"וּנְחַלְתֶּם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאָחִיו" (יחזקאל מז 14)

חלוקה הוגנת של חפצים בדידים

Fair Indivisible Item Allocation

אראל סגל-הלוי

חלוקה הוגנת בקירוב

מקרה פשוט:

- m חפצים זהים.
- n שחקנים עם זכויות שוות.

מה הן החלוקות שאפשר לקרוא להן "הוגנות בקירוב"?

- כל אחד מקבל m/n מעוגל למטה או למעלה.
- בכל חלוקה אחרת, יש חוסר-הגינות שאי-אפשר להצדיק בכך שהחפצים בדידים.

חלוקה הוגנת בקירוב - הכללות

א. חפצים זהים – זכויות שונות.

ב. חפצים שונים – זכויות שוות.

ג. חפצים שונים – זכויות שונות.

חפצים זהים – זכויות שונות

בעיית חלוקת המושבים (apportionment):

- איך לחלק את 120 המושבים בכנסת בין המפלגות, באופן יחסי למספר קולותיהן?

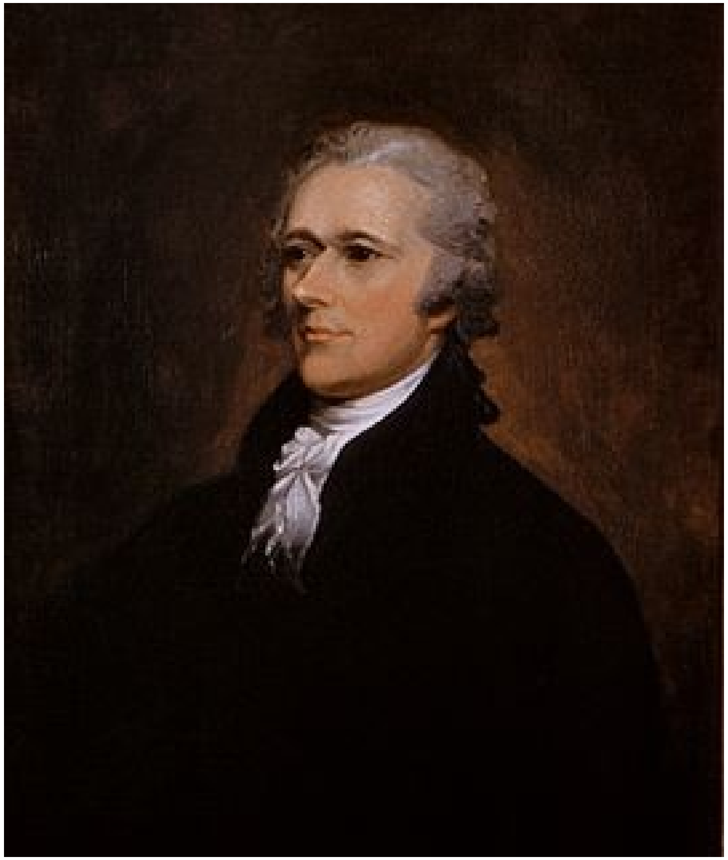
בעיית חלוקת המושבים - דוגמה

- שתי מפלגות.
- מפלגה א: 68.7/120 מכלל הקולות;
- מפלגה ב: 51.3/120 מכלל הקולות.
- מהי חלוקה הוגנת של 120 המושבים?
- 69: 51
- מעגלים לשלם הקרוב ביותר.

בעיית חלוקת המושבים - הכללה

- שלוש מפלגות.
- א: 69.4, ב: 30.35, ג: 20.25
- מהי חלוקה הוגנת של 120 המושבים?
- עיגול לשלם הקרוב ביותר יוצא רק 119!
- איך נכליל את העקרון "עיגול לשלם הקרוב ביותר" למספר כלשהו של מפלגות?

