חלוקת חדרים בדירה שכורה

נניח שאתם שוכרים, יחד עם עוד שני שותפים, דירה שעולה 3000 שקלים לחודש. בדירה יש שלושה חדרים, כך שכל שותף צריך לקבל חדר. אבל החדרים לא שוים. לדוגמה, יש סלון גדול הפונה לים, חדרון הפונה לכביש, והחדר השלישי הוא מרתף טחוב. אם שכר הדירה יתחלק שווה בשווה בין הדיירים, אז ודאי שתהיה קנאה – הדייר שיקבל את המרתף בוודאי יקנא בדייר שגר בסלון. אבל אם המחיר של המרתף יהיה נמוך משמעותית מהמחיר של הסלון, אז ייתכן שמי שיקבל אותו לא יקנא (כלומר, ברור שהוא היה מעדיף לגור בסלון, אבל הוא מעדיף מרתף בזול על-פני סלון ביוקר). האם **תמיד** אפשר למצוא חלוקה כלשהי של שכר־הדירה בין הדיירים, כך שלא תהיה קנאה?

בעיה זו נקראת **בעיית חלוקת החדרים.** באנגלית היא נקראת בשם פיוטי יותר: Rental Harmony.
היא מקרה פרטי של בעיית חלוקת חפצים עם כסף, עם המאפיינים הבאים:

- מספר השחקנים שווה למספר החפצים;
- כל שחקן צריך לקבל חפץ (חדר) אחד בדיוק;
- סכום התשלומים של השחקנים צריך להיות מספר קבוע מראש (שכר־הדירה הכולל).

פתרון של בעיית חלוקת־חדרים מורכב משני חלקים:

- **השמה (assignment)** – התאמה של חדר אחד ויחיד לכל שחקן. התאמה תסומן X, והחדר המתאים לשחקן i יסומן X_i.
- **תמחור (pricing)** – וקטור המתאים מספר ממשי (מחיר) לכל חדר. תמחור יסומן p, והמחיר של חדר j יסומן $p(j)$. שכר־הדירה הכולל יסומן R, וצריך להתקיים התנאי: $\text{sum}_j\ p(j) = R$.

חלוקה ללא־קנאה היא זוג של השמה (X) ותמחור (p), כך שכל שחקן i מעדיף את החדר המיועד לו X_i במחיר $p(X_i)$, על־פני כל חדר אחר Y במחיר $p(Y)$.

אי-אפשר להשתמש באלגוריתם המכרז כדי לפתור את בעיית חלוקת החדרים, כי הוא עלול לתת לשחקן אחד שני חדרים או יותר, ולשחקן אחר לא לתת אף חדר. לכן אנחנו צריכים אלגוריתם חדש.

קיום חלוקה ללא קנאה

ראשית, נוכיח קיום של חלוקה ללא־קנאה. לא נניח שהשחקנים הם קוואזיליניאריים; נניח רק שיש להם **פונקציית־ביקוש (demand function)**: לכל תמחור, כל שחקן יכול להצביע על חדר אחד (או יותר) שהוא הכי רוצה, במחירים הנתונים. לדוגמה, עבור התמחור: "סלון=1200, חדרון=1000, מרתף=800". שחקן אחד יכול להגיד "במחירים הנתונים, אני הכי רוצה את הסלון". שחקן רשאי להיות אדיש בין שני חדרים או יותר, לדוגמה, הוא יכול להגיד "במחירים האלה, אני רוצה את הסלון או את החדרון – לא אכפת לי איזה מהם – רק אל תתנו לי את המרתף". היתרון של אלגוריתם המסתמך על פונקציות־ביקוש הוא, שלרוב האנשים קל יותר להגיד איזו אפשרות הם מעדיפים, מלייחס ערך מדוייק לכל חפץ.

לכל שחקן קוואזיליניארי יש פונקציית־ביקוש: השחקן פשוט בוחר את החדר שנותן לו תועלת גדולה ביותר במחירים הנתונים. פורמאלית, שחקן קוואזיליניארי עם פונקציית־ערך v בוחר את החדר j הממקסם את ההפרש: $v(j)-p(j)$. אולם ההנחה של פונקציות־ביקוש היא כללית יותר.

כשלשחקנים ישנן פונקציות־ביקוש כלליות, לא תמיד קיימת חלוקה ללא־קנאה. לדוגמה, ייתכן שכל השחקנים רוצים רק את הסלון, בכל מחיר. במקרה זה, מי שלא מקבל את הסלון תמיד יקנא במי שמקבל את הסלון. אנחנו נוכיח שקיימת חלוקה ללא־קנאה אם קיים "מחיר גבוה מדי", בהתאם להגדרה הבאה:

הגדרה. בבעיית חלוקת־חדרים, **מחיר גבוה מדי** הוא מספר חיובי כלשהו T, כך שאם המחיר של חדר כלשהו j הוא לפחות T, והמחיר של חדר אחר כלשהו הוא לכל היותר 0, אז אף שחקן לא בוחר בחדר j.

אם השחקנים קוואזיליניאריים, אז תמיד קיים מחיר גבוה מדי, ואפשר למצוא מחיר כזה בקלות: נשאל כל שחקן מה הערך הכספי שהוא מייחס לכל חדר, ונחשב את ההפרש הגדול ביותר בין ערכים של שני חדרים שונים עבור אותו שחקן. קל לראות שההפרש הזה הוא מחיר גבוה מדי בהתאם להגדרה.

האלגוריתם שנראה בסעיף זה מסתמך על אלגוריתם של פרנסיס סו (Francis Edward Su). האלגוריתם מציג בפני השחקנים תמחורים שונים, ושואל אותם: "אם מחירי החדרים יהיו כאלה, איזה חדר תעדיפו לקבל?". אם כל שחקן עונה תשובה שונה, אז הצלחנו – מצאנו חלוקה ללא קנאה – חלוקה שבה כל שחקן מקבל בדיוק את החבילה (חדר+מחיר) שהוא הכי רוצה. תמחור שבו כל שחקן רוצה חדר אחר נקרא בקיצור **תמחור ללא־קנאה**.

