

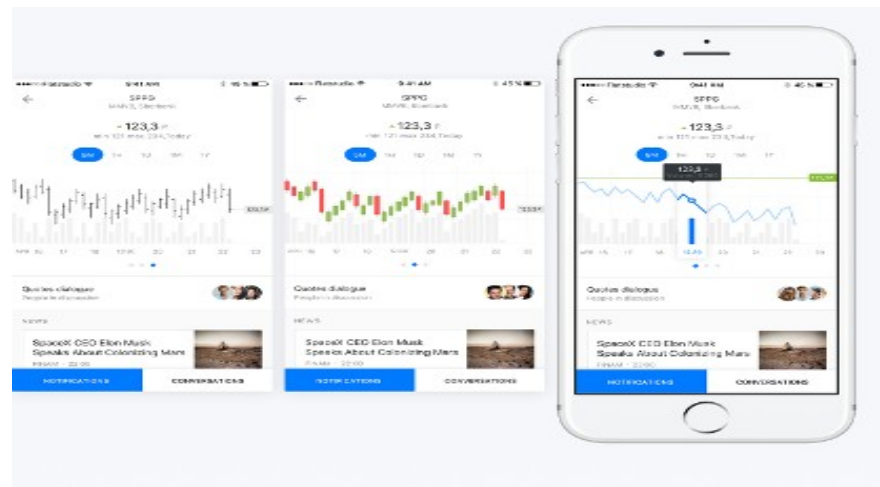
חלוקה יעילה של

משאבים

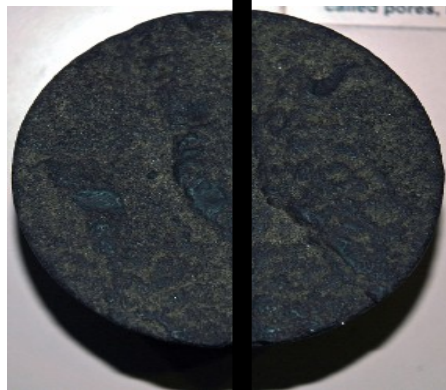
Efficient Resource
Division

אראל סגל-הלוי

חלוקת משאבים הומוגניים



חלוקה הוגנת - קל



...אבל לא יעיל

מהי יעילות כלכלית?

נסביר ע"י דוגמה. שלושה אחים רוצים ללכת יחד למסעדה ומתלבטים באיזו מסעדה לבחור. כל אח מדרג את המסעדות מהכי גרועה בעיניו (1) להכי טובה בעיניו (5):

מסעדה:	א	ב	ג	ד	ה
עמי:	1	2	3	4	5
תמי:	3	1	2	5	4
רמי:	3	5	5	1	1

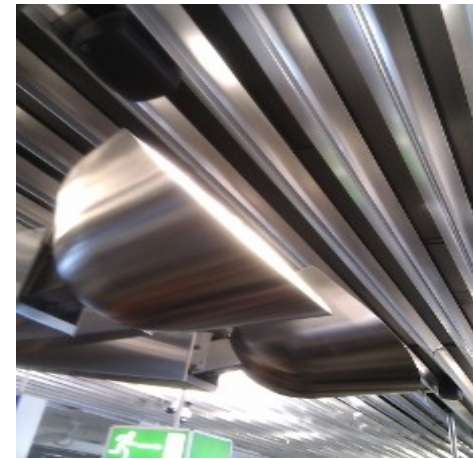
איזו בחירה – מבין החמש – היא לא יעילה?
--- ב! כי בעיני כולם, היא פחות טובה מ-ג.

יעילות כלכלית

הגדרות:

- מצב א נקרא **שיפור פארטו** (Pareto improvement) של מצב ב, אם הוא טוב יותר לחלק מהמשתתפים, וטוב לפחות באותה מידה לכולם.
- בעברית: "זה נהנה וזה לא חסר".
- מצב נקרא **יעיל פארטו** (Pareto efficient) אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור-פארטו שלו.
- **יעילות פארטו** – תנאי הכרחי לבחירה שהיא "נכונה" מנקודת-מבט כלכלית.

חלוקה יעילה פארטו - קל

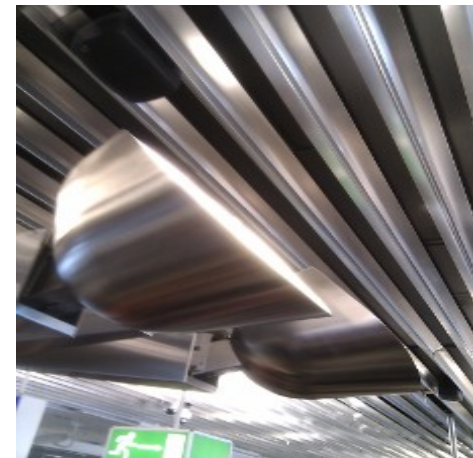


...אבל לא הוגן



האתגר

האם תמיד קיימת חלוקה
שהיא גם הוגנת וגם יעילה?