אלגוריתם המילטון - Hamilton



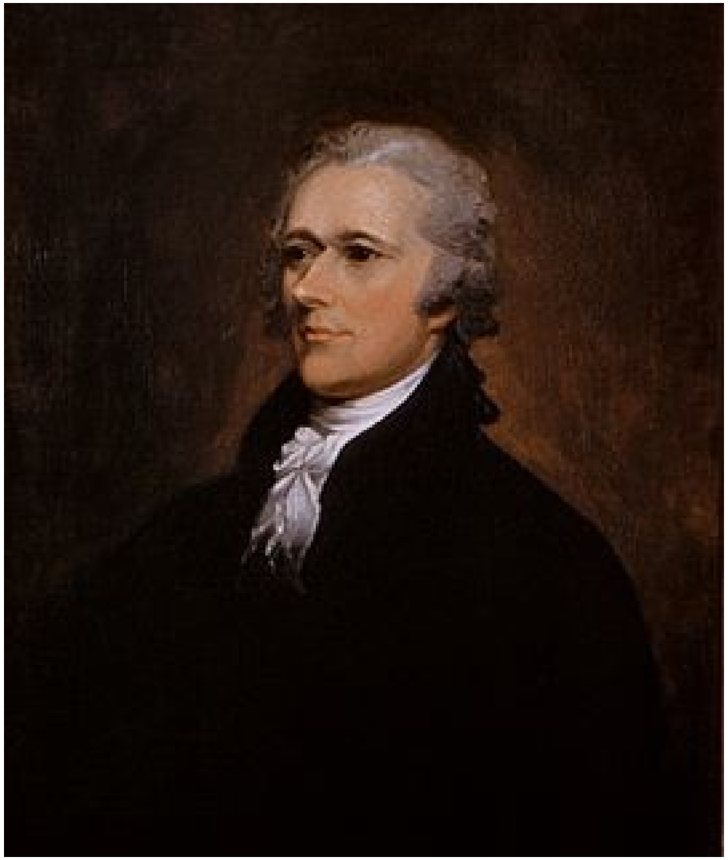
- נותנים לכל מפלגה את מספר-המושבים המדוייק שלה *מעוגל כלפי מטה*.
- מחלקים את המושבים העודפים *לפי סדר יורד של השארית*.

א: 69.4, ב: 30.35, ג: 20.25

א: 69, ב: 30, ג: 20

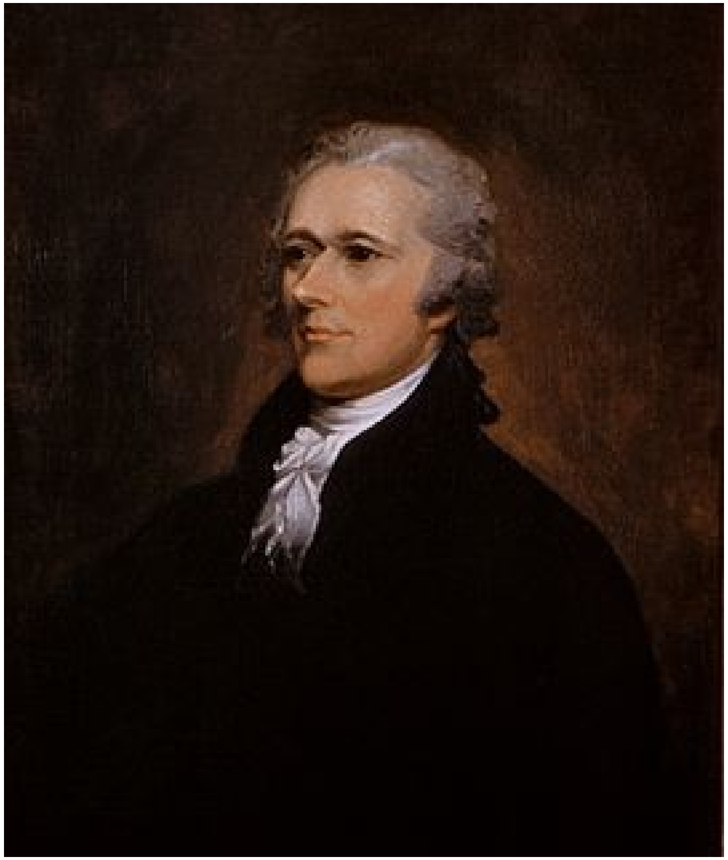
א: 70, ב: 30, ג: 20

אלגוריתם המילטון - Hamilton



- היה בשימוש בארה"ב בין 1852 ל 1900.
- היה בשימוש בישראל מהבחירות השניות עד הבחירות השביעיות.
- עדיין בשימוש ברוסיה, אוקראינה, ליטא, תוניס, נמיביה, טייוואן, הונג-קונג.
- מה הבעיה איתו?

אלגוריתם המילטון - חוסר-עקביות



- 5 מושבים, 500 בוחרים
- א: 40, ב: 135, ג: 325

המילטון:

- א: 1, ב: 1, ג: 3

מפלגות א, ב קיבלו ביחד 175 קולות ו-2 מושבים.

