לקבל כמעט את אותו מספר חפצים – ההפרש צריך להיות לכל היותר 1. הכללה טבעית לעקרון זה כשהחפצים שונים היא:

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1" (Envy Free except 1, EF1) אם לכל שני שחקנים i, j קיים חפץ בסל של שחקן j, שאם נסיר אותו - אז שחקן i לא יקנא.

במקרה הפרטי של חפצים זהים, חלוקה היא EF1 אם-ורק-אם ההפרש בין מספרי החפצים שמקבל כל שחקן הוא לכל היותר 1.

האם תמיד קיימת חלוקה ***EF1***? התשובה היא כן. הנה אחד האלגוריתמים הפשוטים למציאת חלוקה כזאת; אלגוריתם שילדים משתמשים בו עד היום כדי לבחור שחקנים לקבוצות כדורגל. הוא נקרא באנגלית *round robin*. בעברית אפשר לקרוא לו "אלגוריתם הסֶבֶב":

1. מסדרים את השחקנים בסדר שרירותי כלשהו.
2. כל שחקן לוקח, מבין החפצים שנשארו, את החפץ שהוא הכי רוצה.
3. אם נשארים חפצים – חוזרים לשלב 2.

משפט: החלוקה המוחזרת ע"י אלגוריתם הסבב היא EF1.

הוכחה: קודם-כל נוכיח, שעבור השחקן הראשון בסבב (שחקן 1), החלוקה היא ללא-קנאה לגמרי. נשווה את הסל שמקבל שחקן 1 לסל שמקבל שחקן אחר כלשהו, נניח j. לכל חפץ x שנמצא בסל של שחקן j, נתאים את החפץ y ששחקן 1 בחר באותו סבב. כיוון ששחקן 1 בחר לפני שחקן j, החפץ x היה זמין כשהוא בחר את חפץ y, ומכאן שחפץ y שווה עבורו לפחות כמו חפץ x. נחבר את כל הערכים של החפצים x בסל של שחקן j, ואת כל הערכים של החפצים y בסל של שחקן 1, ונקבל שהסל של שחקן 1 שווה בעיניו לפחות כמו הסל של שחקן j.

עכשיו נתבונן בשחקן אחר כלשהו, i. אם נוריד מהסלים של השחקנים 1, 2, ..., i-1 את החפץ הראשון שהם בחרו, נקבל סדרה חדשה של בחירות, שבה שחקן i בוחר ראשון. לפי הפיסקה הקודמת, בסלים הנוצרים על-ידי בחירה זו, שחקן i אינו מקנא בכלל. לכן, בסלים הנוצרים ע"י הסדרה כולה, שחקן i אינו מקנא עד-כדי חפץ אחד – וזו בדיוק ההגדרה של חלוקה EF1. ***

חפצים שונים וזכויות שונות

עכשיו נשלב את שתי ההכללות: נניח שהחפצים שונים וגם הזכויות שונות. דוגמה לבעיה כזאת היא חלוקת תיקים בין מפלגות בקואליציה. בישראל, חלוקת התיקים נקבעת על-ידי משא-ומתן מייגע בין המפלגות, שיכול להימשך שבועות רבים, ועלול גם לגרום לכישלון בהרכבת ממשלה. אבל במדינות אחרות (כגון בצפון אירלנד, דנמרק, וכן בפרלמנט של האיחוד האירופי) משתמשים בשיטה אחרת: כל מפלגה בתורה בוחרת תיק, כאשר סֶבֶב הבחירות נקבע לפי גודלה של כל מפלגה.

כדי לקבוע את סדר בחירת התיקים, נשתמש באותו אלגוריתם שלמדנו לגבי חלוקת מושבים בשיטת מחלק. נבחר פונקצייה כלשהי f, ונבצע את הלולאה הבאה:

- כל עוד יש חפצים פנויים:
  - מחשבים, עבור כל שחקן, את המנה (מספר חפצים) / f(s), כאשר x הוא מספר החפצים הנוכחי של השחקן;

- ○ השחקן, שעבורו המנה הזאת גדולה ביותר, לוקח מבין החפצים שנשארו את החפץ שהוא הכי רוצה.

האלגוריתם הזה מכליל את שני האלגוריתמים הקודמים שלמדנו:

- כאשר הזכויות שוות והחפצים שונים, מקבלים את אלגוריתם round robin – כי המנה תמיד תהיה גדולה יותר עבור שחקן שבחר פחות פעמים;
- כאשר הזכויות שונות והחפצים זהים, מקבלים את אלגוריתם שיטת-המחלק עם פונקציה f.

