חלוקה הוגנת מלבד חפץ אחד

חפצים שונים וזכויות שוות

כשיש חפצים זהים וזכויות שוות, ברור לנו שכל שחקן צריך לקבל כמעט את אותו מספר חפצים – ההפרש צריך להיות לכל היותר 1. הכללה טבעית לעקרון זה כשהחפצים שונים היא:

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1" (Envy Free except 1, EF1) אם לכל שני שחקנים i, j קיים חפץ בסל של שחקן j, שאם נסיר אותו - אז שחקן i לא יקנא.

במקרה הפרטי של חפצים זהים, חלוקה היא EF1 אם-ורק-אם ההפרש בין מספרי החפצים שמקבל כל שחקן הוא לכל היותר 1.

האם תמיד קיימת חלוקה ***EF1***? התשובה היא כן. הנה אחד האלגוריתמים הפשוטים למציאת חלוקה כזאת; אלגוריתם שילדים משתמשים בו עד היום כדי לבחור שחקנים לקבוצות כדורגל. הוא נקרא באנגלית *round robin*. בעברית אפשר לקרוא לו "אלגוריתם הסֶבֶב":

1. מסדרים את השחקנים בסדר שרירותי כלשהו.
2. כל שחקן לוקח, מבין החפצים שנשארו, את החפץ שהוא הכי רוצה.
3. אם נשארים חפצים – חוזרים לשלב 2.

משפט: החלוקה המוחזרת ע"י אלגוריתם הסבב היא EF1.

הוכחה: קודם-כל נוכיח, שעבור השחקן הראשון בסבב (שחקן 1), החלוקה היא ללא-קנאה לגמרי. נשווה את הסל שמקבל שחקן 1 לסל שמקבל שחקן אחר כלשהו, נניח j. לכל חפץ x שנמצא בסל של שחקן j, נתאים את החפץ y ששחקן 1 בחר באותו סבב. כיוון ששחקן 1 בחר לפני שחקן j, החפץ x היה זמין כשהוא בחר את חפץ y, ומכאן שחפץ y שווה עבורו לפחות כמו חפץ x. נחבר את כל הערכים של החפצים x בסל של שחקן j, ואת כל הערכים של החפצים y בסל של שחקן 1, ונקבל שהסל של שחקן 1 שווה בעיניו לפחות כמו הסל של שחקן j.

עכשיו נתבונן בשחקן אחר כלשהו, i. אם נוריד מהסלים של השחקנים 1, 2, ..., i-1 את החפץ הראשון שהם בחרו, נקבל סדרה חדשה של בחירות, שבה שחקן i בוחר ראשון. לפי הפיסקה הקודמת, בסלים הנוצרים על-ידי בחירה זו, שחקן i אינו מקנא בכלל. לכן, בסלים הנוצרים ע"י הסדרה כולה, שחקן i אינו מקנא עד-כדי חפץ אחד – וזו בדיוק ההגדרה של חלוקה EF1. ***

חפצים שונים וזכויות שונות

עכשיו נשלב את שתי ההכללות: נניח שהחפצים שונים וגם הזכויות שונות. דוגמה לבעיה כזאת היא חלוקת תיקים בין מפלגות בקואליציה. בישראל, חלוקת התיקים נקבעת על-ידי משא-ומתן מייגע בין המפלגות, שיכול להימשך שבועות רבים, ועלול גם לגרום לכישלון בהרכבת ממשלה. האם יש שיטה טובה יותר? לשם כך אנחנו צריכים קודם-כל להגדיר את תכונת ההגינות שאנחנו רוצים – הכללה של חלוקה ללא-קנאה ושל חלוקה ללא-קנאה-עד-כדי-חפץ-אחד.

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה משוקללת" (באנגלית: Weighted envy-free או WEF), אם לכל שני שחקנים i, j עם זכויות w_i, w_j, מתקיים:

$$V_i(X_i)/w_i \geq V_i(X_j)/w_j.$$

כלומר: שחקן i מעריך את הסל שלו, ביחס למשקל שלו, לפחות כמו שהוא מעריך את הסל של כל שחקן אחר j, ביחס למשקל של j.

