

חלוקת עלויות אמיתית

Truthful Cost-sharing

אראל סגל-הלוי



איך מחליטים מי יקבל שירות?

- עד כאן הנחנו שכולם נוסעים.
- אבל מה קורה אם העלות גבוהה מדי עבור חלק מהנוסעים - איך נחליט מי ייסע?
- נתון: לכל שחקן j , ערך הנסיעה הוא v_j .
- אם תת-קבוצה מסויימת נוסעת, הרווחה החברתית היא סכום הערכים של הנוסעים בתת-הקבוצה, פחות עלות הנסיעה.
- דרוש: כלל-החלטה שהוא:
 - א. יעיל פארטו – ממקסם רווחה חברתית.
 - ב. מגלה-אמת – מעודד שחקן j לגלות את v_j .

מכרז לקבלת שירות בשיטת VCG

- התוצאות האפשריות – כל 2^n תת-הקבוצות.
- הערך של שחקן j הוא v_j אם נוסע, 0 לא.
- הערך של ה"נהג" הוא מינוס עלות הנסיעה.
- בוחרים את התוצאה הממקסמת את הסכום.
- תשלום שחקן j =: הסכום בלי j , פחות הסכום של אחרים (כולל ה"נהג") כש- j נמצא.

מכרז VCG הוא:

- יעיל-פארטו – לפי הגדרה.
- מגלה-אמת – הוכחנו.
- הבעיה – גירעון! ראו גליון מצורף.

מכרז לקבלת שירות - מולין-שנקר (Moulin & Shenker, 2001)

קלט: כלל-תשלום. $p(S, j) =$ כמה משלם שחקן j
אם הקבוצה שמקבלת שירות היא S .

אלגוריתם:

- (1) **איתחול:** כולם נכנסים לחדר.
- (2) אומרים לכל אחד כמה הוא צריך לשלם לפי p , בהנחה שכל הנוכחים בחדר משתתפים.
- (3) מי שחושב שזה יקר מדי - יוצא מהחדר.
- (4) אם מישהו יצא מהחדר - חזור לצעד 2.
- (5) אחרת - סיים ושלח את הנשארים למונית.

מולין-שנקר – גילוי אמת

האם אלגוריתם מולין-שנקר מגלה אמת?

הגדרה: כלל תשלום p נקרא מונוטוני אם כשהקבוצה קטנה, התשלום גדל (או שווה):

If $S \leq T$ then for all j : $p(S, j) \geq p(T, j)$

משפט: אלגוריתם מולין-שנקר עם כלל-תשלום מונוטוני הוא מגלה-אמת.

הוכחה: התשלום של כל הנוסעים הנשארים לא

קטן ← לנוסע שיצא לא כדאי לחזור ←

ההתנהגות האופטימלית של נוסע היא לצאת

אם"ם התשלום הנוכחי גדול מהערך שלו. זה

מה שהאלגוריתם עושה כשהוא אומר אמת. ***

מכרז מולין-שנקר + ערך שאפלי

טוב, אז האם ערך שאפלי הוא מונוטוני?

הגדרה: פונקציית עלות נקראת תת-מודולרית אם יש לה עלות שולית פוחתת, כלומר:

If $S \leq T$, then $c(S \cup \{j\}) - c(S) \geq c(T \cup \{j\}) - c(T)$

משפט: במשחק עם עלות שולית פוחתת, כלל-התשלום של שאפלי הוא מונוטוני.

הוכחה: שחקן א – בקבוצה, שחקן ג – מצטרף. נחשב את ערך שאפלי של שחקן א לפני ואחרי: * לפני (בלי ג) – ממוצע על $n!$ סדרים.

* אחרי (עם ג) – ממוצע של $(n+1)!$ סדרים:

אם שחקן ג נכנס אחרי א – הערך שווה.

אם שחקן ג נכנס לפני א – הערך קטן או שווה. ***

מכרז מולין-שנקר + ערך שאפלי

יתרונות:

- מאוזן תקציבית;
- הוגן;
- מגלה-אמת (אם יש עלות שולית פוחתת).

חסרון:

- לא יעיל פארטו.
- הוכחה: שיעורי בית.

מכרז למתן שירות – טְרִיְלָמָה

מגלה אמת	מאוזן תקציבית	יעיל פארטו	
כן	לא	כן	VCG
כן	כן	לא	מולין- שנקר
לא	כן	כן	תשלום = ערך