

מטלה – מיזוג הצעות תקציב

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית * מזכות בניקוד כפול.

שאלה 1: תיקון טעות בהרצאה

בהרצאה אמרתי, שאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות הוא יעיל-פארטו. לצערי זה לא נכון בכל המקרים (ראו הוכחה במאמר). הנה דוגמה אחת שבה האלגוריתם כן נותן תוצאה יעילה פארטו. נניח שיש שני אזרחים ושלושה נושאים, התקציב הכולל הוא 100, וההצבעות הן (0, 20, 80) ו-(80, 0, 20).

א. מהו התקציב המתקבל מהפעלת האלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות? פרטו את שלבי החישוב.

ב. הראו שהתקציב המתקבל הוא יעיל פארטו (השתמשו בפונקציית התועלת כפי שהוגדרה בהרצאה).

שאלה 2: אלגוריתם חלופי

נתון אלגוריתם חלופי לקביעת תקציב.

1. עבור כל נושא j , מצא את החציון x_j .

2. סמן ב- x את הסכום של כל ה- x_j .

3. התקציב לכל נושא j יהיה:

$$x_j + (C - x) / m$$

כאשר C הוא הסכום הכולל בקופה, ו- m הוא מספר הנושאים. שימו לב שסכום התקציבים של כל הנושאים הוא בדיוק C (הנירמול מתבצע ע"י הורדת סכום קבוע מכל נושא).

האם האלגוריתם החלופי מגלה-אמת? אם כן – הוכיחו. אם לא – הראו דוגמה נגדית.

* שאלה 3: הגינות לקבוצות – תנאי משופר

שאלה זו מתייחסת לאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות. הוכחנו בהרצאה, שכאשר האזרחים מתחלקים לקבוצות "ממוקדות", כך שהאזרחים בכל קבוצה j נותנים 100% מהתקציב לנושא j , התקציב המתקבל מתחלק בין הנושאים ביחס ישר למספר התומכים של כל נושא: נושא שיש לו k תומכים יקבל k/n מהתקציב.

עכשיו נניח שיש רק קבוצה אחת ממוקדת: יש קבוצה של k אזרחים, שנותנים 100% מהתקציב לנושא j . שאר האזרחים יכולים לחלק את התקציב באופן כלשהו – לא דווקא באופן ממוקד.

האם האלגוריתם מבטיח, שנושא j יקבל לפחות k/n מהתקציב? אם כן – הוכיחו. אם לא – הראו דוגמה נגדית.

(מומלץ לבדוק קודם את המקרה $k=1$: נניח שיש אזרח אחד הנותן 100% מהתקציב לנושא j . האם מובטח שנושא j יקבל לפחות 1 חלקי n מהתקציב?)

שאלה 4: תיכנות: חישוב תקציב

כתבו פונקציה בפייתון, המקבלת כקלט את כמות הכסף בקופה והצבעות האזרחים, ומחשבת את התקציב בעזרת אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות. כותרת הפונקציה:

```
def compute_budget(  
    total_budget:float,  
    citizen_votes:List[List]  
) → List[float]
```

הנה דוגמת קריאה לפונקציה עבור תקציב עם שלושה סעיפים, ושני אזרחים:

```
compute_budget(100, [ [100, 0, 0], [0, 0, 100] ])
```

הערך המוחזר הוא רשימה עם מספרים כמספר הסעיפים, למשל:

```
[50, 0, 50]
```

שאלה 5: תיכנות: בדיקת הגינות לקבוצות

נתונה פונקציה בשם `compute_budget`, עם חתימה כמו בשאלה 4. בשאלה זו עליכם לבדוק אם הפונקציה מחזירה תקציב הוגן לקבוצות. כתבו קוד הבודק את ההגינות של הפונקציה `compute_budget` עבור תקציב עם 3 נושאים ומדינה עם 10 אזרחים (השתמשו בהגדרת "הגינות לקבוצות" שלמדנו בהרצאה).