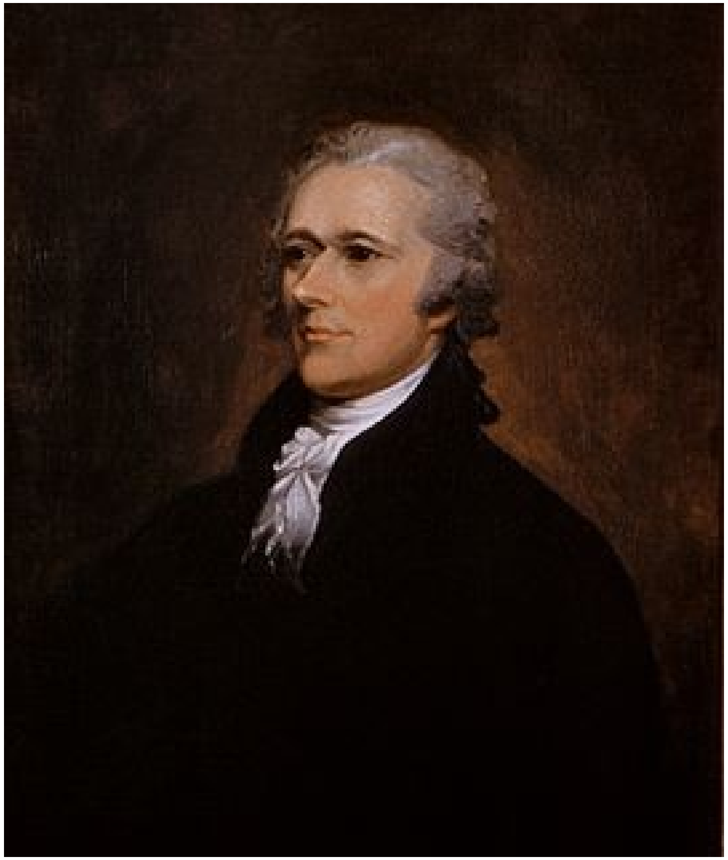
מהי חלוקה הוגנת של 2 המושבים ביניהן?

- א: 2*40/175 = 0.457
- ב: 2*135/175 = 1.543

למפלגה א מגיע 0

למפלגה ב מגיע 2!

אלגוריתם המילטון - אסטרטגיה



- 5 מושבים, 500 בוחרים
- א: 25,   ב: 140,   ג: 335

המילטון:

- א: 0,   ב: 2,   ג: 3

אם מפלגה א פורשת,
ותומכיה נשארים בבית -

- 140*5/475 = 1.47
- 335*5/475 = 3.53
- א: 0,   ב: 1,   ג: 4

מפלגה א **בלי מושבים** השפיעה על חלוקת המושבים!

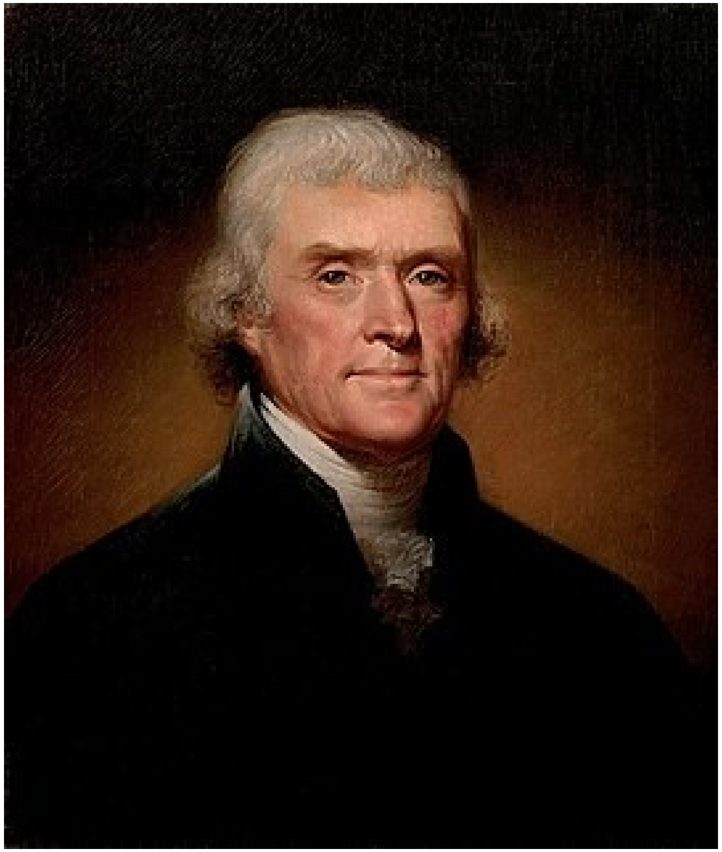
עקביות

הגדרה. אלגוריתם לחלוקת-מושבים נקרא **עקבי** אם עבור כל תת-קבוצה X של מפלגות, שקיבלו ביחד n מושבים בחלוקה הכללית – אם נשתמש באותו אלגוריתם כדי לחלק את n המושבים בין המפלגות בקבוצה X בלבד, נקבל אותה חלוקה בדיוק כמו בחלוקה הכללית.

אלגוריתם המילטון אינו עקבי.

האם קיים אלגוריתם חלוקת-מושבים עקבי?

