חלוקת עלויות
Cost-sharing

אראל סגל-הלוי

חלק מהשקפים באדיבות: נועם חזון

https://www.innovationtoronto.com/2016/10/an-algorithm-for-taxi-sharing/

העומס בכבישים הולך וגדל

פתרון אפשרי: תחבורה ציבורית

מונית:
- מהירה
- גמישה
- נוסע אחד
- יקרה

נסיעה משותפת:
- מהירה
- גמישה
- כמה נוסעים
- חסכון בעלויות

אוטובוס:
- איטי
- לא גמיש
- הרבה נוסעים
- זול

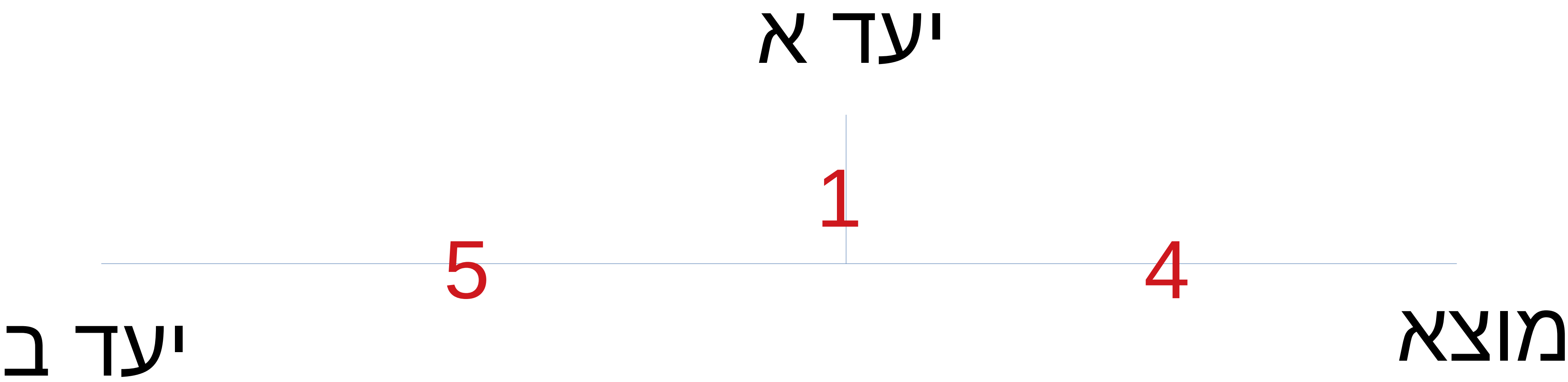
שיתוף נסיעה במונית

נסיעה משותפת במונית יכולה לחסוך עלויות.

- אם כל הנוסעים עושים את אותו מסלול – הגיוני לחלק את דמי-הנסיעה שווה בשווה.
- אבל מה אם כל אחד נוסע במסלול אחר?

איך לחלק את דמי-הנסיעה בין הנוסעים?

דוגמה – חלוקה הוגנת של עלויות



עלות כוללת = 5+1+1+4=**11**

עלות של א לבד = **5**

עלות של ב לבד = **9**

כמה ישלם כל אחד?

בעיה כללית: משחק שיתופי

נתונים:

- קבוצה של שחקנים - N;
- לכל תת-קבוצה S – העלות של מתן שירות רק לתת-הקבוצה הזאת - $c(S)$.

המטרה: לגבות מכל שחקן j תשלום $p(j)$, כך שסכום התשלומים הכללי הוא $c(N)$ – התשלומים מכסים את העלות של כל הקבוצה.

מהו כלל תשלום הוגן?

עלות שולית

הגדרה: *העלות השולית* של שחקן j, ביחס לקבוצת שחקנים S, היא התוספת שהוא מוסיף לעלות כשהוא מצטרף לקבוצה:

$$c(S \cup \{j\}) - c(S)$$

עקרון ההגינות: כלל תשלום נקרא *סימטרי* אם הוא תלוי רק בעלויות השוליות: אם לשני שחקנים יש עלויות שוליות *זהות* ביחס לכל הקבוצות, אז הם צריכים לשלם אותו הדבר.

