תקצוב השתתפותי - מיזוג הצעות תקציב

בשיעור זה נניח, שהאזרחים לא מסתפקים בסימון "וי" על נושאים שהם תומכים בהם: הם רוצים לקבוע את כל התקציב, ולהחליט כמה כסף בדיוק יילך לכל נושא. הנחה זו לא כל כך מציאותית עבור אזרחים מן השורה, אבל היא עשויה להיות מציאותית עבור חברי-כנסת, או מפלגות; בהחלט אפשרי שכל ח"כ או מפלגה יבנו תקציב המשקף את הערכים שלהם. השאלה היא, איך אפשר למזג את כל התקציבים האלו, ולהגיע לתקציב המייצג את כולם באופן הוגן?

סעיף אחד - אלגוריתם החציון

בתור התחלה, נניח שיש רק מספר אחד שצריך להחליט עליו, והוא הגודל הכולל של תקציב המדינה. נניח שלכל אזרח יש דעה, המתבטאת במספר – כמה שקלים לדעתו צריכים להיות בתקציב המדינה. כל אזרח הוא שמח ביותר כאשר המספר שלו נבחר. רמת השמחה של האזרח קטנה יותר ככל שהתקציב בפועל רחוק יותר מהגודל הרצוי לדעתו.

נניח שאנחנו עושים משאל-עם, ומבקשים מכל אזרח לכתוב מספר המייצג את גודל התקציב הרצוי לפי דעתו. איך נבחר את גודל התקציב?

- אפשרות אחת היא לקחת את הממוצע של כל ההצבעות. לאלגוריתם זה יש חיסרון אחד גדול: הוא אינו מגלה-אמת. הוכחה: נניח שעמי חושב שהתקציב צריך להיות 20, תמי חושבת שהתקציב צריך להיות 50, ורמי חושב שהוא צריך להיות 70. אם עמי אומר 20 ורמי אומר 70, אז כדאי לתמי להגיד 60, כי אז הממוצע יהיה בדיוק 50 כמו שהיא רוצה. ***

האם קיים אלגוריתם מגלה-אמת לבחירת התקציב? בוודאי, יש כמה כאלה, אבל הם לא מאד מעניינים:

- אפשר להתעלם מההצבעות של האזרחים ולבחור מספר קבוע באופן שרירותי – אבל זה לא יעיל פארטו (ייתכן שכל האזרחים מעדיפים ממש מספר אחר).
- אפשר להפעיל את "אלגוריתם הדיקטטור" ולתת לאזרח אחד לבחור את התקציב שהוא רוצה – אבל זה לא מקיים תכונת הגינות יסודית ביותר הנקראת אנונימיות, ומשמעה, שהבחירה תלויה רק באוסף ההצבעות של האנשים, לא משנה למי שייכת כל הצבעה (תכונה המאפיינת הצבעות חשאיות).

אנחנו מחפשים אלגוריתם מגלה-אמת, יעיל-פארטו, וגם אנונימי.

הגדרה. [אלגוריתם החציון – *median*]. סמן את הצבעותיהם של האזרחים ב: $p_1,\dots,p_n$. סדר את כל הצבעות האזרחים בסדר עולה, כך ש: $p_1 \leq \dots \leq p_n$. בחר את הצבעה מספר $n/2$ (עגל כלפי מעלה).

משפט. אלגוריתם החציון הוא אנונימי, יעיל-פארטו ומגלה-אמת.

הוכחה. אנונימיות – האלגוריתם מתייחס רק לאוסף ההצבעות ואינו בודק למי שייכת כל הצבעה.

יעילות פארטו – נניח שהערך הנבחר הוא x. לפי הגדרת החציון, יש לפחות אזרח אחד שהצביע למספר גדול או שווה ל-x, ולפחות אזרח אחד שהצביע למספר קטן או שווה ל-x. כל האזרחים שהצביעו $\leq x$ יפסידו אם המספר הנבחר יהיה קטן מ-x; כל האזרחים שהצביעו $\geq x$ יפסידו אם המספר הנבחר יהיה גדול מ-x. לכן לא קיים שיפור פארטו.

