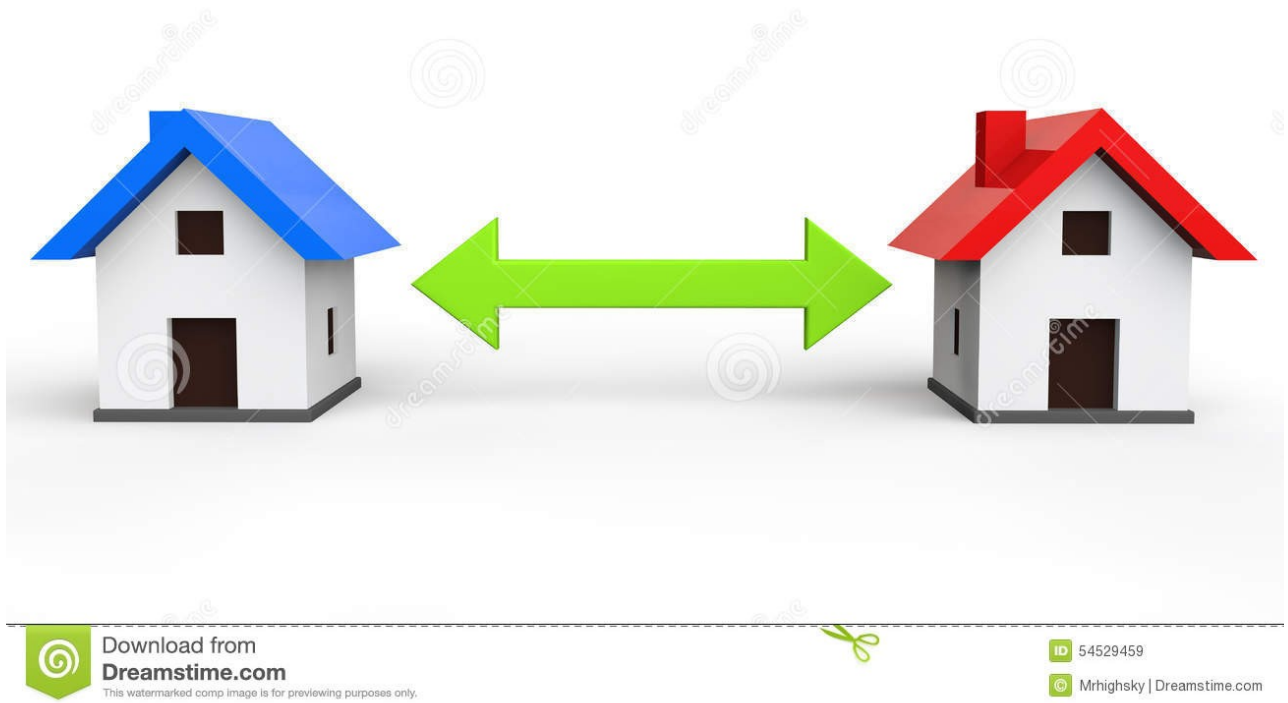
אלגוריתמי החלפה

אראל סגל-הלוי
חלק מהשקפים של: Wayne Racey



https://www.dreamstime.com/stock-illustration-d-house-exchange-concept-render-image54529459

החלפה

דוגמאות:

א. החלפת בתים לנופש;

ב. החלפת תורניות בין עובדים;

ג. החלפת חדרים בין סטודנטים במעונות.

למה לא להריץ אלגוריתם לחלוקה הוגנת?

- כי סטודנטים שכבר יש להם חדרים יחששו להפסיד ויעדיפו לא להשתתף.

עידוד השתתפות

הגדרה: אלגוריתם הוא *מעודד השתתפות* (באנגלית: individually rational - *רציונלי ליחידים*), אם מצבו של כל משתתף לאחר הביצוע, טוב לפחות כמו מצבו לפני הביצוע.