כדי למצוא תמחור ללא־קנאה, נשתמש ב**למה של שפרנר** – אותה למה שהשתמשנו בה כדי להוכיח קיום של חלוקת־עוגה ללא־קנאה (מומלץ לחזור על ההרצאה כדי לרענן את זכרונכם). בגדול, התהליך הוא כזה:

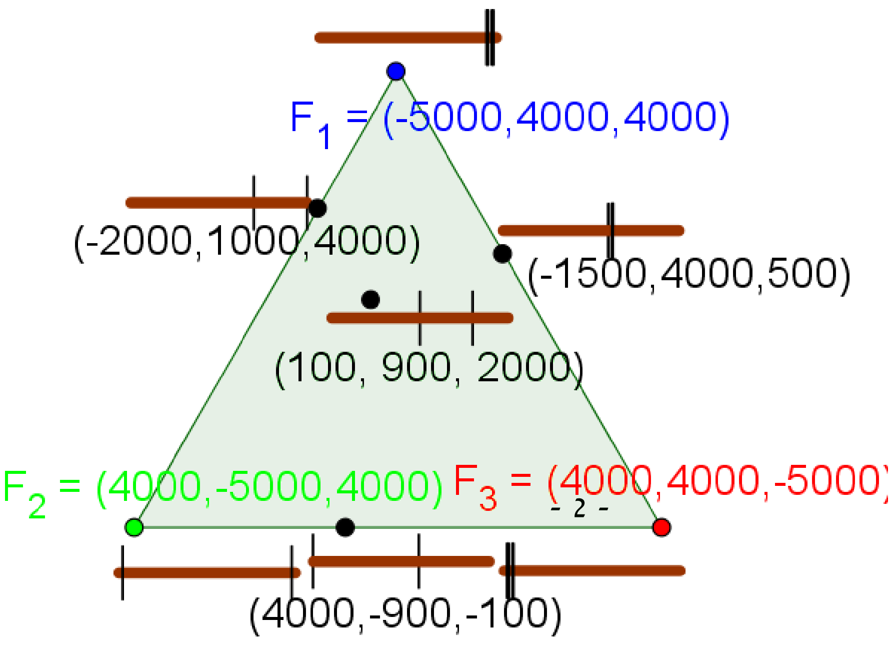
- נגדיר סימפלקס המייצג את כל התמחורים האפשריים;
- נבצע מישלוש – נחלק את הסימפלקס הגדול לסימפלקסונים קטנים;
- נשייך כל קודקוד של המישלוש לאחד השחקנים;
- נתייג כל קודקוד של המישלוש במספר המייצג את החדר, שהשחקן המשוייך מעדיף;
- נמצא **סימפלקסון מגוון** – סימפלקסון שבו כל התיוגים שונים.

סימפלקסון מגוון נותן לנו תמחור שהוא "כמעט" ללא־קנאה – עד־כדי גודל הצלע של הסימפלקסון. אם גודל הצלע הוא מספיק קטן (נניח, אגורה אחת), אז אפשר להניח שלא תהיה קנאה – כי השחקנים אינם מקפידים על הבדלים של אגורה אחת בשכר הדירה.

משפט. לכל n שחקנים עם פונקציות־ביקוש, אם קיים מחיר גבוה מדי, אז קיים תמחור כמעט־ללא־קנאה.
הוכחה. נסמן ב־R את שכר־הדירה הכולל, ונסמן ב־T מחיר גבוה מדי כלשהו, שגודלו לפחות R (ההנחה ש T≥R היא ללא הגבלת הכלליות, כי אם T הוא מחיר גבוה מדי, אז גם כל מספר גדול יותר הוא מחיר גבוה מדי). ניקח סימפלקס עם n קודקודים, הכולל את כל הנקודות עם קואורדינטות בין 0 ל־1, שסכום הקואורדינטות שלהן הוא 1. נתאים לכל נקודה בסימפלקס $(x_1, \dots, x_n)$ תמחור $(p_1,\dots,p_n)$, כאשר לכל j:

$$p_j = T - (Tn-R) * x_j$$

באיור למטה ניתן לראות דוגמה שבה n=3, T=4000, R=3000. הקודקודים הראשיים של הסימפלקס מסומנים ב: F_1, F_2, F_3.



סכום הקואורדינטות של כל נקודה בסימפלקס הוא 1, ולכן סכום המחירים בכל וקטור הוא R:

$$\begin{aligned} sum_i p_i &= n*T - (Tn-R)*sum_i x_i \\ &= n*T - (Tn-R) = R. \end{aligned}$$

שימו לב: בחלק מהוקטורים ישנם מחירים שליליים – נתייחס לבעיה זו בהמשך (סעיף).

נבצע **מישלוש** של הסימפלקס – נחלק אותו לסימפלקסונים קטנים, נניח, בגודל של אגורה אחת. נחלק את קודקודי המישלוש בין השחקנים, כך שבכל סימפלקסון, יש קודקוד אחד לכל שחקן. עבור כל תמחור שנמצא על קודקוד של המישלוש, נשאל את השחקן המשוייך לו "איזה חדר אתה מעדיף?". תשובת השחקן היא מספר בין 1 ל־n; נתייג את הקודקוד במספר זה.

אנחנו טוענים, שהתיוג המתקבל מתשובות השחקנים הוא **תיוג־שפרנר**, כלומר, בכל פאה הנמצאת בין הקודקודים הראשיים $F_{i1}, \ldots, F_{ik}$, מופיעות רק התוויות $i1, \ldots, ik$.

אכן, בכל קודקוד ראשי F_j, המחיר של חדר j הוא לכל היותר 0:

$$T-(Tn-R)*1 = R-(n-1)T \le R-T \le 0$$

המחיר של כל חדר אחר הוא בדיוק T:

$$T-(Tn-R)*0 = T$$

כיוון ש־T הוא מחיר גבוה מדי, כל השחקנים בוחרים את חדר j, ולכן התווית היא j.