אלגוריתם ג'פרסון - Jefferson



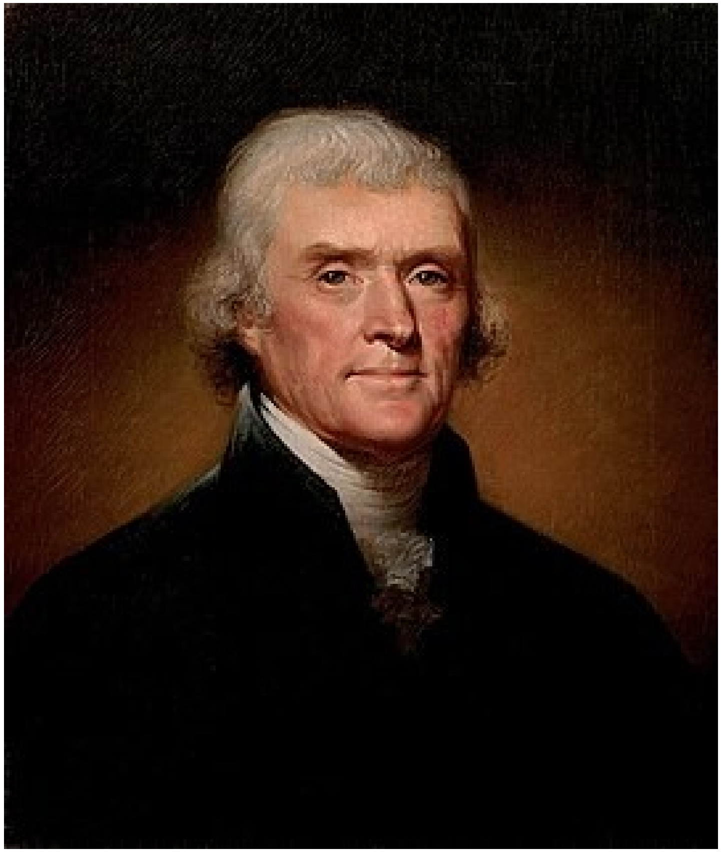
- אתחול: כל מפלגה מקבלת 0
- כל עוד יש מושבים:
  - מחשבים, לכל מפלגה:

    (מספר קולות)

    (מספר מושבים נוכחי + 1)
  - נותנים את המושב הבא למפלגה שהמנה שלה גדולה ביותר.

אלגוריתם ג'פרסון - דוגמה

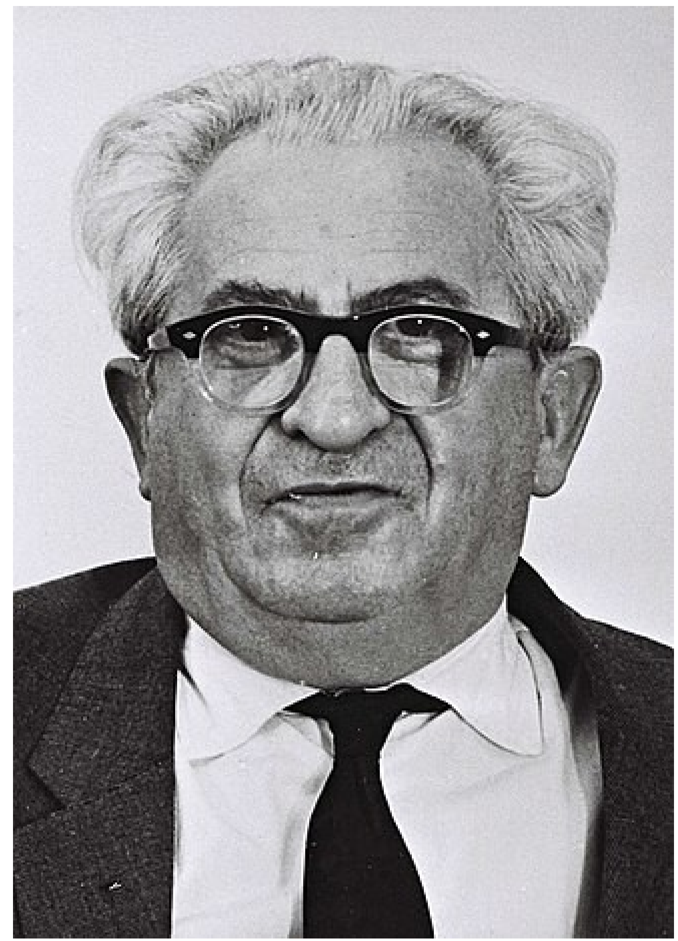
5 מושבים, 500 בוחרים. א: 40, ב: 135, ג: 325.