שאלה: האם קיים אלגוריתם החלפה שהוא *מגלה-אמת, יעיל-פארטו, ומעודד השתתפות?*

יציבות – "עידוד השתתפות" קבוצתי

הגדרות:

- **קואליציה מערערת** (blocking coalition) = קבוצת משתתפים שיכולה לפרוש ולבצע החלפה שהיא טובה באותה מידה לכל חברי הקבוצה וטובה יותר לפחות לאחד מחבריה.
- **שיבוץ יציב** (core-stable allocation) = שיבוץ שבו אין קואליציה מערערת.

יציבות ← עידוד השתתפות , יעילות פארטו.

שאלה: האם קיים אלגוריתם החלפה שהוא *מגלה-אמת* ומוצא *שיבוץ יציב*?

אלגוריתם מעגלי המסחר

משפט (Gale, Shapley, Scarf, 1974).
אם כל יחסי ההעדפות הם חזקים (אין אדישות), אז:

א. קיים שיבוץ יציב אחד ויחיד;

ב. קיים אלגוריתם מגלה-אמת המוצא אותו.

הוא נקרא **אלגוריתם מעגלי המסחר – Top Trading Cycles**

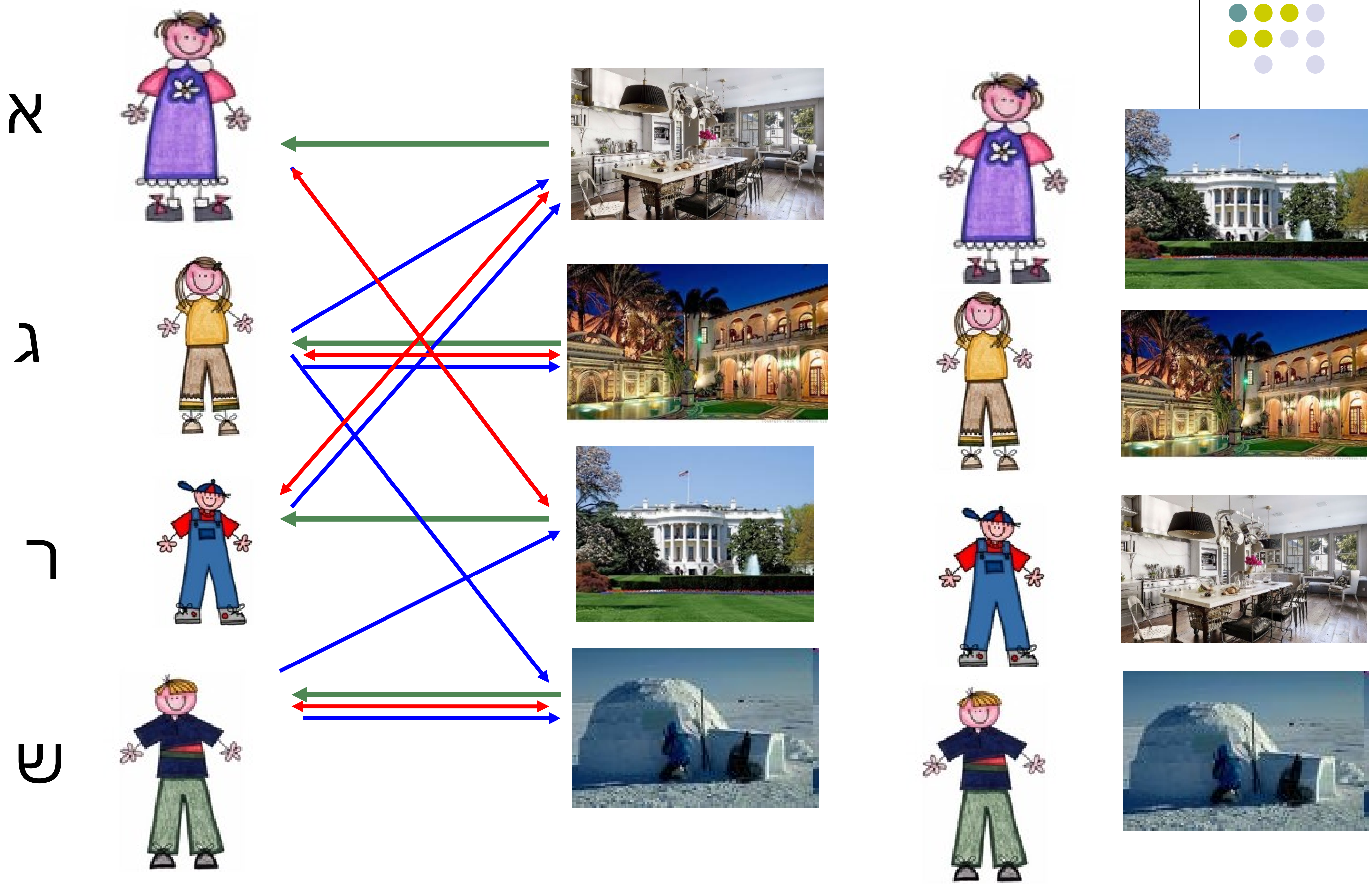
אלגוריתם מעגלי המסחר

0. מאתחלים גרף מכוון שבו:
הצמתים הם האנשים והבתים;
יש *קשת* מכל אדם לבית שהוא הכי רוצה,
ומכל בית לאדם שגר בו עכשיו.

א. מוצאים מעגל מכוון בגרף.
ב. מבצעים את ההחלפה במעגל.
ג. מוחקים מהגרף את הצמתים שהשתתפו.
ד. מעדכנים את הקשתות של האנשים שנשארו.

ה. חוזרים על שלבים א-ד עד שהגרף ריק.

אלגוריתם מעגלי המסחר בתמונות



אלגוריתם מעגלי המסחר

