

שיטות-מחלק - דוגמאות

- שיטת אדאמס – $f(s)=s$
- שיטת דין – $f(s)=2/(1/s+1/(s+1))$
- שיטת הנטינגטון-היל – $f(s)=\text{sqrt}(s*(s+1))$
- שיטת וובסטר – $f(s)=s+0.5$
- שיטת ג'פרסון – $f(s)=s+1$

א.

א. הראו דוגמה שבה שיטת ג'פרסון נותנת למפלגה מסויימת מעל הגבול העליון שלה (דרושות שלוש מפלגות לפחות).

5 מושבים 500 בוחרים

400 50 50

1 0 0

200 50 50

2 0 0

133.33 50 50

3 0 0

100 50 50

4 0 0

80 50 50

5 0 0

כלומר יצא שמפלגה ג קיבלה 5 מושבים שזה גדול ממש מהערך העליון שלה (שהוא 4)

ב. הוכיחו שזה לא יכול לקרות עם שיטת אדאמס – כל מפלגה מקבלת לכל היותר את הגבול העליון שלה. נניח בשלילה שדבר כזה אכן יתכן, כלומר קיימת מפלגה A עם $a+x$ קולות (כאשר a הוא שלם ו x הוא שבר) שקיבלה $a+2$ מושבים.

מאחר ואנו מריצים את האלגוריתם כל עוד לא נגמרו המושבים, בשלב בו קיבלה מפלגה A את המושב ה $a+2$ שלה בהכרח קיימת מפלגה Aחרת B שטרם קיבלה את מספר המושבים לה היא זכאית, כלומר אם מפלגה B קיבלה $b+y$ קולות (b הוא שלם, y הוא שבר) היא כרגע עם $b-1$ מושבים או פחות (טענה זו נובעת מעקרון שובר היונים)

נתבונן בשלב בו מפלגה A קיבלה את המושב ה $a+2$ שלה. יש לה כרגע $a+1$ מושבים, ומאחר והיא קיבלה את המושב הבא ע"פ הגדרת האלגוריתם, המנה שלה הייתה הגדולה ביותר. מה המנה של A

ע"פ החישוב? $\frac{a+x}{a+1}$ מאחר ו- a הוא שבר ע"פ הגדרה, המנה הזו קטנה מ-1 בהכרח (המונה קטן מהמכנה). נשים לב שהמנה של מפלגה B בשלב זה $\frac{b+y}{b-1} \leq$ ושוב מאחר ו- y שבר (ובפרט אי-שלילי) נקבל שהמנה הזו גדולה מ-1 בסתירה לכך שהמנה של A היא הגדולה ביותר. מכאן שלא יתכן שמפלגה כלשהי תקבל יותר מושבים מהערך העליון שלה אם עובדים ע"פ אלגוריתם אדאמס.

ג. הראו דוגמה שבה שיטת אדאמס נותנת למפלגה מסויימת מתחת לגבול התחתון שלה (דרושות שלוש מפלגות לפחות).

5 מושבים 500 בוחרים

0	0	0
400	50	50
1	1	1
400	50	50
2	1	1
133.33	50	50
3	1	1

ד. הוכיחו שזה לא יכול לקרות עם שיטת ג'פרסון – כל מפלגה מקבלת לפחות את הגבול התחתון שלה.

נניח בשלילה שדבר כזה אכן יתכן, כלומר קיימת מפלגה A עם $a+x$ קולות (כאשר a הוא שלם ו- x הוא שבר) שקיבלה $a-1$ מושבים. מאחר ובסוף האלגוריתם חילקנו את כל המושבים, בסוף האלגוריתם ע"פ שובך היונים קיימת מפלגה אחרת B שקיבלה יותר מושבים מהערך העליון שלה, כלומר למשל אם מפלגה B קיבלה $b+y$ קולות, יש לה $b+1$ מושבים לפחות (במקרה הגרוע $y=0$) נתבונן בשלב בו מפלגה B קיבלה את המושב ה- $b+1$ שלה-

יש לה כרגע b מושבים, ומאחר והיא קיבלה את המושב הבא ע"פ הגדרת האלגוריתם, המנה שלה הייתה הגדולה ביותר. מה המנה של B ע"פ החישוב? $\frac{b+y}{b+1} \geq$ מאחר ו- y הוא שבר ע"פ הגדרה, המנה הזו קטנה מ-1 בהכרח (המונה קטן מהמכנה). נשים לב שהמנה של מפלגה A בשלב זה $\frac{a+x}{a} \leq$ ושוב מאחר ו- x שבר (ובפרט אי-שלילי) נקבל שהמנה הזו גדולה מ-1 בסתירה לכך שהמנה של B היא הגדולה ביותר.

מכאן שלא יתכן שמפלגה כלשהי תקבל פחות מושבים מהערך התחתון שלה אם עובדים ע"פ אלגוריתם ג'פרסון.