האם "חתוך ובחר" יעיל פארטו?

הנחות:

- ה"עוגה" מחולקת לאיזורים. הערך של כל שחקן אחיד בכל איזור (אבל שונה לכל שחקן).
- לדוגמה: ה"איזורים" מייצגים משאבים:

עצים	נפט	פלדה	
80	19	1	עמי:
79	1	20	תמי:

האם "חתוך ובחר" יעיל פארטו?

הנחות:

- ה"עוגה" מחולקת לאיזורים. הערך של כל שחקן אחיד בכל איזור (אבל שונה לכל שחקן).
- לדוגמה: ה"איזורים" מייצגים משאבים:

תמי		עמי	
פלדה	נפט	עצים	
עמי:	1	19	50, 30
תמי:	20	1	49.4, 29.6

התוצאה לא יעילה: התועלות הן (50, 50.6)
אבל אפשר לשפר ל~(59, 59.6).

יעילות אוטיליטרית

הגדרה: חלוקה יעילה-אוטיליטרית (utilitarian) היא חלוקה הממקסמת סכום ערכים:

$$\max_X \sum_{j=1}^n V_j(X_j)$$

אלגוריתם: תן כל אזור לשחקן עם הערך הכי גבוה:

עצים	נפט	פלדה	
81	19	1	עמי:
80	1	20	תמי:

רואים שהאלגוריתם **לא הוגן**. האם הוא יעיל?

יעילות אוטיליטרית

משפט: כל חלוקה יעילה-אוטיליטרית (ממקסמת סכום ערכים) היא יעילה פארטו.

- הוכחה:** נתונה חלוקה א הממקסמת סכום ערכים.
- נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו.
 - אז קיימת חלוקה ב שהיא שיפור-פארטו שלה.
 - בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו בחלוקה א, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.
 - לכן בחלוקה ב סכום הערכים גבוה יותר – בסתירה לכך שחלוקה א ממקסמת את סכום הערכים.

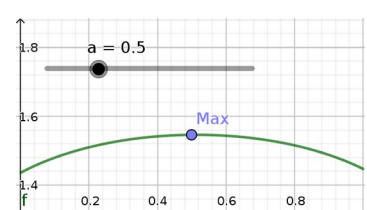
מיקסום סכום השורשים

ניסיון שני: נמצא חלוקה הממקסמת את הסכום של שורשי הערכים (אפשר לבצע בקלות בפייתון):

$$\max \sum_{j=1}^n \sqrt{V_j(X_j)}$$

דוגמה: שחקן א מקבל x אחוזים מהאזור השמאלי:

עצים	נפט	פלדה	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:



המקסימום ב: $x \sim 0.5$
במקרה הזה הוגן!

$$\max \quad \sqrt{81x + 19} + \sqrt{80(1 - x) + 20}$$

s.t. $0 \leq x \leq 1$

מיקסום סכום פונקציה עולה

משפט: כל חלוקה הממקסמת סכום של פונקציה עולה כלשהי של הערכים, היא יעילה פארטו.

הוכחה: נתונה חלוקה א הממקסמת סכום זה.

- נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו.

- אז קיימת חלוקה ב שהיא שיפור-פארטו שלה.

- בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו

- בחלוקה א, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.

- כיוון שהפונקציה עולה, בחלוקה ב הסכום גבוה יותר

– סתירה לכך שחלוקה א ממקסמת את הסכום.

מיקסום סכום פונקציה עולה

הכללה: נמצא חלוקה הממקסמת את הסכום של פונקציה עולה של הערכים:

$$\max \sum_{j=1}^n f(V_j(X_j))$$

נסמן: $x =$ אחוז העצים שמקבל עמי

עצים	נפט	פלדה	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & f(81x + 19) + f(80(1-x) + 20) \\ \text{subject to} & 0 \leq x \leq 1 \end{array}$$

מיקסום סכום פונקציה עולה

איזו פונקציה נמקסם כדי לקבל
חלוקה שהיא
גם יעילה וגם הוגנת?

חלוקה אגליטרית

הגדרה: חלוקה אגליטרית (egalitarian) היא חלוקה הממקסמת את הערך הקטן ביותר:

$$\max_X \min_i V_i(X_i)$$

אלגוריתם: הגדר משתנה z המייצג את הערך הקטן ביותר. פתור את בעיית האופטימיזציה הבאה:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z \\ \text{subject to} & V_i(X_i) \geq z \quad \text{for all } i \text{ in } 1, \dots, n \end{array}$$

חלוקה אגליטרית והגינות

משפט: אם הערכים של השחקנים *מנורמלים*, כך שכל השחקנים מייחסים את אותו ערך לעוגה כולה, אז כל חלוקה אגליטרית היא פרופורציונלית.

הוכחה:

- קיימת חלוקה פרופורציונלית, למשל חלוקה שבה כל שחקן מקבל 1 חלקי n מכל משאב.
- יהי V ערך העוגה כולה (בעיני כולם). בחלוקה פרופ., הערך הקטן ביותר הוא לפחות V/n חלקי n .
- לכן, בחלוקה הממקסמת את הערך הקטן ביותר, הערך הקטן ביותר הוא לפחות V/n חלקי n .
- לכן, חלוקה זו גם היא פרופורציונלית.