בתוך כל פאה של הסימפלקס, הערכים של x_j שונים מאפס עבור האינדקסים j המתאימים לקודקודי הפאה, ושווים לאפס עבור כל האינדקסים האחרים. לכן, מחירי החדרים המתאימים לאינדקסים האחרים הם בדיוק T, ומחירי החדרים המתאימים לקודקודי הפאה קטנים מ־T. כיוון שיש לפחות חדר אחד שמחירו T, ו־ $T \ge R$, חייב להיות לפחות חדר אחד שמחירו לכל היותר אפס. לכן, לפי הגדרת מחיר גבוה מדי, כל השחקנים בוחרים חדרים שמחיריהם קטנים מ־T, ולכן כל תווית זהה לאחת התוויות שבקודקודי הפאה. עד כאן הוכחת הטענה.

לפי הלמה של שפרנר, קיים סימפלקסון מגוון, ולכן קיים תמחור כמעט־ללא־קנאה. ***

כמו בבעיית חלוקת העוגה, גם כאן ניתן להוכיח קיום תמחור שהוא ממש ללא־קנאה, בהנחה שפונקציות־הביקוש של השחקנים הן **רציפות** (– אם שחקן א בוחר את חדר ב עבור סדרה מתכנסת של תמחורים, אז שחקן א בוחר את חדר ב גם עבור הגבול של סדרה זו).

משפט. לכל n שחקנים עם פונקציות־ביקוש **רציפות**, אם קיים מחיר גבוה מדי, אז קיים תמחור ללא־קנאה.

חישוב חלוקה ללא קנאה – שחקנים קוואזיליניאריים

הוכחנו שקיימת חלוקה ללא קנאה. אבל איך מחשבים אותה? ניתן להשתמש ישירות בהוכחה של המשפט מהסעיף הקודם: לבנות את הסימפלקס, לחלק לסימפלקסונים קטנים, להציג את התמחורים לשחקנים, לשאול אותם איזה חדר הם רוצים, ולהמשיך עד שמוצאים סימפלקסון מגוון. כך נקבל חלוקה כמעט־ללא־קנאה. אם הסימפלקסון מספיק קטן, החלוקה תהיה ממש ללא־קנאה עבור כל שחקן סביר. מימוש יפה ושימושי של אלגוריתם זה ניתן למצוא באתר של הניו־יורק טיימס.[1] הבעיה היא, שבמקרה הגרוע, מציאת סימפלקסון מגוון עשויה לקחת זמן מעריכי במספר השחקנים – סדר גודל של מספר הקודקודים של המישלוש.

---

1 https://www.nytimes.com/interactive/2014/science/rent-division-calculator.html נבדק ב־4.8.22.

בסעיף זה נראה אלגוריתם שונה, המוצא חלוקה ללא־קנאה בזמן פולינומיאלי במספר השחקנים. האלגוריתם מתייחס למקרה הפרטי שבו כל השחקנים הם **קוואזיליניאריים**. כלומר, כל שחקן יודע להעריך כמה בדיוק שווה עבורו כל חדר בדירה, בשקלים לחודש. במצב זה, הקלט לאלגוריתם הוא מטריצה בגודל n על n, כאשר האיבר בשורה i ובעמודה j הוא הערך הכספי ששחקן i מייחס לחדר j. האלגוריתם פועל בשני שלבים:

- שלב א: מציאת השמה X של דיירים לחדרים.
- שלב ב: חישוב תמחור p, כך שהזוג (X,p) הוא חלוקה ללא־קנאה.

לפני שנציג את האלגוריתם, נסביר באופן אינטואיטיבי את הרעיון שמאחריו.

נניח שיש לנו השמה כלשהי X של חדרים לשחקנים. לכל שני שחקנים i,j, אנחנו יכולים לחשב את רמת הקנאה של א כלפי ב באופן הבא:

$$E(i,j) = V_i(X_j) - V_i(X_i).$$

אם עכשיו אנחנו גובים מחיר כלשהו p משחקן i, אז רמת הקנאה של i גדלה ב-p ורמת הקנאה של j קטנה ב-p; אם אנחנו גובים מחיר כלשהו p משחקן j, אז רמת הקנאה של i קטנה ב-p ורמת הקנאה של j גדלה ב-p. במילים אחרות, עבור שחקנים קוואזיליניאריים, התשלומים "מעבירים" קנאה בין שחקנים. כדי להגיע לחלוקה ללא קנאה, אנחנו צריכים שרמות-הקנאה של כל השחקנים יהיו לכל היותר 0. לשם כך אנחנו צריכים להעביר קנאה משחקנים עם קנאה חיובית לשחקנים עם קנאה שלילית, כך שהקנאה תתאזן.

לדוגמה: נניח שיש שני שחקנים, שחקן א מקנא בשחקן ב ברמה +6 ושחקן ב מקנא בשחקן א ברמה -8 (כלומר, הוא לא מקנא בכלל אלא חושב שהחדר שלו טוב יותר ב-8 מהסל של א). אז אם נגבה 7 משחקן ב, רמת הקנאה של שני השחקנים תהיה -1. כיוון שרמת הקנאה של שני השחקנים קטנה מאפס, החלוקה תהיה ללא קנאה. אבל היא אפילו יותר טובה מ"סתם" חלוקה ללא קנאה: כל שחקן חושב שיש לו יתרון של 1. קל לראות, שקנאה של -1 היא הקנאה הנמוכה ביותר שאפשר להשיג עבור שני השחקנים יחד: כל תמחור אחר יגדיל את הקנאה של אחד השחקנים מעל -1.

כדי למצוא תמחור ממזער-קנאה בגרפים עם יותר משני שחקנים, נגדיר את **גרף הקנאה המסומן** של ההשמה. זהו גרף מכוון מלא, שבו הצמתים הם השחקנים. יש קשת בין כל שחקן i לכל שחקן j, שהמשקל שלה הוא הקנאה E(i,j) תחת ההשמה הנתונה. אנחנו מתעניינים **במעגלים מכוונים** בגרף הקנאה; נגדיר את **המשקל** של מעגל מכוון בגרף, כסכום המשקלים של הקשתות בגרף.

