

## שאלה 5: תקציב אגליטרי

הגדרה: תקציב אגליטרי הוא תקציב הממקסם את הערך הנמוך ביותר. כלומר, הוא פותר את הבעיה הבאה:

$$\max[d] \min[i] u_i(d)$$

לכל אחת מהתכונות למטה, הוכיחו שכל תקציב אגליטרי מקיים את התכונה הזאת, או הביאו דוגמה נגדית.

- הוגן ליחידים.
- הוגן לקבוצות.
- יעיל פארטו.
- \* מגלה-אמת.

פתרון:

א. כל תקציב אגליטרי הינו הוגן ליחידים. (רעיון: כיוון שהוא ממקסם את היוטיליטי הנמוך ביותר, אומר שהולך לצאת לכל אחד לא פחות מהמוצע, אחרת לא מקסם את המינימום.)

ב. לא הוגן לקבוצות. דוגמה נגדית:  
עבור 3 אנשים, 4 תחומים, תקציב של 6000:  
אדם 1:  $a+b$   
אדם 2:  $b+g$   
אדם 3:  $d$

התקציב: ב': 3000, ד': 3000, ממקסם את המינימום,  
אבל כפי שאפשר לראות, תת הקבוצה {א,ב,ג} קיבלה פחות מהחלק ההוגן שלה (שהוא  $4000=2000*2$ )

ג. (אינטואיטיבית: זה שעכשיו מיקסמו עליו, לא ירצה לשנות כי כרגע המצב עבורו הוא הכי טוב שיכול להיות)  
לפי מה שלמדנו בהרצאה 2, אם כל השחקנים מייחסים ערך גדול מ-0 לכל משאב, אז כל חלוקה אגליטרית היא יעילה פארטו.  
נתאים את אותו הרעיון לתקציב אגליטרי:  
אם לכל השחקנים קיים לפחות תחום אחד שבחרו לתקצב, אז תקציב אגליטרי הוא יעיל פארטו.

הוכחה:

נתון תקציב אגליטרי א', שבו הערך הקטן ביותר הוא x. נניח בשלילה שקיים לו שיפור פארטו - תקציב ב'.

בתקציב ב', הערך שמקבל כל שחקן הוא לפחות x, וחלק מקבלים ערך גדול מ-x.

נבחר שחקן שערכו בתקציב ב' גדול מ-x. ניקח ממנו קצת (מאיזשהו תחום) כך שעדיין ערכו גדול מ-x, ונחלק את חלק זה שווה בשווה בין כלל התחומים שנבחרו ע"י מישור.

קיבלנו תקציב חדש, נקרא לו תקציב ג'. כל השחקנים בחרו לפחות תחום אחד לתקצב, ולכן בחלוקה ג', לכל השחקנים יש ערך גדול מ-

### חלוקה אגליטרית ויעילות

**משפט:** אם כל השחקנים מייחסים ערך גדול מ-0 לכל משאב, אז כל חלוקה אגליטרית היא יעילה-פארטו.

**הוכחה:** נתונה חלוקה אגליטרית א, שבה הערך הקטן ביותר הוא x. נניח בשלילה שקיים לה שיפור פארטו - חלוקה ב.  
• בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות x, ולחלק מהשחקנים יש ערך גדול מ-x.  
• נבחר שחקן שערכו בחלוקה ב גדול מ-x. ניקח ממנו כמות קטנה מאד של משאב כלשהו, כך שערכו יישאר גדול מ-x. נחלק את המשאב שווה בשווה בין כל שאר השחקנים. קיבלנו חלוקה חדשה; נקרא לה ג.  
• כל השחקנים מייחסים ערך גדול מ-0 לכל משאב, ולכן בחלוקה ג, לכל השחקנים יש ערך גדול מ-x. לכן, הערך הקטן ביותר בחלוקה ג גדול מ-x - סתירה להנחה שחלוקה א ממקסמת את הערך הקטן ביותר. \*\*\*

### חלוקה אגליטרית ויעילות

אם חלק מהשחקנים מייחסים ערך 0 לחלק מהמשאבים, אז לא כל חלוקה אגליטרית היא יעילה. דוגמה:

נפט	פלדה	
0	100	עמי:
50	0	תמי:

• החלוקה שנותנת חצי מהפלדה לעמי, ואת כל השאר לתמי, היא אגליטרית (מדוע?).  
• אבל היא לא יעילה פארטו (מדוע?).

א.

סתירה להנחה שתקציב א' ממקסם את הערך הקטן ביותר.  
אם שחקן לא בחר באף תחום לתקצב, למשל במקרה הבא:

גן ילדים	אוניברסיטה	
0	0	עמי: ערכים
100	0	תמי: ערכים

נניח שהתקציב כולו שווה ל-100. התקצוב הבא: (50,50) הוא אגליטרי- כי ממקסם את הערך המינימלי- שישאר 0 לא משנה מה נעשה, אבל לא יעיל פארטו, כי אפשר לתקצב גם כך: (100,0)

ד. האלגוריתם לא מגלה אמת. דוגמה נגדית:

עבור 4 נושאים ו-5 אנשים, תקציב 600:

קלט: אב, אג, אד, בג, א:

התקציב הבא ממקסם את הערך הנמוך ביותר:

(0,0,300,300)

אם השחקן השלישי שכרגע התועלת שלו היא 300, היה משנה ואומר רק ד':

התקציב הבא ממקסם את הערך הנמוך ביותר:

(200,0,200,200)

ועכשיו התועלת שלו גדלה והיא 400.

הרוויח מאי אמירת האמת.