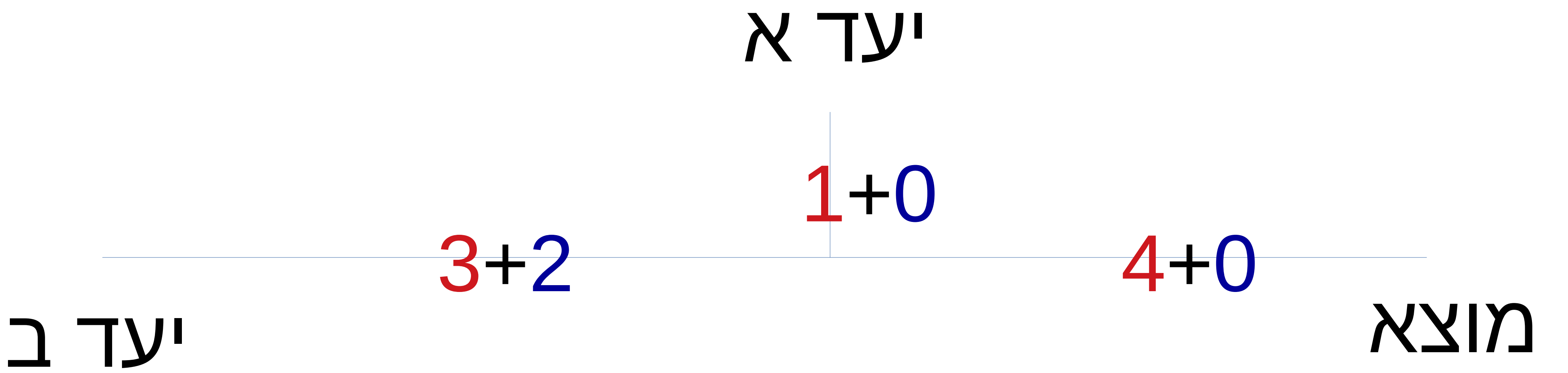
עקרון האפס (null player): שחקן שעבורו כל העלויות השוליות הן אפס (*"עציץ"*), משלם 0.

ליניאריות

עקרון הליניאריות:

- אם מכפילים את העלויות בקבוע – כל התשלומים נכפלים באותו קבוע.
  - דוגמה: המרה משקלים לאגורות.
- אם מחברים שתי טבלאות-עלויות – כל התשלומים מתחברים.
  - דוגמה: חישוב עלות דלק בנפרד ועלות אגרת-כביש בנפרד אמור לתת תוצאה זהה לחישוב העלויות יחד.

ליניאריות - דוגמה



התשלומים באדום – על הדלק
התשלומים בכחול – אגרת כביש

משפט שאפלי (Shapley)

משפט: ישנו כלל-תשלומים אחד ויחיד המקיים את כל שלושת העקרונות:

- א. עקרון הסימטריה,
- ב. עקרון האפס (null player),
- ג. עקרון הליניאריות.

כלל-התשלומים הזה נקרא **ערך שאפלי**.

ערך שאפלי (Shapley Value)

אלגוריתם לחישוב ערך שאפלי:

- לכל אחד מ-$n!$ הסדרים האפשריים:
  - לכל שחקן:
    - חשב את *העלות השולית* שלו בסידור זה.

- לכל שחקן:
  - חשב את הממוצע של $n!$ העלויות השוליות.

- דוגמה: *code/shapley.ods*

משפט שאפלי – הוכחת נכונות

כיסוי מלא: נכון לכל סדר בנפרד ← נכון גם לממוצע על כל הסדרים.

א. **סימטריה**: ערך שאפלי של כל שחקן נקבע רק לפי העלויות השוליות שלו.

ב. **אפס**: העלויות השוליות 0 ← הממוצע 0.

ג. **ליניאריות**: ערך שאפלי הוא פונקציה ליניארית של הערכים בטבלה.

משפט שאפלי – הוכחת יחידות (1)

נוכיח יחידות לשני שחקנים. ההוכחה לשלושה או יותר מסובכת יותר טכנית, אבל דומה.

פונקציית-עלות כללית לשני שחקנים נראית כך:

$(0, c_a, c_b, c_{ab})$

ערכי שאפלי הם:

$v_a = (c_a + (c_{ab}-c_b))/2 = c_a/2 + (c_{ab}-c_b)/2$

$v_b = (c_b + (c_{ab}-c_a))/2 = c_b/2 + (c_{ab}-c_a)/2$

משפט שאפלי – הוכחת יחידות (2)

פונקציית העלות היא סכום של שלוש פונקציות:

$(0, c_a, c_b, c_{ab}) = (0,c_a,0,c_a) + (0,0,c_b,c_b) + (0,0,0,c_{ab}-c_a-c_b)$

בכחולה, ב הוא "אפס" ולכן א משלם הכל – c_a.