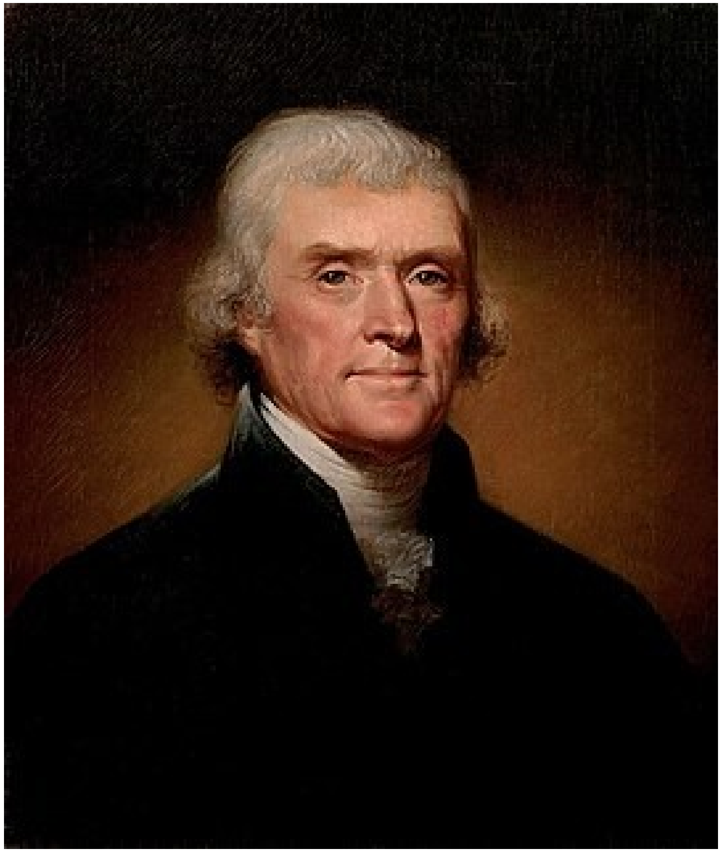
- חלוקה: 0 0 0
- מנות: 40, 135, 325
- חלוקה: 0 0 1
- מנות: 40, 135, 162.5
- חלוקה: 0 0 2
- מנות: 40, 135, 108.33
- חלוקה: 0 1 2
- מנות: 40, 67.5, 108.33
- חלוקה: 0 1 3
- מנות: 40, 67.5, 80.25
- חלוקה: 0 1 4

אלגוריתם ג'פרסון = חוק בדר-עופר

- בשימוש בישראל החל מהכנסת השמינית – **חוק בדר-עופר** - ועד היום.
- בשימוש בעוד עשרות מדינות בעולם.



אלגוריתם ג'פרסון - עקביות



גגאבגבבאאגבאא

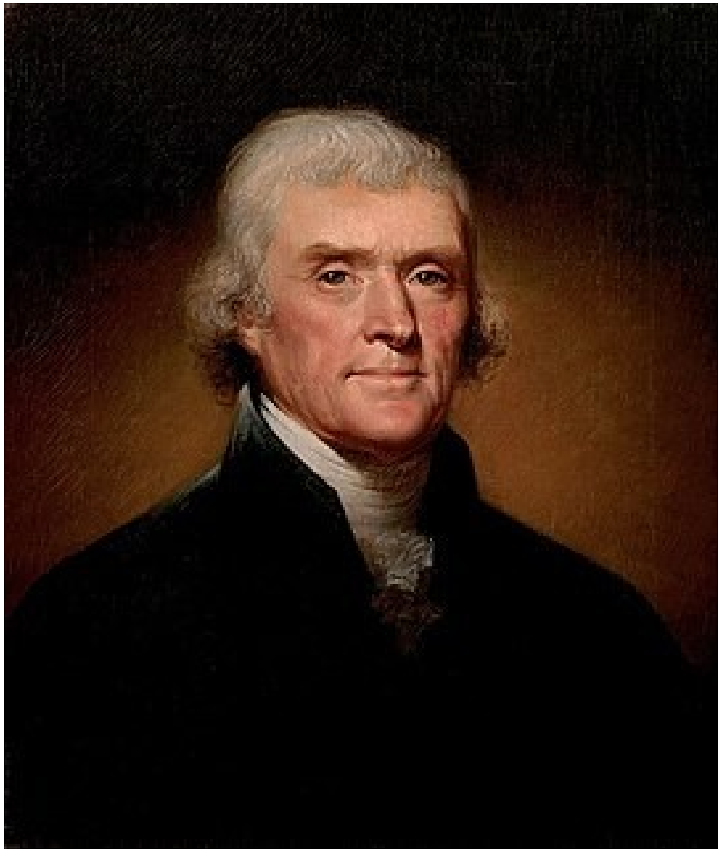
אב בבאא באא

- **משפט**. אלגוריתם ג'פרסון עקבי.
- **הוכחה**. נסתכל על סדרת המפלגות המקבלות מושבים. נניח שמוחקים מהסדרה חלק מהמפלגות, עם המושבים שקיבלו. סדר חלוקת המושבים למפלגות הנותרות נשאר זהה – עדיין, המפלגה המקבלת את המושב הבא היא המפלגה שהמנה (מספר קולות) / (מספר מושבים נוכחי + 1) שלה היא הגדולה ביותר. ***

אלגוריתם ג'פרסון - הוגנות

5 מושבים, 500 בוחרים. א: 160, ב: 340.

