

מטלה - חלוקה הוגנת של קרקעות ועוגות - תוספת

שאלה. חלוקה הוגנת של חשמל

בכפר קטן באפריקה יש n תושבים. צריכת החשמל של כל תושב בכל רגע היא 1 קילוואט. תחנת הכוח של הכפר מספקת רק $n-1$ קילוואט. לתושבי הכפר יש צרכים שונים והעדפות שונות לגבי החשמל, למשל: לחלק מהתושבים חשוב מאד שיהיה חשמל בלילה כי זה בדיוק הזמן שהם יושבים וכותבים שירים לאור המנורה; לתושבים אחרים חשוב חשמל דווקא בצהריים כי אז הם עושים כביסה; וכו'. עיזרו לחברת החשמל המקומית להחליט איך לחלק את החשמל בצורה הוגנת בין התושבים!

ההעדפות של כל תושב מיוצגות ע"י המחלקה הבאה:

```
class Person:
    def importance(self, fromTime:float, toTime:float) → float:
        // INPUT: a time-interval, given in hours since midnight. fromTime and
        toTime are floats between 0 and 24. E.g, (fromTime=11,toTime=14) represents the
        time-interval between 11:00 AM and 14:00 PM.
        // OUTPUT: a positive number that says how important it is for the
        person to receive electricity in this time-interval.
    def cut(self, fromTime:float, toTime:float, fraction:float) → float:
        // INPUT: a time-interval, as above, and a fraction in [0,1].
        // OUTPUT: a number between fromTime and toTime, that cuts the interval
        according to the given fraction, i.e, importance(fromTime,half)=fraction *
        importance(fromTime,toTime).
```

תוכנית לחלוקת חשמל בין אנשים מיוצגת ע"י אוסף של עצמים מהמחלקה הבאה - המייצגת אינטרוול זמן ואת האינדקסים של האנשים המחוברים לחשמל באותו זמן:

```
class TimeInterval:
    fromTime:float
    toTime:float
    peopleWithElectricity:Set[int]
```

א. כיתבו הגדרה לחלוקה פרופורציונלית של חשמל בין התושבים. הסבירו מדוע ההגדרה שלכם הגיונית. כיתבו פונקציה בפיתון המקבלת חלוקה (וקטור של אינטרוולים) ומחזירה "אמת" אם החלוקה היא פרופורציונלית.

```
def isProportional(village:List[Person], division:List[TimeInterval]) → bool:...
```

ניתן להניח שיש לכם ב"חינם" פונקציות בסיסיות על מערכים, כגון: חיפוש.

ב. כיתבו פונקציה בפיתון המקבלת אוסף של אנשים ומחזירה חלוקה פרופורציונלית:

```
def getProportionalDivision(List[Person] village) → List[TimeInterval]:...
```

ג. הדגימו את פעולת הפונקציה מהסעיף הקודם על כפר ובו 5 תושבים.

שאלה: חלוקת תורנויות ללא קנאה

אמא ואבא נסעו לנופש וכו', כמו בשאלה 2.

א. תארו אלגוריתם שבו כל אחד מהילדים מקבל תורנות רצופה, והחלוקה היא ללא-קנאה-בקירוב (עד כדי שניה אחת).

ב. תנו דוגמה הממחישה את פעולת האלגוריתם של סעיף א.

שאלה: חלוקה פרופורציונלית בשני מימדים

א. נתונה חלקת-אדמה בצורת מלבן. תארו אלגוריתם הנותן חלוקה פרופורציונלית של העוגה בין n אנשים, כך שכל אחד מקבל מלבן.

ב. נתונה חלקת-אדמה בצורת ריבוע. הוכיחו שלא קיים אלגוריתם הנותן חלוקה פרופורציונלית של העוגה בין n אנשים כך שכל אחד מקבל ריבוע.

שאלה: תיכנות - סימפלקס החלוקות

ניתן לייצג פונקציית-הערך של שחקן ע"י רשימה של מספרים, המייצגים את הערך של השחקן לכל חלק מהעוגה. למשל, אם העוגה היא הקטע $[0,1]$, אז הרשימה 5,2,9,4 משמעה שהשחקן מעריך את הרבע השמאלי של העוגה $[0,0.25]$ כ-5, הרבע הבא $[0.25,0.5]$ כ-2, וכו'.