גילוי-אמת – נניח שהערך הנבחר כאשר כולם דוברי-אמת הוא x, ואזרח כלשהו i אינו מרוצה מהערך הזה. זה אומר שהערך p_i האמיתי גדול מ-x או קטן מ-x. ראשית, נניח ש-p_i גדול מ-x. כיוון ש-x הוא החציון, יש לפחות $n/2$ הצבעות שהן קטנות או שוות ל-x; ההצבעה של אזרח i אינה כלולה בהן. לכן, אם אם אזרח i ישנה את ההצבעה שלו באופן כלשהו, עדיין יהיו לפחות $n/2$ הצבעות קטנות או שוות ל-

x; ולכן החציון עדיין יהיה לכל היותר x, כך שאזרח i לא ירויח שום דבר מהשינוי. ההוכחה דומה במקרה ש-p_i קטן מ-x. ***

הערה. אלגוריתם החציון שימושי לא רק להחלטה על גודל התקציב, אלא לכל נושא חד-ממדי. דוגמאות:

- כמה ימים בשנה יהיה שעון-קיץ?
- מה יהיה גובה המס על שדות הגז?
- כמה שרים יהיו בממשלה?

אפשר להשתמש באלגוריתם גם לנושאים יותר "יומיומיים", כגון: מה יהיה גובה הטמפרטורה של המזגן במשרד? כל אחד מדיירי המשרד יגיד את הטמפרטורה שהוא רוצה, והטמפרטורה תיקבע לפי החציון.

שני סעיפים - הגינות לקבוצות

נחזור לבעיית קביעת התקציב. נניח שכבר קבענו את גודל התקציב, ועכשיו צריך להחליט איך לחלק אותו בין הסעיפים השונים. בתור התחלה, נניח שיש רק שני סעיפים. אנחנו יכולים להשתמש באלגוריתם החציון כדי לקבוע איזה חלק מהתקציב, באחוזים, יילך לסעיף א. שאר התקציב יילך לסעיף ב. האלגוריתם הזה אנונימי, יעיל-פארטו ומגלה-אמת, אבל אינו הוגן. דוגמה: נניח ששני הסעיפים הם: תקציב לאיזור הצפון ותקציב לאיזור הדרום. 51% מהאזרחים נמצאים בצפון ורוצים ש-100% מהתקציב יילך לצפון; 49% מהאזרחים נמצאים בדרום ורוצים ש-100% מהתקציב יילך לדרום. קל לראות שהחציון נמצא בצפון. לכן כל התקציב הולך לצפון, והדרום לא מקבל כלום.

אנחנו רוצים שהתקציב יקיים תכונת הגינות דומה לתכונה שלמדנו בשיעורים הקודמים על תקציב.

הגדרה. אלגוריתם לקביעת תקציב נקרא הוגן לקבוצות אם, כאשר כל אזרח רוצה לתת 100% מהתקציב לנושא אחד מסויים, חלוקת התקציב בין הנושאים נקבעת באופן יחסי למספר האזרחים התומכים בנושא זה.

האם קיים אלגוריתם הוגן לקבוצות, המקיים גם את כל התכונות של אלגוריתם החציון – אנונימי, יעיל-פארטו ומגלה-אמת? כדי לענות לשאלה זו, אנחנו צריכים לחפש אלגוריתמים מגלי-אמת נוספים, ולשם כך נכליל את אלגוריתם החציון.

ההכללה הבאה של אלגוריתם החציון הוצעה ע"י הרווה מולין (Herve Moulin). נבחר מראש קבוצה כלשהי של מספרים $f_1,\dots,f_k$, שייקראו ההצבעות הקבועות. נוסיף את קבוצת ההצבעות הקבועות לקבוצת ההצבעות של האזרחים, כך שיהיו לנו בסך-הכל $n+k$ הצבעות. נפעיל את אלגוריתם החציון המקורי על $n+k$ ההצבעות האלו.

משפט. לכל קבוצה של הצבעות קבועות, אלגוריתם החציון המוכלל הוא אנונימי ומגלה-אמת.

