

שאלה 2: אי-תלות בין שלושת העקרונות של שאפלי

הראו שלושה כללי-תשלום המקיימים את העקרונות הבאים:

- א. סימטריה ושחקן-אפס, אבל לא ליניאריות.
- ב. שחקן-אפס וליניאריות, אבל לא סימטריה.
- ג. ליניאריות וסימטריה, אבל לא שחקן-אפס.

הוכיחו את תשובתכם.

הגדרות רלוונטיות

הגדרה: העלות השולית של שחקן j ביחס לקבוצת שחקנים S היא התוספת שהוא מוסיף לעלות כשהוא מצטרף לקבוצה:

$$c(S \cup \{j\}) - c(S)$$

עקרון ההגינות: כלל תשלום נקרא סימטרי אם הוא תלוי רק בעלויות השוליות: אם לשני שחקנים יש עלויות שוליות זהות ביחס לכל הקבוצות, אז הם צריכים לשלם אותו הדבר.

עקרון האפס: (player null) שחקן שעבורו כל העלויות השוליות הן אפס ("עציץ"), משלם 0.

עקרון הליניאריות:

- אם מכפילים את העלויות בקבוע – כל התשלומים נכפלים באותו קבוע. דוגמה: המרה משקלים לאגורות.
- אם מחברים שתי טבלאות-עלויות – כל התשלומים מתחברים. דוגמה: חישוב עלות דלק בנפרד ועלות אגרת-כביש בנפרד אמור לתת תוצאה זהה לחישוב העלויות יחד.

א.

כלל התשלום: כל שחקן משלם את סכום כל העלויות השוליות שלו עבור כל סידור, כשהן בריבוע. (לדוגמה- עבור העלויות השוליות 1,2, השחקן ישלם: $1^2 + 2^2 = 5$)

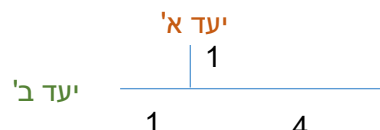
(לפי ההסבר בהצגה- כדי להתאים את כלל התשלום לסכום האמיתי אפשר לקחת את העודף ולחלק בין כולם)

- כלל זה הוא **סימטרי**. כי התשלום נקבע רק לפי העלויות השוליות שלו. (לכן אם יש 2 שחקנים עם אותן עלויות שוליות, הן ישלמו אותו דבר)
- כלל זה מקיים את **עקרון האפס**, כי שחקן שכל העלויות השוליות שלו הן 0 ישלם סכום כלשהו של 0^2 , מה שיצא 0.
- כלל זה **לא מקיים את עקרון הליניאריות**, נראה זאת ע"י דוגמה נגדית: עבור שחקן שאלו הן העלויות השוליות שלו: 1,2 נקבל עבור ההכפלה ב: $2: 10 = 2 \cdot 5 \neq 20 = (2 \cdot 2)^2 + (1 \cdot 2)^2$

ב.

כלל התשלום: בוחרים סדר אקראי כלשהו, וכל שחקן משלם את העלויות השוליות שלו עבור אותו הסידור. (שחקן הראשון בסידור משלם ערך שולי עבור התוספת שמוסיף כשהקבוצה ריקה, שחקן השני- ערך שולי עבור התוספת שמוסיף כאשר בקבוצה יש את שחקן 1 וכו')

- כלל זה **אינו סימטרי**. נראה ע"י דוגמה נגדית:



- עבור **שחקן א'**, העלות השולית עבור הקבוצה הריקה היא 5
עבור **שחקן ב'**, העלות השולית עבור הקבוצה הריקה היא 5
עבור **שחקן א'**, העלות השולית כשב' כבר נמצא היא 2 (כי הסטייה אליו עולה 2)
עבור **שחקן ב'**, העלות השולית כשא' כבר נמצא היא 2 (כי המשך המסלול עולה 2)
יוצא שהעלויות השוליות שלהם שוות.
עכשיו נבחר את הסידור: שחקן א' ואחריו שחקן ב' - ויצא ששחקן א' משלם 5, ושחקן ב' משלם 2.
(למרות שהעלויות השוליות שלהם שוות)
- כלל זה מקיים את **עקרון האפס**, כי שחקן שכל העלויות השוליות שלו הן 0, זה אומר שבפרט גם עבור סידור זה העלות השולית שלו היא 0, ולכן ישלם 0.
- כלל זה מקיים את **עקרון הלינאריות**, כי מחושב כפונק' לינארית של חישוב ערך שולי מסוים. (סכום פשוט)
ג. כלל התשלום : בוחרים שחקן באקראי, לוקחים את כל השחקנים שהערך השולי שלהם לכל הקבוצה זהה לשלו, ומחלקים את התשלום הכולל ביניהם באופן שווה.
(לפי ההסבר בהצגה - אפשר גם לחלק פשוט את הסכום הכולל בין כולם)
- כלל זה הוא **סימטרי**. עבור שני שחקנים שהערכים השוליים שלהם זהים - אם אחד מהם משלם אז גם השני ישלם, וישלם אותו דבר כי לקחנו את כל השחקנים שהערכים השוליים שלהם שווים לשחקן שנבחר לשלם, וחילקנו ביניהם, אחרת, שניהם לא משלים
- **לא מקיים את עקרון האפס** : אם השחקן שנבחר הוא שחקן שהערך השולי שלו הוא אפס לכלל תתי הקבוצות, עדיין ישלם. (כמות שחקי האפס/סכום כולל*1)
- הכלל **מקיים לינאריות** : אם נכפיל את הערכים השוליים של מי שלא נבחר ושילם אפס, ימשיך לשלם אפס. אם נכפיל את הערכים השוליים למי שנבחר, זה אומר שהכפלנו באותו דבר גם את הסכום הכולל, והכפלנו גם את הערכים עבור מי ששווה לו. לכן אותם אנשים ממשיכים לשלם והתשלום גדל באותו היחס. עכשיו, גם האדם שמשלם ישלם באותו היחס. אם נחלק את התשלום ונפריד למשל בין עלות הדלק לעלות הנהג, אותם אנשים עדיין משלמים. (הערכים השוליים שלהם עדיין שווים זה לזה, ועדיין נבחרו לשלם) פשוט יחלקו ביניהם קודם את תשלום הדלק אח"כ את תשלום הנהג, אבל סכ"ה ישלמו בסוף אותו הדבר.