א. נתונה המחלקה הבאה, המאותחלת ע"י רשימה של מספרים כנ"ל. השלימו את הפונקציה `eval`.

```
class Agent:
```

```
def __init__(self, values:list):
    """
    Initialize an agent with piecewise-constant valuations
    over a 1-dimensional cake.
    :param values: The values of the agent to the regions of the cake.
    """
    self.values = values

def eval(self, x:float, y:float)->float:
    """
    :param x,y: positive numbers representing locations on the cake.
    :return: v: the value of the piece [x,y] for the agent.
    """
```

ב. כיתבו פונקציה המקבלת כקלט משתנה מסוג Agent כנ"ל, ומציירת את סימפלקס החלוקות הדו-ממדי בצבעים, כאשר:

- כל נקודה שבה השחקן רוצה את פרוסה מס' 1 מסומנת באדום;
- כל נקודה שבה השחקן רוצה את פרוסה מס' 2 מסומנת בירוק;
- כל נקודה שבה השחקן רוצה את פרוסה מס' 3 מסומנת בכחול.

שאלה: שינוי חלוקה קיימת

עמי רמי ותמי חילקו ביניהם עוגה בצורה פרופורציונלית (כל אחד קיבל לפחות $1/3$). הם התיישבו לאכול, אבל לפני שהספיקו - נכנסה צומי וטענה שגם לה מגיע חלק. פתחו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית (כל אחד מקבל לפחות $1/4$), ובנוסף, נותן לכל אחד משלושת הילדים הראשונים (עמי רמי ותמי) לפחות $3/4$ מהערך שהיה לו בחלוקה הראשונה.

פתרון: אנה אהרנוב.

פתרון כללי: גל פוליצר וטל נקר.

להרחבה ראו: https://en.wikipedia.org/wiki/Fink_protocol

שאלה 4: משולש החלוקות

כזכור, משולש החלוקות הוא משולש המתאר את כל החלוקות האפשריות של קטע ל-3 חלקים רציפים. כל נקודה במשולש מייצגת חלוקה. נניח שאנחנו צובעים את המשולש באופן הבא:

- לכל נקודה במשולש, שואלים מישהו "איזו פרוסה אתה מעדיף בחלוקה הזאת?".
- אם הוא בוחר את הפרוסה השמאלית - צובעים את הנקודה באדום; אם הוא בוחר את האמצעית - צובעים את הנקודה בירוק; אם הוא בוחר את הימנית - צובעים את הנקודה בכחול.

לפניכם שש דוגמאות למשולשים צבועים באדום, ירוק וכחול:

<https://github.com/erelsgl-at-ariel/algorithms-5781/tree/master/01-fair-cake-cutting/colored-triangles> . הסבירו לגבי כל אחד מהם, האם הוא יכול לייצג תוצאה אפשרית של הצביעה הנ"ל? מדוע?

שאלה 6: חלוקה ללא קנאה עם שארית

נתון האלגוריתם הבא לחלוקה בין 3 אנשים (דומה לצעד הראשון של אלגוריתם סלפרידג'-קונוויי):

1. עמי חותך את העוגה לשלושה חלקים שווים בעיניו.
2. תמי מקצצת את הפרוסה הטובה ביותר בעיניה, כך שיהיו לה שתי פרוסות טובות ביותר.
3. מוצאים שידוך גדול ביותר (בגודל 3) בין השחקנים לבין כל 4 הפרוסות שעל השולחן - כולל השארית.

- 4. מחלקים לכל שחקן פרוסה אחת בהתאם לשידוך.
שימו לב - באלגוריתם זה לא כל העוגה מחולקת - יש פרוסה אחת הנשארת על השולחן.
א. הוכיחו שאכן קיים שידוך בגודל 3, שהחלוקה המתקבלת היא ללא קנאה, ושכל שחקן מקבל פרוסה השווה בעיניו לפחות $1/4$ מהשווי הכללי של העוגה.
* ב. עכשיו נניח שצריך לחלק עוגה בין 4 שחקנים. תארו אלגוריתם לחלוקה עם שארית, הנותן חלוקה ללא קנאה, שבה כל שחקן מקבל פרוסה השווה בעיניו לפחות $1/8$ מהשווי הכללי של העוגה.

* שאלה 5: חלוקת זמן בעת מגפה

- עקב מגפת הקורונה, הוחלט להגביל את מספר האנשים שמותר להם להיכנס בו-זמנית לכל אתר-תיירות. בשמורת-טבע מסויימת, הוחלט שמספר האנשים המקסימלי שמותר להם להיות בו-זמנית בשמורה יהיה k , אבל ישנם n אנשים שרוצים להיכנס (n גדול מ- k). לכל אחד מהאנשים ישנם העדפות שונות לגבי הזמן שבו הוא מעדיף להיכנס לשמורה (בוקר, צהריים, ערב וכו'). עליכם לייעץ להנהלת השמורה, איך לחלק את זמן השהיה בשמורה בין האנשים באופן הוגן.
- א. תנו הגדרה הגיונית למושג "חלוקה פרופורציונלית" במצב זה, בעזרת הפונקציה V_i (פונקציית הערך של שחקן i), ובעזרת הפרמטרים n, k .
- ב. כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית לפי ההגדרה של סעיף א. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.
- הדרכה:** פיתרו את השאלה קודם-כל עבור $k=1$ ואז עבור k כללי.