הוכחה. אנונימיות ברורה מתוך ההגדרה. ההוכחה של גילוי-אמת דומה להוכחה עבור אלגוריתם החציון המקורי. כדי שלא לחזור על עצמנו, נוכיח טענה חזקה יותר: נוכיח שהאלגוריתם מגלה-אמת לא רק ליחידים אלא גם לקבוצות (באנגלית group strategyproof). המשמעות היא, שלא קיימת קבוצה של אזרחים, היכולים ביחד לתאם ביניהם הצבעות אחרות, כך שהתוצאה תהיה טובה יותר לכולם.

נניח שהערך הנבחר כאשר כולם דוברי-אמת הוא x, ונניח שקבוצה כלשהי S שוקלת לתאם את ההצבעות כדי לשנות את x. תנאי הכרחי לכך שיצליחו הוא, שהם מסכימים על הכיוון שאליו צריך לשנות את x: או שההצבעות האמיתיות של כל חברי הקבוצה גדולות מ-x – ואז הם רוצים להגדיל את x, או שההצבעות האמיתיות של כל חברי הקבוצה קטנות מ-x – ואז הם רוצים להקטין את x. נתמקד באפשרות הראשונה (ההוכחה דומה עבור האפשרות השניה). כיוון ש-x הוא חציון בקבוצה של n+k הצבעות, יש לפחות (n+k)/2 הצבעות אמיתיות שהן קטנות או שוות x. ההצבעות הללו אינן של האזרחים בקבוצה S (כי ההצבעות האמיתיות של האזרחים ב-S גדולות מ-x). לכן, לא משנה מה יעשו האזרחים ב-S, עדיין יהיו

לפחות $(n+k)/2$ הצבעות (של אזרחים אחרים, או הצבעות קבועות) שהן קטנות או שוות x. לכן הערך הנבחר יהיה לכל היותר x, כך שחברי הקבוצה S לא ירויחו. ***

דוגמאות. נניח שיש $n-1$ הצבעות קבועות שכולן שוות 0. אז החציון תמיד יהיה שווה להצבעה הנמוכה ביותר של אזרח אמיתי. המשמעות היא, שהמדינה כביכול מעדיפה שהערך הנבחר יהיה כמה שיותר נמוך, אבל הערך עדיין צריך להתאים לרצון של האזרחים, ולכן בוחרים את המינימום. באותו אופן, אם כל $n-1$ ההצבעות הקבועות שוות לערך המקסימלי האפשרי (100%), אז החציון תמיד יהיה שווה להצבעה הגבוהה ביותר של אזרח אמיתי. אם ההצבעות הקבועות מחולקות באופן שווה בין 0% ל-100%, אז החציון יהיה שווה לחציון של האזרחים האמיתיים. ***

אלגוריתם החציון המוכלל אינו בהכרח יעיל-פארטו. לדוגמה, אם יש שלושה אזרחים המצביעים 10, 20, 30, וארבע הצבעות קבועות 40, 40, 40, 40, אז הבחירה תהיה 40, אבל יש שיפור פארטו, למשל 30.

משפט. אם מספר ההצבעות הקבועות הוא לכל היותר $n-1$ (כאשר n הוא מספר האזרחים), אז אלגוריתם החציון המוכלל הוא יעיל-פארטו.

הוכחה. כדי לחשב את החציון המוכלל, האלגוריתם מסדר את כל ההצבעות (כולל הקבועות) בסדר עולה, וסופר מההצבעה הנמוכה ביותר כלפי מעלה, עד שמגיע לחציון. כשמספר ההצבעות הקבועות הוא לכל היותר $n-1$, הספירה בהכרח מגיעה להצבעה כלשהי שאינה קבועה – הצבעה של אזרח אמיתי כלשהו. בפרט, הספירה בהכרח מגיעה להצבעה הנמוכה ביותר של אזרח, ומכאן: $p_1 \geq x$. משיקול דומה, כשסופרים מההצבעה הגבוהה ביותר כלפי מטה, בהכרח מגיעים להצבעה של אזרח אמיתי כלשהו, ומכאן: $p_n \leq x$. לכן, כל הגדלה של x תפגע באזרח שהצביע p_1 וכל הקטנה של x תפגע באזרח שהצביע p_n. לכן אין שיפור פארטו. ***

