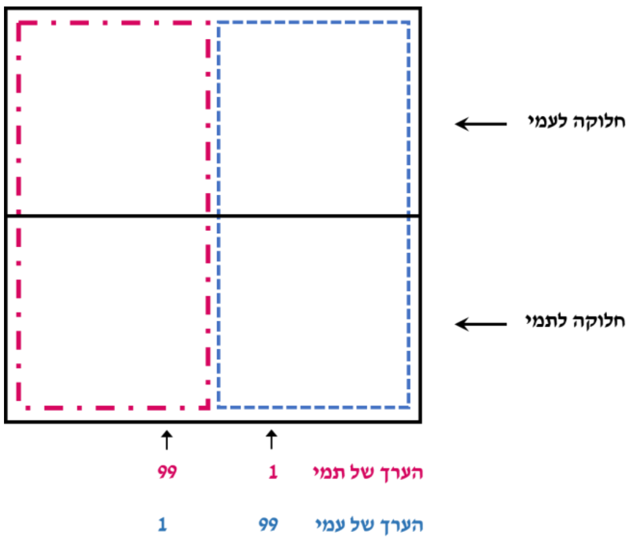
יעילות כלכלית

״ אַל תִּמְנַע טוֹב מִבְּעָלָיו, בִּהְיוֹת לְאֵל יָדְךָ לַעֲשׂוֹת״
(משלי ג כז)

בשיעור זה נלמד שיקול נוסף בחלוקת משאבים, שאנו רוצים להשיג במקביל להוגנות, והוא **יעילות**. אנחנו מדברים על יעילות **כלכלית** – מושג שונה לגמרי מיעילות **חישובית**. נסביר את מושג היעילות הכלכלית בדוגמה.

עמי ותמי רוצים לחלק ביניהם קרקע ששטחה 2 מ״ר. לשניהם הערכות חיבוריות, ושניהם מייחסים ערך של 100 לקרקע כולה. עמי מייחס לחצי המזרחי צפיפות־ערך 99 למ״ר, ולחצי המערבי צפיפות־ערך 1 למ״ר. תמי מייחסת לחצי המזרחי צפיפות־ערך 99 למ״ר, ולחצי המערבי צפיפות־ערך 1 למ״ר. נניח שאנחנו נותנים לעמי את החצי הצפוני של הקרקע ולתמי את החצי הדרומי, כמו באיור:



האם החלוקה היא פרופורציונלית? כן: כל אחד מהשחקנים קיבל ערך של 50 – בדיוק מחצית מערך הקרקע כולה. אבל, ברור לנו שהחלוקה הזאת לא מספיק טובה – יש בה בזבוז: אם ניתן לעמי את החלק המזרחי ולתמי את החלק המערבי, הערך של שניהם יהיה 99. חלוקה שאין בה בזבוז נקראת חלוקה **יעילה**.

בפרק זה נציג כמה הגדרות פורמאליות שונות למושג היעילות, ונלמד אלגוריתמים המוצאים חלוקה שהיא גם יעילה וגם הוגנת. מושגי היעילות שנלמד בפרק זה מתאימים לבעיות חלוקה רבות ושונות, והם ילוו אותנו גם בפרקים הבאים.

בפרק הנוכחי נתמקד בבעיות־חלוקה של **משאבים הומוגניים רציפים (homogeneous resources)**. דוגמאות למשאבים כאלו הן משאבי טבע (מים, זהב, נפט) ומשאבים פיננסיים

(כסף, מניות, אגרות־חוב). ישנם שני הבדלים עיקריים בין בעיה זו לבין בעיית חלוקת העוגה, שלמדנו בפרק 2:

- מספיק להחליט **איזו כמות** מכל משאב מקבל כל שחקן; אין זה משנה **איזה חלק** מהמשאב הוא מקבל.
- אין חשיבות לתכונת ה**קשירות**.

יחד עם זה, ישנם מאפיינים המשותפים לבעיה זו ובעיית חלוקת העוגה:

- המשאבים **רציפים**, כלומר, ניתן לחלק כל משאב בין השחקנים באחוזים כלשהם.
- לכל שחקן ישנה הערכה **רציפה**: תוספת מעט משאב משפיעה רק במעט על הערך.

לאורך הפרק, אנחנו מניחים שכל המשאבים הם **טובים**, כלומר, ההערכות של כל השחקנים הן חיוביות.

חלק 1: יעילות פארטו

תכונת היעילות הראשונה שנלמד הוגדרה פורמלית לראשונה ע״י וילפרדו פארטו (Vilfredo Pareto) – כלכלן שחי לפני כ־100 שנה, ולכן היא נקראת על שמו ״יעילות פארטו״. אולם, הרעיון שמאחוריה נזכר כבר בתלמוד הבבלי, בעיקרון ״זה נהנה וזה לא חסר״ (בבא קמא כ ב).

תכונת היעילות מוגדרת לא רק עבור חלוקת־משאבים. ההגדרה הכללית מניחה שיש קבוצה כלשהי של **מצבים (states)** שהעולם יכול להיות בהם. חלוקת־משאבים היא מקרה פרטי של מצב. ב**Error! Reference source not found.** התייחסנו לשני מצבים:

- מצב א – עמי מקבל את החצי הצפוני ותמי את החצי הדרומי;
- מצב ב – עמי מקבל את החצי המזרחי ותמי מקבלת את החצי המערבי.

בהמשך הסעיף נראה דוגמה ל״מצבים״ שאינם קשורים לחלוקת משאבים. אנחנו מניחים, שלכל שחקן יש **יחס העדפה** על קבוצת המצבים. ב**Error! Reference source not found.** גם עמי וגם תמי מעדיפים את מצב ב – שבו התועלת שלהם 99, על־פני מצב א – שבו התועלת שלהם 50.

הגדרה: שיפור פארטו ויעילות פארטו

- מצב א נקרא **שיפור פארטו (Pareto improvement)** של מצב ב, אם חלק מהשחקנים מעדיפים את מצב א על־פני מצב ב (״זה נהנה״), ואף שחקן אינו מעדיף את מצב ב על־פני מצב א (״וזה לא חסר״).
- מצב נקרא **יעיל פארטו (Pareto efficient או Pareto optimal)** אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור פארטו שלו.

בדוגמה, החלוקה הנותנת את החצי הצפוני של הקרקע לעמי ואת החלק הדרומי לתמי אינה יעילה־פארטו, כיוון שהחלוקה הנותנת את החצי המזרחי לעמי ואת החלק המערבי לתמי היא שיפור־פארטו שלה. הנה עוד דוגמה.

עמי ותמי רוצים ללכת למסעדה וצריכים להחליט לאיזו מסעדה ללכת מבין שלוש אפשריות: א׳ ב׳ וג׳. ידוע כי, עמי מעדיף את א׳ על ב׳ ואת ב׳ על ג׳ ותמי מעדיפה את ב׳ על א׳ ואת א׳ על ג׳.
אנחנו לא יודעים במה הם יבחרו בסוף, אבל ברור לנו שמצב אחד אינו יעיל־פארטו, והוא ללכת למסעדה ג׳. זאת, כיוון שבחירה בכל אחת מהמסעדות האחרות היא שיפור־פארטו של בחירה במסעדה ג׳.

העקרון של יעילות-פארטו אינו אומר לנו מה בדיוק לבחור - הרי בדרך־כלל אין בחירה אחת שהיא "הכי טובה" עבור כולם. אבל יעילות־פארטו היא דרישת־מינימום לבחירה הגיונית. אם בחרנו באפשרות שאינה יעילה־פארטו, כנראה לא השתדלנו מספיק להשביע את רצונם של השחקנים. מצד שני, אם הצלחנו למצוא שיפור־פארטו למצב הקיים, עשינו עבודה טובה במיוחד – הצלחנו לשפר את מצבם של חלק מהשחקנים בלי לעורר התנגדות מצד האחרים.

