

## מטלה 11 שאלה 1

### שאלה 1: תיקון טעות בהרצאה

בהרצאה אמרתי, שאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות הוא יעיל-פארטו. לצערי זה לא נכון בכל המקרים (ראו הוכחה במאמר). הנה דוגמה אחת שבה האלגוריתם כן נותן תוצאה יעילה פארטו. נניח שיש שני אזרחים ושלושה נושאים, התקציב הכולל הוא 100, וההצבעות הן (0, 20, 80) ו-(80, 20, 0).

א. מהו התקציב המתקבל מהפעלת האלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות? פרטו את שלבי החישוב.

ב. הראו שהתקציב המתקבל הוא יעיל פארטו (השתמשו בפונקציית התועלת כפי שהוגדרה בהרצאה).

	נושא א	נושא ב	נושא ג
אזרח א	0	20	80
אזרח ב	20	0	80

מאחר ועבור כל נושא יש 2 הצבעות (כלומר  $n=2$ ) האלגוריתם יוסיף רק עוד הצבעה אחת לכל נושא.

$$f_i(t) = C \cdot \min(1, i \cdot t) \quad \forall i \in [n-1]$$

מאחר ויש רק הצבעה אחת עלותה תהיה

$$f_1(t) = C \cdot \min(1, t) = Z$$

יש כמה אופציות לאותו ביחס לשאר ההצבעות

$$0 < Z < 20$$

$$20 < Z < 80$$

$$80 < Z$$

נתייחס לכל אופציה בנפרד כדי למצוא אופציה חוקית עבורה סכום ההשקעות בכל הנושאים יהיה C

$$0 < Z < 20$$

נושא א- 20, Z, 0

נושא ב- 20, Z, 0

נושא ג- 80, 80, Z

כלומר סך ההשקעה בכל הנושאים היא  $2 \cdot Z + 80$

$$2 \cdot Z + 80 = C = 100$$

$$Z = 10$$

כלומר נושא א- 10

נושא ב- 10

נושא ג- 80

$$20 < Z < 80$$

נושא א- 0, 20, Z

נושא ב- 0, 20, Z

נושא ג- Z, 80, 80

כלומר סך ההשקעה בכל הנושאים היא  $2 \cdot 20 + 80$   
 $2 \cdot 20 + 80 = 120 \neq C = 100$   
 מכאן שאופציה זו אינה חוקית. נבדוק את האופציה האחרונה:

$$80 < Z$$

נושא א-  $0, 20, Z$

נושא ב-  $0, 20, Z$

נושא ג-  $80, 80, Z$

כלומר סך ההשקעה בכל הנושאים היא  $2 \cdot 20 + 80$   
 $2 \cdot 20 + 80 = 120 \neq C = 100$   
 כלומר אופציה לא חוקית.

יוצא שהאופציה הראשונה בלבד חוקית ומכאן ש

$$t^* = \frac{1}{10}$$

**מסקנה- תוצאת האלגוריתם היא:**

**נושא א- 10**

**נושא ב- 10**

**נושא ג- 80**

על פי הגדרה, תועלת אזרח א = תועלת אזרח ב = 20-

(מינוס סכום ההפרשים בערך מוחלט)

נרצה להוכיח שלא קיים שיפור פארטו לתוצאת האלגוריתם.

נניח בשלילה שקיים שיפור פארטו לתוצאה.

נרצה להוכיח שבכל שיפור שכזה נושא ג עדיין יקבל 80.

נשים לב שיש 2 אופציות:

\* נושא ג קיבל יותר מ-80

במקרה זה ניקח את הכסף העודף מנושא ג ונעביר לאחד הנושאים (נניח בה"כ לנושא א) התועלת של א וב עלתה בא (כי הקטנו את ההפרש) ואז ירדה בא לאזרח א (כי העברנו את הכסף לנושא אחר שהוא לא הצביע לו) עבור אזרח ב התועלת המשיכה לעלות כי הגדלנו את התקציב של נושא א (נשים לב שהתקציב של נושא א לכל היותר 20 כעת).

מכאן שהגדלנו את התועלת של אזרח ב והשארנו את התועלת של אזרח א אותו דבר

\* נושא ג קיבל פחות מ-80

במקרה זה, ניקח תקציב מאחד הנושאים האחרים (לא משנה ממי) ונשלים לנושא ג עד שיקבל 80. נניח בה"כ שלקחנו את התקציב מנושא א- נשים לב שהתועלת של אזרח ב ירדה (כי לקחנו כסף מנושא שהוא הצביע לו) אבל אז עלתה חזרה (כי העברנו את הכסף לנושא אחר שהוא הצביע לו). בנוסף התועלת של אזרח א רק עלתה (לקחנו כסף מנושא שהוא לא הצביע לו והעברנו לנושא שהוא כן הצביע לו)

מכאן שהגדלנו את התועלת של אזרח א והשארנו את התועלת של אזרח ב אותו דבר.

מסקנה- בכל תקציב יעיל פארטו נושא ג יקבל 80 בדיוק.

כעת נשאר לחלק את ה-20 הנותרים.

הדרך היחידה לעשות זאת כך שהתועלת של אזרח א וגם של אזרח ב תהיה 20 או יותר היא לחלק את הכסף שווה בשווה כלומר נושא א יקבל 10 ונ"ל לגבי נושא ב.

כלומר קיבלנו שלא קיים שיפור פארטו לתוצאה. מש"ל.