מטלה 4 שאלה 1 – ספיר דהן

הסכם עודפים הוא הסכם בין שתי מפלגות, המתבצע באופן הבא:

- לכל זוג של מפלגות שחתם על הסכם, מגדירים מפלגת-על הכוללת את הקולות של שתי המפלגות.
- מריצים את האלגוריתם חלוקת המושבים על המפלגות המתקבלות.
- לכל זוג של מפלגות שחתם על הסכם, בודקים כמה מושבים קיבלה מפלגת העל שלהם, ומחלקים בין המפלגות לפי אלגוריתם חלוקת המושבים המקורי.

א. תארו דוגמה של בחירות עם 3 מפלגות (א, ב, ג), שבה חלוקת המושבים מתבצעת בשיטת ג׳פרסון, והתוצאות בלי הסכם עודפים שונות מהתוצאות כאשר מפלגות א+ב עושות הסכם עודפים ביניהן.

נבחר את הדוגמה עם המספרים שעשינו בכיתה.

יש לנו 5 מושבים ו – 500 הצבעות כאשר המפלגות קיבלו כך: א = 40, ב = 135, ג = 325.

בכיתה הוכחנו שבלי הסכם עודפים מפלגה א תקבל 0 מושבים, מפלגה ב מקבלת מושב אחד ומפלגה ג מקבלת 4 מושבים.

נבדוק מה קורה כאשר מפלגה א ומפלגה ג עושות הסכם עודפים.

המפלגות שלנו: א+ב = 175, ג = 325

	א+ב = 175 קולות	ג = 325 קולות
חלוקה	0	0

מנות	175	325
חלוקה	0	1
מנות	175	162.5
חלוקה	1	1
מנות	87.5	162.5
חלוקה	1	2
מנות	87.5	108.333
חלוקה	1	3
מנות	87.5	81.25
חלוקה	2	3

קיבלנו שא וב ביחד מקבלות 2 מושבים ומפלגה ג מקבלת 3. כלומר, עם הסכם העודפים קיבלנו תוצאות שונות מאשר בלי (לדוגמה למפלה ג היה 4 לא 3).

ב. תארו דוגמה כנ״ל, כאשר חלוקת המושבים מתבצעת בשיטת וובסטר; הראו שמפלגה החותמת על הסכם עודפים עלולה להפסיד מושב.

ניקח דוגמה שבה יש לנו 7 מושבים ו – 197 הצבעות כאשר המפלגות קיבלו כך: א = 48, ב = 49, ג = 100.

נבדוק מה החלוקה כאשר אין הסכם עודפים:

	א = 48 קולות	ב = 49 קולות	ג = 100 קולות
חלוקה	0	0	0
מנות	96	98	200

חלוקה	0	0	1
מנות	96	98	66.6666
חלוקה	0	1	1
מנות	96	32.6666	66.6666
חלוקה	1	1	1
מנות	32	32.6666	66.6666
חלוקה	1	1	2
מנות	32	32.6666	40
חלוקה	1	1	3
מנות	32	32.6666	28.5714
חלוקה	1	2	3
מנות	32	19.6	28.5714
חלוקה	2	2	3

כלומר קיבלנו כאשר אין הסכם עודפים מפלגה א מקבלת 2 מושבים, מפלגה ב מקבלת 2 מושבים ומפלגה ג מקבלת 3 מושבים.

עכשיו נבדוק מה קורה כאשר מפלגה א וב עושות הסכם עודפים:

	א+ב = 97 קולות	ג = 100 קולות
חלוקה	0	0
מנות	194	200
חלוקה	0	1
מנות	194	66.6666
חלוקה	1	1
מנות	64.6666	66.6666

חלוקה	1	2
מנות	64.6666	40
חלוקה	2	2
מנות	38.6	40
חלוקה	2	3
מנות	38.6	28.5714
חלוקה	3	3
מנות	27.7142	28.5714
חלוקה	3	4

במקרה זה מפלגה ג תקבל 4 מושבים (בלי הסכם עודפים היא קיבלה 3) ומפלגות א+ב תקבל 3 מושבים (בלי הסכם עודפים ביחד הם קיבלו 4) כלומר אחת מהמפלגות בוודאות נפגעה מזה שהיא עשתה הסכם עודפים. לכן זוהי דוגמה לכך שאם משתמשים בשיטת ובסטר הסכם עודפים יכול דווקא לפגוע.

ג. הוכיחו, שבשיטת ג׳פרסון, מפלגה החותמת על הסכם עודפים לעולם לא מפסידה מושב.

נניח שמפלגות A ו B מופיעות בנפרד בתהליך חלוקת המושבים בשיטת ג׳פרסון, כך שכשכל מפלגה מעובדת בנפרד מתקבלות הקצאות המושבים m_A ו - m_B התאמה, כאשר סך המושבים הכולל שהן מקבלות הוא $M = m_A + m_B$.

בתהליך ג׳פרסון, בכל איטרציה מוקצה המושב הבא למפלגה שהיחס שלה גבוה ביותר. נניח לעת עתה שמפלגות A,B מופיעות בנפרד, ולאחר שהתקבלו M מושבים, היחסים לקבלת המושב הבא הם:

$$Q_A = \frac{v_A}{m_A + 1} \qquad Q_B = \frac{v_B}{m_B + 1}$$

כך שבשלב-העצירה שלהן שני המפלגות לא היו בעלת יחס גבוה משל המתחרות.