יעילות פארטו בחלוקת קרקעות ועוגות

נחזור לאלגוריתמי חלוקת העוגה (והקרקע) שלמדנו בפרק הקודם. האם האלגוריתמים האלו מחזירים חלוקה יעילה־פארטו?

לצורך הדיון נסתכל על אלגוריתם חתוך־ובחר לחלוקת עוגה בין שני שחקנים. האם האלגוריתם הזה תמיד מחזיר חלוקה יעילה־פארטו? – התשובה היא לא, כפי שניתן לראות בדוגמה הבאה.

נתונה עוגה עם שלושה אזורים. השחקנים, עמי ותמי, מעריכים אותם לפי הטבלה הבאה:

אזור / שחקנים	א	ב	ג
עמי	2	0	2
תמי	1	2	1

נניח שעמי ותמי סיכמו, כי תמי חותכת את העוגה ועמי בוחר פרוסה. בהתאם לאלגוריתם, תמי חותכת את העוגה בדיוק באמצע איזור ב, לשני חלקים השווים בעיניה בדיוק 2. עמי בוחר את אחת הפרוסות, נניח את הפרוסה הימנית. הערך של עמי הוא 2 ושל תמי גם 2. מצב זה אינו יעיל־פארטו: היה אפשר לחתוך את העוגה בין איזור א ל־ב, לתת לעמי את הפרוסה הימנית שערכה עבורו 2, ולתת לתמי את הפרוסה השמאלית שערכה עבורה 3. היינו מקבלים שיפור־פארטו – "זו נהנית וזה לא חסר".

דוגמה נוספת: שני שותפים במפעל תעשייה, עמי ותמי, מעוניינים לחלק ביניהם סחורות וחומרי גלם: ברזל, דלק ועצים. ההעדפות של כל אחד מהשותפים לכל אחד מהמשאבים מופיעות בטבלה הבאה:

משאב / שותפים	ברזל	דלק	עצים
עמי	1	19	80
תמי	29	1	70

שימו לב, במקרה הזה אין חשיבות לכך שהפרוסות תהיינה קשירות. הדבר היחיד שמשנה הוא איזה כמות מכל אחד מהמשאבים מקבל כל אחד מהשחקנים. גם כאן, קל לראות שאלגוריתם

״חתוך ובחר״ מחזיר חלוקה שאינה יעילה־פארטו, גם כשעמי חותך ותמי בוחרת, וגם כשתמי חותכת ועמי בוחר.

מציאת חלוקה יעילה פארטו

האם קיים אלגוריתם המחזיר תמיד חלוקה יעילה־פארטו? בהחלט: יש הרבה אלגוריתמים כאלה. האלגוריתם הפשוט ביותר העושה זאת נקרא **אלגוריתם הדיקטטורה הסדרתית (serial dictatorship)**. זהו אלגוריתם מאד לא הוגן, ואנחנו לא ממליצים להשתמש בו בבית; אנחנו מציגים אותו כאן רק כדי להוכיח קיום חלוקה יעילה־פארטו.

אלגוריתם הדיקטטורה הסדרתית לחלוקת משאבים טובים.

- סדר את השחקנים בסדר כלשהו (לפי גיל, ותק, דרגה, גובה, או כל סדר שרירותי אחר).
- לכל i בין 1 ל־n (מספר השחקנים):
  - תן לשחקן i את כל המשאבים שהוא מייחס להם ערך חיובי, מבין המשאבים שנשארו.
  - אם נשארו עוד חפצים (שכל השחקנים מייחסים להם ערך 0), חלק אותם שרירותית.

ניתן להוכיח שאלגוריתם הדיקטטורה הסדרתית מחזיר חלוקה יעילה פארטו. אבל, זהו האלגוריתם הכי לא־הוגן שאפשר לדמיין. למשל, נניח שבדוגמה למעלה, בוחרים בעמי באופן שרירותי להיות הדיקטטור הראשון. אז הוא מקבל את כל המשאבים ותמי אינה מקבלת דבר. החלוקה יעילה־פארטו, כי כל חלוקה שתיתן משאב או חלק של משאב כלשהו לתמי תגרע מהערך שניתן לעמי. אבל היא אינה מקיימת אף הגדרה סבירה של הוגנות.

האם קיים אלגוריתם המחזיר חלוקה ״יעילה-פארטו״ שהיא גם הוגנת? לפני שנענה לשאלה, נתעמק יותר במושג היעילות, ונראה כמה מושגים נוספים של יעילות, שהם חזקים יותר מיעילות פארטו.

חלק 2: יעילות אוטיליטרית

אוטיליטריות (utilitarianism) היא גישה שפותחה ע״י ירמיהו בנתהאם (Jeremy Bentham) ותלמידו ג׳ון סטיוארט מיל (John Stuart Mill) לפני כ־200 שנה. לפי גישה זו, כל שחקן יכול לייחס ערך מספרי לכל מצב, ו**הרווחה החברתית (social welfare)** של כל מצב היא סכום הערכים שמייחסים השחקנים למצב זה. המצב הטוב ביותר לחברה הוא המצב הממקסם את סכום הערכים.

כמו הגדרת יעילות־פארטו בסעיף הקודם, גם היעילות האוטיליטרית מוגדרת עבור כל ״מצב״ מופשט כלשהו; חלוקת־משאבים היא מקרה פרטי של מצב.

בדוגמת חלוקת המשאבים למעלה, החלוקה האוטיליטרית נותנת את כל הברזל לתמי ואת כל הדלק והעצים לעמי. בחלוקה זו, סכום הערכים הוא 128. כדי לראות שזהו אכן הסכום הגדול ביותר האפשרי, נבדוק מה יקרה אם נעביר משאב כלשהו (או חלק ממנו) מעמי לתמי: הערך של עמי יקטן, והערך של תמי יגדל בשיעור מועט יותר, ולכן הסכום יקטן. באותו אופן, אם נעביר משאב כלשהו מתמי לעמי, אז הערך של תמי יקטן, והערך של עמי יגדל בשיעור מועט יותר, ולכן הסכום יקטן. הכלל האוטיליטרי קובע, שכדאי להקטין במעט את הערך של אדם אחד, על־מנת להגדיל בהרבה את הערך של אדם אחר, כיוון שהדבר יביא להגדלת סכום הערכים.

הכלל האוטיליטרי מתקבל על הדעת רק כאשר ישנה דרך אובייקטיבית למדוד את הערך של כל אחד מהמשתתפים, כך שכל הערכים נמדדים באותן יחידות. להלן מספר דוגמאות:

- השחקנים הם חברות מסחריות, המשאבים הם חומרי־גלם, והערך של כל שחקן הוא הרווח הכספי שהוא יכול להפיק מאותם חומרי־גלם, בשקלים. חלוקה אוטיליטרית ממקסמת את הרווח הכולל (ובהתאם לכך היא גם ממקסמת את תקבולי המס של המדינה).
- השחקנים הם חולים במחלה מסויימת, המשאבים הם תרופות, והערך של כל שחקן הוא ההסתברות שיחלים כתוצאה מקבלת התרופה. חלוקה אוטיליטרית ממקסמת את סכום הסתברויות ההחלמה, שהוא התוחלת של מספר המחלימים.

בנתהאם ומיל טענו שאפשר להחיל את העקרון האוטיליטרי גם במצבים שבהם ה״ערך״ של אדם נקבע על-פי רמת ההנאה או הכאב הסובייקטיביים שהוא מרגיש בכל מצב. לשם כך הם פיתחו שיטה בשם **"חשבון הנאה" (hedonic calculus)**, למדידת עוצמת ההנאה או הכאב שמרגיש כל אדם בכל מצב. להרחבה ניתן לקרוא בספרו של בנתהאם. האם השיטה הזאת מתקבלת על הדעת? נשאיר שאלה זו כשאלת־מחשבה.