בירוקה, א הוא "אפס" ולכן ב משלם הכל – c_b.

באדומה, א,ב סימטריים ולכן כל אחד משלם בדיוק חצי מהעלות הכוללת – $(c_{ab}-c_a-c_b)/2$.

לפי ליניאריות, התשלומים חייבים להיות:

$$p_a = c_a+0+(c_{ab}-c_a-c_b)/2 = c_a/2 + (c_{ab}-c_b)/2$$

$$p_b = 0+c_b+(c_{ab}-c_a-c_b)/2 = c_b/2 + (c_{ab}-c_a)/2$$

= בדיוק ערכי שאפלי.

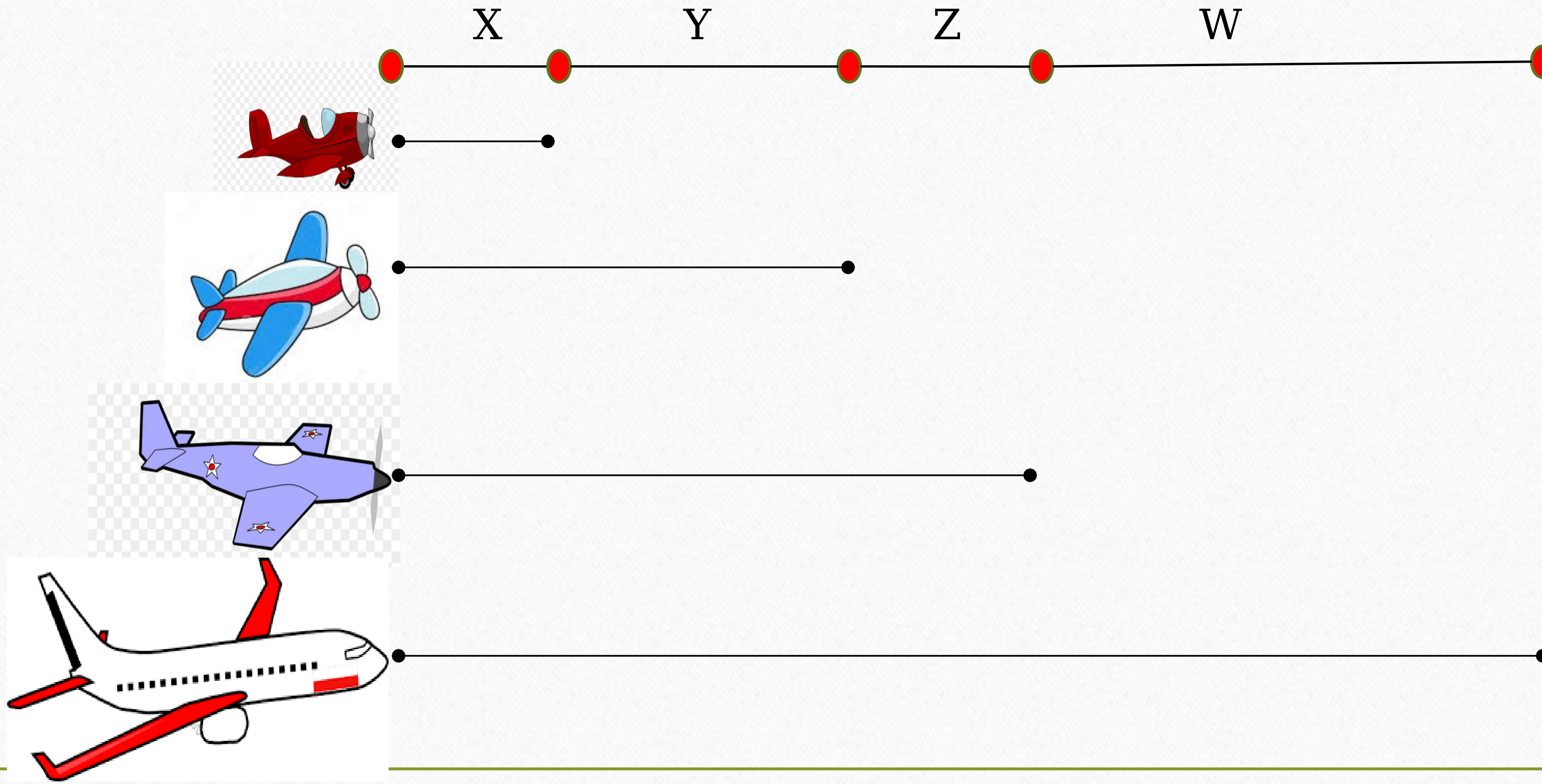
חישוב ערך שאפלי