עכשיו נגדיר הכללה של EF1 לשחקנים עם זכויות שונות. במחשבה ראשונה נראה שהכללה הנכונה היא: לכל שני שחקנים i, j, קיים חפץ בסל של j, שאם נסיר אותו, אז יתקיים התנאי WEF. אבל זו לא האפשרות היחידה; ניתן להציג את EF1 גם באופן אחר. במקום להתייחס למצב היפותטי שאנחנו מסירים את החפץ מהסל של j, אפשר להתייחס למצב היפותטי שאנחנו משכפלים את החפץ אל הסל של i.
כאשר הזכויות שוות, כל המצבים ההיפותטיים האלה שקולים, כי הקנאה נקבעת על-פי הפרש הערכים בין הסל של i לבין הסל של j – האם הביטוי $V_i(X_i) - V_i(X_j)$ חיובי או שלילי. תנאי EF1 פשוט אומר, שההפרש הזה צריך להיות לכל היותר ערכו של החפץ הגדול ביותר בסל של j. אבל כאשר הזכויות שונות, המצבים האלה לא שקולים, כי הקנאה המשוקללת נקבעת על-ידי הפרש משוקלל של הערכים:

$V_i(X_i)/w_i - V_i(X_j)/w_j$.

אם התנאי מתייחס להסרת חפץ כלשהו מהסל של j (נניח שהחפץ הזה הוא g), אז רמת הקנאה המותרת היא $V_i(g)/w_j$; ואם התנאי מתייחס לשיכפול חפץ כלשהו לסל של i, אז רמת הקנאה המותרת היא $V_i(g)/w_i$. ככל שמחלקים במספר גדול יותר – רמת הקנאה המותרת היא קטנה יותר. לכן, בעלי הזכויות הקטנות יעדיפו שנחלק בזכות של השחקן השני (-הסרת חפץ), ובעלי הזכויות הגדולות יעדיפו שנחלק בזכות שלהם (-הוספת חפץ). אפשר להציע פשרה בין בעלי הזכויות הקטנות לגדולות, ולהגדיר את רמת הקנאה המותרת כממוצע של שתי הרמות:

$0.5*V_i(g)/w_j + 0.5*V_i(g)/w_i$

כל אחד מהתנאים הללו ניתן להגדיר כ"חלוקה ללא קנאה משוקללת עד כדי חפץ אחד". האם אפשר להבטיח אחד מהתנאים הללו?

- התשובה היא כן, והאלגוריתם הוא שילוב בין שני האלגוריתמים שראינו לחפצים זהים וזכויות שונות, וחפצים שונים וזכויות זהות. נבחר פונקצייה מונוטונית-עולה כלשהי f, ונבצע את הלולאה הבאה:

- כל עוד יש חפצים פנויים:
  - מחשבים, עבור כל שחקן, את המנה (הזכות) \ $f(s)$, כאשר s הוא מספר החפצים הנוכחי של השחקן;
  - השחקן, שעבורו המנה הזאת גדולה ביותר, לוקח מבין החפצים שנשארו את החפץ שהוא הכי רוצה.

האלגוריתם הזה מכליל את שני האלגוריתמים הקודמים שלמדנו:

- כאשר הזכויות שוות והחפצים שונים, מקבלים את אלגוריתם הסֶבֶב – כי המנה תמיד תהיה גדולה יותר עבור שחקן שבחר פחות פעמים;
- כאשר הזכויות שונות והחפצים זהים, מקבלים את אלגוריתם שיטת-המחלק עם פונקציה f.

משפט. לכל y בין 0 ל-1, אלגוריתם הסבב המשוקלל עם פונקציית-מחלק $f(s)=s+y$ מחזיר חלוקה שבה לכל שני משתתפים i, j עם זכויות w_i, w_j, רמת הקנאה המשוקללת היא לכל היותר:

$$y*V_i(g)/w_i + (1-y)*V_i(g)/w_j$$

- מכאן, עבור $y=0$ (כמו בשיטת אדאמס), מתקבלת חלוקה שהיא ללא-קנאה-משוקללת לאחר הסרת חפץ אחד (לכל שני שחקנים קיים חפץ, שאם מסירים אותו מהסל של שחקן אחד, אז מתקיים תנאי WEF עבור השחקן השני).
- עבור $y=1$ (כמו בשיטת ג'פרסון), מתקבלת חלוקה שהיא ללא-קנאה- משוקללת לאחר שיכפול חפץ אחד (לכל שני שחקנים קיים חפץ, שאם משכפלים אותו אל הסל של שחקן אחד, אז מתקיים תנאי WEF עבור שחקן זה).

- עבור $y=0.5$ (כמו בשיטת וובסטר) מתקבלת חלוקה שבה רמת הקנאה המשוקללת היא לכל היותר ממוצע חשבוני של רמות הקנאה המותרות בשתי השיטות הקודמות.

כאמור, כשהזכויות שוות, ההכללות עבור כל ערך של y הן זהות ושקולות ל EF1.

