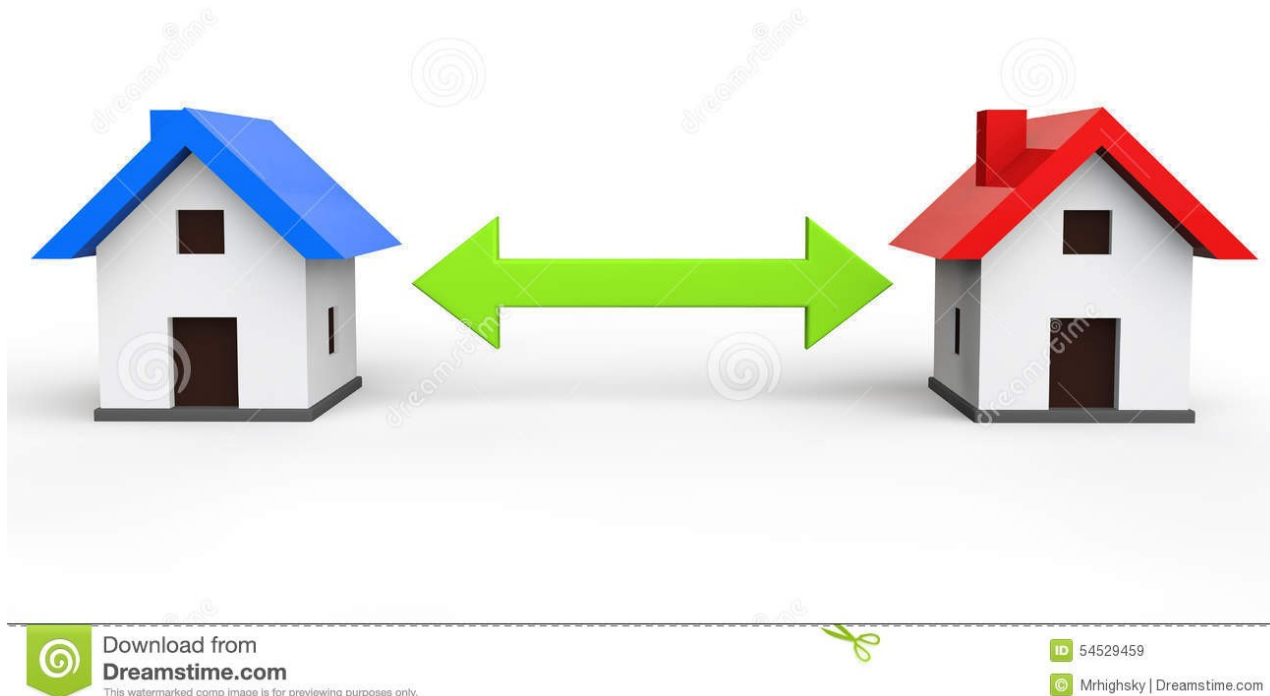


# אלגוריתמי החלפה

אראל סגל-הלוי

חלק מהשקפים של: Wayne Racey



Download from  
Dreamstime.com

This watermarked comp image is for previewing purposes only.

ID 54529459

© Mrhighsky | Dreamstime.com

# החלפה

דוגמאות:

- א. החלפת בתים לנופש;
- ב. החלפת תורניות בין עובדים;
- ג. החלפת חדרים בין סטודנטים במעונות.

למה לא להריץ אלגוריתם לחלוקה הוגנת?

- כי סטודנטים שכבר יש להם חדרים  
יחששו להפסיד ויעדיפו לא להשתתף.

# עידוד השתתפות

**הגדרה:** אלגוריתם הוא מעודד השתתפות  
(באנגלית: individually rational - רציונלי  
ליחידים), אם מצבו של כל משתתף לאחר  
הביצוע, טוב לפחות כמו מצבו לפני הביצוע.

**שאלה:** האם קיים אלגוריתם החלפה שהוא  
מגלה-אמת, יעיל-פארטו, ומעודד השתתפות?

# יציבות – "עידוד השתתפות" קבוצתי

הגדרות:

- **קואליציה מערערת** (blocking coalition) = קבוצת משתתפים שיכולה לפרוש ולבצע החלפה שהיא טובה באותה מידה לכל חברי הקבוצה וטובה יותר לפחות לאחד מחבריה.
  - **שיבוץ יציב** (core-stable allocation) = שיבוץ שבו אין קואליציה מערערת.
- יציבות ← עידוד השתתפות, יעילות פארטו.

**שאלה:** האם קיים אלגוריתם החלפה שהוא מגלה-אמת ומוצא שיבוץ יציב?

# אלגוריתם מעגלי המסחר

**משפט** (Gale, Shapley, Scarf, 1974).  
אם כל יחסי ההעדפות הם חזקים (אין אדישות), אז:

א. קיים שיבוץ יציב אחד ויחיד;

ב. קיים אלגוריתם מגלה-אמת המוצא אותו.

הוא נקרא אלגוריתם מעגלי המסחר –  
**Top Trading Cycles**

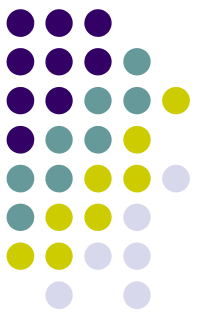
# אלגוריתם מעגלי המסחר

0. מאתחלים גרף מכוון שבו:  
הצמתים הם האנשים והבתים;  
יש קשת מכל אדם לבית שהוא הכי רוצה,  
ומכל בית לאדם שגר בו עכשיו.

- א. מוצאים מעגל מכוון בגרף.
- ב. מבצעים את ההחלפה במעגל.
- ג. מוחקים מהגרף את הצמתים שהשתפו.
- ד. מעדכנים את הקשתות של האנשים שנשארו.