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר מסתיים.
הוכחה: כל עוד הגרף לא ריק, קיים לפחות מעגל מכוון אחד. לכן בכל שלב הגרף קטֵן עד שמתרוקן.

משפט: האלגוריתם מעודד השתתפות.
הוכחה: כשהבית שלך יוצא מהגרף, אתה מייד מקבל בית חדש. הבית החדש הוא בית שהצבעת עליו, שהוא הטוב ביותר מבין הבתים הזמינים. לכן הוא טוב לפחות כמו הבית שלך.

אלגוריתם מעגלי המסחר - יציבות

משפט: אם כל יחסי ההעדפה *חזקים* (אין אדישות), אז אלגוריתם מעגלי המסחר מוצא שיבוץ יציב.

הוכחה: נניח שקבוצת "הבדלנים" שוקלת לפרוש.
שיבוץ א = השיבוץ לבדלנים כשהם לא פורשים.
שיבוץ ב = השיבוץ לבדלנים כשהם כן פורשים.
יהי k הקטן ביותר כך שבדלן ממעגל k מקבל בית אחֵר בעקבות הפרישה. בית זה שייך לבדלן אחֵר.
כל הבדלנים ממעגלים $k>j$ מקבלים אותו בית.
לכן הבדלן שלנו מקבל בית ממעגל k ומעלה.
אבל בשיבוץ א, הוא מקבל את הבית הטוב ביותר עבורו, מבין הבתים שעדיין זמינים בזמן מעגל k.
כיוון שההעדפות חזקות, הבית האחֵר *גרוע* יותר. ***

אלגוריתם מעגלי המסחר – גילוי אמת

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר מגלה-אמת.

הוכחה: נניח שיוסי סוחר במעגל k כשהוא אמיתי ובמעגל j כשהוא מתחכם. נשווה בין מצבים אלו בשני מקרים.