טענת עזר. נתונה השמת חדרים כלשהי. אם גובים סכום-כסף כלשהו משחקן כלשהו, אז המשקלים של כל המעגלים המכוונים לא משתנים.

ראינו למעלה דוגמה לנכונות הטענה: שחקן א מקנא בשחקן ב ברמה +6 ושחקן ב מקנא בשחקן א ברמה -8; משקל המעגל א-ב-א הוא -2. כשגובים 7 משחקן ב, רמת הקנאה של שני השחקנים היא -1, ומשקל המעגל הוא עדיין -2.

הוכחה. נניח שגובים p משחקן j כלשהו. הקשתות בגרף הקנאה מושפעות באופן הבא:

א. משקלה של כל קשת היוצאת משחקן j גדל ב-p (כי השחקן מקנא יותר).

ב. משקלה של כל קשת הנכנסת לשחקן j קטן ב-p (כי מקנאים בו פחות).

ג. משקלה של כל קשת אחרת לא משתנה.

בכל מעגל מכוון בגרף, הכולל את שחקן j, יש בדיוק קשת אחת מסוג א וקשת אחת מסוג ב. בכל מעגל שאינו כולל את j, יש רק קשתות מסוג ג.

לכן, בשני המקרים, המשקל הכולל של המעגל אינו משתנה. ***

נתמקד לרגע במעגל אחד מסוים בגרף. כיוון שהמשקל הכולל של המעגל הוא קבוע, התוצאה ההוגנת ביותר שאפשר להשיג ע"י תשלומים היא, שהקנאה תתחלק באופן שווה בין השחקנים במעגל. במצב זה, הקנאה של כל שחקן במעגל תהיה שווה **למשקל הממוצע** של המעגל.

הגדרה. בהינתן גרף מכוון כלשהו:

א. **המשקל הממוצע (mean weight או average weight)** של מעגל מכוון בגרף הוא סכום המשקלים על קשתות המעגל, מחולק במספר הקשתות.

ב. משקל המעגל הממוצע הגדול ביותר (**מממג"ב**, maximum average cycle weight), הוא המקסימום על-פני כל המעגלים המכוונים, של המשקל הממוצע של המעגל.

משפט. נתונה השמה כלשהי של חדרים לשחקנים. יהי W המממג"ב של גרף-הקנאה.

א. לכל תמחור אפשרי, קיים שחקן שרמת הקנאה שלו לפחות W.

ב. קיים תמחור כלשהו, שבו רמת הקנאה של כל שחקן היא לכל היותר W; ניתן למצוא תמחור כזה בזמן פולינומיאלי.

בדוגמה למעלה $W=-1$, ואכן הראינו תמחור שבו רמת הקנאה של שני השחקנים היא לכל היותר W.

הוכחה.

א. לפי טענת-עזר קודמת, בכל תמחור אפשרי, המשקל הממוצע של כל מעגל נשאר ללא שינוי. בפרט, קיים מעגל כלשהו שהמשקל הממוצע שלו הוא W. לפי כלל שובך היונים, יש קשת אחת לפחות שהמשקל שלה הוא לפחות W. קשת זו מייצגת שחקן שרמת הקנאה שלו בשחקן אחר (שבא אחריו במעגל) היא לפחות W.

ב. קל להוכיח את סעיף ב כשהגרף הוא מעגל מכוון יחיד; מאתגר יותר להוכיח אותו לגרף כללי. לשם כך ניצור גרף-עזר, שבו המשקל של כל קשת הוא כמשקלה בגרף המקורי פחות W. כעת, המשקל הממוצע של כל מעגל קטן ב-W. לכן, המשקל הממוצע של כל מעגל הוא לכל היותר 0. במילים אחרות: בגרף-העזר אין מעגלים עם משקל חיובי.

נגדיר, עבור כל צומת j בגרף-העזר, את **המסלול עם המשקל הגדול ביותר** היוצא מהצומת. מסלול זה מוגדר היטב לכל צומת, כי בגרף-העזר אין מעגלים עם משקל חיובי. נסמן את משקל מסלול זה ב q_j. ניתן לשחקן j "סובסידיה" בגובה q_j. (אם אתם שואלים את עצמכם: מי משלם את הסובסידיה? ומי ישלם את שכר-הדירה? חכו בסבלנות – עוד מעט נסביר).

נוכיח, שלאחר מתן הסובסידיות, רמת הקנאה של כל שחקן בכל שחקן אחר היא לכל היותר W.

ראשית, נבדוק את רמת הקנאה בגרף-העזר. לכל שני שחקנים i,j, רמת הקנאה קטנה בשיעור q_i-q_j. כזכור q_i הוא המשקל הגדול ביותר של מסלול היוצא מ-i. אחד המסלולים היוצאים מ-i הוא מסלול

היוצא מ-i אל j, ואז ממשיך במסלול עם המשקל הגדול ביותר היוצא מ-j. המשקל של המסלול דרך j הוא: E(i,j)+qj. מכאן נובע ש:

```
qi >= E(i,j) + qj
```

מכאן, שרמת הקנאה החדשה בגרף העזר היא:

```
E(i,j) - qi + qj <= 0
```

כלומר בגרף העזר אין בכלל קנאה. אבל בגרף המקורי, המשקל של כל קשת גדול ב-W; לכן בגרף המקורי, רמת הקנאה בין כל שני שחקנים היא לכל היותר W.

הנחנו שכל שחקן מקבל סובסידיה, אבל במציאות השחקנים צריכים לשלם כסף (שכר-הדירה) ולא לקבל כסף. אולם אפשר לפתור את הבעיה הזו בקלות ע"י גביית סכום זהה מכל השחקנים – הדבר אינו משפיע כלל על רמת הקנאה. נניח שהסכום הכולל ששילמנו לשחקנים כ"סובסידיה" הוא S, ושכר-הדירה הוא R. יש לנו "גירעון" של R+S; לכן נגבה מכל שחקן תשלום של (R+S) חלקי n.