יעילות פארטו ויעילות אוטיליטרית

הצגנו עד כה שני סוגי יעילות – יעילות פארטו ויעילות אוטיליטרית. המשפט הבא מוכיח כי יעילות אוטיליטרית היא תנאי חזק יותר מיעילות פארטו. המשפט מנוסח עבור ״מצב״ כלשהו והוא נכון בפרט עבור חלוקת משאבים.

משפט. כל מצב אוטיליטרי הוא יעיל־פארטו.

הוכחה. נתון מצב א שהוא אוטיליטרי – כלומר ממקסם את סכום הערכים. נניח בשלילה שהמצב אינו יעיל פארטו. אז קיים מצב ב שהוא שיפור-פארטו של א. במצב ב, הערך של כל השחקנים גדול לפחות כמו במצב א, ולשחקן אחד לפחות יש ערך גדול יותר. לכן, במצב ב סכום הערכים גדול יותר – בסתירה להנחה שמצב א הוא אוטיליטרי. ***

חישוב חלוקה אוטיליטרית

כאשר ההערכות של השחקנים הן חיבוריות, ויש מספר סופי של משאבים (או לחלופין: עוגה עם מספר סופי של איזורים), ישנו אלגוריתם פשוט המוצא חלוקה אוטיליטרית:

- תן כל משאב לשחקן שעבורו הערך של משאב זה גדול ביותר.

כאשר ההערכות אינן חיבוריות, אלגוריתם זה לא תמיד מוצא חלוקה אוטיליטרית, כפי שמראה הדוגמה הבאה. במשק קיימות שתי מכוניות.

- עמי מייחס לכל מכונית בנפרד ערך 100, אבל מתייחס אליהן כמוצרים תחליפיים, ולכן מייחס לשתיהן יחד ערך 120.
- תמי מייחסת לכל מכונית ערך 90, וגם היא מתייחסת אליהן כמוצרים תחליפיים ולכן מייחסת לשתיהן יחד ערך 110.

Error! Reference source not found. נותן את שתי המכוניות לעמי; סכום הערכים הוא 120. אבל הפתרון האוטיליטרי כאן הוא לתת מכונית אחת לכל אחד – סכום הערכים במקרה זה הוא 190.

כדי למצוא חלוקה אוטיליטרית במקרה הכללי, אנחנו צריכים לפתור **בעיית מיטוב** (אופטימיזציה – optimization). בעיית המיטוב המתאימה לחלוקה אוטיליטרית של משאב כלשהו C בין n שחקנים היא:

$$\text{Maximize} \quad v_1(x_1) + \dots + v_n(x_n)$$

$$\text{such that} \quad (x_1,\dots,x_n) \text{ is a partition of } C$$

כדי לפתור את הבעיה, יש להגדיר **משתנים** המייצגים את החלוקה. לכל שחקן i ולכל משאב g, נגדיר משתנה $x_{i,g}$ המייצג את החלק של משאב g שנמסר לשחקן i. האילוצים המגדירים חלוקה תקנית הם:

- כל $x_{i,g}$ צריך להיות מספר בין 0 ל־1; אילוץ זה מבטא את העובדה, שאי־אפשר לתת לשחקן מסויים כמות שלילית ממשאב מסויים, או לתת לו יותר מהמשאב כולו.
- סכום המשתנים עבור כל משאב g שווה ל־1: $sum_i\ x_{i,g} = 1$. אילוץ זה מבטא את העובדה, שכל משאב צריך להיות מחולק כולו בין השחקנים.

הביטוי $v_i(X_i)$ מציין את הערך שמקבל שחקן i מהסל שלו, המיוצג ע"י המשתנים $x_{i,1},\dots,x_{i,m}$. אם ההערכות חיבוריות, אז הערך הזה הוא פשוט הסכום:

$$v_{i,1}*x_{i,1} + \dots + v_{i,m}*x_{i,m}$$

(ניתן לכתוב סכום זה בקיצור כמכפלה סקלרית של שני וקטורים: $v_i \cdot x_i$). אם ההערכות אינן חיבוריות, אז הפונקציה עשויה להיות מורכבת יותר. לסיכום, כדי למצוא חלוקה אוטיליטרית יש לפתור את הבעיה הבאה, עם המשתנים $x_{i,g}$ לכל שחקן i ומשאב g:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize} && v_1(x_1) + \dots + v_n(x_n) \\
&\text{such that} && 0 \le x_{i,g} \le 1 && \text{for all i and g;} \\
& && sum_i\ x_{i,g} = 1 && \text{for all g.}
\end{aligned}$$

באופן כללי, בעיות מיטוב הן בעיות קשות חישובית. אולם אנחנו מתעניינים בסוג "קל" יחסית של בעיות מיטוב – **מיטוב קמור (convex optimization)**.

מדוע בעיית מיטוב קמורה נחשבת "קלה" יחסית? כי לכל פונקציה קמורה ישנה רק נקודת מינימום אחת בכל קבוצה קמורה (חישבו למשל על הפונקציה הקמורה $f(x)=x^2$ בקטע הקמור [–

[1,1]). לפיכך, אם אנחנו מתחילים מנקודה כלשהי בקבוצה, ומתקדמים תמיד באופן חמדני לכיוון שבו ערך הפונקציה יורד, בהכרח נגיע לנקודת המינימום.

אותו הדבר נכון לגבי נקודת **מקסימום** של פונקציה **קעורה** בקבוצה קמורה; זאת, כיוון שכל פונקציה קעורה היא פונקציה קמורה עם סימן מינוס (חישבו למשל על הפונקציה $f(x)=-x^2$ בקטע $[-1,1]$).

כיום ניתן למצוא ברוב שפות־התיכנות ספריות הפותרות בעיות־מיטוב קמורות. לשם המחשה, נציג דוגמה לספריה אחת כזאת בשפת פייתון – הספריה cvxpy. כדי להדגים את אופן פעולת הספרייה, נחזור לדוגמת חלוקת המשאבים ונשנה אותה מעט: נניח שכל שחקן, המקבל משאבים כלשהם שסכום ערכיהם v, מפיק מהם תועלת בגודל $v^{0.5}$ (= שורש ריבועי של v). בספריה cvxpy, מציאת החלוקה האוטיליטרית בדוגמה זו תתבצע כך (שימו לב: בשפת פייתון, העלאה בחזקה מתבצעת ע״י שתי כוכביות **):

```
import cvxpy

x, y, z = cvxpy.Variable(3)

utility_ami =  (x*80 + y*19 + z*1)**0.5
utility_tami = ((1-x)*70 + (1-y)*1 + (1-z)*29)**0.5

prob = cvxpy.Problem(
   cvxpy.Maximize(utility_ami + utility_tami),
   constraints = [0 <= x, x <= 1, 0 <= y, y <= 1, 0 <= z, z <= 1]
)
prob.solve()
print("status:", prob.status)
print("optimal value: ", prob.value)
print("Fractions given to Ami: ", x.value, y.value, z.value)
print("Utility of Ami", utility_ami.value)
print("Utility of Tami", utility_tami.value)
```

נסביר את הקוד בשלבים:

- 1. מגדירים שלושה משתנים x, y, z המציינים איזה חלק מהמשאבים (עצים, דלק, ברזל בהתאמה) ניתן לעמי.
- 2. החלק שניתן לתמי מכל משאב הוא 1−x, 1−y, 1−z בהתאמה.
- 3. מחשבים את התועלת של עמי ותמי במשתני עזר.
- 4. מגדירים בעיית מקסימיזציה של סכום התועלות.
- 5. מגדירים את האילוצים, והם, שערכי כל המשתנים הם בין 0 ל־1.
- 6. פותרים את הבעיה וקוראים את הפתרון מתוך ערכי המשתנים.