מולין הוכיח גם את הכיוון השני של שני המשפטים האחרונים: כל אלגוריתם אנונימי ומגלה-אמת הוא אלגוריתם חציון מוכלל עם לכל היותר $n+1$ הצבעות קבועות; וכל אלגוריתם אנונימי ומגלה-אמת ויעיל-פארטו הוא אלגוריתם חציון מוכלל עם לכל היותר $n-1$ הצבעות קבועות. הוכחות אלו הן מעבר להיקפו של הקורס הנוכחי. משמעות הדבר היא, שכדי למצוא אלגוריתם מגלה-אמת והוגן לקביעת תקציב, אנחנו צריכים אלגוריתם חציון מוכלל כלשהו, שיבטיח את תכונת ההגינות. במילים אחרות: אנחנו צריכים לבחור $n-1$ הצבעות קבועות, כך שאלגוריתם החציון המוכלל עם הצבעות אלו יבטיח הגינות לקבוצות.

נציג תחילה פתרון עבור שני נושאים. נסמן ב-C את גודל התקציב הכולל, ונבחר $n-1$ הצבעות קבועות המפוזרות באופן אחיד בין 0 ל-C:

$$f_i = C*i/n \quad \text{for } i=1,\dots,n-1$$

משפט. כשיש שני סעיפים בתקציב, אלגוריתם החציון המוכלל עם הצבעות קבועות המפוזרות באופן אחיד מוצא תקציב הוגן לקבוצות.

הוכחה. כדי להוכיח הגינות לקבוצות, צריך לבדוק מה קורה כאשר האזרחים מתחלקים בין הנושאים ביחס כלשהו, למשל, כשיש k אזרחים התומכים רק בנושא א, ו $n-k$ אזרחים התומכים רק בנושא ב. אם נשאל אותם איזה תקציב הם רוצים לתת לנושא א, אז k אזרחים יגידו "C" ושאר ה- $n-k$ אזרחים יגידו "0". כיוון שיש בסך-הכל $2n-1$ הצבעות, החציון שווה בדיוק להצבעה מספר n מלמטה. נתחיל לספור מ-$n-k$ האזרחים שאמרו "0", ונצרף עוד k הצבעות קבועות כדי להגיע ל-n. ההצבעה מספר n מלמטה היא:

$$f_k = C*k/n.$$

ולכן, נושא א יקבל k חלקי n מהתקציב הכולל, ונושא ב יקבל $(n-k)$ חלקי n מהתקציב הכולל – ביחס ישר למספר האזרחים התומכים בכל נושא. ***

המקרה הכללי - m סעיפים

פתרנו את הבעיה לתקציב עם שני סעיפים. המטרה הבאה שלנו היא לפתור את הבעיה הכללית – עבור תקציב עם m סעיפים.

אפשרות אחת שאפשר לחשוב עליה היא להריץ את אלגוריתם החציון (עם או בלי הצבעות קבועות) על כל סעיף בנפרד. הבעיה היא, שהסכום שיתקבל בכל סעיף בנפרד, לא בהכרח שווה לסכום הכולל.

דוגמה: נניח שיש שלושה אזרחים ושלושה נושאים, והתקציב הכולל הוא 30.
הצבעות האזרחים הן: (0, 15, 15); (10, 20, 0); (27, 0, 3).
אם מריצים את אלגוריתם החציון על כל נושא בנפרד, החציונים הם (10, 15, 3) – הסכום יוצא 28 – פחות מהסכום הכולל. אם מריצים את אלגוריתם החציון עם הצבעות-קבועות מפולגות אחיד (ב- 10, 20), החציונים הם (10, 15, 10), והסכום יוצא 35 – יותר מהסכום הכולל.

