

## מטלה - אלגוריתמים מגלי-אמת – שאלות נוספות

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

שאלה: וריאציות על מכרז ויקרי (הקורס של טים, שאלות 27, 29)

- א. ויקי המציאה מכרז חדש למכירת חפץ יחיד: מי שהכרזה שלו גבוהה ביותר זוכה בחפץ, ומשלם את המחיר השלישי (במקום המחיר השני במכרז ויקרי). האם המכרז של ויקי מגלה-אמת? הוכיחו.
- ב. כדי לגייס כסף לשיפוץ הבית, החלטתם למכור את אוסף העטים הנדירים שלכם. באוסף יש 10 עטים זהים. ישנם 20 אנשים המעוניינים להשתתף במכרז. כל אחד מעוניין בעט אחד לכל היותר. תארו מכרז מגלה-אמת ויעיל פארטו למכירת העטים.
- ג. למדנו שמכרז "מחיר ראשון" אינו מגלה-אמת, ומכרז "מחיר שני" מגלה-אמת. האם מכרז "מחיר שלישי" מגלה-אמת? מה לגבי "מחיר רביעי", "מחיר חמישי" וכו'?

### שאלה 3: מכרז פירסום סדרתי

נניח שאנחנו מבצעים מכרז פירסום על  $k$  משבצות-פירסום, בעזרת האלגוריתם הבא:

- לכל  $i$  בין 1 ל- $k$ :

◦ בצע מכרז ויקרי על משבצת  $i$ , בין כל המפרסמים שעדיין לא זכו.

הראו שהאלגוריתם אינו מגלה-אמת עבור  $k \geq 2$ .

### שאלה: מכרז מחיר שני מוכלל

מכרז מחיר שני מוכלל (Generalized Second Price Auction, GSP) הומצא ע"י גוגל, והוא מתנהל באופן הבא:

- כל מפרסם מכריז על הערך של קליק בעיניו;
- המפרסם שהכריז את הערך הגבוה ביותר זוכה במקום הראשון ומשלם את המחיר השני;
- המפרסם שהכריז את הערך השני זוכה במקום השני ומשלם את המחיר השלישי;
- וכו'...

א. הוכיחו, שכאשר ישנם שני מקומות או יותר, מכרז GSP אינו מגלה-אמת.

ב. הוכיחו שהתשלומים במכרז GSP תמיד גבוהים לפחות כמו התשלומים במכרז VCG.

### שאלה: מכרזי פירסום - איכות המודעה

(הקורס של טים, תרגילים 32, 34)

בשיעור הנחנו, שהסתברות ההקלקה על מודעה מסויימת תלויה רק במיקום שלה ולא במודעה. במציאות, הסתברות ההקלקה על מודעה תלויה גם במיקום וגם במודעה עצמה.

א. נניח שלכל מודעה  $j$  יש מקדם איכות  $q_j$ , והסתברות ההקלקה כששמים אותה במקום  $k$  היא:

$$r_{j,k} = r_k * q_j$$

תארו אלגוריתם המשבץ מודעות למיקומים וממקסם את סכום הערכים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

ב. נניח שלכל מודעה  $j$  ומיקום  $k$  יש הסתברות הקלקה כללית (לא דווקא ליניארית):  $r_{j,k}$

הראו דוגמה שבה האלגוריתם מסעיף א לא עובד (לא מוצא שיבוץ הממקסם את סכום הערכים).

## שאלה: חשיפת מידע

מצאתם בעליית-הגג שלכם שרשרת אבני-חן ישנה, ואתם מאד רוצים לדעת מה השווי שלה. השכן שלכם הוא מומחה לאבני-חן ויודע בדיוק מהו שווי השרשרת, אבל הוא לא רוצה להגיד לכם. הציעו מנגנון שיגרום לשכן שלכם לגלות לכם, מרצונו החופשי, את שווי האמיתי של השרשרת. רמז: קיראו כאן: [https://www.econ2.uni-bonn.de/pdf/papers/goethes\\_second.pdf](https://www.econ2.uni-bonn.de/pdf/papers/goethes_second.pdf)

## שאלה: אלגוריתם מגלה-אמת להקצאת זמן חישוב

כמה אנשים מעוניינים להריץ תהליכים על מחשב-על. לכל אדם יש תהליך אחד. לכל תהליך יש זמן ריצה שונה. מחשב-העל יכול להריץ תהליך אחד בכל פעם. המחשב פעיל במשך זמן מסוים (נניח 10 שעות) אבל זמן-הריצה הכולל של כל התהליכים הוא גדול יותר, כך שלא כל התהליכים יוכלו לרוץ. מנהל המערכת רוצה לתזמן את התהליכים (באופן סדרתי) כך שמספר התהליכים הכולל יהיה הגדול ביותר.