מדוע מדובר בבעיית מיטוב קמורה?

- האילוצים מגדירים קוביה תלת-ממדית, שהיא תחום קמור.
- הפונקציה שאנחנו ממקסמים היא סכום של פונקציות קעורות (שורש), ולכן היא קעורה.

לכן מדובר בבעיית מיטוב קמורה, שניתן לפתור בקלות בעזרת cvxpy.

פרטים נוספים על ספריית cvxpy והאפשרויות השונות שלה ניתן למצוא בתיעוד הספריה ברשת. בסעיף זה הבאנו את cvxpy רק כדי להראות שזה קל ופשוט להגדיר ולפתור בעיית מיטוב קמורה, ולכן אפשר להתייחס לבעיות כאלו כאל אבני־בניין יסודיות בפיתוח אלגוריתמים מתקדמים יותר.

יעילות אוטיליטרית והוגנות

האלגוריתם האוטיליטרי נראה, במבט ראשון, הוגן יותר מאלגוריתם הדיקטטורה: הוא מתייחס לכל השחקנים באופן שיוויוני, ולא נותן לאף אחד מהם מעמד מועדף מראש. עם זאת, האלגוריתם לא תמיד מחזיר חלוקה הוגנת. בדוגמת חלוקת המשאבים, הערך של תמי הוא רק 29, בעוד שערך העוגה כולה בעיניה הוא 100. החלוקה אינה פרופורציונלית, ויש בה קנאה.

בסעיף הבא נראה עקרון אחר של יעילות, המשלב בתוכו גם שיקולי הוגנות.

חלק 3: יעילות אגליטרית

״מֵקִים מֵעָפָר דָּל, מֵאַשְׁפֹּת יָרִים אֶבְיוֹן; לְהוֹשִׁיב עִם נְדִיבִים, וְכִסֵּא כָבוֹד יַנְחִלֵם״
(שמואל א ב ח)

אגליטריות (egalitarianism) היא גישה שפותחה ע״י הוגה־הדעות ג׳ון רולס (John Rawls).
לפי גישה זו, יש לדאוג קודם־כל לחוליות החלשות ביותר בחברה.
הגדרה. הערך האגליטרי במצב מסויים הוא הערך הקטן ביותר שמקבל שחקן כלשהו במצב זה.
מצב נקרא אגליטרי (egalitarian) אם הערך האגליטרי בו גדול לפחות כמו הערך האגליטרי בכל מצב אחר. בכתיב מתימטי: $\max_x \min_i v_i(x)$
כאשר המקסימום הוא על קבוצת כל המצבים, והמינימום הוא על קבוצת כל השחקנים.

בדוגמת חלוקת המשאבים, בחלוקה אגליטרית, תמי מקבלת את כל הברזל (הנותן לה ערך 29), עמי מקבל את כל הדלק (הנותן לו ערך 19), והם מתחלקים בעצים, כך שעמי מקבל 0.5333 ותמי מקבלת 0.4667. הערך של עמי הוא:

$$19 + 80*0.5333 = 61.667$$

והערך של תמי הוא:

$$29 + 70*(1-0.5333) = 61.667$$

כך שהערך המינימלי הוא 61.667. ניתן לוודא שלא קיימת חלוקה עם ערך מינימלי גדול יותר: אם נעביר משאב כלשהו מתמי לעמי או הפוך, לאחד מהם יהיה ערך קטן יותר (בהמשך הסעיף נתאר את האלגוריתם שבעזרתו הגענו לחלוקה זו).

יעילות אגליטרית ושיוויון

ב**Error! Reference source not found.**, בחלוקה אגליטרית, הערך של שני השחקנים שווה – בהתאם למשמעות המושג ״אגליטרי״ (= שיוויוני); זה אינו מקרה.

משפט. אם ההערכה של כל שחקן היא רציפה ומונוטונית־עולה־ממש, אז בכל חלוקה אגליטרית, כל השחקנים מקבלים את אותו ערך בדיוק.

הוכחה. נניח בשלילה שבחלוקה אגליטרית כלשהי, הערך המינימלי הוא t, אבל לאחד השחקנים (נניח לעמי) יש ערך גדול ממש מ־t. כיוון שההערכות רציפות, ניתן לקחת כמות קטנה ביותר של משאבים מעמי, כך שהערך שלו עדיין יהיה גדול ממש מ־t. את המשאבים שלקחנו מעמי, ניתן לחלק באופן שווה בין n–1 השחקנים האחרים. כיוון שההערכה של כל אחד מהם מונוטונית־עולה־ממש, הערך של כולם גדול יותר. בפרט, הערך של כל השחקנים לאחר ההעברה גדול ממש מ־t. זה סותר את ההנחה שהערך המינימלי בחלוקה האגליטרית הוא t.

אם פונקציות-הערך של השחקנים אינן מונוטוניות-עולות-ממש, אז **Error! Reference source not found.** אינו נכון.
לדוגמה,

דוגמה 3.1

3.1.1 יעילות אגליטרית ויעילות פארטו

חלוקה אגליטרית, כפי שהוגדרה למעלה, אינה בהכרח יעילה פארטו. כך ניתן לראות בדוגמה הבאה. עמי ותמי מעוניינים לחלק ביניהם שני משאבים – ברזל ודלק. ההעדפות של כל אחד מהשחקנים לכל אחד מהמשאבים מופיעות בטבלה הבאה:

משאב / שחקנים	ברזל	דלק
עמי	100	0
תמי	0	50

כאן הערך האגליטרי הגדול ביותר האפשרי הוא 50, כי אי אפשר לתת לתמי ערך גבוה יותר. לכן, כל חלוקה שבה הערך האגליטרי הוא 50, היא חלוקה אגליטרית. בפרט, חלוקה אגליטרית יכולה לתת לתמי את הדלק וחצי מהברזל, ולעמי את כל שאר הברזל; בחלוקה זו הערך האגליטרי הוא 50, ולכן היא חלוקה אגליטרית. אבל קיים שיפור פארטו – לתת את כל הברזל לעמי.

הבעייה בכלל האגליטרי היא, שהוא מתייחס רק לערך הקטן ביותר ומתעלם משאר הערכים. ניתן לתקן את הבעייה באופן הבא.

הגדרה. מצב נקרא **לקסימין־אגליטרי (leximin-egalitarian)** אם הוא ממקסם את הערך הקטן ביותר; בכפוף לזה, הוא ממקסם את הערך השני הכי קטן; בכפוף לזה, הוא ממקסם את הערך השלישי הכי קטן; וכן הלאה.

כדי לחשב חלוקה לקסימין־אגליטרית, יש לחשב קודם־כל את הערך המינימלי הגדול ביותר האפשרי; בדוגמה, ערך זה הוא 50. עכשיו יש לחשב, מבין כל החלוקות שבהן הערך המינימלי הוא 50, באיזו חלוקה הערך השני־מלמטה הוא הכי גדול; בדוגמה, ערך זה הוא 100, והוא מתקבל כאשר נותנים את כל הברזל לעמי ואת כל הדלק לתמי. לכן חלוקה זו היא חלוקה לקסימין־אגליטרית.