- חלוקה: 0 0
- מנות: 160, 340
- חלוקה: 0 1
- מנות: 160, 170
- חלוקה: 0 2
- מנות: 160, 113
- חלוקה: 1 2
- מנות: 80, 113
- חלוקה: 1 3
- מנות: 80, 85
- חלוקה: 1 4



- המספר המדוייק: 1.6 3.4
- עיגלנו *הפוך* מהכיוון הנכון!
- נראה לא הוגן.

עקביות והוגנות

האם קיים אלגוריתם שהוא גם **עקבי,**
וגם **הוגן** (= מעגל לכיוון הנכון)
עבור לכל זוג של מפלגות?

שיטות מחלק – divisor methods

נכליל את שיטת ג'פרסון באופן הבא:

נבחר פונקציה כלשהי f, המייחסת לכל מספר שלם s, מספר ממשי כלשהו בתחום [s, s+1].

- אתחול: כל מפלגה מקבלת 0
- כל עוד יש מושבים:
  - מחשבים, לכל מפלגה:

    (מספר קולות)

    ----

    f(מספר מושבים נוכחי)
  - נותנים את המושב הבא למפלגה שהמנה שלה גדולה ביותר.

שיטת ג'פרסון = שיטת-מחלק עם f(s)=s+1.

שיטות מחלק - עקביות

- **משפט**. לכל פונקציה f, שיטת-המחלק עם פונקציה f היא עקבית.

- **הוכחה** (בדיוק כמו שיטת ג'פרסון). נסתכל על סדרת המפלגות המקבלות מושבים. נניח שמוחקים מהסדרה חלק מהמפלגות, עם המושבים שקיבלו. סדר חלוקת המושבים למפלגות הנותרות נשאר זהה. ***

שיטות-מחלק - דוגמאות

- שיטת אדאמס – $f(s)=s$
- שיטת דין – $f(s)=2/(1/s+1/(s+1))$
- שיטת הנטינגטון-היל – $f(s)=\mathrm{sqrt}(s*(s+1))$
- שיטת וובסטר – $f(s)=s+0.5$
- שיטת ג'פרסון - $f(s)=s+1$

- במה לבחור?!
- לצורך הדיון נתמקד בשיטות הפשוטות יותר:
אדאמס, וובסטר, ג'פרסון. <--

שיטות-מחלק - הטיות

3 מושבים, 300 בוחרים. א: 210, ב: 50, ג: 40

- שיטת אדאמס: 1 1 1
- שיטת וובסטר: 2 1 0
- שיטת ג'פרסון: 3 0 0

זה לא במקרה <--

שיטות-מחלק - הטיות

משפט. לכל y, בשיטת-מחלק עם פונקציה f(s)=s+y, כשמחלקים a+b+1 מושבים לשתי מפלגות, אם מספר המושבים המדויק המגיע למפלגה א הוא a + שארית, ולמפלגה ב הוא b + שארית, אז מפלגה א תקבל את המושב הנוסף (ה-a+1) אם ורק אם השארית של מפלגה א גדולה מ:
0.5 – (a–b)*(y–0.5)/(a+b+2y)

דוגמה.

- א קיבלה 1+שארית; ב קיבלה 3+שארית.
- y=0.2: הסף הוא ~0.4. כלומר מפלגה א תקבל 2 מושבים אם"ם היא תקבל מעל 1.4. טוב ל-א.
- y=0.8: הסף הוא ~0.6. כלומר מפלגה א תקבל 2 מושבים אם"ם היא תקבל מעל 1.6. טוב ל-ב.

שיטות-מחלק - הטיות

משפט. לכל y, בשיטת-מחלק עם פונקציה f(s)=s+y, כשמחלקים a+b+1 מושבים לשתי מפלגות, אם מספר המושבים המדויק המגיע למפלגה א הוא a + שארית, ולמפלגה ב הוא b + שארית, אז מפלגה א תקבל את המושב הנוסף (ה- a+1) אם ורק אם השארית של מפלגה א גדולה מ:

$0.5 - (a-b)*(y-0.5)/(a+b+2y)$

הכללה.

- אם y<0.5, הסף > 0.5 עבור המפלגה *הקטנה* – הטיה לטובת המפלגה הקטנה.
- אם y>0.5, הסף > 0.5 עבור המפלגה *הגדולה* – הטיה לטובת המפלגה הגדולה.
- אם y=0.5, הסף הוא תמיד 0.5 – תמיד מעגלים לשלם הקרוב ביותר!

