חלוקה הוגנת בקירוב

כשהחפצים העומדים לחלוקה הם בדידים (לא ניתנים לחיתוך), אי-אפשר להבטיח שהחלוקה תהיה הוגנת לחלוטין, אבל זה לא אומר שצריך לוותר לחלוטין על הגינות. לדוגמה, אם יש שני שחקנים עם זכויות שוות, ו-99 חפצים זהים, אז החלוקה ההוגנת ביותר בהתחשב בנסיבות היא 49:50; לא הגיוני לחלק 99 או 48:51. הפרש של חפץ אחד הוא סביר בהתחשב בנסיבות, אבל הפרש גדול יותר כבר אינו סביר – אי-אפשר להצדיק אותו מתוך העובדה שהחפצים בדידים.

אז כשהחפצים זהים ולשחקנים יש זכויות שוות, אנחנו יודעים איך לחלק. השאלה היא איך להכליל את הפתרון למצב שבו:

- לשחקנים יש זכויות שונות.
- החפצים שונים (ושחקנים שונים מייחסים להם ערכים שונים);

בעיית חלוקת המושבים בכנסת

נתחיל מההכללה הראשונה: החפצים עדיין זהים, אבל לשחקנים שונים ישנן זכויות שונות. בעיה חשובה מאד של חלוקת חפצים זהים עם זכויות שונות היא בעיית חלוקת המושבים בכנסת (או בקונגרס, או בפרלמנט). לאחר הבחירות, לכל מפלגה יש זכות הנקבעת ע"פ מספר הבוחרים שהצביעו עבור אותה מפלגה: מספר המושבים שכל מפלגה מקבלת צריך להיות יחסי (פרופורציונלי) למספר הקולות שקיבלה. הבעיה היא, שהמספר המדוייק של מושבים, המגיע לכל מפלגה, כמעט אף-פעם אינו מספר שלם. לדוגמה, אם מפלגה זוכה ב-13% מהקולות, מגיע לה לקבל 15.6 מושבים בכנסת, אבל בכנסת יש רק מושבים שלמים. אז כמה מושבים ניתן לה – 15 או 16 (או אולי מספר אחר)? הבדל של מושב אחד יכול להיות קריטי בהצבעות צמודות, כך שהשאלה "לאיזה כיוון לעגל?" היא שאלה חשובה מאד.

בעיית חלוקת המושבים נקראת באנגלית בעיית ה-apportionment (מלשון חלוקה למנות שלמות). התחילו לחקור אותה פוליטיקאים ומתמטיקאים בארצות הברית, כשהיו צריכים להחליט איך לחלק את המושבים בקונגרס בין המדינות השונות בברית. בארה"ב, השחקנים הם מדינות, והזכות של כל מדינה נקבעת לפי האוכלוסיה שלה; במדינות עם בחירות יחסיות לפרלמנט, כמו בישראל וברוב מדינות אירופה, השחקנים הם מפלגות, והזכות של כל מפלגה נקבעת לפי מספר הקולות שלה. אבל העקרונות המתימטיים דומים בשני המקרים.

כשיש רק שתי מפלגות, פתרון אחד מתקבל על הדעת: צריך לעגל את מספר המושבים של כל מפלגה לשלם הגדול ביותר. לדוגמה, אם מפלגה אחת מקבלת 68.7 והמפלגה השניה 51.3, אז הראשונה תקבל 69 והשניה 51. הסכום תמיד ייצא 120.

אבל מה אם יש שלוש מפלגות או יותר? לדוגמה, נניח שמפלגות א, ב, ג קיבלו 20.25, 30.35, 69.4. אם נעגל לשלם הקרוב ביותר, נקבל 20, 30, 69, ובסה"כ 119 – נשאר מושב אחד פנוי. איזו מפלגה תקבל אותו?

שיטת המילטון

שיטת החלוקה הראשונה שהוצעה למצב של כמה מפלגות או יותר נקראת שיטת השארית הגדולה ביותר (Largest Remainder Method), או שיטת המילטון (Hamilton's Method), על-שם אלכסנדר המילטון, אחד ממייסדי ארה"ב ושר-האוצר הראשון שלה. שיטה זו עובדת באופן הבא:

- נותנים לכל מפלגה את מספר המושבים השלם המגיע לה (המספר מעוגל כלפי מטה);
- מחלקים את המושבים העודפים למפלגות לפי סדר יורד של השארית.