כעת, נשקול את המקרה שבו A ו-B חוברות להסכם עודפים ומתמזגות למפלגת-על עם סך קולות: $v_U = v_A + v_B$.

נניח שבאמצעות אלגוריתם ג׳פרסון המפלגת-על תקבל M' מושבים. אנו רוצים להוכיח ש M'≥M, כלומר, בסך הכול, הקבוצה המשותפת לא תקבל פחות מושבים ממה שהיו מתקבלים אם המפלגות היו מופיעות בנפרד. היחס של U הוא:

$$Q_U = \frac{v_A + v_B}{M' + 1}$$

מאחר שכל אחת מהמפלגות "חיכתה" למושב הבא, היחס שלהן ירד יחסית למפלגות אחרות. עם זאת, כאשר הן מתמזגות, היחס לקבלת המושב הבא הופך להיות Q_U.

מתקיים תמיד (הוכחה מתמטית בסוף ההוכחה זו כי זה קצת ארוך):

$$\frac{v_A + v_B}{m_A + m_B + 1} \geq \frac{v_A}{m_A + 1} \ or \ \frac{v_A + v_B}{m_A + m_B + 1} \geq \frac{v_B}{m_B + 1}$$

כעת, אם נניח בשלילה ש M'<M כלומר שהמפלגת-העל מקבלת פחות מושבים, אז מתקיים

M’+1<M+1. לכן:

$$\frac{v_A + v_B}{M' + 1} \geq \frac{v_A + v_B}{M + 1}$$

לפי האי-שוויון שכתבנו, $\frac{v_A+v_B}{M+1}$ הוא לפחות גדול מהיחס שהיו מקבלים A או B בנפרד לקבלת מושב נוסף. כלומר, במצב כזה היחס של המפלגת-העל היה מספיק גבוה כדי “לזכות” במושב נוסף – מה שמתנגד לטענה שהתהליך נעצר כאשר ’M מושבים כבר חולקו.

משמעות דבר זה היא שלא ייתכן שתתקבל הקצאה של M’<M מושבים, כיוון שבכל שלב שבו המפלגת-העל מסכמת פחות מושבים ממה שהיו מתקבלים בנפרד, היחס שלה היה גבוה מספיק כדי להכריח הקצאה נוספת. לכן חייב להתקיים M’≥M.

בנוסף שיטת ג׳פרסון היא עקבית שנחלק את המושבים בין A ל-B. כלומר אף אחת מהמפלגות שעושות הסכם עודפים לא תפגע בעקבות כך ורק יכולה להרוויח מכך. ■

*הוכחה שמתקיים לנו:

$$\frac{v_A + v_B}{m_A + m_B + 1} \geq \frac{v_A}{m_A + 1} \; or \; \frac{v_A + v_B}{m_A + m_B + 1} \geq \frac{v_B}{m_B + 1}$$

נניח בשלילה ששני היחסים גדולים מן המנה המאוחדת:

$$\frac{v_A + v_B}{m_A + m_B + 1} < \frac{v_A}{m_A + 1}$$

$$\frac{v_A + v_B}{m_A + m_B + 1} < \frac{v_B}{m_B + 1}$$

נכפיל במכנים:

$$(v_A + v_B)(m_A + 1) < v_A(m_A + m_B + 1)$$

$$(v_A + v_B)(m_B + 1) < v_B(m_A + m_B + 1)$$

נסכום אותם ונקבל:

$$(v_A + v_B)(m_A + m_B + 2) < (v_A + v_B)(m_A + m_B + 1)$$

ומכאן:

$$m_A + m_B + 2 < m_A + m_B + 1$$

ומכאן נקבל סתירה. לכן לא יתכן שהמנה המאוחדת קטנה מן שני המנות ולכן:

$$\frac{v_A + v_B}{m_A + m_B + 1} \geq \frac{v_A}{m_A + 1} \ or \ \frac{v_A + v_B}{m_A + m_B + 1} \geq \frac{v_B}{m_B + 1}$$

שאלה 0 – הדירוג קורסים שלי

1. נושאים מתקדמים בראייה ממוחשבת עם יישומים בהדמיה רפואית — 202 נק'
ד"ר חוגי אסף
סמסטר ב'
יום ג'15:00-18:00

2. למידת מכונה — 152 נק'
ד"ר ליעד גוטליב
סמסטר א'
יום א'09:00-12:00

3. הסקה סטטיסטית — 134 נק'
ד"ר וייס רועי
סמסטר א'
יום ד'10:00-13:00

4. אלגוריתמים כלכליים — 116 נק'
ד"ר סגל הלוי אראל דוד
סמסטר א'
יום ג'09:00-12:00

5. דחיסת נתונים — 107 נק'
פרופ' דנה שפירא
סמסטר א'
יום ב'09:00-12:00

6. תכנות אלגוריתמים מחקריים — 107 נק'
ד"ר סגל הלוי אראל דוד
סמסטר ב'
יום ה'12:00-15:00

7. למידה עמוקה ועיבוד שפות טבעיות — 65 נק'
פרופ' עזריה עמוס
סמסטר א'
יום א'12:00-15:00

8. למידה יישומית בראייה ממוחשבת — 63 נק'
ד"ר בן ארצי גיל
סמסטר ב'
יום ד'15:00-18:00

9. אלגוריתמים בבינה מלאכותית — 54 נק'
ד"ר חזון נעם
סמסטר ב'
יום ד'10:00-13:00