שיטות-מחלק - הטיות

הוכחת המשפט. נסמן:

- מפלגה א במדויק: a+x מושבים (a שלם, x שבר).
- מפלגה ב במדויק: b+1-x מושבים.

כיוון א: נניח ש:

$x > 0.5 – (a-b)*(y-0.5)/(a+b+2y)$

כל עוד למפלגה א יש a מושבים או פחות, המנה שלה היא לפחות:

$(a+x)/(a+y) > (a+b+1)/(a+b+2y)$

בשלב כלשהו מפלגה ב תגיע ל-b מושבים, ואז המנה שלה תהיה:

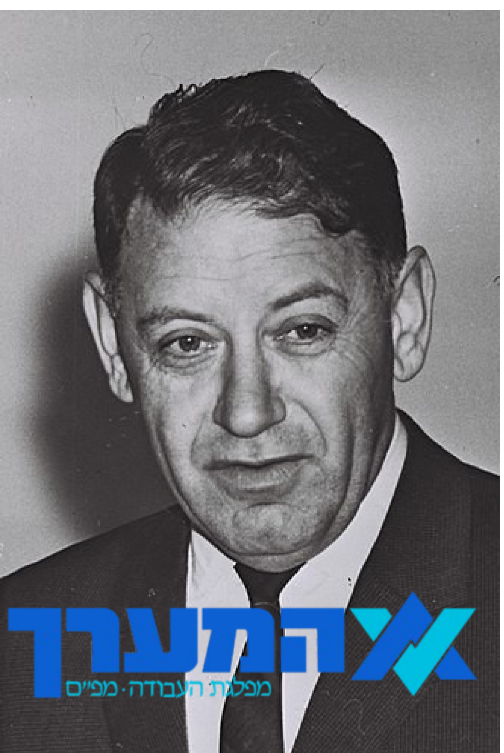
$(b+1-x)/(b+y) < (a+b+1)/(a+b+2y)$

המנה של א גדולה יותר, ולכן היא תקבל את המושב ה-a+1. הוכחת הכיוון השני דומה. ***

שיטות-מחלק - הטיות

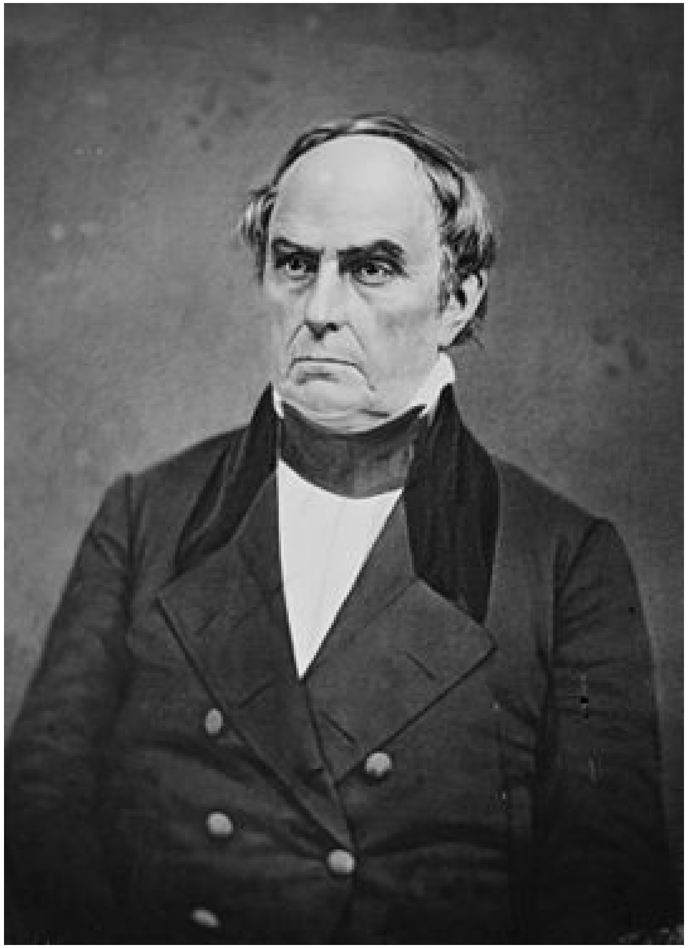
בשיטת מחלק עם $f(s)=s+y$:

- אם $y<0.5$, יש הטיה לטובת המפלגה *הקטנה*.
- אם $y>0.5$, יש הטיה לטובת המפלגה *הגדולה*.
- אם $y=0.5$, אין הטיה לאף צד.



מכאן קל להבין מדוע ברוב המדינות משתמשים בשיטת ג׳פרסון..