בדוגמה למעלה, המפלגה שתקבל את המושב העודף היא מפלגה ג, והחלוקה הסופית תהיה 20, 30, 70.

שיטה זו היתה נהוגה בישראל החל מהבחירות השניות ועד הבחירות השביעיות, ונהגה בארה"ב בין 1852 ל-1900. היא נהוגה כיום ברוסיה, אוקראינה, ליטא, תוניס, טיוואן, נמיביה והונג-קונג.

השיטה נראית הגיונית במבט ראשון, אבל למעשה יש בה כמה פרדוקסים. הנה אחד מהם. לשם המחשה, נניח שיש רק 5 מושבים לחלוקה (רק כדי שהדוגמה תהיה פשוטה יותר), ונניח שמספרי הקולות של המפלגות א, ב, ג הם: 40, 135, 325 (בסה"כ 500), כך שמספר המושבים המגיע להן הוא 0.4, 1.35, 3.25. בשיטת השארית הגדולה ביותר, החלוקה הסופית תהיה 1, 1, 3.

עכשיו, נניח שאנחנו מסתכלים רק על מפלגות א, ב. הן קיבלו ביחד 175 קולות ו-2 מושבים. איך היינו מחלקים את 2 המושבים הללו ביניהן, לפי עקרון השארית הגדולה ביותר? - נחשב כמה מושבים מגיעים לכל מפלגה לפי חלוקת הקולות שלהן:

- למפלגה א מגיעים 2*40/175 = 0.457;
- למפלגה ב מגיעים 2*135/175 = 1.543;

לפי שיטת השארית הגדולה ביותר, החלוקה הפנימית בין א ל-ב צריכה להיות 0,2 – ולא 1,1! השיטה סותרת את עצמה – היא אינה עקבית.

הגדרה. שיטה לחלוקת-מושבים נקראת עקבית (באנגלית: consistent או coherent), אם עבור כל תת-קבוצה X של מפלגות, שקיבלו ביחד n מושבים בחלוקה הכללית – אם נשתמש באותה שיטה כדי לחלק את n המושבים בין המפלגות בקבוצה X בלבד, נקבל אותה חלוקה בדיוק כמו בחלוקה הכללית.

חוסר-עקביות אינו בעיה תיאורטית בלבד – עלולות להיות לו גם השלכות אסטרטגיות. לדוגמה, נניח שוב שיש 5 מושבים, ומספרי הקולות של המפלגות א, ב, ג הם: 25, 140, 335 (בסה"כ 500). בשיטת השארית הגדולה ביותר, החלוקה הסופית היא 0, 2, 3. עכשיו, נניח שמפלגה א – שממילא לא זכתה באף מושב – פורשת מהמירוץ, ותומכיה נשארים בבית. מספרי הקולות של המפלגות שנשארו הם עדיין 140, 335, ובסה"כ 475, כך שמספר המושבים המדוייק שמגיע להן הוא 1.47, 3.53, ובשיטת השארית הגדולה, חלוקת המושבים היא 1, 4. פרישתה של מפלגה א העבירה מושב אחד ממפלגה ב למפלגה ג! זה נותן למפלגה א כוח אסטרטגי – עצם ההחלטה שלה אם לרוץ או לא, למרות שבוודאות לא תזכה באף מושב, עלולה להשפיע על חלוקת המושבים בין מפלגות גדולות הרבה יותר.

בואו ונבדוק שיטות נוספות, ונראה אם נצליח למצוא שיטה עקבית.

שיטת ג'פרסון

שיטה זו הוצעה לראשונה ע"י תומאס ג'פרסון (Jefferson), גם הוא אחד ממייסדי ארה"ב והנשיא השלישי שלה. השיטה נהגה בארה"ב בין 1792 ל-1842. שיטת ג'פרסון התקבלה בישראל בשנת ה'תשל"ג (1973), בתיקון לחוק הבחירות לכנסת, הנקרא חוק בדר-עופר, והיא השיטה הנהוגה כיום בישראל. היא נהוגה כיום בעוד עשרות מדינות ברחבי העולם.

