

# אלגוריתמים למיקסום רווח Revenue-Maximization

אראל סגל-הלוי

מקורות:

הקורס של טים, הרצאה 5 והלאה

<http://theory.stanford.edu/~tim/f13/f13.html>

# מיקסום רווח לעומת מיקסום סכום ערכים

נניח שאנחנו מוכרים חפץ אחד ויש קונה אחד.

איזה מכרז ממקסם את סכום הערכים?  
• זה קל – נותנים לו את החפץ בחינם.

איזה מכרז ממקסם את הרווח של המוכרים?  
• זה קשה – תלוי בערך של השחקן!

במקום רווח – ננסה למקסם תוחלת רווח.  
• זה דורש מידע סטטיסטי על ערכים של שחקנים ("סקר שוק").

# מיקסום רווח – חפץ אחד וקונה אחד

דוגמה: סקר-שוק הראה שהערך של קונה מתפלג אחיד בין 10 ל-30.  
איזה מכרז משיג תוחלת-רווח גדולה ביותר?

- מכרז ויקרי ממקסם סכום ערכים, אבל הרווח שלו הוא 0!

- מכרז מאירסון לא חייב למקסם סכום ערכים, ולכן יש סיכוי שייתן לנו תוחלת רווח חיובית.

- כדי להשתמש בו צריך להגדיר כלל בחירה.

# מכרז מאירסון – חפץ אחד וקונה אחד

דוגמה: סקר-שוק הראה שהערך של קונה מתפלג אחיד בין 10 ל-30.

איזה מכרז משיג תוחלת-רווח גדולה ביותר?

- כללי-בחירה אפשריים כשיש שחקן אחד:
- בחר את הקונה אם ורק אם ערכו גדול מ- $p$ .

• התשלום הוא ערך הסף –  $p$ .

• איזה  $p$  נותן את תוחלת-הרווח הגדולה ביותר?

# מכרז מאירסון – חפץ אחד וקונה אחד

• בכלל-הבחירה "מקסם את סכום הערכים":  
ערך-הסף=0, התשלום=0, תוחלת הרווח=0.

• בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם"ם הערך  
שלו לפחות 10": ערך-הסף=10, הקונה  
תמיד נבחר (בהסתברות 1) ותמיד משלם,  
תוחלת הרווח=10.

• בכלל-הבחירה "בחר אם"ם הערך לפחות  
15", ערך-הסף=15, הקונה נבחר בהסתברות  
 $\frac{3}{4}$ , תוחלת רווח  $= \frac{3}{4} * 15 = 11.25$ .

# מכרז מאירסון – חפץ אחד וקונה אחד

בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם"ם הערך  
שלו לפחות  $p$ ", ערך-הסף  $=p$ , הקונה נבחר  
בהסתברות:

- $(30-p)/(30-10)$

• תוחלת הרווח:

$$\begin{aligned} E[\text{Revenue}(p)] &= p * \text{Prob}[v > p] \\ &= p * (30-p)/(30-10) \end{aligned}$$

$$\text{derivative by } p = (30-2p)/20 \rightarrow p_{opt} = 15$$

**מכרז מאירסון – חפץ אחד וקונה אחד**

**הכללה:** נניח שאספנו נתונים סטטיסטיים על ערכי קונים, והגענו למסקנה שהם מתפלגים כ:

$$\text{Prob}[v < p] = F(p)$$

**איזה מחיר ממקסם את תוחלת הרווח?**

$$E[\text{Revenue}(p)] = p \cdot \text{Prob}[v > p] = p \cdot [1 - F(p)]$$

$$p' = 0 \iff p - \frac{1 - F(p)}{F'(p)} = 0$$

**נגדיר את פונקציית הערך הוירטואלי:**

$$r(v) := v - \frac{1 - F(v)}{F'(v)}$$

**המכרז האופטימלי הוא: מכור אם  $r(v) > 0$ .**

ראו: `code/virtual_valuations_uniform.ggb`

# מיקסום רווח בשיטת מאירסון - כללי

נתון: שוק חד-פרמטרי:

- לכל משתתף יש ערך כספי יחיד ל"היבחרות".
- הערך של משתתף  $j$  לקוח מהתפלגות  $F_j$ .
- (למה התפלגות שונה לכל משתתף? למשל מאפיינים דמוגרפיים).

דרושים:

- כלל-בחירה לבחירת תת-קבוצה של משתתפים.
- כלל-תשלומים שאיתו כלל-הבחירה מגלה-אמת.