הוכחת המשפט. נתמקד בשני שחקנים כלשהם $i,\ j$, ונוכיח שהתנאי מתקיים עבור שחקן i ביחס לשחקן j, אחרי כל חפץ ששחקן j בוחר. נניח ששחקן j בחר בסך-הכל J חפצים. נחלק את סדרת הבחירות ל-J שלבים, כאשר כל שלב L כולל את כל הבחירות של שחקן i עד וכולל הבחירה ה-L של שחקן j. נשתמש בסימונים הבאים:

- T_L - מספר הפעמים ששחקן i בחר בשלב L (בין הבחירה ה $L-1$ לבין הבחירה ה-L של שחקן j). מספר זה יכול להיות אפס או גדול יותר.
- a_L = סכום הערכים שמייחס שחקן i לכל T_L החפצים שהוא בחר בשלב L (אפס או יותר).
- b_L = הערך שמייחס שחקן i לחפץ שבחר שחקן j בסוף שלב L.

בכל שלב L, שחקן i בוחר את T_L החפצים הטובים ביותר עבורו מאלה שנשארו. בפרט, הם טובים לפחות כמו החפצים ששחקן j עדיין לא בחר:

$$a_L \geq T_L * \max_{[r=L..J]} b_r$$

בכל שלב s, האלגוריתם שלנו נותן לשחקן j לבחור חפץ, כאשר לשחקן j יש $s-1$ חפצים, ולשחקן i יש: $T_1+...+T_s$ חפצים. לפי הגדרת שיטת-המחלק, משמעות הדבר היא ש:

$$w_j/(s+y-1) \geq w_i/(y + \mathrm{sum}_{[L=1..s]} T_L)$$

נסמן את יחס הזכויות ב- $R := w_i/w_j$. הביטוי למעלה שקול ל:

$$y + \mathrm{sum}_{[L=1..s]} T_L \geq R*(s+y-1) \qquad (1)$$

אי-שיוויון (1) מתייחס רק למספר החפצים שיש בידי כל שחקן. אנחנו צריכים להוכיח אי-שיוויון דומה עבור ערכי החפצים שבידי כל שחקן (הערכים בעיני שחקן i):

$$y * \max_{[r=1..s]} b_r + \mathrm{sum}_{[L=1..s]} a_L \geq R*(\mathrm{sum}_{[L=1..s]} b_L - (1-y)*b_1). \qquad (2)$$

מתברר, שכדי להוכיח את אי-שיוויון (2), צריך להוכיח טענה חזקה יותר:

$$y * \max_{[r=1..J]} b_r + \mathrm{sum}_{[L=1..s]} a_L \geq R*(\mathrm{sum}_{[L=1..s]} b_L - (1-y)*b_1) + (y+\mathrm{sum}_{[L=1..s]} T_L - R*(s+y-1))*\max_{[r=s..J]} b_r. \qquad (3)$$

טענה (3) חזקה יותר מטענה (2), כי הביטוי בשורה התחתונה הוא תמיד חיובי, בגלל אי-שיוויון (1).

הוכחת טענה (3) היא באינדוקציה על s, היא כוללת הרבה פיתוחים טכניים, ולא נביא אותה כאן. מטענה (3) נובעת טענה (2), ואם נציב בה $s=J$ ונקבל:

$$y * \max_{[r=1..J]} b_r + \mathrm{sum}_{[L=1..J]} a_L \geq R*(\mathrm{sum}_{[L=1..J]} b_L - (1-y)*b_1). \qquad (4)$$

הביטוי "$\mathrm{sum}_{[L=1..J]} a_L$" הוא הערך הכולל שמייחס שחקן i לסל שקיבל. הביטוי "$\mathrm{sum}_{[L=1..J]} b_L$" הוא הערך הכולל שמייחס שחקן i לסל של שחקן j. הביטוי "$\max_{[r=1..J]} b_r$" הוא הערך הגבוה ביותר שמייחס שחקן i לחפץ כלשהו בסל של שחקן j; נסמן ערך זה ב $V_i(g_j)$. שימו לב שערך זה גדול לפחות כמו b_1, שהוא ערכו של אחד החפצים בסל של שחקן j. לכן הביטוי (4) שקול ל:

$$[y * V_i(g_j) + V_i(X_i)] / w_i \geq [V_i(X_j) - (1-y)*V_i(g_j)] / w_j \qquad (5)$$

$$y*V_i(g_j)/w_i + (1-y)*V_i(g_j)/w_j \geq V_i(X_j)/w_j - V_i(X_i)/w_i$$

הביטוי בצד ימין הוא בדיוק רמת הקנאה המשוקללת, והביטוי בצד שמאל הוא החסם שבמשפט. ***

הערה: ישנן מדינות (כגון בצפון אירלנד, דנמרק, וכן בפרלמנט של האיחוד האירופי) שבהן משתמשים בשיטת-סבב דומה לזו שראינו למעלה, לצורך חלוקת תיקים בממשלה..