ניתן לתאר את השיטה בשתי דרכים – שתיהן שקולות ומביאות לאותה תוצאה. אנחנו נתמקד בשיטה הסדרתית:

- **אתחול**: כל מפלגה מקבלת 0 מושבים.
- כל עוד נשארים מושבים פנויים:
  - מחשבים, עבור כל מפלגה, את המנה (מספר קולות) / (מספר מושבים נוכחי + 1).
  - נותנים את המושב הבא למפלגה שעבורה המנה הזאת גדולה ביותר.

נדגים על המפלגות א, ב, ג שזכו ב- 40, 135, 325 קולות:

- אתחול: כל מפלגה מקבלת 0 מושבים.

- המנות הן: 40, 135, 325 – מפלגה ג מקבלת מושב 1.
- המנות המעודכנות הן: 40, 135, 162.5=325/2; מפלגה ג מקבלת עוד מושב 1.
- המנות המעודכנות הן: 40, 135, 108.33=325/3; מפלגה ב מקבלת מושב 1.
- המנות המעודכנות הן: 40, 67.5=135/2, 108.33; מפלגה ג מקבלת מושב 1.
- המנות המעודכנות הן: 40, 67.5, 80.25=325/4; מפלגה ג מקבלת מושב 1.

החלוקה הסופית היא 0, 1, 4.

האם השיטה עקבית? בדוגמה למעלה, קל לבדוק שהיא אכן עקבית. למשל, מפלגות א+ב ביחד קיבלו רק מושב אחד, וברור שאם נפעיל את שיטת ג'פרסון על המושב היחיד הזה, החלוקה הפנימית תהיה 0, 1. עכשיו נוכיח שהיא תמיד עקבית.

משפט. שיטת ג'פרסון היא עקבית.

הוכחה. נסתכל על סדרת המפלגות המקבלות מושבים לפי שיטת ג'פרסון. נניח שאנחנו מוחקים מהסדרה חלק מהמפלגות, עם המושבים שקיבלו. סדר חלוקת המושבים למפלגות הנותרות נשאר זהה – עדיין, המפלגה המקבלת את המושב הבא היא המפלגה שהמנה (מספר קולות) / (מספר מושבים נוכחי + 1) שלה היא הגדולה ביותר. לכן, חלוקת המושבים בין המפלגות שנשארו זהה. ***

בדוגמה למעלה, הסדרה היא ג, ג, ב, ג, ג. אם מוחקים את מפלגה ב ומשאירים רק את מפלגות א, ג, הסדרה הנשארת תהיה ג, ג, ג, ג – מפלגה ג תמיד נבחרת, כי המנה (מספר קולות) / (מספר מושבים נוכחי + 1) שלה גדולה יותר משל א. לכן חלוקת המושבים בין א ל-ג תהיה 0, 4.

למרות זאת, לשיטת ג'פרסון ישנו חיסרון אחד משמעותי: היא לא נותנת את התוצאה ה"נכונה" כשיש שתי מפלגות. לדוגמה, נניח שמפלגות א, ב קיבלו 160, 340 קולות בהתאמה, ויש 5 מושבים. במצב זה, החלוקה המדוייקת היא 1.6, 3.4, ונראה הוגן יותר לעגל למעלה למפלגה א ולעגל למטה למפלגה ב, כך שהחלוקה תהיה 2, 3. אבל בשיטת ג'פרסון, המנה של מפלגה א לקבלת 2 מושבים היא 80=160/2, והמנה של מפלגה ב לקבלת 4 מושבים היא 85=340/4, ולכן מפלגה ב תקבל את המושב הרביעי לפני שמפלגה א תקבל את המושב השני; החלוקה תהיה 1, 4.

האם קיימת שיטת חלוקת-מושבים, שהיא גם עקבית וגם הוגנת עבור כל זוג של מפלגות? נראה בפרק הבא.

שיטות מחלק

ניתן להכליל את שיטת ג'פרסון באופן הבא. בוחרים פונקציה כלשהי f, המייחסת לכל מספר שלם s, מספר ממשי כלשהו בין s לבין s+1. המושבים מחולקים באופן הבא:

- **אתחול**: כל מפלגה מקבלת 0 מושבים.
- כל עוד נשארים מושבים פנויים:
  - מחשבים, עבור כל מפלגה, את המנה (מספר קולות) / f(s), כאשר x הוא מספר המושבים הנוכחי של המפלגה.
  - נותנים את המושב הבא למפלגה שעבורה המנה הזאת גדולה ביותר.