האלגוריתם מקיים תנאי-הגינות שמכליל את התנאי EF1. כדי להסביר אותו, נגדיר קודם הכללה של חלוקה ללא קנאה עבור שחקנים עם זכויות שונות.

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה משוקללת" (באנגלית: Weighted envy-free או WEF), אם לכל שני שחקנים i, j עם זכויות w_i, w_j, מתקיים:

$$v_i(X_i)/w_i \geq v_i(X_j)/w_j.$$

כלומר: שחקן i מעריך את הסל שלו, ביחס למשקל שלו, לפחות כמו שהוא מעריך את הסל של כל שחקן אחר j, ביחס למשקל של j.

עכשיו נגדיר הכללה של EF1 לשחקנים עם זכויות שונות. במחשבה ראשונה נראה שהכללה הנכונה היא: לכל שני שחקנים i, j, קיים חפץ בסל של j, שאם נסיר אותו, אז יתקיים התנאי WEF. אבל זו לא האפשרות היחידה; ניתן להציג את EF1 גם באופן אחר. במקום להתייחס למצב היפותטי שאנחנו מסירים את החפץ מהסל של j, אפשר להתייחס למצב היפותטי שאנחנו משכפלים את החפץ אל הסל של i, או לחלופין משתפים את החפץ בין שני השחקנים כך שכל אחד מהם מקבל חצי ממנו. כאשר הזכויות שוות, כל המצבים ההיפותטיים האלה שקולים, כי בסופו של דבר, הקנאה נקבעת על-פי הפרש הערכים בין הסל של i לבין הסל של j. אבל כאשר הזכויות שונות, המצבים האלה לא שקולים, כי הקנאה הממושקלת נקבעת על-ידי הפרש ממושקל של הערכים, ובמקרה זה, יש חשיבות לשאלה אם מסירים חפץ משחקן אחד או מוסיפים חפץ לשחקן השני.

מתברר, שיש שלוש "שיטות מחלק", שכל אחת מהן, אם משתמשים בה כשיטה לבחירת חפצים ע"פ האלגוריתם שתואר למעלה, מבטיחה את אחת ההכללות לתנאי EF1.

משפט.

- שיטת אדאמס נותנת חלוקה שהיא ללא-קנאה-ממושקלת לאחר הסרת חפץ אחד (לכל שני שחקנים קיים חפץ, שאם מסירים אותו מהסל של שחקן אחד, אז מתקיים תנאי WEF עבור השחקן השני).
- שיטת ג'פרסון נותנת חלוקה שהיא ללא-קנאה-ממושקלת לאחר שיכפול חפץ אחד (לכל שני שחקנים קיים חפץ, שאם משכפלים אותו אל הסל של שחקן אחד, אז מתקיים תנאי WEF עבור שחקן זה).
- שיטת וובסטר נותנת חלוקה שהיא ללא-קנאה-ממושקלת לאחר שיתוף חפץ אחד (לכל שני שחקנים קיים חפץ, שאם משתפים אותו בין שני השחקנים, כל שכל אחד מהם מקבל ½ מערכו, אז מתקיים תנאי WEF).
- אי-אפשר להבטיח את כל שלוש ההכללות בו-זמנית.

כשהזכויות שוות, כל ההכללות זהות ושקולות ל EF1. כשהזכויות שונות, כל אחת מהכללות נראית הגיונית. כמו בבעיית חלוקת המושבים, שיטת אדאמס טובה יותר לשחקנים עם זכויות קטנות, שיטת ג'פרסון טובה יותר לשחקנים עם זכויות גדולות, ושיטת וובסטר מאוזנת. כשמחלקים חפצים בין אנשים, נראה ששיטת וובסטר עדיפה, אולם כשמחלקים תיקים בין מפלגות בקואליציה, בדרך-כלל רוצים לתת עדיפות למפלגות קטנות כדי שיקבלו ייצוג, ולכן נראה ששיטת אדאמס עדיפה.

מקורות

- *Chakraborty, Igarashi, Suksompong, Zick (2021). “Weighted Envy-Freeness in Indivisible Item Allocation”.*
- *Chakraborty, Schmidt-Kraeplin, Suksompong. “Picking Sequences and Monotonicity in Weighted Fair Division”.*

סיכם: אראל סגל-הלוי.