דרך אחרת להגדיר את עקרון הלקסימין היא: עבור כל מצב אפשרי, מסדרים את וקטור הערכים של השחקנים בסדר עולה – מהקטן לגדול. משווים בין הוקטורים המסודרים בסדר מילוני (=לקסיקוגרפי, מכאן השם לקסימין). בוחרים את הוקטור הגדול ביותר בסדר זה. לדוגמה, אם וקטור הערכים במצב א הוא (4, 5, 2) ובמצב ב (3, 2, 9), אז הוקטורים המסודרים הם (2, 4, 5) ו־ (2, 3, 9); הוקטור הראשון גדול יותר בסדר מילוני מהוקטור השני, ולכן מצב א נבחר.

בדוגמה, קל לראות שהחלוקה הלקסימין־אגליטרית היא יעילה־פארטו. הדבר נכון גם באופן כללי.

משפט. כל מצב לקסימין־אגליטרי הוא יעיל־פארטו.

הוכחה. נניח שמצב א הוא לקסימין־אגליטרי. נניח בשלילה שהוא לא יעיל פארטו. אז קיים מצב ב שהוא שיפור־פארטו שלו. במצב ב, הערך של כל השחקנים גדול לפחות כמו במצב א, ולשחקן אחד לפחות יש ערך גדול יותר. לכן, וקטור הערכים המסודר במצב ב זהה לוקטור הערכים המסודר במצב א, פרט למספר אחד או יותר, שהם גדולים יותר במצב א מאשר במצב ב. לכן הוקטור של מצב ב גדול יותר בסדר מילוני מהוקטור של מצב א – בסתירה להנחה שמצב א הוא לקסימין־אגליטרי. ***

חישוב חלוקה אגליטרית

על-פי הגדרה, בעיית מיטוב המוצאת חלוקה אגליטרית היא :

$$\text{Maximize} \quad \min(v_1(x_1),\ \dots\ ,\ v_n(x_n))$$
$$\text{such that} \quad (x_1,\dots,x_n) \text{ is a partition.}$$

אולם, כיוון שפונקציית המינימום אינה פונקצייה אלמנטרית (כמו פונקציית הסכום למשל), מקובל לתאר את הבעיה בעזרת פונקציות פשוטות יותר. דרך אחת לעשות זאת היא להוסיף משתנה נוסף z, המייצג את הערך המינימלי; להוסיף אילוצים הקובעים ש־ z הוא אכן הערך המינימלי, כלומר, ש־ z קטן מכל n ערכי השחקנים; ואז למקסם את z :

$$\text{Maximize} \quad z$$
$$\text{such that} \quad (x_1,\dots,x_n) \text{ is a partition;}$$
$$z \le v_1(x_1),\ \dots\ ,\ z \le v_n(x_n).$$

כאמור למעלה, כדי לחשב את החלוקה, מגדירים לכל שחקן i ולכל חפץ g משתנה משתנים $x_{i,g}$, המייצג את החלק של משאב g שנמסר לשחקן i. להלן האלגוריתם המלא הוא, לפתור את הבעיה הבאה, עבור המשתנה z והמשתנים $x_{i,g}$ לכל שחקן i ומשאב g :

$$
\begin{array}{lll}
\text{Maximize} & z & \\
\text{such that} & 0 \le x_{i,g} \le 1 & \text{for all } i \text{ and } g; \\
 & \text{sum}_i\ x_{i,g} = 1 & \text{for all } g; \\
 & z \le \text{sum}_g\ v_{i,g} * x_{i,g} & \text{for all } i.
\end{array}
$$

במקרה זה אנחנו ממקסמים פונקציה ליניארית. כל פונקציה ליניארית היא קמורה וגם קעורה, ולכן כל בעיית מיטוב של פונקציה ליניארית בתחום קמור היא בעיית מיטוב קמורה.

כדי לחשב חלוקה לקסימין־אגליטרית, דרוש אלגוריתם מורכב יותר. לפני שנסביר אותו, נתאר אלגוריתם פשוט יותר להבנה – אבל לא ניתן למימוש בכלים הקיימים. האלגוריתם עובד ב-n שלבים :

1. מצא חלוקה שבה הערך המינימלי גדול ביותר (חלוקה אגליטרית), כמו שהוסבר למעלה. סמן ערך זה באות z_1.
2. מבין כל החלוקות שבהן הערך המינימלי הוא z_1, מצא חלוקה שבה הערך השני מלמטה גדול ביותר. סמן ערך זה באות z_2.
3. מבין כל החלוקות שבהן הערך המינימלי הוא z_1, והערך השני מלמטה הוא z_2, מצא חלוקה שבה הערך השלישי מלמטה גדול ביותר. סמן ערך זה באות z_3.

... המשך באותו אופן n פעמים.

קל להבין למה האלגוריתם מחזיר חלוקה לקסימין-אגליטרית –הוא נובע מיידית מההגדרה. הבעיה היא, שבשלבים 2 והלאה, החישוב לא ניתן לביצוע באופן ישיר בעזרת כלים לתיכנות קמור, כי הפונקציה "הערך השני מלמטה" היא לא פונקציה קמורה.

הפתרון הוא, במקום להתייחס לערכים, להתייחס *לסכומים*.

משפט. מצב הוא לקסימין-אגליטרי אם ורק אם הוא מקיים את התנאי הבא. הוא ממקסם את הערך הקטן ביותר; בכפוף לזה, הוא ממקסם את *סכום שני הערכים הקטנים ביותר*; בכפוף לזה, הוא ממקסם את *סכום שלושת הערכים הקטנים ביותר*; וכן הלאה.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על k, ש- k הערכים הקטנים ביותר בוקטור הלקסימין-אגליטרי שווים לפי שתי ההגדרות.

הבסיס הוא k=1: ברור שהערך הקטן ביותר שווה לפי שתי ההגדרות, כי בשתי ההגדרות מדובר על הערך המינימלי הגדול ביותר האפשרי.

הצעד: נניח שהדבר נכון עבור k. נסמן את k הערכים הקטנים ביותר בשני הוקטורים ב z1,…,zk. כעת:

- לפי ההגדרה הראשונה, אנחנו צריכים למצוא מצב שממקסם את הערך ה k+1 מלמטה.
- לפי ההגדרה השניה, אנחנו צריכים למצוא מצב שממקסם את סכום הערכים 1,…,k,k+1.

אבל, כיוון שהערכים 1,…,k כבר קבועים לפי הנחת האינדוקציה (ושווים ל z1,…,zk), הדבר שקול למיקסום הערך ה- k+1. ***

כעת אנחנו יכולים להציג אלגוריתם מעשי יותר לחישוב חלוקה לקסימין-אגליטרית:

1. מצא חלוקה שבה הערך המינימלי גדול ביותר (חלוקה אגליטרית). סמן ערך זה באות z_1.
2. מבין כל החלוקות שבהן הערך המינימלי הוא z_1, מצא חלוקה שבה סכום שני הערכים הקטנים ביותר הוא גדול ביותר. סמן ב- z_2 את ההפרש בין סכום זה לבין z1 (כך שסכום שני הערכים הקטנים ביותר הוא z1+z2).
3. מבין כל החלוקות שבהן הערך המינימלי הוא z_1, וסכום שני הערכים הקטנים ביותר הוא z1+z2, מצא חלוקה שבה סכום שלושת הערכים הקטנים ביותר הוא גדול ביותר.

... המשך באותו אופן n פעמים.

כאן, אנחנו יכולים לפתור את הבעיות בצעדים 2 עד n בשיטות שאנחנו מכירים. נראה לדוגמה את התוכנית הפותרת את שלב 2:

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize } z\\
&\text{such that } (x_1,\ldots,x_n) \text{ is a partition;}\\
&\qquad z_1 \le v_i(x_i) \qquad \text{for every agent } i;\\
&\qquad z \le v_i(x_i) + v_j(x_j) \text{ for every two agents } i,j.
\end{aligned}
$$

האילוץ הראשון מגדיר שיש כאן חלוקה חוקית; האילוץ השני מוודא שהחלוקה עדיין מקיימת את הערך האגליטרי שנמצא בשלב 1; והאילוץ השלישי מוודא שהמשתנה שממקסמים הוא אכן הסכום הקטן ביותר של תועלות של שני שחקנים.