כל אדם יודע מה זמן-הריצה של התהליך שלו (כמה דקות הוא צריך), אבל מנהל-המערכת אינו יודע את זמני הריצה של התהליכים. עיזרו למנהל-המערכת לפתח אלגוריתם מגלה-אמת, שיגרום לכל אדם להצהיר על הזמן האמיתי של התהליך שלו, ויריץ את המספר הגדול ביותר של תהליכים במסגרת הזמן הקצוב.

להרחבה (לא חובה לצורך פתרון המטלה):

- U Feige, M Tennenholtz (2011): "[Mechanism design with uncertain inputs \(to err is human, to forgive divine\)](#)" (2014): "[On fair division of a homogeneous good](#)"

## שאלה: בעיית תחנת המוניות עם נהגים אסטרטגיים

בתחנת מוניות עובדים שלושה נהגים. כל נהג נמצא עכשיו במקום אחר. התחנה מקבלת בו-זמנית שלוש פניות מנוסעים הנמצאים במקומות שונים. התחנה צריכה להחליט איזה נהג לשלוח לאיזה נוסע. הנתונים:

- המרחק בין נהג  $i$  לבין נוסע  $j$  הוא:  $d[i, j]$  (ק"מ).
- התחנה לא יודעת איפה נמצא כל נהג, ולכן לא יודעת את  $d[i, j]$ . הערך הזה ידוע רק לנהג  $i$ .
- מחיר של דלק לקילומטר הוא  $p$  (ש"ח).

א. תארו מכרז להתאמת נוסעים לנהגים, עם התכונות הבאות:

- מגלה-אמת - לכל נהג  $i$  כדאי לדווח את המרחק האמיתי בינו לבין כל נוסע ( $d[i, j]$  לכל  $j$ ).

- יעיל - המכרז מוצא את ההשמה הזולה ביותר של נהגים לנוסעים.
- ב. הדגימו את פעולת המכרז: הסבירו מה מדווחים הנהגים, איזו השמה מחשב האלגוריתם, וכמה כל אחד משלם/מקבל.

## שאלה: הפיכת אלגוריתם למכרז

מיצאו אלגוריתם נוסף שאתם מכירים, שונה מהאלגוריתמים שנלמדו בכיתה, שאפשר להפוך אותו למכרז. תארו בפירוט את הקלט למכרז, את הערכים של המשתתפים, את כלל-הבחירה ואת כלל-התשלום.

## שאלה: כיסוי-בצמתים עם משקל מינימלי

<https://github.com/SleekPanther/minimum-weighted-vertex-cover-approximation/blob/master/README.md#references>

## שאלה: אלגוריתמים מגלי-אמת ללא כסף

- נתונה בעייה של חלוקת משאבים רציפים, ללא כסף.
- הוכיחו שאלגוריתם "חתוך ובחר" אינו מגלה-אמת.
  - הציעו אלגוריתם חלוקה מגלה-אמת ויעיל פארטו.
  - הציעו אלגוריתם חלוקה מגלה-אמת וללא-קנאה.

## שאלה: עיצוב דף פירסום

בדף-אינטרנט מסויים אפשר אפשר לשים **או** פירסומת אחת ארוכה, **או** שתי פרסומות קצרות.

ישנם מספר מפרסמים המתחרים על מקום בדף. ההעדפות של כל מפרסם מיוצגות ע"י המחלקה:

```
class Advertiser:
    longvalue = ...
    # כמה המפרסם מרויח (בשקלים) אם פרסומת ארוכה שלו מופיעה בדף
    shortvalue = ...
    # כמה המפרסם מרויח (בשקלים) אם פרסומת קצרה שלו מופיעה בדף
```

מפרסם שאינו מופיע בדף מרויח 0 שקלים. מנהלי האתר רוצים שהמפרסמים יהיו מרוצים - המטרה שלהם היא למקסם את סכום רווחי המפרסמים. עיזרו להם להחליט איזה פירסומות לשים באתר!

א. כיתבו אלגוריתם, בעברית או בפסאודו-קוד, המקבל כקלט את רשימת המפרסמים, ומחזיר כפלט:

- כמה פירסומות יהיו בעמוד (אחת או שתיים);
- איזה מפרסם/מפרסמים יופיעו בעמוד.

ב. תכננו מכרז הממקסם את סכום רווחי המפרסמים, וגם מעודד כל מפרסם לחשוף את הערכים `longvalue`, `shortvalue` האמיתיים שלו. המנגנון מקבל כקלט את רשימת המפרסמים, ומחזיר כפלט: כמה פירסומות יהיו בעמוד, איזה מפרסם/מפרסמים יופיעו בעמוד, ואיזה מחיר ישלם/ישלמו המפרסם/מפרסמים למנהל האתר (בשקלים).

