

תקצוב השתתפותי

פרופורציונליות חזקה

אנחנו רוצים שהתקציב יהיה הוגן, ולשם כך צריך קודם-כל להגדיר מה זה "הוגן". בשיעור על חלוקת עוגה למדנו על תנאי שנקרא "חלוקה פרופורציונלית", אבל שם החלוקה היתה אישית – כל אחד קיבל פרוסה שהוא ורק הוא נהנה ממנה. לכן ההגינות נקבעה לפי הערך שכל אחד ייחס לפרוסה האישית שהוא קיבל. במקרה שלנו, כשהעירייה בוחרת פריטים לביצוע, יש הרבה אזרחים הנהנים מאותם פריטים. איך אפשר לתרגם את תנאי הפרופורציונליות למצב זה?

לצורך ההגדרה, נסמן את הסכום הקצוב באות L (בשקלים), ואת מספר האזרחים המצביעים באות n .

הגדרה: תקציב נקרא פרופורציונלי-חזק אם –

- לכל קבוצת מצביעים בגודל k (מתוך n):
 - אם כל חברי הקבוצה מסכימים על פריטים שהעלות הכוללת שלהם לפחות kL/n –
 - אז הסכום המוקצב לפריטים, שלפחות אחד מחברי-הקבוצה רוצה, הוא לפחות kL/n .
- הרעיון הוא, שלכל אזרח יש "זכות" לקבוע לגבי יחידת-תקציב אחת (L/n). במקרה קיצוני, אם מישו רוצה פריט שעולה רק L/n (נניח, הוא רק רוצה שיתקנו את פנס-הרחוב ליד הבית שלו), אז צריך לממן אותו. אבל בדרך-כלל אין פריטים כאלה – רוב הפריטים עולים יותר מ- L/n , וכדי לממן אותם דרושה הסכמה של יותר אזרחים; ככל שהפריט יקר יותר, כך דרושים אזרחים רבים יותר שיסכימו לממן אותו.

ההגדרה נשמעת טוב, אבל הבעיה היא שתקציב פרופורציונלי-חזק לא תמיד קיים. לדוגמה, נניח שהסכום הקצוב $L=4$. שני פריטים, כל אחד עולה 2.5. יש $n=4$ אזרחים: שניים רוצים את פריט א, ושניים רוצים את פריט ב. לקבוצה בגודל 2 יש זכות לקבוע לגבי תקציב של 2. תקציב פרופורציונלי-חזק, לפי הגדרתו, צריך לממן את שני הפריטים – אבל זה יעלה 5 ויש לנו רק 4!

פרופורציונליות רגילה

ההגדרה הקודמת חזקה מדי, ולכן נציע הגדרה אחרת.

הגדרה: תקציב נקרא פרופורציונלי אם –

- לכל קבוצת מצביעים בגודל k (מתוך n):
 - הסכום המוקצב לפריטים, שלפחות אחד מחברי-הקבוצה רוצה, הוא לפחות העלות הגדולה ביותר של קבוצת-פריטים שכל חברי הקבוצה מסכימים עליהם, ועולה לכל היותר kL/n .

בדוגמה הקודמת, כל תקציב הוא פרופורציונלי, כיוון שאין אף תת-קבוצה בגודל k המסכימה על קבוצת פריטים שעלותה לכל היותר k . בהמשך נראה דוגמאות יותר מעניינות.

משפט: תקציב פרופורציונלי תמיד קיים.

הוכחה: האלגוריתם הבא מוצא אותו (פותח ע"י האריס עזיז, ברטון לי, ונמרוד טלמון ב-2018). האלגוריתם מחזיק שני משתנים: משתנה אחד נקרא "תקציב" ומכיל את קבוצת הפריטים שהחלטנו לממן (מאותחל לקבוצה ריקה); משתנה שני נקרא "מקופחים" ומכיל את קבוצת האזרחים, שהפריטים שהם רוצים עדיין לא נכנסו לתקציב (מאותחל לקבוצת כל האזרחים).

אתחול:

תקציב =: קבוצה ריקה;

מקופחים =: כל האזרחים.

נסמן באות m את מספר-הפריטים הכולל.

סדר את 2^m קבוצות הפריטים בסדר יורד של עלות.

לכל קבוצת-פריטים Y , מהיקרה לזולה:

- חשב את קבוצת-האזרחים K שרוצים את כל הפריטים ב- Y . נניח שבקבוצה יש k אזרחים.
- אם עלות הפריטים ב- Y היא לכל היותר kL/n -
 - הוסף את הפריטים ב- Y לתקציב.
 - הורד את האזרחים ב- K מקבוצת המקופחים.

האלגוריתם ממומש בקובץ `code/proportional_budgeting.py` ואפשר לראות כמה דוגמאות הרצה.

טענה 1: אלגוריתם עזיז-לי-טלמון אף פעם לא חורג מגבולות התקציב.

הוכחה: בכל פעם שקבוצה של k אזרחים יוצאת מקבוצת המקופחים, האלגוריתם מתקצב פריטים שעלותם הכוללת היא לכל היותר $k \cdot L/n$.

לכן, לאחר שכל n האזרחים יצאו מקבוצת המקופחים, האלגוריתם מתקצב פריטים שעלותם הכוללת היא לכל היותר L . $n \cdot L/n = L$.

טענה 2: אלגוריתם עזיז-לי-טלמון תמיד מחזיר תקציב פרופורציונלי [חלש].

הוכחה: נתונה קבוצת-אזרחים K בגודל k , המסכימים על קבוצת-פריטים X , שהעלות שלה מקיימת:

$$c(X) \leq kL/n$$

נוכיח שסך כל המימון המיועד לפריטים שחברי K רוצים, הוא לפחות $c(X)$.

נחלק את הקבוצה X לשתי תת-קבוצות:

• Y - הפריטים המתוקצבים מתוך X ,

• Z - הפריטים הלא-מתוקצבים מתוך X .

איפה נמצאים חברי הקבוצה K , כשהאלגוריתם מגיע לקבוצה Z ?

אם כל חברי K מקופחים - האלגוריתם יתקצב את Z ; סתירה.

אם אחד מהם כבר לא מקופח - כשהוא יצא, נבחרה לתיקצוב קבוצת-פריטים שעלותם הכוללת גדולה

יותר (כי הקבוצות מסודרות בסדר יורד), כלומר נבחרה קבוצה שעלותה לפחות $c(Z)$.

לכן, המימון הכולל לפריטים שלפחות אחד מחברי הקבוצה K רוצה הוא לפחות:

$$c(Z) + c(Y) = c(X)$$

קל לראות, שסיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם היא $n \cdot 2^m$. זה סביר כשמספר הפריטים קטן, אבל לא סביר כשמספר הפריטים גדול. האם ישנו אלגוריתם יעיל יותר? --כנראה לא: עזיז, לי וטלמון הוכיחו שהבעיה היא NP-קשה. מה עושים במקרה זה? - מחפשים אלגוריתמי-קירוב טובים; הנושא עדיין בשלבי מחקר.

מקורות

- [Proportionally representative participatory budgeting: Axioms and algorithms](#), H Aziz, BE Lee, N Talmon

• מצגות של נפרוד טלמון

• ויקיפדיה Participatory Budgeting Algorithm

ברוך ה' חונן הדעת

סיכום: אראל סגל-הלוי.