- מקרה א: $\boldsymbol{k \geq j}$. המסחר עד מעגל k-1 זהה בשני המצבים. לכן קבוצת הבתים שנשארו זמינים אחרי מעגל k-1 זהה בשני המצבים. וכשיוסי אמיתי הוא מקבל את הבית שהוא הכי רוצה מבין הבתים בקבוצה זו.
- מקרה ב: $\boldsymbol{j<k}$. המסחר עד מעגל j-1 זהה בשני המצבים. בסיבוב הבא כל הקשתות זהות בשני המצבים, פרט לקשת היוצאת מיוסי. **כשיוסי מתחכם**, הקשת היוצאת ממנו סוגרת מעגל עם בית כלשהו x. **כשיוסי אמיתי**, הוא נמצא בסופה של שרשרת המתחילה בבית x. כל עוד לא נסגר מעגל, כל השרשרת הזאת נשארת בגרף. בפרט, בית x עדיין נמצא בגרף כאשר מעגל k נסגר. לכן הבית שמקבל יוסי כשהוא אמיתי טוב לפחות כמו x. ***

אלגוריתם מעגלי המסחר - יציבות

משפט: אם כל יחסי ההעדפה הם חזקים, אז יש רק שיבוץ יציב אחד. *(למה זה מעניין?)*

הוכחה: נגדיר: שיבוץ א = השיבוץ של האלגוריתם, שיבוץ ב = שיבוץ אחר כלשהו.

יהי k הקטן ביותר כך שמישהו ממעגל k באלגוריתם, משובץ אחרת בשיבוץ ב.

בשיבוץ א הוא מקבל את הבית הטוב ביותר מהבתים שלא נלקחו ע"י מעגלים $k>j$.

בשיבוץ ב הוא **לא** מקבל בית ממעגל $k>j$, ולכן מצבו **פחות** טוב.

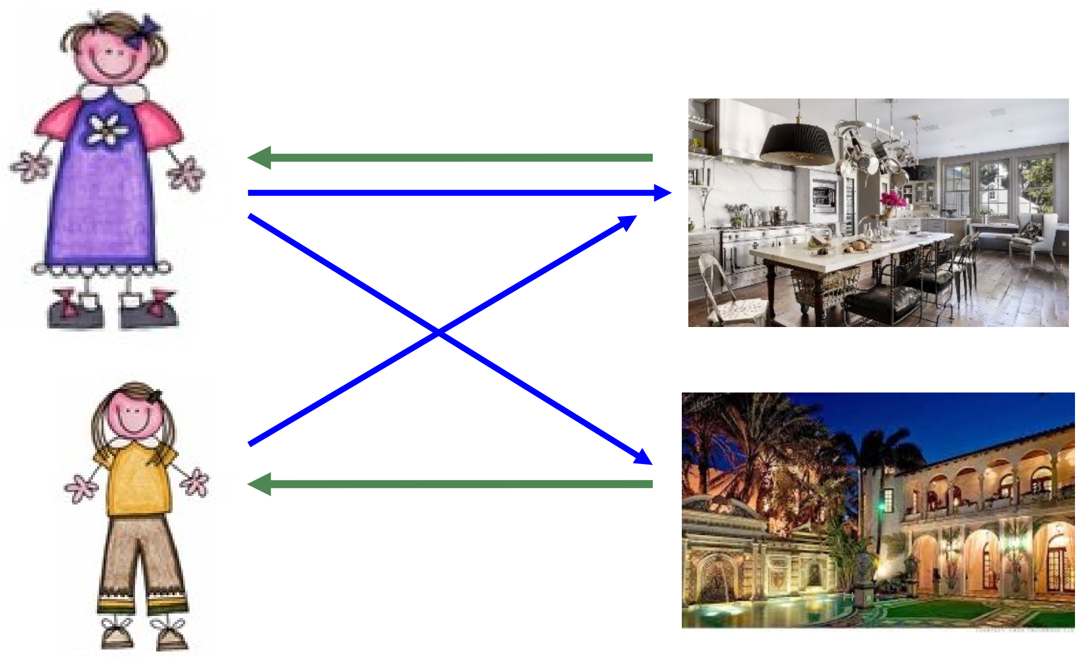
==> משתתפי מעגל k יכולים לפרוש ולערער על שיבוץ ב. ==> שיבוץ ב לא יציב. ***

יחסי-העדפה עם אדישות

לרוב, אנשים אדישים בין כמה אפשרויות.