כדי למצוא את התמחור q, צריך למצוא את הממממג"ב של גרף הקנאה. ישנם אלגוריתמים פולינומיאליים לכך (ראו בויקיפדיה, Maximum mean cycle weight), ולכן גם התמחור הממזער את הקנאה הגדולה ביותר ניתן לחישוב בזמן פולינומיאלי. ***

עד עכשיו הנחנו שההשמה נתונה. אבל איך אפשר למצוא השמה שיש לה תמחור ללא קנאה? מהמשפט למעלה נובע:

תוצאה. נתונה השמה כלשהי של חדרים לשחקנים. קיים תמחור כלשהו שאיתו ההשמה ללא קנאה, אם ורק אם בגרף הקנאה של ההשמה אין מעגלים עם משקל חיובי.

הוכחה. אין מעגלים עם משקל חיובי, אם ורק אם הממממג"ב קטן או שווה 0 (לפי הגדרה), אם ורק אם יש תמחור שאיתו הקנאה של כל שחקן קטנה או שווה 0 (לפי המשפט).

אם כך, אנחנו צריכים למצוא השמה שבגרף-הקנאה שלה אין מעגלים עם משקל חיובי. כדי לעשות זאת, ניעזר במשפט הבא.

משפט. גרף-הקנאה של השמה כלשהי הוא ללא מעגלים עם משקל חיובי, אם ורק אם ההשמה ממקסמת את סכום הערכים.

הוכחה. כיוון א: נניח שהשמה כלשהי (השמה X) ממקסמת את סכום הערכים. נתבונן במעגל מכוון כלשהו בגרף-הקנאה. המשקל של כל קשת במעגל הוא הפרש בין שני גורמים: ערך של שחקן לחדר של השחקן הבא אחריו במעגל, פחות ערך של שחקן לחדר של עצמו. לכן סכום כל משקלי הקשתות במעגל הוא הפרש בין שני גורמים: סכום הערכים של השחקנים לחדרים של השחקנים הבאים אחריהם, פחות סכום הערכים של השחקנים לערכים של עצמם. הגורם הראשון מייצג השמה חלופית (השמה Y), שבה כל שחקן במעגל מקבל את החדר של השחקן הבא אחריו במעגל (והחדרים של שאר השחקנים לא משתנים). לפי ההנחה, סכום הערכים של השמה X גדול או שווה מסכום הערכים של השמה Y. לכן ההפרש בין שני הגורמים קטן או שווה אפס; ומכאן שמשקל המעגל קטן או שווה אפס. הדבר נכון לכל מעגל מכוון; לכן אין מעגלים עם משקל חיובי.

כיוון ב: נניח שהשמה כלשהי (השמה X) לא ממקסמת את סכום הערכים. נתבונן בהשמה אחרת כלשהי (השמה Y), עם סכום ערכים גדול יותר. ניתן לעבור מהשמה X להשמה Y ע"י אוסף של החלפות חדרים על-גבי מעגלים, באופן הבא: ניקח שחקן כלשהו (i) שקיבל חדר כלשהו (r) בהשמה X, וחדר אחר (s) בהשמה Y. נבדוק מיהו השחקן שקיבל את חדר s בהשמה X: נניח שזה שחקן j. נסמן חץ משחקן i לשחקן j. עכשיו נבדוק איזה חדר קיבל שחקן j בהשמה Y, ומי קיבל את החדר הזה בהשמה X, ונסמן חץ משחקן j לשחקן ההוא. נמשיך לסמן חיצים בין שחקנים באותו אופן. כיוון שהגרף סופי, נגיע בסופו של דבר לשחקן שכבר היינו בו, ובכך נסגור מעגל-החלפה. אם יש שחקן כלשהו מחוץ למעגל שקיבל חדר שונה בשתי ההשמות, אז נתחיל ממנו ונסגור עוד מעגל-החלפה, וכן הלאה, עד שנכסה את כל השחקנים שקיבלו חדר שונה בשתי ההשמות.

כפי שהוסבר בכיוון א, המשקל של כל מעגל־החלפה בגרף־הקנאה שווה בדיוק להפרש בין סכומי־הערכים של ההשמה אחרי ולפני ההחלפה. לכן, ההפרש בין סכום הערכים של השמה Y לבין סכום־הערכים של השמה X שווה לסכום כל המשקלים של מעגלי־ההחלפה. לפי ההנחה, סכום הערכים של השמה Y גדול מסכום הערכים של השמה X; לכן, לפחות לאחד ממעגלי־ההחלפה האלה יש משקל חיובי. ***

משילוב שני המשפטים הקודמים נובע:

משפט. לכל השמה X של חדרים לשחקנים קוואזיליניאריים, שני התנאים הבאים שקולים:
(א) ההשמה X ממקסמת סכום ערכים;
(ב) קיים תמחור p שעבורו החלוקה (X,p) היא ללא־קנאה.

המשפט הזה מאד מעניין בפני עצמו. הוא מראה, שבבעיית חלוקת־חדרים, יעילות אוטיליטרית שקולה להוגנות. זאת, בניגוד מוחלט לבעיית החלוקה בלי כסף (שלמדנו בפרק 3). שם ראינו כמה דוגמאות לכך, שחלוקה אוטיליטרית יכולה להיות מאד לא־הוגנת. השימוש בכסף פותר את הניגוד בין יעילות להוגנות! לפי המשפט, ניתן למצוא חלוקה ללא־קנאה בעזרת האלגוריתם הבא:

א. מצא השמה X הממקסמת את סכום הערכים של השחקנים.
ב. חשב וקטור־מחירים p כך שהחלוקה (X,p) היא ללא קנאה.

כעת נסביר בפירוט, איך לבצע כל אחד מהשלבים.