שימו לב: באופן כללי, מספר האילוצים הדרושים הוא פונקציה מעריכית של מספר השחקנים, ולכן האלגוריתם הזה לא מעשי כשמספר השחקנים גדול. ניתן לצמצם את התוכנית לתוכנית ליניארית אחרת, שבה מספר האילוצים הוא פונקציה פולינומיאלית של מספר השחקנים. צמצום זה הוא מעבר להיקפו של הסיכום הנוכחי.

דוגמה. ארבעה שחקנים, א', ב', ג' וד', מעוניינים לחלק ביניהם סחורות וחומרי גלם: ברזל, דלק ועצים. ההעדפות של כל שחקן לכל אחד מהמשאבים מופיעות בטבלה הבאה:

משאב / שחקנים	ברזל	דלק	עצים
א	4	0	0
ב	0	3	0
ג	5	5	10
ד	5	5	10

בשלב 1, נמצא את הערך המינימלי הגדול ביותר האפשרי, על-ידי פתרון בעיית המיטוב האגליטרית שהוצגה למעלה:

$$\begin{aligned}&\text{Maximize} \quad z\\ &\text{such that} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ is a partition of } C;\\ &\qquad z \le v_1(x_1),\ z \le v_2(x_2),\ z \le v_3(x_3),\ z \le v_4(x_4)\end{aligned}$$

הערך המקסימלי המתקבל עבור z הוא 3. מכאן ניתן להסיק, שבחלוקה לקסימין־אגליטרית, יהיה שחקן כלשהו שהערך שלו יהיה 3, והערך של כל שאר השחקנים יהיה לפחות 3. לכן נציב: $z1=3$.

בשלב 2, נמצא את סכום-שני-הערכים-המינימליים הגדול ביותר האפשרי, תחת האילוץ הנוסף, שהערכים של כל השחקנים הם לפחות 3. פתרון בעיית המיטוב שהוצגה למעלה נותן $z=7$. לכן נציב: $z2=7-z1=4$.

בשלב 3, נמצא את סכום-שלושת-הערכים-המינימליים הגדול ביותר האפשרי, תחת האילוץ הנוסף, שהערכים של כל השחקנים הם לפחות 3, וסכום הערכים של כל שני שחקנים הוא לפחות 7. פתרון בעיית המיטוב נותן $z=12$. לכן נציב: $z3=12-z2-z1=5$.

בשלב 4 מתקבלת חלוקה זהה לשלב 3: סכום 4 הערכים הקטנים ביותר (שהם בעצם כל הערכים) הוא 17.

יעילות אגליטרית והוגנות

האם חלוקה אגליטרית היא גם הוגנת? תלוי לאיזה הוגנות מתכוונים: לגבי חלוקה פרופורציונלית התשובה היא "כן" (בתנאים סבירים), אבל לגבי חלוקה ללא-קנאה התשובה היא "לא". נוכיח את שתי הטענות לפי הסדר.

משפט. נתונה בעיית חלוקה כלשהי שבה ההערכות מנורמלות, כלומר קיים קבוע V כלשהו כך שלכל שחקן i בין 1 ל-n מתקיים:

$$vi(C) = V$$

אם קיימת חלוקה פרופורציונלית כלשהי, אז כל חלוקה אגליטרית היא פרופורציונלית.

הוכחה. בחלוקה פרופורציונלית, הערך של כל שחקן הוא לפחות V/n. לכן, אם קיימת חלוקה פרופורציונלית, אז הערך המינימלי הוא לפחות V/n. חלוקה אגליטרית ממקסמת את הערך המינימלי, ולכן הערך המינימלי בחלוקה אגליטרית הוא לפחות V/n. כל חלוקה כזאת היא פרופורציונלית. ***

בבעיית חלוקת־עוגה עם הערכות רציפות חיבוריות ומונוטוניות, תמיד קיימת חלוקה פרופורציונלית (ראו בפרק 2), ולכן כל חלוקה אגליטרית היא גם פרופורציונלית.

אולם, חלוקה אגליטרית לא תמיד מקיימת את התנאי החזק יותר של חלוקה ללא־קנאה. אינטואיטיבית, העקרון האגליטרי מחייב אותנו לחלק בצורה מסויימת, ולא משאיר לנו "דרגת חופש" לוודא שאין קנאה. הדוגמה – במטלה.

בעקרון האגליטרי קיימת בעיה נוספת והיא, שהוא עלול לגרום הפסד גדול לאדם אחד, רק כדי להביא רווח קטן לאדם אחר. זאת בניגוד לעקרון האוטיליטרי, שמטרתו להביא רווח גדול לאדם אחד, במחיר של הפסד קטן לאדם אחר. הדוגמה הבאה ממחישה את ההבדל בין העקרונות.

דוגמה. שני שחקנים, עמי ותמי, מעוניינים לחלק ביניהם סחורות וחומרי גלם: ברזל, דלק ועצים. ההעדפות של כל אחד מהשותפים לכל אחד מהמשאבים מופיעות בטבלה הבאה:

משאב / שחקנים	ברזל	דלק	עצים
עמי	99	0	1000
תמי	0	98	1

כל חלוקה יעילה-פארטו נותנת את הברזל לעמי ואת הדלק לתמי.

החלוקה האגליטרית נותנת את העצים לתמי, כיוון שהערך שלה לאחר חלוקת הברזל והדלק קצת יותר קטן משל עמי; ערכי השחקנים בחלוקה האגליטרית הם 99, 99.

לעומת זאת, החלוקה האוטיליטרית נותנת את העצים לעמי, כיוון שהוא מפיק מהם הרבה יותר תועלת; ערכי השחקנים בחלוקה זו הם 98, 1099.

שתי החלוקות הללו, האגליטרית והאוטיליטרית, משקפות שתי גישות מנוגדות לשאלת היעילות:

- הגישה האוטיליטרית ממקסמת את הרווחה הכללית, אבל עלולה לפגוע בחלשים;
- הגישה האגליטרית ממקסמת את הרווחה של החלשים, אבל עלולה לפגוע ברווחה הכללית.

האם ישנה דרך שלישית, המאזנת בין שני הקצוות? נראה בסעיף הבא.

חלק 4: חלוקה יעילה וללא קנאה

" וְרָאִיתִי אֲנִי אֶת כָּל עָמָל וְאֵת כָּל כִּשְׁרוֹן הַמַּעֲשֶׂה כִּי הִיא קִנְאַת אִישׁ מֵרֵעֵהוּ, גַּם זֶה הֶבֶל וּרְעוּת רוּחַ"
(קהלת ד ד)

מיקסום סכום של פונקציה עולה

כזכור, חלוקה אוטיליטרית היא יעילה־פארטו אבל אינה הוגנת. היתרון של יעילות־פארטו על־פני יעילות אוטיליטרית הוא, שיעילות־פארטו אינה דורשת מאיתנו למקסם דווקא פונקציה מסויימת – היא נותנת לנו יותר דרגות־חופש המאפשרות לנו להשיג הוגנות. בפרט, אנחנו יכולים למקסם פונקציה שתתן משקל **גדול** יותר לשחקנים שיש להם ערך **קטן** יותר. לדוגמה, נניח שנפתור את הבעיה הבאה:

$$\text{Maximize} \quad \mathrm{sqrt}(v_1(X_1)) + \ldots + \mathrm{sqrt}(v_n(X_n))$$
$$\text{such that} \quad (X_1,\ldots,X_n) \text{ is a partition of } C$$

אנחנו מניחים שלכל שחקן יש הערכה חיובית, ולכן כל הערכים בתוך השורש חיוביים. פונקציית השורש גדֵלה לאט יותר ככל שהערך גדול יותר. לכן, אינטואיטיבית, אם נפתור את בעיית המיטוב הזאת, נקבל חלוקה המייחסת משקל רב יותר למי שיש לו ערך קטן יותר. תוכלו לבדוק זאת בעזרת cvxpy.

