

## מטלה 1 -

### חלוקה הוגנת של עוגות וקרקעות

#### שאלה 2 : חלוקת תורניות פרופורציונלית

אמא ואבא נסעו לנופש, והשאירו את  $n$  ילדיהם הגדולים לשמור על התינוקת ה- $n+1$  הם מעוניינים לחלק ביניהם את זמן השמירה בצורה הוגנת. לכל ילד יש העדפות שונות לגבי זמן השמירה - יש כאלה שמעדיפים לשמור בלילה, יש כאלה שמעדיפים לשמור דווקא בצהריים, וכו'.

- א. [חימום] בסעיף זה הניחו שהילדים אוהבים לשמור על התינוקת – כל אחד רוצה לשמור כמה שיותר. באיזה אלגוריתם תשתמשו כדי למצוא חלוקה פרופורציונלית?
- ב. בסעיף זה הניחו שהילדים לא אוהבים לשמור – כל אחד רוצה לשמור כמה שפחות. הסבירו למה האלגוריתם של סעיף א לא עובד, ותארו אלגוריתם חדש המוצא חלוקה פרופורציונלית. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

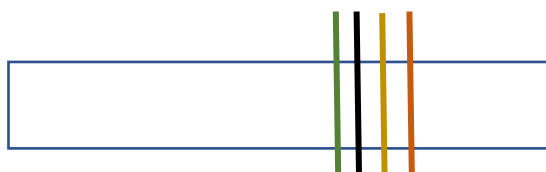
#### פתרון

- א. אשתמש באלגוריתם אבן פז, רק עבור זמנים. כל אחד מחלק את זמן השמירה באופן שווה מבחינתו, מחלקים את זמן השמירה באמצע ביניהם, וכל ילד נשלח לחלק הזמן שמכיל את הזמן שהוא בחר, ומחלקים כל חלק ברקורסיה. (ובאופן דומה, עבור  $n$  אי זוגי, כל אחד מחלק את הזמן לשניים ביחס של  $(n+1)/2$  :  $(n-1)/2$ , מחלקים את זמן השמירה כך שבצד אחד יהיו  $(n-1)/2$  בחירות של זמנים של ילדים ובצד השני שאר  $(n+1)/2$  כל ילד הולך לצד של הבחירה שלו)

- ב. - האלגוריתם של סעיף א' לא עובד, מכיוון שבכל בחירה של זמן ע"י ילד ופיצול של זמן השמירה, לפי האלגוריתם הקודם כל ילד נשאר בפיצול של זמן השמירה בו נמצאת השעה שבחר כאמצע, אך זה אומר שלרוב יישאר בחלק שמבחינתו גדול יותר ממה שמחשיב כאמצע. (כי יש את הזמן שלו ועוד זמן עד לנק' הפיצול) בעוד בסעיף א' זה היה בסדר מבחינתנו, כי העדיף יותר זמן שמירה, פה זה יוצא שלפי חלוקה זו הוא מבחינתו יקבל זמן שמירה ארוך יותר (גרוע יותר) מהחלק שהיה מגיע לו- זה לא פרופורציונלי. (כל ילד מקבל  $1/n$  מזמן השמירה ובמקרה זה אם מקבל יותר מבחינתו קיבל זמן גרוע יותר מ- $1/n$  של הזמן)

#### - האלגוריתם החדש:

בעצם אני מציעה וריאציה לאלגוריתם אבן-פז. שוב- כל אחד מחלק את זמן השמירה באופן שווה מבחינתו, מחלקים את זמן השמירה באמצע ביניהם, רק שהפעם כל ילד ישלח לחלק הזמן שלא מכיל את הזמן שהוא בחר, ומחלקים כל חלק ברקורסיה. (כך, כל ילד מבחינתו יהיה בחלק שמבחינתו הוא פחות או שווה למה כחצי ובסופו של דבר יקבל פחות או שווה למה שמחשיב כ- $1/n$  של זמן השמירה (ולא יותר ממה שמחשיב כזמן השמירה) באופן דומה, עבור  $n$  אי זוגי, כל אחד מחלק את הזמן לשניים ביחס של  $(n+1)/2$  :  $(n-1)/2$ , אלא שעכשיו מחלקים את זמן השמירה כך שבצד אחד יהיו  $(n+1)/2$  בחירות של זמנים של ילדים ובצד השני שאר  $(n-1)/2$  כל ילד הולך לצד שבו אין את הבחירה שלו.



אסביר את כוונתי ע"י דוגמה:

הקווים הצבעים אלו 3 ילדים שמחלקים ל-2:1, הקו השחור זה קו החלוקה של האלגוריתם

החדש, שמחלק ל 1:2 וכך כל ילד שיהיה בצד שבו אין את הקו שלו יהיה מבחינתו בחלק שבו יש פחות (בדוג' זו, יכול להיות גם שווה) ממה שמחשיב כחלק פרופורציונלי עבור כמות הילדים לאותו החלק

-הוכחת נכונות:

ארצה להוכיח שהאלגוריתם שהצעתי נותן חלוקה פרופורציונלית - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל הכי הרבה 1 חלקי n מערך זמני השמירה בעיניו. (כי רוצה כמה שפחות)

הוכחה:

נניח שערך זמן השמירה כולו הוא n. נוכיח שכל ילד מקבל חלק ששווה בעיניו בשווי שקטן או שווה 1. נוכיח באינדוקציה על n.

בסיס:  $n=1$ : שחקן אחד מקבל הכל. (ששווה ל 1/1)

צעד: נניח שנכון לכל מספר ילדים עד  $n-1$ . עבור n ילדים, כל מי שפועל לפי הכללים, מגיע לחלק ששווה בעיניו לא או פחות, ויש בו k שחקנים, כאשר k הוא  $n/2$  או  $(n+1)/2$  או  $(n-1)/2$ . עכשיו בכל חלק יש פחות מ n ילדים, ולפי הנחת האינדוקציה, ילד מקבל חלק ששווה בעיניו בשווי שקטן או שווה 1.