בשלב א, עלינו למצוא השמה של אנשים לחדרים, הממקסמת את סכום הערכים. אם יש n אנשים ו־n חדרים, אז מספר ההשמות השונות הוא n! (n עצרת), וכאשר n גדול, אין זה מעשי לבדוק את כל ההשמות. כדי למצוא פתרון מהיר יותר לבעיה, נציג אותה כבעיה בתורת הגרפים. בהינתן מטריצת הקלט, נבנה **גרף דו־צדדי**, שבו:

- הקודקודים בצד אחד הם השחקנים;
- הקודקודים בצד השני הם החדרים;
- יש צלע בין כל שחקן לכל חדר, ומשקלה שווה לערך שהשחקן מייחס לחדר.

להזכירכם, **שידוך (matching)** בגרף הוא קבוצה של צלעות, כך שכל קודקוד נוגע לכל היותר בצלע אחת מהקבוצה. **שידוך מושלם (perfect matching)** הוא שידוך שבו כל קודקוד נוגע בדיוק בצלע אחת. כל השמה של n השחקנים ל־n החדרים היא שידוך מושלם בגרף הקלט.

המשקל של שידוך מסויים הוא סכום משקלי הצלעות המשתתפות בשידוך. השמה הממקסמת את סכום ערכי השחקנים היא שידוך שמשקלו גדול ביותר – היא **שידוך משקל־מקסימום (maximum-weight matching)** – בגרף הקלט. במטריצת הקלט למעלה, המספרים המודגשים מייצגים שידוך משקל־מקסימום; המשקל הוא 115.

בעיית מציאת שידוך־משקל־מקסימום נקראת גם **בעיית ההשמה (assignment problem)**. יש לה שימושים רבים בתעשייה, מעבר לחלוקה הוגנת. לדוגמה, תחנת מוניות מסויימת מקבלת בו־זמנית 3 הזמנות לנסיעה. לתחנה יש 3 מוניות הנמצאות במקומות שונים. לכל זוג של מונית+נוסע ישנה עלות, הנובעת מהזמן שייקח למונית להגיע אל הנוסע. התחנה צריכה להתאים מונית לכל נוסע, כך שסכום זמני ההגעה יהיה מינימלי. בבעיית חלוקת החדרים, אנחנו מחפשים השמה שבה סכום הערכים הוא **מקסימלי**, אבל ההבדל הזה הוא טכני בלבד – אם יש לנו אלגוריתם הפותר את בעיית ההשמה עם סכום מינימלי, אנחנו יכולים פשוט להריץ אותו עם ערכים שליליים, ונקבל פתרון עם סכום מקסימלי.

ישנם אלגוריתמים רבים לפתרון בעיית ההשמה, למשל **האלגוריתם ההונגרי** (Hungarian Algorithm / Munkres Algorithm / Kuhn Algorithm). אלגוריתמים לבעיית ההשמה נלמדים בקורס על אלגוריתמים בתורת הגרפים. בקורס הנוכחי, אנחנו מתייחסים לאלגוריתמים האלה כ"קופסה שחורה". כדי למצוא השמה הממקסמת את סכום הערכים, פשוט נבנה את הגרף הדו־צדדי המייצג את הקלט, ונפעיל את אחד האלגוריתמים. לשם המחשה, נראה קוד פשוט בשפת פייתון הפותר בעיה עם שלושה אנשים ושלושה חדרים (במקום המספרים 111, 222, 333 וכו' יש להכניס את הערכים האמיתיים של האנשים לחדרים):

```
import networkx as nx
G=nx.Graph()  # Construct an empty graph:
G.add_edge('person 1','room 1' ,weight=111)
G.add_edge('person 1','room 2' ,weight=222)
G.add_edge('person 1','room 3' ,weight=333)
G.add_edge('person 2','room 1' ,weight=444)
...
...
...
G.add_edge('person 3','room 3' ,weight=999)
print(nx.max_weight_matching(G))
```

כמובן, בכל שפה ישנן דרכים אחרות לביצוע חישוב זה; הבאנו את הקוד רק כדי להמחיש את השימוש בבעיית שידוך־משקל־מקסימום כקופסה שחורה.

בשלב ב, לאחר שמצאנו השמה ממקסמת־סכום־ערכים, אנחנו צריכים לקבוע מחיר לכל חדר, כך שההשמה תהיה ללא קנאה. בנוסף, אנחנו צריכים לוודא שסכום המחירים שווה בדיוק לשכר־הדירה. איך נעשה את זה?

דרך אחת היא להיעזר בהוכחת המשפט מלמעלה: כאשר בגרף אין מעגלים, ניתן להגדיר לכל שחקן (צומת בגרף) את משקל המסלול הגדול ביותר היוצא מאותו שחקן. אפשר לחשב משקל זה בזמן פולינומיאלי בעזרת אלגוריתם בלמן-פורד (Bellman-Ford). ניתן לכל שחקן את הסכום הזה כ"סובסידיה"; נחשב את הגירעון (סכום הסובסידיות + שכר הדירה); ונגבה מכל שחקן את הגירעון חלקי מספר השחקנים.

דרך שניה למצוא תמחור ללא קנאה היא לפתור **בעיית תיכנות ליניארי**. יש לנו n משתנים – לכל חדר j יש משתנה p_j המייצג את מחיר החדר. האילוצים הם שהחלוקה צריכה להיות ללא־קנאה, וססכום המחירים צריך להיות שווה למחיר הדירה. בתוכנית למטה, הביטוי `d[j]` מציין את הדייר המשוייך לחדר מספר j בהשמה הממקסמת־סכום־ערכים (ההשמה שמצאנו בשלב א):

$V_{d[j]}(j) - p_j \geq V_{d[j]}(i) - p_i$ For i, j in 1,...,n

$Sum_{j=1..n}\ p_j = R$

ניתן לפתור בעיה זו בעזרת כל ספריה לפתרון תוכניות ליניאריות. שימו לב, שבתוכנית הזאת אין פונקציית מטרה – היא מוצאת תמחור ללא־קנאה כלשהו.

עכשיו, כשיש בידינו אלגוריתם בסיסי למציאת חלוקת־חדרים ללא־קנאה, אפשר לפתור בעיות מתקדמות יותר.