- במקרה הכללי, חישוב ערך שאפלי הוא בעיה NP-קשה – צריך לעבור על $n!$ סדרים.

- במקרים פרטיים, ניתן לנצל את מבנה הבעיה כדי לחשב את ערך שאפלי ביעילות.

- דוגמה: חלוקת עלויות של *מסלול המראה*.

Airport problem
חלוקת עלות של בניית **מסלול-המראה**
בין חברות-תעופה הצריכות אורכים שונים



ערכי שאפלי בבעיית מסלול ההמראה

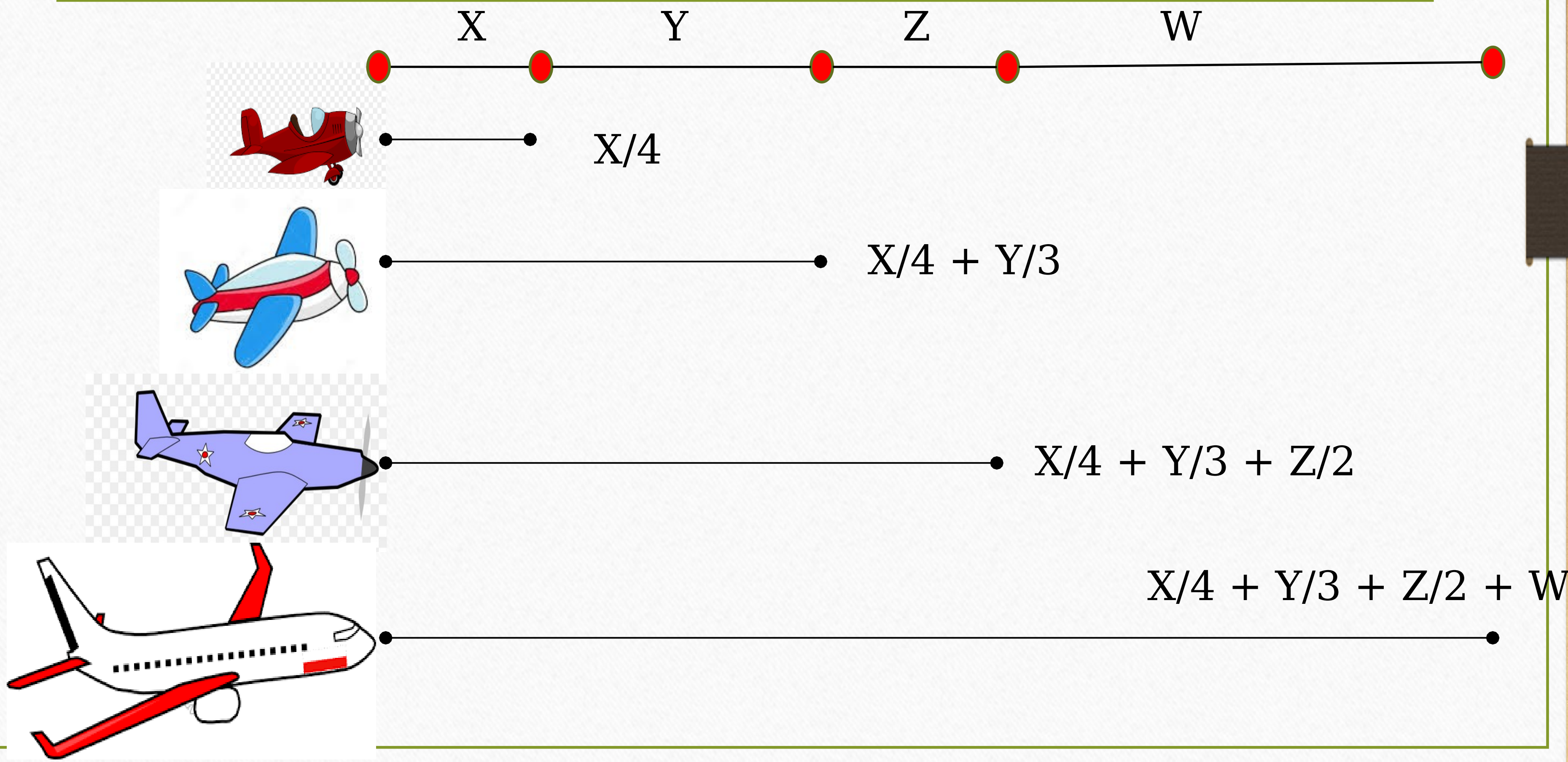
העלות של כל תת-קבוצה =
העלות **הגדולה ביותר** בתת-הקבוצה.