כל שיטה כזאת נקראת שיטת מחלק (divisor method). שיטת ג'פרסון היא מקרה פרטי של שיטת מחלק, שבה הפונקציה היא f(s)=s+1.

משפט. לכל פונקציה f, שיטת-המחלק עם הפונקציה f היא עקבית.

הוכחה. ההוכחה זהה לחלוטין להוכחת העקביות של שיטת ג'פרסון. הנקודה החשובה היא, שסדר חלוקת המושבים נקבע חד-משמעית (על-ידי הפונקציה f), ולכן הסדר נשמר גם כשלוקחים תת-קבוצה כלשהי של המפלגות. ***

עכשיו יש ברשותנו קבוצה גדולה (למעשה אינסופית) של שיטות עקביות לחלוקת מושבים. כמה שיטות מתוך הקבוצה הזאת הוצעו לשימוש במקומות שונים:

1. שיטת **אדאמס** – על-שם ג'ון קווינסי אדאמס (Adams), הנשיא השישי של ארה"ב: **f(s)=s**.
2. שיטת **דין** – על-שם ג'יימס דין (Dean), פרופסור אמריקאי: **f(s)=2/[1/s+1/(s+1)]**, ממוצע הרמוני של s ו-s+1.
3. שיטת **הנטינגטון-היל** – על-שם אדווארד ורמיליה הנטינגטון (Huntington) ויוסף אדנה היל (Hill), מתמטיקאים אמריקאיים. **f(s)=sqrt(s*(s+1))**, ממוצע גיאומטרי של s ו-s+1. שיטה זו היא השיטה הנהוגה בארה"ב כיום.
4. שיטת **ובסטר** – על-שם דניאל ובסטר (Webster), סנטור אמריקאי. **f(s)=s+0.5**. בשימוש במספר מדינות, כגון: בוסניה והרצגובינה, עיראק, קוסובו, לטביה, ניו זילנד, נורווגיה, ושוודיה.
5. שיטת **ג'פרסון** – שכבר הכרנו – היא שיטת-מחלק עם **f(s)=s+1**.

כל אחת מהשיטות הללו יכולה, כמובן, לתת תוצאות שונות. אבל האם ישנו הבדל כללי ביניהן? התשובה היא כן: ישנן שיטות, אשר באופן כללי נותנות עדיפות למפלגות קטנות, וישנן שיטות, אשר באופן כללי נותנות עדיפות למפלגות גדולות. חמש השיטות שתיארנו למעלה מסודרות בדיוק לפי הסדר הזה: שיטת אדאמס הכי טובה למפלגות קטנות, אחריה דין, אחריה הנטינגטון-היל, אחריה ובסטר, ואחריה שיטת ג'פרסון – שהיא הכי טובה למפלגות גדולות. נדגים את זה על שלוש השיטות הפשוטות יותר – אדאמס, ובסטר וג'פרסון, עם שלושה מושבים ו-3 מפלגות שזכו ב: 210, 50, 40 קולות:

- לפי שיטת אדאמס, המושב הבא ניתן למפלגה שהמנה (מספר קולות)/(מספר מושבים נוכחי) שלה גדולה ביותר. המנה הזו אינסופית עבור כל מפלגה שיש לה 0 מושבים, ולכן כל מפלגה תקבל מושב אחד (אפילו אם זכתה בקול אחד בלבד). החלוקה היא: 1, 1, 1.
- לפי שיטת ובסטר, מפלגה א מקבלת מושב, ואז המנה (מספר קולות)/(מספר מושבים נוכחי + ½) שלה היא 140, והיא עדיין גדולה מהמנות עבור שתי המפלגות האחרות (100, 80), ולכן מפלגה א מקבלת מושב נוסף. לאחר מכן המנה שלה הוא 84, ולכן המושב השלישי ניתן למפלגה ב, והחלוקה היא 2, 1, 0.
- לפי שיטת ג'פרסון, גם אחרי שמפלגה א מקבלת שני מושבים, המנה (מספר קולות)/(מספר מושבים נוכחי + 1) שלה היא 70, והמנות של המפלגות האחרות הן 50, 40, ולכן מפלגה א מקבלת גם את המושב השלישי, והחלוקה היא 3, 0, 0.