במקום פונקציית השורש אפשר כמובן להשתמש בפונקציות אחרות. באופן כללי, נגדיר חלוקה **ממקסמת־סכום־f** כחלוקה הממקסמת את הסכום הבא:

$$f(v_1(X_1)) + \ldots + f(v_n(X_n))$$

אנחנו צריכים לבחור פונקציה f שתסייע לנו להשיג שתי מטרות: יעילות־פארטו והוגנות. נתייחס ראשית ליעילות־פארטו.

משפט. תהי f פונקציה ממשית מונוטונית־עולה־ממש. כל חלוקה ממקסמת־סכום־f היא יעילה־פארטו.

הוכחה. נתונה חלוקה א הממקסמת־סכום־f. נניח בשלילה שהחלוקה אינה יעילה פארטו. אז קיימת חלוקה ב שהיא שיפור פארטו שלה. בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו בחלוקה א ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר. כיוון שהפונקציה f היא מונוטונית־עולה־ממש, בחלוקה ב הסכום גבוה יותר – בסתירה לכך שחלוקה א היא ממקסמת־סכום־f. ***

כאשר הפונקציה f קעורה, מציאת חלוקה ממקסמת־סכום־f היא בעיית מיטוב קמורה, ולכן ניתן לפתור אותה די בקלות. האתגר העיקרי הוא לבחור את הפונקציה f. מבין כל אינסוף הפונקציות העולות־ממש והקעורות, האם קיימת פונקציה f כך שכל חלוקה ממקסמת־סכום־f היא חלוקה הוגנת? כדי לענות לשאלה זו, ננסה להבין טוב יותר את המשמעות של בחירת הפונקציה.

נניח שאנחנו ממקסמים סכום־f עבור פונקציה f שהיא רציפה וגזירה. נניח גם שלכל שחקן יש הערכה חיבורית ורציפה. נסתכל בפרוסת עוגה אינפיניטיסימלית־קטנה Z, ונבדוק למי כדאי לתת אותה כך שסכום־f יהיה גדול ביותר. לכל שחקן j, הערך שלו כשהוא מקבל את Z שווה ל:

$$f(v_j(X_j + Z)) = f(v_j(X_j)+v_j(Z)) \;;$$

השיוויון נובע מתכונת החיבוריות.

כיוון שההערכה v_j רציפה, כאשר הפרוסה Z קטנה מאד, גם הערך $v_j(Z)$ קטן מאד. וכיוון שהפונקציה f רציפה וגזירה, ניתן להציג את הביטוי הנ"ל בקירוב באופן הבא:

$$f(v_j(X_j)+v_j(Z)) \sim f(v_j(X_j)) + f'(v_j(X_j)) * v_j(Z)$$

כלומר, אם ניתן את Z לשחקן j, התרומה לסכום־f הכללי תהיה בקירוב:

$$f'(v_j(X_j)) * v_j(Z)$$

לכן, החלוקה הממקסמת־סכום־f נותנת כל פרוסה Z לשחקן j שהמכפלה הזאת עבורו גדולה ביותר.

כאשר f היא פונקציית הזהות, f(x)=x, הנגזרת f' שווה 1, ולכן האלגוריתם נותן כל פרוסה Z לשחקן המייחס לה ערך גדול ביותר; זה בדיוק האלגוריתם למציאת לחלוקה אוטיליטרית שראינו בתחילת השיעור. אבל כאשר f היא פונקציה **קעורה**, הנגזרת f' היא פונקציה **יורדת**, ולכן האלגוריתם נותן עדיפות לשחקן שהערך הנוכחי שלו (לפני שקיבל את הפרוסה) קטן יותר. ככל שהפונקציה קעורה יותר, כך ההעדפה לקידום ה"חוליות החלשות" היא גדולה יותר. כדי להמחיש את העניין, נגדיר עבור כל מספר ממשי p פונקציה f_p שהנגזרת שלה היא:

$$f_p'(x) = x^{p-1}.$$

שימו לב שהפונקציה פועלת על ערכים חיוביים (כי הנחנו שכל פונקציות-הערך מונוטוניות-עולות), ולכן הפונקציה f_p היא פונקציה עולה, והנגזרת שלה תמיד חיובית.

כאמור, כאשר p=1, חלוקה הממקסמת סכום-f_p היא בדיוק חלוקה אוטיליטרית. ככל ש־p קטן יותר, כך f_p נותנת יותר עדיפות לשחקנים עם ערך קטן יותר. למשל, נניח שהערך הנוכחי של עמי קטן פי 2 מהערך הנוכחי של תמי. אז חלוקה ממקסמת סכום־f_p תיתן את הפרוסה Z לעמי, אם ורק אם

$$v_{ami}(Z) \geq v_{tami}(Z) * 2^{p-1}$$

כאשר p שואף למינוס אינסוף, הגורם בצד ימין – המכפיל את ערכו של השחקן עם הערך הגבוה יותר – שואף לאפס. לכן, חלוקה הממקסמת סכום־f_p תמיד נותנת כל פרוסה אינפיניטיסימלית־קטנה Z, לשחקן שהערך הנוכחי שלו נמוך יותר. התוצאה היא חלוקה אגליטרית!

מצאנו, אם כך, משפחה אינסופית של פונקציות f_p, שבקצה אחד שלה (p=1) נמצאת חלוקה אוטיליטרית, ובקצה השני שלה (p=-∞) נמצאת חלוקה אגליטרית; שינוי הערך p מאפשר לנו לבצע אינטרפולציה בין שתי הגישות המנוגדות.

מיקסום סכום הלוגריתמים

כיוון שיש אינסוף ערכים של p, נשאלת השאלה אם יש אחד מהם שהוא "טוב" יותר מכל השאר. מתברר שעבור p=0, לחלוקה ממקסמת סכום־f_p ישנה תכונה מיוחדת. שימו לב שעבור p=0, הנגזרת היא 1/x ולכן הפונקציה עצמה היא הלוגריתם הטבעי, f(x) = ln(x).

משפט. כאשר לכל שחקן ישנה הערכה רציפה, חיבורית ומונוטונית־עולה, כל חלוקה הממקסמת את סכום הלוגריתמים של הערכים היא חלוקה **ללא קנאה**.