ניתן לחשב ישירות – ראו airport.py

ניתן גם לחשב לפי 3 העקרונות של שאפלי:

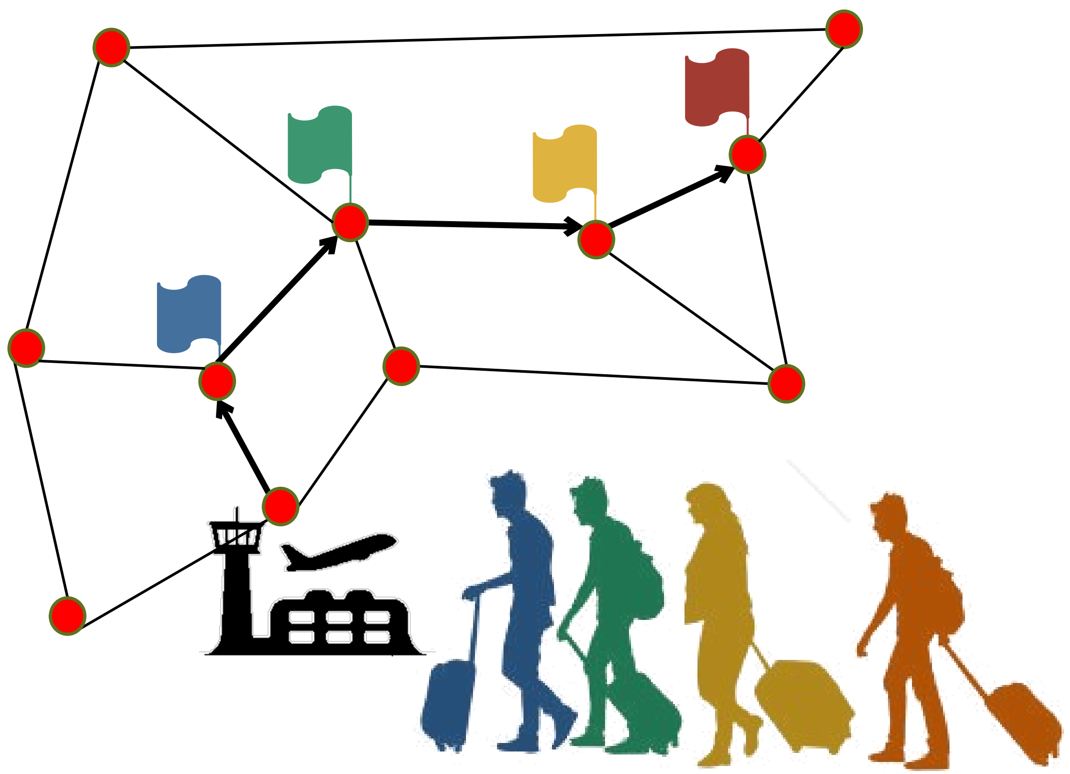
- נפרק את הבעיה לסכום ליניארי של n בעיות:
  בכל תת-בעיה i, יש עלות רק לקטע $[i\text{-}1,i]$.
- בכל תת-בעיה i:
  - שחקנים $1,\ldots,i\text{-}1$ הם "שחקני אפס",
    ולכן לא משלמים כלום.
  - שחקנים $i,\ldots,n$ הם סימטריים,
    ולכן עלות הקטע מתחלקת ביניהם בשווה.