- *דוגמה: סטודנטים שמעדיפים מעונות מסוג מסויים, אבל לא אכפת להם איזה בית בדיוק.*

המשמעות: אנשים עם כמה קשתות יוצאות:

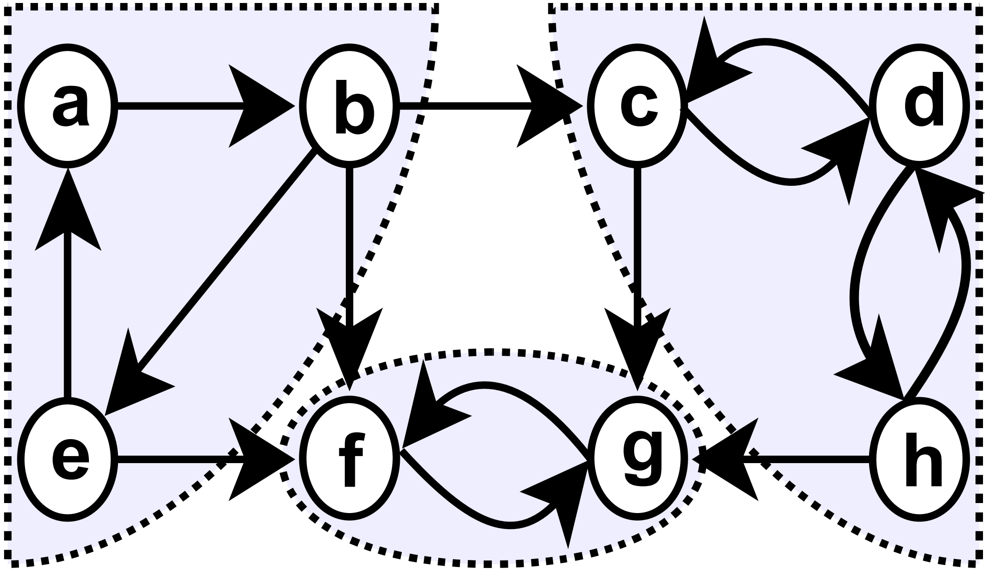


אם נבחר קשת שרירותית, ייתכן שהתוצאה לא תהיה יעילה-פארטו.

מעגלי-מסחר עם אדישות

תזכורת: *רכיב קשיר חזק* (strongly-connected component): הוא אוסף צמתים, שאפשר להגיע מכל אחד מהם לכל אחד מהם במסלול מכוון.

- אפשר למצוא ע"י אלגוריתם DFS.



הגדרה: רכיב-קשיר-חזק C נקרא *סופי* אם:

- אין קשתות יוצאות מ-C לרכיבים אחרים.
- יש קשת מכל שחקן ב-C לבית שלו.

התמונה מויקיפדיה: https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component

אלגוריתם מעגלי-מסחר עם אדישות

א. כל עוד **יש** בגרף רכיב-קשיר-חזק סופי C:
- נותנים לכל שחקן ב-C את הבית שלו.
- מוציאים מהשוק את השחקנים והבתים ב-C.
- מעדכנים את העדפות השחקנים הנשארים.

ב. אם **אין** בגרף רכיב-קשיר-חזק סופי:
- בוחרים לכל שחקן, בית *אחד* מבין הבתים שהוא הכי רוצה (בהמשך נראה את כלל הבחירה).
- מוצאים מעגל מכוון בגרף שנוצר.
- מבצעים את ההחלפה במעגל;
- *משאירים בשוק* את השחקנים והבתים.

ג. חוזרים על סעיפים א, ב עד שהגרף ריק.