אפשר לנרמל את התוצאה כך שהסכום ייצא 30. במקרה זה, התוצאה תהיה (60/7, 90/7, 60/7). אבל האלגוריתם עם הנירמול אינו מגלה-אמת. למשל, נבדוק את אזרח 2. המרחק בין התוצאה לבין התקציב שהוא רוצה הוא: 10/7 + 50/7 + 60/7 = 120/7. אבל אם הוא מתחכם ואומר (11, 19, 0), אז אלגוריתם החציון עם הצבעות-קבועות אחידות נותן (11, 15, 10), הסכום המנורמל הוא: (55/6, 75/6, 50/6), והמרחק בין התוצאה לבין התקציב שהוא רוצה הוא: 5/6 + 45/6 + 50/6 = 100/6, וזה קטן יותר מ-120/7.
כלומר: שחקן 2 יכול לשנות את ההצבעה שלו ולקרב את התקציב לתקציב שהוא רוצה.

כדי לפתור את הבעיה, צריך לנרמל בצורה אחרת, שתשמור על התכונה של גילוי-אמת.

נגדיר **n-1** פונקציות: $\mathbf{f_1(t)}, \dots, \mathbf{f_{n-1}(t)}$. כל פונקציה **i** תהיה פונקציה רציפה, עולה, ומקיימת: $\mathbf{f_i(0)=0}$, $\mathbf{f_i(1)=C}$. לכל **t** בין 0 ל-1, ניתן להריץ את אלגוריתם החציון המוכלל עם הצבעות קבועות $\mathbf{f_1(t)}, \dots, \mathbf{f_{n-1}(t)}$. כיוון שהפונקציות עולות, גם החציון יהיה פונקציה עולה של **t**:

- עבור **t=0**, יהיו לנו **n-1** הצבעות קבועות ב-0, ולכן החציון בכל נושא **j** יהיה הערך הנמוך ביותר שאזרח כלשהו ציין עבור נושא **j**. לכן סכום החציונים יהיה לכל היותר **C**.
- עבור **t=1**, יהיו לנו **n-1** הצבעות קבועות ב-**C**, ולכן החציון בכל נושא **j** יהיה הערך הגבוה ביותר שאזרח כלשהו ציין עבור נושא **j**. לכן סכום החציונים יהיה לפחות **C**.
- הפונקציות רציפות, ולכן לפי משפט ערך הביניים יהיה **t*** כלשהו בין 0 ל-1, שעבורו סכום החציונים יהיה בדיוק **C**. אנחנו נבחר **t*** כזה ונקבע את התקציב בעזרת אלגוריתם החציון המוכלל עם הצבעות קבועות $f_1(t^*), \dots, f_{n-1}(t^*)$. ניתן למצוא את t* בעזרת חיפוש בינארי.

מה קורה אם יש כמה ערכים שונים של t*, שעבורם הסכום שווה C? - במקרה זה, אפשר לבחור כל אחד מהערכים האלה, והתקציב המתקבל יהיה זהה. הסיבה היא, שכאשר מגדילים את t, החציון בכל נושא לא יכול לקטון. לכן, אם הסכום הכולל נשאר C, בהכרח החציון בכל נושא נשאר אותו הדבר.

משפט. לכל קבוצה של פונקציות $\mathbf{f_1(t)}, \dots, \mathbf{f_{n-1}(t)}$, רציפות ועולות, אלגוריתם החציון-המוכלל שתואר למעלה מגלה-אמת.

הוכחה. במאמר. ***

עכשיו צריך לבחור פונקציות כלשהן, כך שהתקציב המתקבל יהיה גם הוגן לקבוצות. נשתמש בפונקציות ליניאריות:

$$\boldsymbol{f_i(t) = C*\min(1, i*t)}$$

נוודא שהפונקציות עומדות בתנאים:

$$\boldsymbol{f_i(0) = C*\min(1,0) = 0}$$
$$\boldsymbol{f_i(1) = C*\min(1,i) = C*1 = C}$$

וברור שכל הפונקציות רציפות ועולות (עד שהן מגיעות למקסימום שהוא C).