הערה: אם מפרסם מסויים מופיע בדף ומשלם מחיר, התועלת שלו היא הרווח מהפירסום פחות המחיר. ג. הדגינו את פעולת המכרז שכתבתם על הקלט הבא, ובו ארבעה מפרסמים:

```
ad[0].longvalue=10;  ad[0].shortvalue=8;
ad[1].longvalue=9;   ad[1].shortvalue=1;
ad[2].longvalue=8;   ad[2].shortvalue=4;
ad[3].longvalue=7;   ad[3].shortvalue=3;
```

## שאלה. סלילת רשת-כבישים

במדינה מסויימת יש  $n$  ערים. הממשלה רוצה לחבר בין כל הערים ע"י  $n-1$  כבישים.

לכל זוג ערים  $i, j$ , יש קבלן שיכול לסלול את הכביש בין עיר  $i$  לעיר  $j$ . כל הקבלנים שונים (כלומר מספר הקבלנים הוא  $(n(n-1))/2$ ). העלות של קבלן  $i, j$  לסלילת הכביש היא  $c[i, j]$  והיא ידועה רק לקבלן.

הממשלה מעוניינת לסלול  $n-1$  כבישים, כך שהעלות הכוללת של סלילת הרשת (סכום העלויות של  $n-1$  הקבלנים הנבחרים) היא קטנה ביותר.

א [10 נק']. תארו מכרז מגלה-אמת המאפשר לממשלה למצוא את הרשת בעלת העלות הקטנה ביותר.

ב [10 נק']. הדגינו בפירוט את פעולת המכרז עבור  $n=4$  ערים.

## שאלה: תיכנות - אלגוריתם מגלה-אמת למציאת מסלול קל ביותר

כיתבו פונקציה בפייתון, המקבלת גרף ממושקל ושני צמתים, מוצאת את המסלול הזול ביותר בין שני הצמתים, ומדפיסה כמה כסף צריכה לקבל כל קשת במסלול זה, בהתאם לאלגוריתם VCG:

```
def vcg_cheapest_path(graph, source, target): ...
```

לצורך חישוב המסלול הקל ביותר, אפשר להשתמש בספריה `networkx`

[https://networkx.github.io/documentation/stable/reference/algorithms/shortest\\_paths.html](https://networkx.github.io/documentation/stable/reference/algorithms/shortest_paths.html)

בפונקציה `dijkstra_path`.

## \* שאלה 1: תיכנות - אלגוריתם VCG כללי

א. כיתבו פונקציה בפייתון, המקבלת אוסף של תוצאות אפשריות, והערכים שכל שחקן מייחס לכל תוצאה, ומריצה את אלגוריתם VCG. הפונקציה משתמשת במחלקה הבאה:

```
class Agent:
```

ברוך ה' חנוך הדעת

```
def value(option:int)->float:...
```

```
// מחזירה את הערך של השחקן הנוכחי לאפשרות המועברת כקלט
```

כותרת הפונקציה:

```
def vcg(agents: List[Agent], num_options:int)
```

פלט לדוגמה:

The chosen option is 4.

Agent #0 pays 5.

Agent #1 pays -4.

ב. כתבו בדיקות-יחידה לפונקציה שלכם בעזרת `.doctest`.

## שאלה: מכרזים לא-מגלי-אמת

בהרצאה, מפאת אילוצי זמן, אנחנו לומדים רק את התשובה ה"נכונה" לכל בעיה, ולא את כל התשובות ה"לא נכונות" שאנשים מצאו בדרך. מטרת השאלה הנוכחית היא לבדוק כמה תשובות "לא נכונות".

א. הצעד הראשון במכרז  $VCG$  הוא מציאת האפשרות הממקסמת את סכום ערכי המשתתפים. הראו, שאם במקום זה מוצאים את האפשרות הממקסמת את עכפלת ערכי המשתתפים – המכרז אינו מגלה-אמת.

ב. במכרז  $VCG$ , תשלומי השחקנים נמסרים למנהל-המכרז. הראו, שאם תשלומי השחקנים מחולקים שווה בשווה בין המשתתפים – המכרז אינו מגלה-אמת.

## שאלה: עידוד השתתפות

תזכורת: אלגוריתם הוא מעודד השתתפות אם התועלת של כל שחקן המשתתף באלגוריתם היא לפחות 0 (אף אחד לא ניזוק מהשתתפות באלגוריתם).

נתונה בעיה כללית של החלטה בין אפשרויות שונות (כמו בעיית "בחירת המסעדה" שהודגמה בשיעור).

א. הוכיחו, שאם כל שחקן מייחס ערך לפחות 0 לכל אפשרות שאינה כוללת אותו, אז אלגוריתם VCG מעודד השתתפות.

ב. הראו, שאם התנאי לא מתקיים, אז אלגוריתם VCG אינו מעודד השתתפות.