

מטלה - חלוקה הוגנת של קרקעות ועוגות

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות או סעיפים המסומנים בכוכבית * מזכים בניקוד כפול.

שאלה 1: חלוקת תורנויות פרופורציונלית

אמא ואבא נסעו לנופש, והשאירו את n ילדיהם הגדולים לשמור על התינוקות ה- $n+1$. הם מעוניינים לחלק ביניהם את זמן השמירה בצורה הוגנת. לכל ילד יש העדפות שונות לגבי זמן השמירה - יש כאלה שמעדיפים לשמור בלילה, יש כאלה שמעדיפים לשמור דווקא בצהריים, וכו'. עליכם למצוא חלוקה פרופורציונלית, שבה כל ילד מקבל משמרת קשירה.

א. [חימום]. בסעיף זה הניחו שהילדים **אוהבים** לשמור על התינוקות - כל אחד רוצה לשמור כמה שיותר. באיזה אלגוריתם תשתמשו?

ב. בסעיף זה הניחו שהילדים **לא אוהבים** לשמור - כל אחד רוצה לשמור כמה שפחות. הסבירו למה האלגוריתם של סעיף א לא עובד. תארו אלגוריתם חדש המוצא חלוקה פרופורציונלית קשירה של התורנויות. הדגימו את האלגוריתם, והוכיחו את נכונותו.

שאלה 2: שיקולים אסטרטגיים באלגוריתם חלוקה

האלגוריתמים שלמדנו מבקשים מהשחקנים לבצע פעולות מסוימות בהתאם להערכות שלהם. אבל השחקנים יכולים להתנהג כאילו שיש להם הערכות שונות, בניסיון להשיג רווח גדול יותר. התנהגות כזאת נקראת "התחכמות" (בלע"ז "מניפולציה").

א. אתם חולקים עוגה עם עוד מישהו בשיטת "חתוך ובחר", כאשר אתם החותכים. הצלחתם להשיג מידע מדויק על ההערכה של השחקן השני. תארו התחכמות שתאפשר לכם להשיג את הערך הגבוה ביותר האפשרי. הדגימו מצב שבו ההתחכמות שלכם תאפשר להשיג 100% מהערך הכולל של העוגה בעיניכם.

ב. הוכיחו, שאם אין לכם מידע מדויק על ההערכה של השחקן השני, אז כל התחכמות עלולה לתת לכם פרוסה ששווה עבורכם פחות מ-50% מהערך הכולל שלכם.

* ג. אתם חולקים עוגה עם עוד 7 אנשים בעזרת אלגוריתם אבן-פז. כמה מתוכם אתם צריכים להכיר (כלומר, להשיג מידע מדויק על ההערכות שלהם) כך שתהיה לכם התחכמות "בטוחה" - התחכמות שאף-פעם לא מקטינה את הערך שלכם?

שאלה 3: חלוקה עם זכויות לא-שוות

נתונים n שותפים בקרקע, שלכל אחד מהם יש חלק אחר בקרקע: לאדם i יש חלק t_i מהקרקע, כאשר הסכום של כל ה- t_i הוא 1. לדוגמה, ייתכן שלשחקן א מגיעה $1/7$ מהקרקע, לשחקן ב מגיעות $2/7$, ולשחקן ג מגיעות $4/7$.

א. תנו הגדרה הגיונית למושג "חלוקה פרופורציונלית" במצב זה, בעזרת הפונקציה V_i (פונקציית הערך של שחקן i), ובעזרת הפרמטרים t_i .

- ב. כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית לפי ההגדרה של סעיף א. הדגימו את פעולת האלגוריתם, הוכיחו את נכונותו, וחשבו את סיבוכיות זמן-הריצה שלו.
- ג. כיתבו אלגוריתם כנ"ל, שסיבוכיות זמן הריצה שלו היא $O(2^n \log(D))$, כאשר D הוא המכנה המשותף של כל השברים t_i (בדוגמה למעלה $D=7$).

שאלה 4: חלוקה סופר-פרופורציונלית

חלוקת-עוגה נקראת סופר-פרופורציונלית אם כל שחקן מקבל פרוסה ששווה עבורו יותר מ 1 חלקי- n משווי העוגה כולה.

- א. הראו דוגמה לחלוקה סופר-פרופורציונלית בין שלושה אנשים.
- ב. הראו דוגמה שבה לא קיימת חלוקה סופר-פרופורציונלית לשלושה אנשים. הוכיחו את תשובתכם.
- ג. * נתונה בעיית חלוקת עוגה לשלושה אנשים. נתון שיש שני אנשים כלשהם (נניח עמי ותמי), שמייחסים ערך שונה לפרוסת-עוגה כלשהי X . כתבו אלגוריתם המקבל כקלט את הפרוסה X , ומוצא חלוקה סופר-פרופורציונלית. רמז: אפשר להעזר באלגוריתם של שאלה 3 (גם אם לא פתרם אותה).

* שאלה 5: חלוקת עוגה: אלגוריתם לעומת בינה מלאכותית

נתונה קרקע המורכבת משישה איזורים סמוכים, שיש לחלק בין שלושה שחקנים. הערכים שהם מייחסים לאיזורים השונים (לפי הסדר) הם:

- עמי: 5, 5, 5, 5, 5, 5.
- תמי: 10, 10, 3, 3, 2, 2.
- רמי: 2, 2, 3, 3, 10, 10.

א [חימום]. תארו את אופן חלוקת העוגה לפי אלגוריתם "המפחית האחרון". סדר השחקנים הוא: עמי – תמי – רמי, והחיתוך מתבצע מימין לשמאל. כל השחקנים משחקים לפי ההוראות. פרטו את שלבי החישוב ואת התוצאה הסופית – איזה איזורים מקבל כל שחקן.

ב. השתמשו בכלי בינה מלאכותית כלשהו לבחירתכם (`gpt`, `claude`, `copilot`...) כדי למצוא חלוקה הוגנת של העוגה. בקשו מהכלי למצוא חלוקות עם מאפיינים שונים: פרופורציונלית, ללא-קנאה, קשירה או לא קשירה; וכן בקשו ממנו "חלוקה הוגנת" בלי הגדרות. השוו את התוצאות שקיבלתם לתוצאות של סעיף א. האם לדעתכם כלי בינה מלאכותית בימינו יכולים לשמש למציאת חלוקה הוגנת?

הגישו קובץ הכולל את כל השיחה, או קישור-שיתוף המאפשר לראות את השיחה.