כזכור, לפי משפט מאירסון, ברגע שיש כלל-בחירה –  
יש כלל-תשלומים יחיד שאיתו הכלל מגלה-אמת.  
נחפש כלל-בחירה שממקסם את תוחלת הרווח.



# מיקסום רווח בשיטת מאירסון - כללי

לכל כלל-תשלומים  $p$ , תוחלת הרווח היא:

$$E[\text{Revenue}(v_1, \dots, v_n)] = E[\sum_{j=1}^n p_j(v_1, \dots, v_n)]$$

לפי משפט מאירסון, כלל-התשלומים הוא פונקציה של כלל-הבחירה  $c$ . אחרי פיתוח ארוך, מקבלים:

$$E[\text{Revenue}(v_1, \dots, v_n)] = E[\sum_{j=1}^n c_j(v_1, \dots, v_n) \cdot r_j(v_j)]$$

במילים: תוחלת הרווח של כלל-בחירה  $c$   
= תוחלת סכום הערכים הוירטואליים של הנבחרים.

# מיקסום רווח בשיטת מאירסון - כללי

$$E[\text{Revenue}(v_1, \dots, v_n)] = E[\sum_{j=1}^n c_j(v_1, \dots, v_n) \cdot r_j(v_j)]$$

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים של הנבחרים.

מסקנה:

כלל-הבחירה  $c$  הממקסם את תוחלת הרווח הוא:

בחר את הקבוצה שבה סכום הערכים הוירטואליים הוא הגדול ביותר.

# מיקסום רווח בשיטת מאירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים של הנבחרים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F'_j(v)}$$

דוגמה א. קונה אחד:

תוחלת הרווח = תוחלת הערך הוירטואלי  $r(v)$ .

כלל-הבחירה הממקסם את תוחלת הרווח הוא:

מכור אם-ורק-אם  $r(v) > 0$ .

\*\*\* הכלל מגלה-אמת בתנאי ש- $r$  היא פונקציה עולה.

התשלום הוא ערך-הסף  $r^{-1}(0)$ .

# מיקסום רווח בשיטת מאירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים של הנבחרים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F'_j(v)}$$

דוגמה ב. הרבה קונים מאותה התפלגות  $F$ , ולכן עם אותה פונקציה  $r$  (נניח ש- $r$  פונקציה עולה).  
תוחלת הרווח = תוחלת  $r(v_j)$  של המנצח.  
כלל-הבחירה הוא: מכור למשתתף עם  $v_j$  הכי גבוה, בתנאי ש  $r(v_j) > 0$ .

התשלום הוא ערך-הסף: הערך השני בגובהו או  $r^{-1}(0)$  - הגבוה מביניהם.

--- שקול למכרז מחיר שני עם מחיר מינימום  $r^{-1}(0)$  !

# מיקסום רווח בשיטת מאירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים של הנבחרים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F'_j(v)}$$

**דוגמה ג.** שני קונים עם התפלגויות שונות:  
תוחלת הרווח  $r_j(v_j)$  של המנצח.

כלל-הבחירה הוא: מכור למשתתף עם  $r_j(v_j)$  הכי גבוה, בתנאי ש  $r_j(v_j) > 0$ . התשלום = ערך-הסף.

**דוגמה:**  $F_a = \text{Unif}[10, 30]$ ,  $F_b = \text{Unif}[20, 40]$

$$r_a(v) = 2v - 30, \quad r_b(v) = 2v - 40.$$

אם  $a$  אמר 23 ו- $b$  אמר 27, אז  $a$  יזכה! וישלם את ערך-הסף שלו שהוא 22 [ערך הסף של  $b$  הוא 28].

הדמיה בקובץ `code/revenue_maximization.ods`

# מיקסום רווח במערכת הפירסום של יאהו \*

- עד 2008, יאהו השתמשה במחירי-מינימום נמוכים וזהים עבור כל מילות-החיפוש.
- ב-2008 בוצע מחקר סטטיסטי שנועד להעריך את ההתפלגות  $F$  עבור כל מילה בנפרד.
- חושב מחיר-מינימום שונה עבור כל מילה.
- המנהלים לא הסכימו להשתמש במחירים החדשים אלא עשו ממוצע בין הישנים לחדשים.
- **התוצאה: עליה גדולה ברווחים בסוף 2008.**

\* <http://theory.stanford.edu/~tim/f13/I/I6.pdf>

\* Ostrovsky, Michael, and Michael Schwarz. "Reserve prices in internet advertising auctions: A field experiment." Proceedings of the 12th ACM conference on Electronic commerce. ACM, 2011.