ה. חוזרים על שלבים א-ד עד שהגרף ריק.

# אלגוריתם מעגלי המסחר בתמונות



א



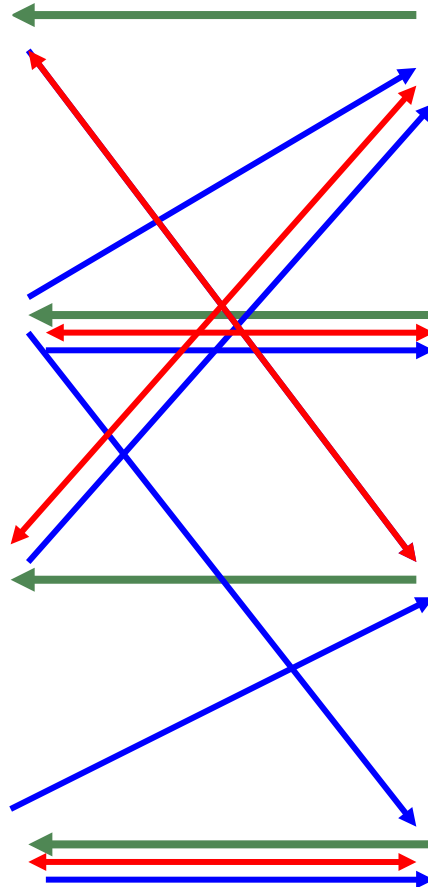
ג



ר



ש



# אלגוריתם מעגלי המסחר

**משפט:** אלגוריתם מעגלי המסחר מסתיים.

**הוכחה:** כל עוד הגרף לא ריק, קיים לפחות מעגל מכוון אחד. לכן בכל שלב הגרף קטן עד שמתרוקן.

**משפט:** האלגוריתם מעודד השתתפות.

**הוכחה:** כשהבית שלך יוצא מהגרף, אתה מייד מקבל בית חדש. הבית החדש הוא בית שהצבעת עליו, שהוא הטוב ביותר מבין הבתים הזמינים. לכן הוא טוב לפחות כמו הבית שלך.



# אלגוריתם מעגלי המסחר - יציבות

**משפט:** אם כל יחסי ההעדפה חזקים (אין אדישות), אז אלגוריתם מעגלי המסחר מוצא שיבוץ יציב.

**הוכחה:** נניח שקבוצת "הבדלנים" שוקלת לפרוש.

**שיבוץ א = השיבוץ לבדלנים כשהם לא פורשים.**

**שיבוץ ב = השיבוץ לבדלנים כשהם כן פורשים.**

יהי  $k$  הקטן ביותר כך שבדלן ממעגל  $k$  מקבל בית אחר בעקבות הפרישה. בית זה שייך לבדלן אחר.

**כל הבדלנים ממעגלים  $k > j$  מקבלים אותו בית.**

**לכן הבדלן שלנו מקבל בית ממעגל  $k$  ומעלה.**

**אבל בשיבוץ א, הוא מקבל את הבית הטוב ביותר**

**עבורו, מבין הבתים שעדיין זמינים בזמן מעגל  $k$ .**

**כיוון שההעדפות חזקות, הבית האחר גרוע יותר.** \*\*\*

# אלגוריתם מעגלי המסחר – גילוי אמת

**משפט:** אלגוריתם מעגלי המסחר מגלה-אמת.

**הוכחה:** נניח שיוסי סוחר במעגל  $k$  כשהוא אמיתי ובמעגל  $j$  כשהוא מתחכם. נשווה בין מצבים אלו בשני מקרים.

• **מקרה א:**  $j \geq k$ . המסחר עד מעגל  $k-1$  זהה בשני המצבים. לכן קבוצת הבתים שנשארו זמינים אחרי מעגל  $k-1$  זהה בשני המצבים. וכשיוסי אמיתי הוא מקבל את הבית שהוא הכי רוצה מבין הבתים בקבוצה זו.

• **מקרה ב:**  $j < k$ . המסחר עד מעגל  $j-1$  זהה בשני המצבים. בסיבוב הבא כל הקשתות זהות בשני המצבים, פרט לקשת היוצאת מיוסי. **כשיוסי מתחכם, הקשת היוצאת ממנו**

**סוגרת מעגל עם בית כלשהו  $x$ . כשיוסי אמיתי, הוא**

נמצא בסופה של שרשרת המתחילה בבית  $x$ . כל עוד לא נסגר מעגל, כל השרשרת הזאת נשארת בגרף. בפרט, בית  $x$  עדיין נמצא בגרף כאשר מעגל  $k$  נסגר. לכן הבית שמקבל

יוסי כשהוא אמיתי טוב לפחות כמו  $x$ . \*\*\*

# אלגוריתם מעגלי המסחר - יציבות

**משפט:** אם כל יחסי ההעדפה הם חזקים, אז יש רק שיבוץ יציב אחד. (למה זה מעניין?)

**הוכחה:** נגדיר: שיבוץ א = השיבוץ של

**האלגוריתם, שיבוץ ב = שיבוץ אחר כלשהו.**

יהי  $k$  הקטן ביותר כך שמישהו ממעגל  $k$  באלגוריתם, משובץ אחרת בשיבוץ ב.

בשיבוץ א הוא מקבל את הבית הטוב ביותר מהבתים שלא נלקחו ע"י מעגלים  $k > j$ .

בשיבוץ ב הוא לא מקבל בית ממעגל  $k > j$ , ולכן מצבו פחות טוב.

==> משתתפי מעגל  $k$  יכולים לפרוש ולערער על שיבוץ ב. ==> שיבוץ ב לא יציב.

\*\*\*