חלוקה אגליטרית ויעילות

משפט: אם כל השחקנים מייחסים ערך גדול מ-0 לכל משאב, אז כל חלוקה אגליטרית היא יעילה-פארטו.

הוכחה: נתונה חלוקה אגליטרית א, שבה הערך הקטן ביותר הוא x . נניח בשלילה שקיים לה שיפור-פארטו - חלוקה ב.

• בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות x , ולחלק מהשחקנים יש ערך גדול מ- x .

• נבחר שחקן שערכו בחלוקה ב גדול מ- x . ניקח ממנו כמות קטנה מאד של משאב כלשהו, כך שערכו יישאר גדול מ- x . נחלק את המשאב שווה בשווה בין כל שאר השחקנים. קיבלנו חלוקה חדשה; נקרא לה ג.

• כל השחקנים מייחסים ערך גדול מ-0 לכל משאב, ולכן בחלוקה ג, לכל השחקנים יש ערך גדול מ- x . לכן, הערך הקטן ביותר בחלוקה ג גדול מ- x – סתירה להנחה שחלוקה א ממקסמת את הערך הקטן ביותר. ***

חלוקה אגליטרית ויעילות

אם חלק מהשחקנים מייחסים ערך 0 לחלק מהמשאבים, אז לא כל חלוקה אגליטרית היא יעילה.

דוגמה:

נפט	פלדה	
0	100	עמי:
50	0	תמי:

- החלוקה שנותנת חצי מהפלדה לעמי, ואת כל השאר לתמי, היא אגליטרית (מדוע?).
- אבל היא לא יעילה פארטו (מדוע?).

סדר לקסימין

הגדרה: חלוקה לקסימין-אגליטרית (leximin-egalitarian) היא חלוקה הממקסמת את וקטור הערכים המסודר מהקטן לגדול, לפי סדר מילוני. כלומר: ממקסמת את הערך הקטן ביותר; • בכפוף לזה, את הערך השני הכי קטן; • בכפוף לזה, את הערך השלישי הכי קטן; וכו'.

דוגמה:

- חלוקה עם ערכים (50, 100) טובה יותר, בסדר לקסימין, מחלוקה עם ערכים (50, 50).
- חלוקה עם ערכים (3, 1, 3) טובה יותר, בסדר לקסימין, מחלוקה עם ערכים (2, 99, 1).

חלוקה לקסימין – יעילות והגינות

משפט: כל חלוקה אגליטרית-לקסימין היא גם פרופורציונלית וגם יעילה-פארטו.

הוכחה:

- פרופורציונליות – הוכחנו כבר לכל חלוקה אגליטרית.
- נתונה חלוקה אגליטרית-לקסימין א. נניח בשלילה שקיים לה שיפור-פארטו - חלוקה ב.
- בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו ב-א, ולחלק מהשחקנים יש ערך גדול יותר.
- לכן וקטור-הערכים המסודר בחלוקה ב גדול יותר, בסדר מילוני, מבחלוקה א – סתירה להנחה שחלוקה א היא אגליטרית-לקסימין. ***

חישוב חלוקה לקסימין-אגליטרית

- מחשבים חלוקה אגליטרית; נניח שהמקסימום z .
- (מכאן: בחלוקה לקסימין, יש שחקן אחד לפחות שמקבל בדיוק z , וכל השאר מקבלים לפחות z).
- עבור כל שחקן, נחשב את הערך המקסימלי שהוא יכול לקבל, תחת האילוץ שכל שאר השחקנים מקבלים לפחות z .
- אם הערך המקסימלי המתקבל הוא z . אז השחקן הוא "רווי" – הערך שלו בחלוקה לקסימין = בדיוק z .
- נחשב חלוקה אגליטרית עבור כל השחקנים שנשארו לא רוויים, תחת האילוץ שהערך של כל השחקנים הרוויים הוא בדיוק ערך-הרווייה שלהם.
- נמשיך כך עד שכל השחקנים הופכים להיות רוויים.

חישוב חלוקה לקסימין-אגליטרית

	ברזל	דלק	עצים
א:	4	0	0
ב:	0	3	0
ג:	5	5	10
ד:	5	5	10

שלב 1:

- ערך אגליטרי = 3.
- ערכים מקס. לשחקנים
א, ב, ג, ד = 4, 3, 8.25, 8.25
- שחקן ב רווי.

שלב 2: נשארו שחקנים א, ג, ד.

- ערך אגליטרי = 4.
- ערכים מקס. לשחקנים
א, ג, ד = 4, 6, 6.
- שחקן א רווי.

שלב 3: נשארו שחקנים ג, ד.
ערך אגליטרי = 5.
ערכים מקס. לשחקנים
ג, ד = 5, 5.
כולם רוויים – סיימנו!