תמחור מיטבי

בבעיית חלוקת חדרים יכולים להיות הרבה תמחורים שונים. לדוגמה, בבעייה הבאה:

דייר	מרתף	חדר	סלון
א:	25	40	**35**
ב:	40	**60**	35
ג:	**20**	40	25

התאים המודגשים מציינים השמה ממקסמת־סכום־ערכים. הנה שני תמחורים שונים, שכולם ללא קנאה:

- סלון=30, חדר=45, מרתף=25
- סלון=33.33, חדר=43.33, מרתף=23.33

התמחור הראשון טוב יותר לדייר א; התמחור השני טוב יותר לדיירים ב, ג.

איך נדע באיזה תמחור לבחור? – אפשרות לא־כל־כך הוגנת היא לתת לאחד הדיירים לבחור את התמחור שהוא מעדיף. הדייר הנבחר יוכל לעשות זאת על־ידי פתרון בעיית מיטוב ליניארית. לדוגמה, אם הדייר הנבחר הוא דייר א, שקיבל את הסלון, אז הוא יפתור את התוכנית הליניארית הבאה:

Minimize p_{salon}

Subject to:

$V_{d[j]}(j) - p_j \geq V_{d[j]}(i) - p_i$ For i, j in 1,...,n

$Sum_{j=1..n}\ p_j = R$

התוכנית למעשה מוצאת את התמחור, שבו מחיר הסלון הוא הנמוך ביותר, תחת האילוץ שהתמחור הוא ללא־קנאה.

פתרון הוגן יותר הוא להשתמש בעיקרון **האגליטרי**. נחשב תמחור, הממקסם את התועלת הקטנה ביותר של שחקן, מבין כל התמחורים ללא־קנאה:

Maximize min $_{j=1..n}$ $(V_{d[j]}(j) - p_j)$

Subject to:

$V_{d[j]}(j) - p_j \geq V_{d[j]}(i) - p_i$ For i, j in 1,...,n

$Sum_{j=1..n}\ p_j = R$

הפונקציה min אינה פונקציה ליניארית, אבל אפשר להפוך את הבעיה לליניארית ע"י שימוש במשתנה־עזר, כמו שעשינו כשלמדנו על חלוקה אגליטרית של משאבים (מטלה).

רעיון זה פורסם בשנת 2016 ע"י קובי גל, מושיק מש, אריאל פרוקצ'יה ויאיר זיק. האלגוריתם שלהם ממומש באתר הפופולארי "ספלידיט".[2] הם גם ביצעו ניסוי שהשווה את שביעות־הרצון של משתמשי האתר מאלגוריתם זה, לעומת בחירת וקטור ללא־קנאה אקראי כלשהו, ומדווחים שרוב המשתמשים העדיפו את האלגוריתם האגליטרי. לפי התגובות שהתקבלו באתר, אלפי דיירים ברחבי העולם השתמשו באלגוריתם זה כדי לחלק שכר־דירה בקלות ובמהירות. הדבר מעיד על הפוטנציאל של אלגוריתמי חלוקה הוגנת לשיפור איכות החיים והחברה.

סוג אחר של תמחור מיטבי מתעורר בבעיות של חלוקת ירושה. נניח ש־n אחים מקבלים בירושה n דירות, ורוצים לתת דירה לכל אחד ולהעביר כספים ביניהם, כך שהחלוקה תהיה ללא־קנאה. ניתן למצוא חלוקה כזאת בעזרת האלגוריתם לבעיית חלוקת החדרים, פרט לכך שאין שכר־דירה, ולכן סכום התשלומים צריך להיות אפס (R=0). אולם בבעיה זו יש שיקול נוסף: כל תשלום חיובי חייב במס, והשחקנים רוצים לשלם כמה שפחות מס. לכן הם רוצים, שסכום התשלומים **החיוביים** יהיה קטן ככל האפשר, בכפוף לכך שהתמחור יהיה ללא קנאה. ניתן להציג בעיה זו באופן הבא:

$$\text{Minimize } \text{sum}_{j=1..n}\ \max(p_j, 0)$$

Subject to:

$$V_{d[j]}(j) - p_j \geq V_{d[j]}(i) - p_i \quad \text{For } i, j \text{ in } 1,...,n$$

$$\text{Sum}_{j=1..n}\ p_j = 0$$

הפונקציה max אינה ליניארית, אך ניתן להפוך את הבעיה לליניארית ע"י הוספת משתני עזר $q_1,...,q_n$, והוספת אילוצים שיגרמו לכך שכל q_j יהיה שווה ל $\max(p_j,0)$. התוכנית הליניארית הסופית תיראה כך:

$$\text{Minimize } \text{sum}_{j=1..n}\ q_j$$

Subject to:

$$V_{d[j]}(j) - p_j \geq V_{d[j]}(i) - p_i \quad \text{For } i, j \text{ in } 1,...,n$$

$$\text{Sum}_{j=1..n}\ p_j = 0$$

$$q_j \geq p_j$$

$$q_j \geq 0$$

בעיית הטרמפיסט

כזכור, כשהוכחנו קיום של חלוקה ללא קנאה, השתמשנו בסימפלקס המכיל גם תמחורים שבהם חלק מהמחירים שליליים. במציאות, בהחלט תיתכן חלוקה ללא־קנאה שבה חלק מהמחירים שליליים. לדוגמה: אם הסלון המרווח עולה 1000 שקלים לחודש והמרתף הטחוב עולה מינוס 50 שקלים לחודש, אז ייתכן שדייר אחד יעדיף את הסלון ודייר אחר יעדיף את המרתף, והחלוקה תהיה ללא־קנאה.

אבל הפתרון הזה הוא בעייתי: הדיירים האחרים למעשה משלמים מכיסם 50 שקלים לדייר שגר במרתף. ייתכן שהם לא יסכימו לזה – הם יעדיפו לוותר על המרתף ועל הדייר, ולקחת את 50 השקלים לעצמם.