הוכחה. כאמור למעלה, לכל פונקציה f (רציפה וגזירה), חלוקה הממקסמת סכום־f נותנת כל פרוסה אינפיניטיסימלית־קטנה Z לשחקן j שעבורו מכפלת הנגזרת בערך של Z היא הגדולה ביותר, כלומר:

$$f'(v_j(X_j)) * v_j(Z) \geq f'(v_i(X_i)) * v_i(Z)$$

$$\text{for all } i \text{ in } 1,\ldots,n.$$

אי-השיוויון הזה נכון לכל פרוסה Z קטנה מספיק, שהיא תת-קבוצה של X_j. לכן, אי-השיוויון נכון גם כאשר אנחנו פורסים את X_j לפרוסות קטנות רבות מאד, $Z_1,\ldots,Z_M$ (עבור M גדול מאד כלשהו), ומסכמים את אי-השיוויון עבור כל הפרוסות הללו:

$$\mathrm{Sum}[k=1,..,M] \quad f'(v_j(X_j)) * v_j(Z_k) \quad \geq$$
$$\mathrm{Sum}[k=1,..,M] \quad f'(v_i(X_i)) * v_i(Z_k)$$

נוציא את הקבוע מחוץ לסכום ונקבל:

$$f'(v_j(X_j)) * \mathrm{Sum}[k=1,..,M] \quad v_j(Z_k) \quad \geq$$
$$f'(v_i(X_i)) * \mathrm{Sum}[k=1,..,M] \quad v_i(Z_k)$$

מתכונת החיבוריות נובע:

$$f'(v_j(X_j)) * v_j(Z_1 \text{ U } \ldots \text{ U } Z_M) \quad \geq$$
$$f'(v_i(X_i)) * V_i(Z_1 \text{ U } \ldots \text{ U } Z_M)$$

איחוד כל הפרוסות Z_1 U ... U Z_M שווה בדיוק ל X_j, ומכאן:

$$f'(v_j(X_j)) * v_j(X_j) \geq f'(v_i(X_i)) * v_i(X_j)$$

כאשר f היא פונקציה לוגריתמית, מקבלים:

$$(1 / v_j(X_j)) * v_j(X_j) \geq (1 / v_i(X_i)) * v_i(X_j)$$

מעבירים אגף ומקבלים, לכל שני שחקנים j,i:

$$v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$$

וזו בדיוק ההגדרה של חלוקה ללא קנאה!

מש"ל.

החלוקה הממקסמת את סכום הלוגריתמים נקראת גם **חלוקה אופטימלית־נאש (Nash-optimal)**, על-שם ג'ון נאש (John Nash) שהציע את הרעיון לראשונה בהקשר אחר.

דרך נוספת להגדיר חלוקה אופטימלית־נאש היא: חלוקה הממקסמת את **המכפלה** של ערכי השחקנים. שתי ההגדרות שקולות: לפי חוקי הלוגריתמים, לוגריתם של מכפלה שווה לסכום הלוגריתמים. לוגריתם הוא פונקציה עולה; לכן, מיקסום המכפלה שקול למיקסום לוגריתם המכפלה, שהוא סכום הלוגריתמים.

חלוקה אופטימלית־נאש נותנת לנו איזון בין שני העקרונות הקיצוניים – האוטיליטרי והאגליטרי; איזון בין דאגה לרווחה הכללית, לבין דאגה לשכבות החלשות. היא מבטיחה שהחלוקה תהיה גם יעילה־פארטו וגם ללא־קנאה. כשההערכות חיבוריות, החלוקה כמובן גם פרופורציונלית. כיוון שהפונקציה הלוגריתמית היא קעורה, חישוב המקסימום של סכום הלוגריתמים הוא בעיית מיטוב קמורה. אם כך, יש לנו אלגוריתם מהיר למציאת חלוקה יעילה־פארטו וללא־קנאה.

אין זה משנה באיזה לוגריתם משתמשים – טבעי, בסיס 10 או כל בסיס אחר (בתנאי שמשתמשים באותו לוגריתם לכולם). זאת, מכיוון שכל הלוגריתמים זהים עד-כדי הכפלה בקבוע.

הוגנות, יעילות וקשירות – טְרִילֶמָה

בפרק הקודם, עסקנו בבעיית חלוקת קרקע שבה יש חשיבות לקשירות, והראינו שתמיד קיימת חלוקה שהיא ללא־קנאה וקשירה.

בפרק זה, עסקנו בבעיית חלוקת־משאבים, שבה אין חשיבות לקשירות – חשוב רק איזה חלק מכל משאב מגיע לכל שחקן. במצב זה, תמיד קיימת חלוקה שהיא ללא־קנאה ויעילה־פארטו.

קל למצוא חלוקה שהיא קשירה וגם יעילה־פארטו, למשל באלגוריתם הדיקטטורה הסדרתית.

האם תמיד קיימת חלוקה שיש לה כל שלוש התכונות - ללא-קנאה, קשירה, ויעילה בו-זמנית? התשובה היא לא, כפי שניתן לראות בדוגמה הבאה.

נתונה עוגה חד־מימדית המחולקת לשבעה איזורים סמוכים. הערכים של עמי, תמי ורמי לכל איזור נתונים בטבלה למטה. כל אחד מהשחקנים רוצה פרוסה קשירה בלבד.

איזור / **שחקנים**	**א**	**ב**	**ג**	**ד**	**ה**	**ו**	**ז**
עמי	2	0	3	0	2	0	0
תמי	0	0	0	0	0	7	0
רמי	0	2	0	2	0	0	3

בכל חלוקה ללא־קנאה, תמי חייבת לקבל את איזור ו (או חלק ממנו). עכשיו יש שתי אפשרויות:

- עמי מקבל את כל האיזורים מימין לתמי (א עד ה ברצף), ורמי מקבל את האיזור משמאל לתמי (ז). במקרה זה, רמי מקנא בעמי.
- עמי ורמי שניהם מקבלים איזורים מימין לתמי. אם רמי מקבל את איזורים ב עד ד, אז עמי מקנא בו; אם רמי מקבל רק את איזור ב או ד, אז החלוקה אינה יעילה פארטו – הערך של רמי הוא 2 בלבד, אבל אפשר להשיג שיפור פארטו על־ידי העברת החלק של רמי לצד שמאל.

כאן אנחנו נתקלים בתופעה החוזרת על עצמה רבות בכלכלה (וגם בתחומים אחרים בחיים): ישנן שלוש דרישות, שאי-אפשר למלא את כולן בו-זמנית. צריך לבחור על מה לוותר: האם לוותר על קשירות? על הוגנות? על יעילות? התשובה תלויה בבעיה, ומשתנה בכל מקרה לגופו. מצב כזה נקרא באנגלית **טְרִילֶמָה (trilemma)** – התלבטות בין 3 אפשרויות:

	פרוסות קשירות	**ללא קנאה**	**יעיל פארטו**
אלגוריתם סימונס–סו (בפרק 2)	כן	כן	לא
חלוקה אופטימלית־נאש	לא	כן	כן
דיקטטורה סדרתית	כן	לא	כן

לסיום, דוגמה מהחיים לסתירה בין הוגנות ליעילות. כשתיכננתי את המבחן לקורס אלגוריתמים כלכליים בשנת ה׳תשע״ח, רציתי לתת לסטודנטים הרבה זמן, כך שלא יהיו לחוצים. אז כתבתי בבחינה ״משך הבחינה: 4 שעות״. מדור בחינות פסל את הבחינה בטענה שהמקסימום הוא 3 שעות. כששאלתי: למה? ענו לי: כי ביממה יש 12 שעות עבודה, ויש 3 בחינות ביום. אמרתי: מעולה, ב-12 שעות יש מקום בדיוק ל־3 בחינות של 4 שעות! אז הם הסבירו לי, שיש סטודנטים עם אישור רפואי להארכת זמן, ומגיע להם לקבל 25% יותר זמן מכל שאר הכיתה. אז אם כולם מקבלים 3 שעות, הם מקבלים 3:45 וזה מסתדר, אבל אם כולם מקבלים 4 שעות, הם יצטרכו לקבל 5 שעות וזה כבר לא מסתדר.

יש כאן סתירה בין הוגנות ליעילות: ההוגנות מחייבת לתת לסטודנטים עם אישור את הארכת-הזמן המגיעה להם. אבל כתוצאה מכך נוצר מצב שהוא לא יעיל פארטו (עבור הסטודנטים), שהרי היה עדיף לכולם – גם לסטודנטים עם אישור וגם לסטודנטים בלי אישור – שהבחינה תהיה 4 שעות לכולם.

במקרה זה, הנהלת האוניברסיטה העדיפה את ההוגנות על־פני היעילות. מה הייתם אתם מעדיפים?