פתרון בעיית מסלול ההמראה



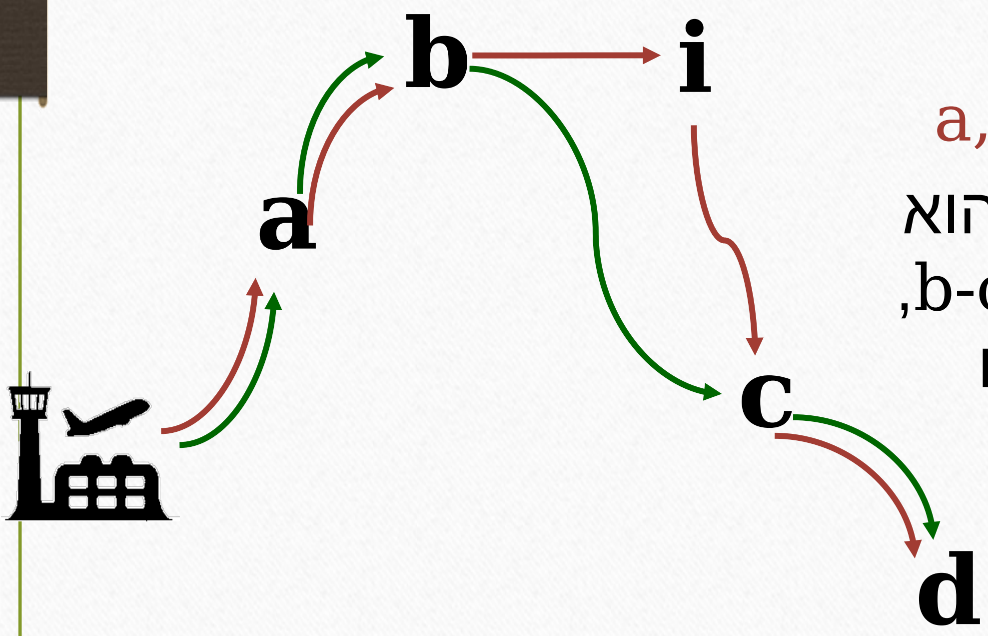
חישוב יעיל של ערך שאפלי

- דוגמה נוספת: חלוקת *עלויות נסיעה* כאשר סדר הורדת הנוסעים *קבוע מראש.*
- Levinger, Hazon, Azaria (2019)
- הכללה של בעיית מסלול ההמראה.



המבנה של בעיית שיתוף הנסיעות

- סדר הורדת הנוסעים: a – b – i – c – d
- פרמוטציה נוכחית: b, d, c, a, i
- העלות בלי i: הנוסעים a,b,c,d
- העלות עם i : הנוסעים a,b,i,c,d
- מסקנה: כש-i מצטרף לסדרה, הוא **מפחית** את העלות של הקטע b-c, **ומוסיף** את העלות של הקטעים b-i, i-c.



ערכי שאפלי בבעיית שיתוף הנסיעות

ניתן לחשב ישירות – ראו ridesharing.py

ניתן גם לחשב לפי 3 העקרונות של שאפלי:

- נפרק את הבעיה לסכום של $O(n^2)$ בעיות:
  - לכל k – תת-בעיה שבה משלמים רק את $\boldsymbol{d[0,k]}$:
    - שחקן k *מוסיף* כשהוא *הראשון* מבין 1..k שמצטרף – זה קורה באחד מכל k סדרים. לכן שאפלי שלו k/$\boldsymbol{d[0,k]}$.
    - שחקן j<k *מפחית* כשהוא הראשון מבין 1..k-1 שמצטרף אחרי k – באחד מכל k(k-1) סדרים. לכן k(k-1)/$\boldsymbol{d[0,k]}$-.
  - לכל i<k – תת-בעיה שבה משלמים רק את $\boldsymbol{d[i,k]}$:
    - שחקן i *מוסיף* כאשר k מצטרף ראשון ו-i מצטרף שני – באחד מכל $(k-i)(k-i+1)$ סדרים.
    - שחקן i<**j**<k *מפחית* כאשר i,k מצטרפים ראשונים והוא מצטרף שלישי – בשניים מכל $(k-i-1)(k-i)(k-i+1)$ סדרים.

שאלה פתוחה

איך לחשב את ערך שאפלי
כאשר סדר ההורדה
לא קבוע מראש?