* שאלה 5: חלוקת-עוגה בפיתון

נניח שרוצים לחלק נהר חד-ממדי, המיוצג ע"י הקטע $[0,1]$. כל משתתף מיוצג ע"י המחלקה הבאה:

```
class Agent:
    def eval(self, x:float)->float:
        """
        :param x: a positive number representing a location on the cake.
        :return: v: the value of the piece  $[0,x]$  for the agent.
        """

    def mark(self, v:float)->float:
        """
        :param v: a positive number representing a value of a piece.
        :return: x: a number such that the value of  $[0,x]$  equals v.
        """
```

א. כיתבו קוד עבור אלגוריתם "חתוך ובחר":

```
def cutAndChoose(a:Agent, b:Agent):
```

הפונקציה מקבלת שני שחקנים וכותבת את החלוקה בפורמט הבא (לדוגמה):

Agent a receives [0,0.3]. Agent b receives [0.3,1].

ב. כיתבו קוד עבור אלגוריתם אבן-פז:

def algEvenPaz(agents:List[Agent]):

הפונקציה מקבלת מערך של שחקנים וכותבת את החלוקה בפורמט הבא (לדוגמה):

Agent 0 receives [0,0.3]. Agent 1 receives [0.3,0.6]. Agent 2..

שאלה 1: שיקולים אסטרטגיים באלגוריתם חלוקה

א. אתם חולקים עוגה עם עוד מישהו בשיטת "חתוך ובחר", כאשר אתם החותכים. הצלחתם להשיג מידע מדויק על פונקציית הערך של השחקן השני. איך תחתכו את העוגה באופן שייתן לכם את הערך הגבוה ביותר האפשרי? הדגימו מצב שבו תוכלו להשיג 100% מהערך הכולל שלכם, ומצב אחר שבו תוכלו להשיג רק 50% מהערך הכולל שלכם.

ב. אתם חולקים עוגה עם עוד $n-1$ אנשים בעזרת אלגוריתם אבן-פז. לאחר שביצעתם תחקיר מקיף על האנשים האחרים בחלוקה, אתם יודעים במדויק את פונקציות הערך שלהם. מה תעשו בכל צעד באלגוריתם, על-מנת להשיג את הערך הגבוה ביותר האפשרי? הדגימו מצב שבו תוכלו להשיג 100% מהערך הכולל שלכם, ומצב אחר שבו תוכלו להשיג רק 50% מהערך הכולל שלכם.

שאלה 2: חלוקת תורנות קשירה וללא קנאה

אמא ואבא נסעו לנופש, והשאירו את n ילדיהם הגדולים לשמור על התינוקת ה- $n+1$. הם מעוניינים לחלק ביניהם את זמן השמירה **ללא קנאה**, כך שכל ילד יקבל משמרת **רציפה** (קשירה). הניחו שהילדים **לא אוהבים** לשמור – כל אחד רוצה לשמור כמה שפחות.

הסבירו איך אפשר להכליל את אלגוריתם הסימפלקסונים של סימונס וסו למצב זה (למצוא חלוקה כמעט ללא-קנאה - עד-כדי שניה אחת). הוכיחו את נכונות האלגוריתם עבור $n=3$.

שאלה 3: מיקסום סכום הערכים

נתונה עוגה המחולקת ל- k איזורים. יש שני אנשים, וכל אחד מהם מייחס ערך שונה לכל איזור. עבור כל אחד מהשחקנים, סכום הערכים עבור העוגה כולה הוא 100. הנה דוגמה עבור $k=3$:

איזור:	איזור א	איזור ב	איזור ג
הערך של עמי:	50	10	40

30	60	10	הערך של תמי:
----	----	----	--------------

א. תארו אלגוריתם המחלק את העוגה כך ש**שכום הערכים** הוא מקסימלי. כלומר: הביטוי

$$V_1(X_1) + V_2(X_2)$$

גדול ככל האפשר.

ב. האם האלגוריתם שלכם תמיד מוצא חלוקה פרופורציונלית? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

שאלה 4: Fair and Square

נתונה חלקת-אדמה בצורת ריבוע. יש לחלק אותה בין שני אנשים, כך שכל אחד יקבל **ריבוע**.

א. הראו דוגמה שבה לא קיימת חלוקה פרופורציונלית.

* ב. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה "חצי פרופורציונלית" לשני אנשים, כלומר, כל שחקן i מקבל ריבוע X_i ששווי לפחות רבע מהעוגה כולה:

$$V_i(X_i) \geq V_i(C) / 4$$

הוכיחו את נכונות האלגוריתם.