כלל הבחירה – כלל סבן-סתורמן

הגדרות:

- שחקן *מקנא* = שחקן שאין קשת ממנו לעצמו.
- שחקן *מסודר* = שחקן שכבר בחר בית אחד.
- בית *עדיף* = בית עם מספר סידורי קטן ביותר.

הכלל:

- כל שחקן *מקנא* בוחר, מבין הבתים שהוא הכי רוצה, בית עדיף [עכשיו כל המקנאים מסודרים].
- מבין השחקנים הלא-מסודרים שהם שכנים של שחקנים מסודרים, בוחרים את זה שמחזיק בבית עדיף, והוא בוחר בבית עדיף מבין הבתים שהוא הכי רוצה, השייכים לשחקן מסודר.

אלגוריתם מעגלי-מסחר עם אדישות

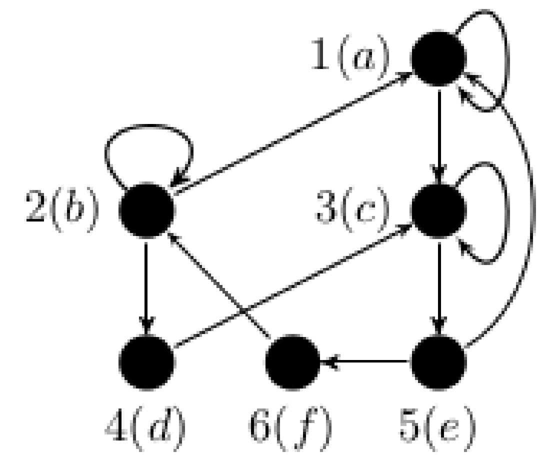
Original endowments:
$\omega(1) = a$, $\omega(2) = b$,
$\omega(3) = c$, $\omega(4) = d$
$\omega(5) = e$, $\omega(6) = f$

Common object order:
a, b, c, d, e, f.

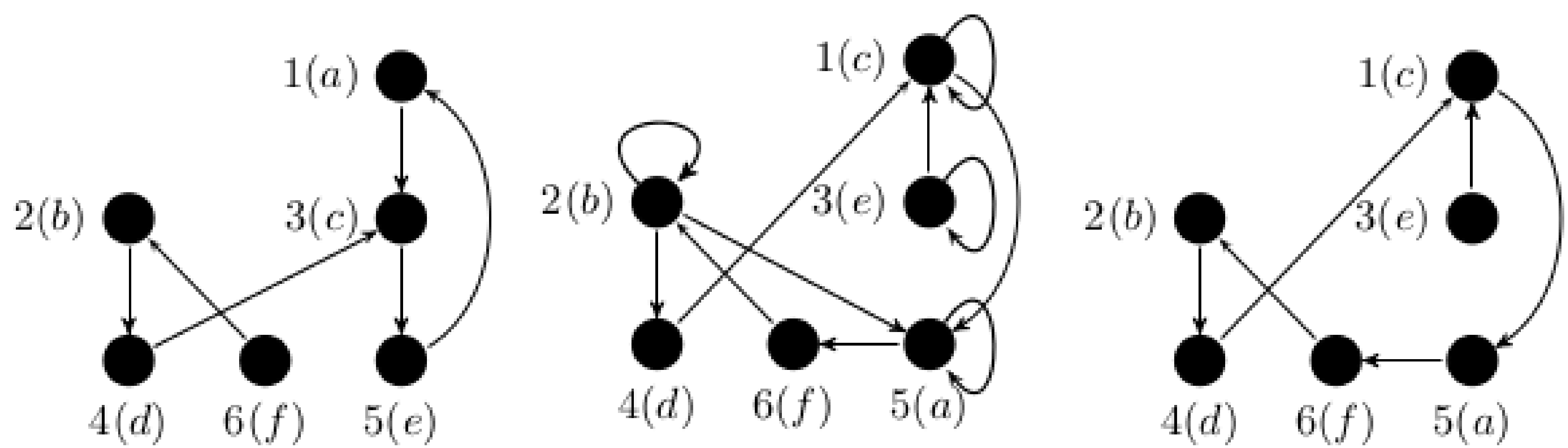
(a) Endowments and orders.