המשפט הבא מראה שזה אינו מקרה חד-פעמי אלא תופעה כללית. המשפט מתייחס לחלוקת מושבים ע"י שיטות-מחלק; כיוון ששיטות-מחלק הן עקביות, מספיק להראות הטיה בין זוגות של מפלגות.

משפט. נניח שאנחנו מחלקים מושבים בין שתי מפלגות בשיטת-מחלק עם פונקציה f(s)=s+y, כאשר y הוא מספר ממשי כלשהו בין 0 ל-1. מספר המושבים המדוייק המגיע למפלגה א הוא מספר שלם a ועוד שארית כלשהי בין 0 ל-1, ומספר המושבים המדוייק המגיע למפלגה ב הוא מספר שלם b ועוד שארית כלשהי בין 0 ל-1 (- מספר המושבים הכללי הוא a+b+1). אז מספר המושבים של מפלגה א יעוגל למעלה (ל- a+1) אם ורק אם השארית של מפלגה א גדולה מ:

0.5 – (a-b)*(y-0.5)/(a+b+2y)

לפני שנוכיח את המשפט, ננסה להבין את המשמעות שלו. הגורם בצד ימין יכול להיות חיובי או שלילי.

- אם הוא חיובי, אז הביטוי כולו קטן מ-0.5. זה אומר, שכדי לזכות במושב נוסף, מפלגה א יכולה להסתפק בשארית קטנה ממש מ-0.5 (למשל, ייתכן שתזכה במושב נוסף אם השארית שלה 0.4 או 0.3). זה אומר שיש כאן הטיה לטובת מפלגה א.
- מצד שני, אם הביטוי בצד ימין שלילי, אז הביטוי כולו גדול מ-0.5. זה אומר, שמפלגה א תזכה במושב נוסף, רק אם השארית שלה תהיה גדולה ממש מ-0.5, וזה אומר שיש כאן הטיה לרעת מפלגה א.

איך זה קשור למספר ?

- אם קטן מ-0.5, אז הביטוי בצד ימין הוא חיובי אם ורק אם a קטן מ-b. כלומר, יש הטיה לטובת מפלגה א, אם ורק אם היא קטנה יותר ממפלגה ב. בפרט, שיטת אדאמס – =0 – מוטה לטובת מפלגות קטנות, כמו שראינו בדוגמה.
- אם גדול מ-0.5, אז הביטוי בצד ימין הוא חיובי אם ורק אם a גדול מ-b. כלומר, יש הטיה לטובת מפלגה א, אם ורק אם היא גדולה יותר ממפלגה ב. בפרט, שיטת ג'פרסון – =0 – מוטה לטובת מפלגות גדולות, כמו שראינו בדוגמה.

  תופעה מעניינת זו יכולה להסביר, מדוע שיטת ג'פרסון היא הנפוצה ביותר בעולם: למפלגות גדולות יש אינטרס לבחור דווקא בשיטה הזאת (כמו שיש להן נטיה לתמוך בחוקים הפוגעים במפלגות קטנות, כגון העלאת אחוז החסימה). גם בישראל, שיטת ג'פרסון הונהגה בחוק בדר-עופר, שהועבר ע"י יוחנן בדר מגח"ל ואברהם עופר מהמערך – שני חברי-כנסת משתי המפלגות שהיו אז הגדולות ביותר...
- יש רק ערך אחד של שבו אין שום הטיה – העיגול הוא תמיד לכיוון השלם הקרוב ביותר – והוא =0.5 המתאים לשיטת וובסטר! זו השיטה היחידה שבה חלוקת-המושבים בין כל זוג מפלגות היא אותה חלוקה, שבתחילת הדיון הסכמנו שהיא הוגנת – חלוקה שבה מעגלים תמיד לשלם הקרוב ביותר.

הוכחת המשפט. נניח שלמפלגה א מגיעים a+x מושבים ולמפלגה ב מגיעים b+y מושבים, כאשר a, b הם שלמים ו-x, y הם השברים. מכאן x+y=1, ומספר המושבים הכולל הוא a+b+1.

כיוון אחד: נניח ש

$$x > 0.5 - (a-b)*(-0.5)/(a+b+2y)$$

ונוכיח שמפלגה א מקבלת לפחות a+1 מושבים.