משפט. אלגוריתם החציון-המוכלל עם פונקציות ליניאריות הוא הוגן לקבוצות.
הוכחה. כדי להוכיח הגינות לקבוצות, צריך להתייחס למצב שבו כל אזרח תומך רק בנושא אחד, ונותן 100% מהתקציב לנושא זה ו-0 תקציב לכל שאר הנושאים. במצב זה, עבור **t=1/n**, ההצבעות הקבועות בכל הנושאים יהיו:

$$f_i(1/n) = C*min(1,i/n) = C*i/n$$

בכל נושא **j**, יש מספר מסויים k_j של אזרחים שתומכים רק בנושא הזה ונותנים לו C, ושאר האזרחים – $n-k_j$ – נותנים לו 0. כדי לחשב את החציון בנושא **j**, צריך לספור מלמטה עד שמגיעים ל-**n**. אחרי שסופרים את $n-k_j$ האזרחים שנותנים 0, סופרים עוד k_j הצבעות קבועות, ומגיעים ל:

$$C*k_j/n.$$

סכום כל החציונים בכל הנושאים הוא:

$$\begin{aligned} & Sum[j]\ C*k_j/n \\ = & (C/n) * Sum[j]\ k_j \\ = & (C/n) * n = C \end{aligned}$$

כיוון שסכום החציונים הוא בדיוק C, האלגוריתם יכול לבחור **t* = 1/n**, ואז כל נושא יקבל תקציב ביחס ישר למספר התומכים שלו – בהתאם לדרישה של הגינות לקבוצות (ייתכן שהאלגוריתם יבחר **t** אחר שעבורו הסכום יוצא בדיוק C, אבל כפי שהסברנו למעלה, עבור כל **t** כזה, תתקבל אותה חלוקה של התקציב). ***

מצאנו אלגוריתם לחלוקת תקציב, שהוא גם מגלה-אמת וגם הוגן לקבוצות. מה לגבי יעילות-פארטו? כפי שהוכחנו למעלה, עבור כל סעיף בנפרד, התקציב המתקבל יהיה בין ההצבעה הקטנה ביותר לבין ההצבעה הגדולה ביותר, ואילו היו רק שני סעיפים, היה נובע מזה שהתוצאה יעילה פארטו. אבל כשיש הרבה סעיפים, התקציב אינו בהכרח יעיל פארטו.

דוגמה. יש שלושה אזרחים ותשעה נושאים. התקציב הכולל הוא 30. הצבעות האזרחים:

- אזרח א: 6, 6, 6, 6, 0, 0; 6, 0, 0.
- אזרח ב: 0, 0, 6, 6, 6, 6; 0, 6, 0.
- אזרח ג: 6, 6, 0, 0, 6, 6; 0, 0, 6.

כדי לחשב את תוצאת האלגוריתם, נבדוק מה קורה עבור **t=1/15**. במצב זה, שתי ההצבעות הקבועות הן: 2, 4. בששת הנושאים הראשונים, ההצבעות הן (0,2,4,6,6) והחציון הוא 4. בשלושת הנושאים האחרונים, ההצבעות הן (0,0,2,4,6) והחציון הוא 2. בסך-הכל מתקבל התקציב:

- בסך-הכל מתקבל התקציב: 4, 4, 4, 4, 4, 4; 2, 2, 2. הסכום הוא בדיוק 30, ולכן זה התקציב הנבחר. המרחק הכולל של התקציב הזה מווקטור ההצבעות של כל אזרח הוא: 2 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 2 + 2 = 24.

עכשיו נראה שהתקציב הזה אינו יעיל-פארטו, ולשם כך נראה שיפור פארטו.

- נבדוק את התקציב החלופי: 5, 5, 5, 5, 5, 5; 0, 0, 0. המרחק הכולל של התקציב הזה מווקטור ההצבעות של כל אזרח הוא: 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 5 + 6 + 0 + 0 = 20.

כלומר, כל האזרחים מעדיפים את התקציב החלופי על-פני התקציב של האלגוריתם. ***

האם קיים אלגוריתם המקיים את שלושת התכונות: גילוי-אמת, הגינות לקבוצות, ויעילות-פארטו? התשובה היא לא (ראו במאמר); שוב יש לנו טרילמה.

מקורות

- Moulin, H. (1980-01-01). ["On strategy-proofness and single peakedness"](). Public Choice. **35** (4): 437–455

- *Freeman, Rupert; Pennock, David M.; Peters, Dominik; Wortman Vaughan, Jennifer (2021-04-01). "Truthful aggregation of budget proposals". Journal of Economic Theory.* ***193:*** *105234.*

סיכם: אראל סגל-הלוי.