שיטת וובסטר



- **מסקנה**. בשיטת **וובסטר** (= שיטת המחלק עם s+0.5), בחלוקת-המושבים בין כל שתי מפלגות, כל מפלגה מקבלת את החלק היחסי שלה מעוגל לשלם הקרוב ביותר – ללא כל הטיה לטובת מפלגות גדולות או קטנות.

שיטת וובסטר

- **משפט**. שיטת וובסטר היא השיטה *היחידה* לחלוקת מושבים, שהיא גם עקבית וגם הוגנת (= מעגלת לכיוון הנכון) עבור כל זוג מפלגות.
- **הוכחה**. נניח בשלילה שקיימת שיטת חלוקת-מושבים כלשהי, שהיא עקבית והוגנת, אבל שונה משיטת וובסטר.
- נניח שההבדל בין השיטות מתגלה עבור מספר מושבים מסויים **h** ווקטור-הצבעות כלשהו **v**, כאשר שיטת וובסטר מחזירה וקטור חלוקת-מושבים כלשהו **x**, והשיטה האחרת מחזירה וקטור אחר כלשהו **z**.
- סכום רכיבי שני הוקטורים שווה h, לכן הוקטורים נבדלים בשני מקומות לפחות; יש לפחות שתי מפלגות i, k, שעבורן $x_k > z_k$ אבל $x_i < z_i$ (שיטת וובסטר נותנת יותר מושבים למפלגה k והשיטה האחרת נותנת יותר למפלגה i).

שיטת וובסטר

הוכחה [המשך].

- כיוון ששיטת וובסטר היא עקבית והוגנת, מתקיים (כאשר "round" מציין עיגול לשלם הקרוב ביותר):

$x_i = round((x_i+x_k)*v_i/(v_i+v_k))$,

$x_k = round((x_i+x_k)*v_k/(v_i+v_k))$,

הדבר נכון, לפי הנחתנו, גם לשיטה האחרת, ולכן:

$z_i = round((z_i+z_k)*v_i/(v_i+v_k))$,

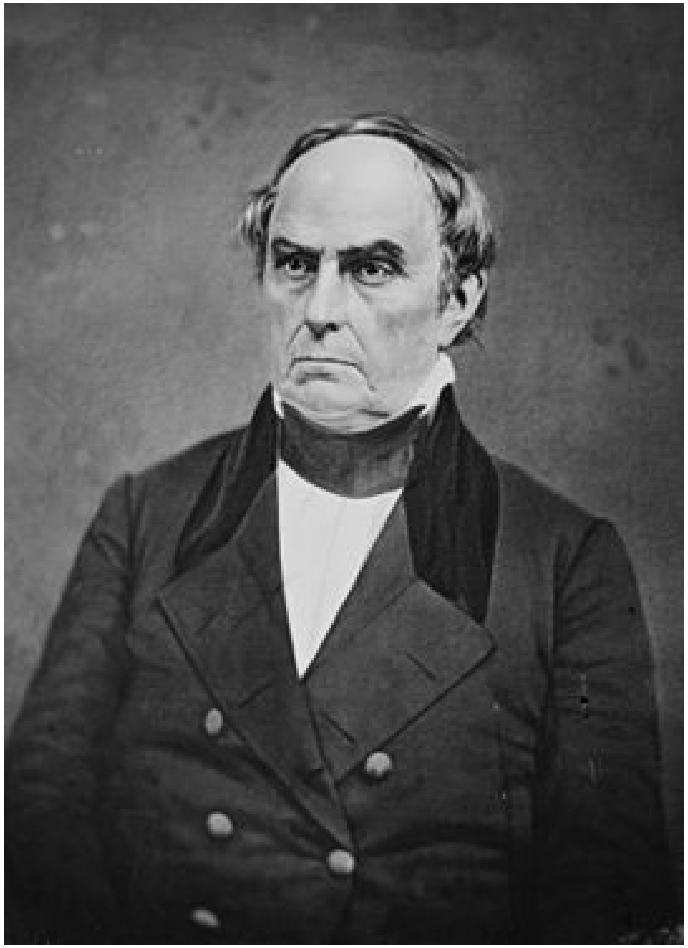
$z_k = round((z_i+z_k)*v_k/(v_i+v_k))$,

כיוון ש- $z_i > x_i$, ופונקציית העיגול round היא מונוטונית, בהכרח $z_i+z_k > x_i+x_k$.

מצד שני, כיוון ש- $z_k < x_k$, בהכרח $z_i+z_k < x_i+x_k$.

הגענו לסתירה. ***

שיטת וובסטר



- שיטת וובסטר בשימוש כיום ב: שוודיה, נורווגיה, ניו-זילנד, בוסניה והרצגובינה, קוסובו, לטביה, עיראק.

- בקרוב אצלנו?