ראינו שלוש שיטות שונות, כל אחת מהן מבטיחה הכללה אחרת של התנאי EF1. למעשה, מהוכחת המשפט למעלה נובע שיש אינסוף הכללות – עבור כל ערך של y מקבלים הכללה אחרת. האם אפשר להבטיח בו-זמנית שתי הכללות כאלו (עבור ערכים שונים של y)? התשובה היא לא.

משפט. קיימים מצבים שבהם אף חלוקה לא מקיימת בו-זמנית שתי הכללות של WEF מאלו שנזכרו במשפט הקודם (עבור שני y שונים).

הוכחה. המשפט מתקיים אפילו במקרה הפשוט ביותר שבו יש m חפצים זהים (בשווי 1) ושני שחקנים. נניח שלשחקן 1 יש זכות 1 ולשחקן 2 יש זכות W. נניח שאנחנו רוצים לקיים בו-זמנית שתי הכללות, אחת עם פרמטר y_1 ואחת עם פרמטר y_2, ונניח בלי הגבלת הכלליות ש- $y_1<y_2$.

נבחר את W כך שיתקיימו שני אי-השיוויונים הבאים:

$$1 + (m-1)/y_2 < W < 1 + (m-1)/y_1$$

כיוון ש- $y_1<y_2$, עבור m מספיק גדול, התחום כולל לפחות מספר שלם אחד, וניתן לבחור W שלם כלשהו הנמצא בתוך התחום.

הקנאה המשוקללת של שחקן 1 צריכה להיות לכל היותר:

$$\begin{aligned} & y_1*V_i(g)/w_1 + (1-y_1)*V_i(g)/w_2 \\ &= y_1 + (1-y_1)/W \\ &= y_1(W-1)/W + 1/W \\ &< (m-1)/W + 1/W \\ &= m/W. \end{aligned}$$

והקנאה המשוקללת של שחקן 2 צריכה להיות לכל היותר:

$$\begin{aligned} & y_2*V_i(g)/w_2 + (1-y_2)*V_i(g)/w_1 \\ &= y_2/W + (1-y_2) \\ &= 1 - y_2(W-1)/W \\ &< 1 - (m-1)/W. \end{aligned}$$

נבדוק את החלוקות האפשריות.

א. אם שחקן 1 לא מקבל חפצים בכלל, אז הקנאה המשוקללת שלו היא:

$$m/W - 0/1 = m/W$$

וזה מעל הסף שחישבנו למעלה – כלומר התנאי עם פרמטר y_1 אינו מתקיים עבור שחקן 1.

ב. אם שחקן 1 מקבל חפץ אחד לפחות, אז שחקן 2 מקבל לכל היותר m-1 חפצים, והקנאה המשוקללת שלו היא לפחות:

$$1/1 - (m-1)/W = 1 - (m-1)/W$$

וזה מעל הסף שחישבנו למעלה – כלומר התנאי עם פרמטר y_2 אינו מתקיים עבור שחקן 2.

מכאן, שאי אפשר לקיים את שני התנאים יחד עבור שני השחקנים. ***

המשפט האחרון מעורר את השאלה: באיזו הכללה לבחור? כמו בבעיית חלוקת המושבים, שיטת אדאמס (וכן התנאי של "WEF עד כדי הסרת חפץ") טובה יותר לשחקנים עם זכויות קטנות, שיטת ג'פרסון (וכן התנאי של "WEF עד כדי שיכפול חפץ") טובה יותר לשחקנים עם זכויות גדולות, ושיטת וובסטר מאוזנת. כשמחלקים חפצים בין אנשים, נראה ששיטת וובסטר עדיפה, אולם כשמחלקים תיקים בין מפלגות בקואליציה, בדרך-כלל רוצים לתת עדיפות למפלגות קטנות כדי שיקבלו ייצוג, ולכן נראה ששיטת אדאמס עדיפה.

עם זאת, העובדה שיש כל-כך הרבה שיטות מראה, שאולי כל גישת ה"הגינות המקורבת" לא מתאימה למצבים שבהם יש חשיבות רבה לכל חפץ (כמו בבחירת תיקים בממשלה), ודרושה גישה אחרת. בשיעור הבא נראה גישה אחרת, שמטרתה להשיג הגינות מדוייקת.

מקורות

- *Chakraborty, Igarashi, Suksompong, Zick (2021). "Weighted Envy-Freeness in Indivisible Item Allocation".*
- *Chakraborty, Schmidt-Kraeplin, Suksompong (2021). "Picking Sequences and Monotonicity in Weighted Fair Division".*

סיכם: אראל סגל-הלוי.