Preference Lists:	
1	{a, c}
2	{a, b, d}
3	{c, e}
4	c
5	{a, f}
6	b

(b) Preferences.



(c) G_0.



(d) $F(G_0)$. (e) G_1. (f) $F(G_1)$.

הדוגמה מהמאמר: https://doi.org/10.1145/2492002.2482574

אלגוריתם סבן-סתורמן

משפט. האלגוריתם מסתיים תוך $2n$ צעדים.

הוכחה. בכל צעד א, לפחות שחקן אחד יוצא מהשוק; לכן צעד א מתבצע לכל היותר n פעמים.

בכל צעד ב, מוצאים לפחות מעגל מכוון אחד. כלל הבחירה מבטיח, שכל מסלול מכוון המתחיל בשחקן שאינו מקנא, מגיע לשחקן מקנא. לכן, כל מעגל מכוון כולל שחקן מקנא אחד לפחות. לאחר שמחליפים את הבתים במעגל, כל השחקנים במעגל אינם מקנאים, כי הם קיבלו בית שהם הכי רוצים. לכן מספר השחקנים המקנאים קטן ב-1 לפחות. לכן גם צעד ב יכול להתבצע לכל היותר n פעמים. ***

אלגוריתם סבן-סתורמן

משפט. האלגוריתם מחזיר שיבוץ יעיל-פארטו.

הוכחה. נניח בשלילה שיש שיפור פארטו.

שיבוץ א = השיבוץ המקורי; שיבוץ ב = השיפור פארטו.

בשיבוץ א, כל שחקן שיצא ברכיב-סופי *k*:

- מקבל בית שהוא הכי רוצה מבין הבתים *הזמינים*;
- לא רוצה אף בית מבית הבתים *הנשארים*.

לכן, בכל שיבוץ אחר:

- שחקן המקבל בית מרכיב-סופי $k<j$ – מפסיד.
- שחקן המקבל בית מרכיב סופי k – אדיש.
- אם שחקן כלשהו מקבל בית מרכיב-סופי $k>j$, אז בהכרח שחקן אחר כלשהו מפסיד.
- לכן לא קיים שיפור פארטו. ***

יציבות חלשה

הגדרות:

- **קואליציה מערערת חזק** = קבוצת משתתפים שיכולה לפרוש ולבצע החלפה שהיא *טובה יותר* לכל חברי הקבוצה.
- **שיבוץ יציב-חלש** (weak core allocation) = שיבוץ שבו אין קואליציה מערערת-חזק.

יציבות חלשה ← עידוד השתתפות.

אלגוריתם סבן-סתורמן - יציבות

משפט: האלגוריתם מוצא שיבוץ יציב-חלש.

הוכחה: נניח שקבוצת "הבדלנים" שוקלת לפרוש.
שיבוץ א = השיבוץ לבדלנים כשהם לא פורשים.
שיבוץ ב = השיבוץ לבדלנים כשהם כן פורשים.
יהי k הקטן ביותר כך שיש בדלן מרכיב-סופי k.
בשיבוץ ב, הבדלן הזה מקבל בית השייך לבדלן אחֵר.
בשיבוץ א, הבית הזה שייך לרכיב סופי כלשהו $j \leq k$.
אבל בשיבוץ א, הבדלן מקבל את הבית הטוב ביותר עבורו, מבין הבתים שעדיין זמינים בזמן מעגל k.
לכן הבית האחֵר אינו טוב יותר. ***

אלגוריתם סבן-סתורמן - גילוי-אמת

משפט: אלגוריתם סבן-סתורמן מגלה אמת.

הוכחה: ארוכה מאד – במאמר..   ***