במהלך ריצת האלגוריתם, כל עוד מפלגה א מחזיקה a מושבים או פחות, המנה שלה היא לפחות:

$$(a+x)/(a+)$$

נציב את הגבול התחתון ל-x ונקבל, לאחר קצת אלגברה, שהמנה הזאת גדולה מ:

$$(a+b+1)/(a+b+2y)$$

אם האלגוריתם ממשיך לרוץ, ומפלגה א עדיין מחזיקה a מושבים או פחות, אז בשלב כלשהו בהכרח מפלגה ב תגיע ל-b מושבים (כי מספר המושבים הכולל הוא a+b+1). המנה של מפלגה ב בשלב זה היא:

$$(b+y)/(b+) = (b+1-x)/(b+)$$

שוב, נציב את הגבול התחתון ל-x ונפעיל אלגברה ונקבל שהמנה הזאת קטנה מ:

$$(a+b+1)/(a+b+2y)$$

המנה של מפלגה א גדולה ממש מהמנה של מפלגה ב, ולכן מפלגה א מקבלת את המושב ה- a+1.

כיוון שני: נניח ש

$$x < 0.5 - (a-b)*(-0.5)/(a+b+2y)$$

כיוון ש x+y=1, נובע מכאן ש:

$$y > 1 - [0.5 - (a-b)*(-0.5)/(a+b+2y)]$$
$$= 0.5 - (b-a)*(-0.5)/(a+b+2y)$$

קיבלנו בדיוק אותו ביטוי כמו בכיוון הראשון, פרט לכך ש-x מוחלף ב-y ו-a מוחלף ב-b. לכן, אם נפעיל את הכיוון הראשון על מפלגה ב, נקבל שמפלגה ב מקבלת לפחות b+1 מושבים. לכן מפלגה א מקבלת לכל היותר a מושבים. ***

המשפט הקודם מראה יתרון משמעותי של שיטת וובסטר על-פני שיטות-מחלק אחרות, כגון אדאמס וג'פרסון: שיטת וובסטר נותנת חלוקה הוגנת לכל זוג של מפלגות (במובן שהעיגול בכל זוג הוא לכיוון ה"נכון", בלי הטיה לטובת מפלגה גדולה או קטנה). מתברר שהמשפט נכון באופן כללי יותר, לא רק ביחס לשיטות-מחלק אלא ביחס לכל השיטות העקביות.

משפט. שיטת וובסטר היא השיטה העקבית היחידה הנותנת חלוקה הוגנת עבור כל זוג של מפלגות.

הוכחה. נניח בשלילה שקיימת שיטת חלוקת-מושבים כלשהי, שהיא עקבית והוגנת, אבל שונה משיטת וובסטר. נניח שההבדל בין השיטות מתגלה עבור מספר מושבים מסויים h ווקטור-הצבעות כלשהו v, כאשר שיטת וובסטר מחזירה וקטור חלוקת-מושבים כלשהו x, והשיטה האחרת מחזירה וקטור אחר כלשהו z. כיוון שסכום רכיבי שני הוקטורים שווה h, הוקטורים נבדלים זה מזה בשני מקומות לפחות; יש לפחות שתי מפלגות $i,\ k$, שעבורן $x_i < z_i$ אבל $x_k > z_k$ (שיטת וובסטר נותנת יותר מושבים למפלגה k והשיטה האחרת נותנת יותר מושבים למפלגה i).

כיוון ששיטת וובסטר היא עקבית והוגנת, מתקיים (כאשר "round" מציין עיגול לשלם הקרוב ביותר):

$$x_i = round((x_i+x_k)*v_i/(v_i+v_k)), \qquad x_k = round((x_i+x_k)*v_k/(v_i+v_k)),$$

אותו הדבר נכון, לפי הנחתנו, לגבי השיטה האחרת, ולכן:

$$z_i = round((z_i+z_k)*v_i/(v_i+v_k)), \qquad z_k = round((z_i+z_k)*v_k/(v_i+v_k)),$$

כיוון ש- $x_i < z_i$, ופונקציית העיגול round היא מונוטונית, בהכרח $z_i+z_k > x_i+x_k$.

מצד שני, כיוון ש- $x_k > z_k$, בהכרח $z_i+z_k < x_i+x_k$; אבל זו סתירה. ***

מקורות

- *Balinski, Michel L.; Young, H. Peyton (1982). Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote.*
- *Pukelsheim, Friedrich (2017). "Proportional Representation: Apportionment Methods and Their Applications". Sub. 9.10.*

סיכם: אראל סגל-הלוי.