האם תמיד אפשר למצוא חלוקה ללא־קנאה וללא מחירים שליליים, כשהדיירים קוואזיליניאריים? התשובה היא לא. הנה דוגמה:

נתונה דירה שמחירה הכולל 100. יש שני חדרים ושני דיירים קוואזיליניאריים עם הערכים:

	סלון	מרתף
דייר א:	**150**	0
דייר ב:	140	**10**

2 http://www.spliddit.org/apps/rent נבדק ב־4.8.22.

יש כאן רק השמה אחת הממקסמת את סכום הערכים: דייר א בסלון ודייר ב במרתף. כדי שדייר ב לא יקנא, ההפרש במחירים צריך להיות לפחות כהפרש הערכים שהוא מייחס לחדרים, כלומר 130. סכום המחירים הוא 100, ולכן מחיר הסלון הוא 115 ומחיר המרתף הוא –15. הוכחנו, שבכל חלוקה ללא־קנאה, בהכרח יש מחיר שלילי.

בדוגמה זו, סכום הערכים שהדיירים מייחסים לחדרים גדול משכר־הדירה הכולל. אבל גם אם נדרוש שסכום הערכים יהיה **שווה** לשכר־הדירה הכולל, עדיין לא נוכל להבטיח שכל המחירים יהיו חיוביים. הדוגמה הבאה לקוחה ממאמר של בראמס וקילגור. נתונה דירה שמחירה הכולל 100. יש 4 חדרים ו4 דיירים קוואזיליניאריים עם הערכים:

	חדר ד	חדר ג	חדר ב	חדר א	סכום
דייר א:	0	30	34	**36**	100
דייר ב:	0	33	**36**	31	100
דייר ג:	0	**36**	30	34	100
דייר ד:	**0**	35	33	32	100

ההשמה היחידה הממקסמת את סכום הערכים היא ההשמה המודגשת. נניח בשלילה שקיים תמחור שבו כל המחירים לפחות 0.

- המחיר של חדר ד לפחות 0, ולכן התועלת של דייר ד לכל היותר 0. לכן, כדי שדייר ד לא יקנא בדייר ג, המחיר של חדר ג צריך להיות לפחות 35.
- מאותה סיבה, כדי שדייר ד לא יקנא בדייר ב, המחיר של חדר ב צריך להיות לפחות 33.
- התועלת של דייר ג לכל היותר 36–35=1. לכן, כדי שדייר ג לא יקנא בדייר א, המחיר של חדר א צריך להיות לפחות 33.
- סכום המחירים הוא לפחות 35+33+33+0=101 – גדול משכר־הדירה הכולל – סתירה.

אם בכל חלוקה ללא־קנאה יש מחירים שליליים, והדיירים לא מוכנים "לסבסד" את חבריהם ולשלם להם שיגורו בדירה, אז אפשר פשוט לעגל את המחירים השליליים למעלה ל־0, ולחלק את ההפרש שווה בשווה בין הדיירים האחרים. כתוצאה מכך, חלק מהדיירים יקנאו – אולם כל הדיירים המקנאים יהיו דיירים המקבלים חדר בחינם.

הפתרון הזה אינו אידיאלי, ולכן אנחנו רוצים להשתמש בו רק אם אין ברירה – רק אם אכן **בכל** חלוקה ללא־קנאה יש מחירים שליליים. איך נדע אם זה המצב? – אפשר פשוט להוסיף לתוכנית הליניארית לחישוב שכר־הדירה, אילוצים הקובעים שכל המחירים חייבים להיות לפחות אפס. כלומר נפתור את הבעיה הליניארית הבאה:

$$V_{d[j]}(j) - p_j \geq V_{d[j]}(i) - p_i \quad \text{For } i,\ j \text{ in } 1,...,n$$

$$Sum_{j=1..n}\ p_j = R$$

$$\mathbf{p_j \geq 0 \quad For\ all\ i\ in\ 1,...,n.}$$

כעת יש שני מקרים:

- אם מצאנו פתרון לתוכנית הזאת, אז סיימנו.
- אם לא מצאנו פתרון, אז אנחנו יודעים (לפי המשפט שהוכחנו), שבכל חלוקה ללא־קנאה ישנם מחירים שליליים. ואז נאפשר לדיירים לבחור מה הם רוצים: לעגל את המחירים למעלה ובכך לאפשר קנאה, או לפתור את התוכנית הליניארית ללא האילוץ ובכך לאפשר מחירים שליליים.

האלגוריתם שהצגנו כעת עשוי למצוא תמחור שבו חלק מהמחירים שווים אפס. ייתכן שגם תמחור כזה לא ימצא חן בעיני חלק מהדיירים, שיטענו שהם לא רוצים "אוכלי חינם" בדירה שלהם. האם אפשר למצוא תמחור שבו כל המחירים חיוביים ממש?

יכולנו לחשוב, שאפשר להשתמש בתוכנית הליניארית שהוצגה למעלה, ורק להחליף את האילוץ האחרון מ"גדול או שווה" ל"גדול ממש":

$p_j > 0$ For all i in 1,...,n.

אבל הפתרון הזה לא עובד: אלגוריתמים לפתרון תוכניות ליניאריות אינם יודעים להתמודד עם אילוצים של "גדול ממש" (הסיבה לכך היא מעבר להיקפו של הספר הנוכחי). הפתרון הוא להגדיר **בעיית מיטוב**. נחפש את התמחור, שבו המחיר **הקטן** ביותר הוא **גדול** ככל האפשר:

Maximize z

Subject to:

$V_{d[j]}(j) - p_j \geq V_{d[j]}(i) - p_i$ For i, j in 1,...,n

$Sum_{j=1..n}\ p_j = R$

$p_j \geq z$ For all i in 1,...,n

אם הערך שהתקבל עבור z גדול מאפס, סיימנו. אחרת, לפי המשפט, לא קיים תמחור ללא־קנאה שבו כל המחירים חיוביים ממש. נצטרך לחיות עם טרמפיסטים...

סיכם: אראל סגל-הלוי.