

## מטלה - חלוקת עלויות

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית \* מזכות בניקוד כפול.

### \* שאלה 1: חלוקת עלות-נסיעה מהאוניברסיטה

לצורך פתרון שאלה זו יש לפנות לפחות לשני סטודנטים אחרים, שאיזור מגוריהם קרוב לשלכם אבל לא זהה. נניח שאתם רוצים להשתתף בנסיעה במונית מהאוניברסיטה לבתים שלכם, לפי סדר קבוע מראש.

א. חשבו את עלויות-הנסיעה של כל אחד מכם ושל כל תת-קבוצה. לצורך החישוב אפשר להשתמש באתר [https://www.taxifarefinder.com/?country\\_code=il](https://www.taxifarefinder.com/?country_code=il).

ב. חשבו את ערך שאפלי בעזרת האלגוריתם הכללי (ממוצע עלויות שוליות בכל הסדרים).

ג. חשבו את ערך שאפלי בעזרת אלגוריתם לוינגר-חזון-עזריה.

### שאלה 2: אי-תלות בין שלושת העקרונות של שאפלי

הראו שלושה כללי-תשלום המקיימים את העקרונות הבאים:

- א. סימטריה ושחקן-אפס, אבל לא ליניאריות.
- ב. שחקן-אפס וליניאריות, אבל לא סימטריה.
- ג. ליניאריות וסימטריה, אבל לא שחקן-אפס.

הוכיחו את תשובתכם.

### \* שאלה 3: אלגוריתמים מגלי-אמת לבחירת הנוסעים

עד עכשיו הנחנו שכל השחקנים משתתפים בנסיעה. עכשיו, נניח שכל שחקן  $i$  מפיק מהנסיעה תועלת של  $V_i$ , ואם הנסיעה יקרה יותר – הוא לא רוצה בכלל לנסוע. אנחנו רוצים לבחור תת-קבוצה של שחקנים, כך שסכום הערכים הכולל (= סכום הערכים של הנוסעים פחות עלות הנסיעה) הוא הגדול ביותר.

א. בחרים את הנוסעים בעזרת אלגוריתם וק"ג. הראו דוגמה שבה האלגוריתם לא מאזן תקציבית (סכום התשלומים לא מכסה את עלות הנסיעה).

ב. מחליטים מראש, שעלות הנסיעה תתחלק בין הנוסעים לפי ערך שאפלי, ואז בוחרים את הנוסעים בעזרת אלגוריתם וק"ג. הראו דוגמה שבה האלגוריתם לא מעודד-השתתפות (יש נוסע שהתועלת שלו שלילית).

ג. בוחרים את הנוסעים בעזרת אלגוריתם וק"ג, ואם צריך עוד כסף כדי לכסות את עלות הנסיעה – גובים אותו מהנוסעים באופן שיוויוני. הראו דוגמה שבה האלגוריתם לא מגלה-אמת.

## שאלה 4: איחוד מפלגות

[נכתב לקראת הבחירות לכנסת, אדר א' ה'תשע"ט]

- שלוש מפלגות קטנות שוקלות להתאחד למפלגה אחת לקראת הבחירות, אבל הן לא מצליחות להסכים על קביעת המקומות ברשימה המשותפת. סקרי דעת-קהל אמינים מראים ש:
- כל אחת מהמפלגות לא עוברת את אחוז החסימה כשהיא רצה לבד.
  - המפלגה המאוחדת מקבלת 10 מנדטים.
  - אם רק מפלגות א+ב מתאחדות, הן מקבלות  $x$  מנדטים; ב+ג -  $y$  מנדטים, ג+א -  $z$  מנדטים (כל המספרים קטנים מ-10).
- עזרו למפלגות למצוא פתרון הוגן לחלוקת המקומות בעשירה הראשונה, כפונקציה של  $x, y, z$ .

## שאלה 5: אלגוריתם אקראי לחישוב ערך שאפלי

- כזכור, כשמספר השחקנים גדול, חישוב ישיר של ערך שאפלי עלול לקחת הרבה זמן. אחד הפתרונות הוא לחשב את ערך שאפלי בקירוב, ע"י האלגוריתם האקראי הבא:
- חזור הרבה פעמים:
    - בחר פרמוטציה אקראית  $P$
    - חשב את העלויות השוליות של כל השחקנים בפרמוטציה  $P$
  - חשב את הממוצע של כל העלויות השוליות בחישובים הקודמים.
- א. כיתבו תוכנית בפייתון המבצעת את האלגוריתם האקראי הנ"ל.
- ב. בידקו את התוכנית שלכם על בעיה כלשהי עם 3 שחקנים (למשל אחת הבעיות שפתרנו בשיעור). עד כמה התוצאות קרובות לתוצאות המדויקות?
- ג. בידקו את התוכנית שלכם על בעיה כלשהי של עלות מסלול-המראה, עם 30 שחקנים. עד כמה התוצאות קרובות לתוצאות המדויקות?