"וּנְחַלְתֶּם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאָחִיו" (יחזקאל מז 14)

מיזוג הצעות תקציב

budget-proposal aggregation

אראל סגל-הלוי ע"פ:

Freeman, Pennock, Peters, Wortman (2021).

הקלט:

- כסף בקופה: C.
- נושאים: 1,...,m (סעיפי תקציב).
- אזרחים: 1,...,n.
- לכל אזרח *i* יש **תקציב אידיאלי**:
- $p_{i,1},\ldots,p_{i,m}$; $p_{i,1} + \ldots + p_{i,m} = C$

הפלט:

- וקטור **d** המייצג תקציב: $d_1,\ldots,d_m$.
- $d_1 + \ldots + d_m = C$.
- התועלת של אזרח i מהתקציב d היא:
- $u_i(d) = -\text{Sum}[j=1,\ldots,m]\ |d_j - p_{i,j}|$

חימום: סעיף אחד

- נניח שצריך להחליט רק על תקציב החינוך.
- כל אזרח i אומר מספר p_i.
- אלגוריתם א: רוב.
- חסר משמעות; אולי לכל מספר יש תומך 1.
- אלגוריתם ב: ממוצע.
- לא מגלה אמת, אפילו כשיש רק 2 אזרחים.
- אלגוריתם ג: קבוע שרירותי.
- לא יעיל פארטו.
- אלגוריתם ד: דיקטטור.
- לא *אנונימי* – מפלה בין אזרחים שונים.
- האם יש אלגוריתם מגלה-אמת, יעיל ואנונימי?

אלגוריתם החציון

- סדר את ההצבעות בסדר עולה:

$p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n$

- בחר את הצבעה מספר $n/2$ (עגל למעלה).

משפט. אלגוריתם החציון אנונימי ויעיל-פארטו.

הוכחה. אנונימי – ברור לפי הגדרה.

יעיל-פארטו – כי יש אנשים שהצביעו מעל החציון – והם יפסידו אם הערך הנבחר יקטן; ויש אנשים שהצביעו מתחת לחציון – והם יפסידו אם הערך הנבחר יגדל. ***

אלגוריתם החציון

- סדר את ההצבעות בסדר עולה:

$p_1 \le p_2 \le \dots \le p_n$

- בחר את הצבעה מספר $n/2$ (עגל למעלה).

משפט. אלגוריתם החציון מגלה-אמת.

הוכחה. נניח שהחציון האמיתי הוא x, ואזרח כלשהו i אינו מרוצה מהבחירה הזאת – נניח כי $x < p_i$.

החציון האמיתי הוא x, ולכן יש n/2 אנשים שהצביעו לפחות x, *לא כולל* i.

לכן, אם i ישנה את הצבעתו באופן כלשהו, עדיין יהיו לפחות n/2 אנשים שהצביעו לפחות x, והחציון יהיה לפחות x. לכן i לא ירויח מהשינוי.

ההוכחה למקרה $p_i > x$ דומה. ***

אלגוריתם החציון – עוד שימושים

אלגוריתם החציון יכול לשמש לבחירת ערך בנושאים רבים נוספים שהם *חד-ממדיים:*

- כמה ימים בשנה צריך להיות שעון קיץ?
- מה צריך להיות מספר השרים בממשלה?
- מה יהיה גובה המס על שדות הגז?
- לאיזו טמפרטורה לכוון את המזגן במשרד?

שני סעיפי תקציב

- נניח שיש רק שני סעיפים בתקציב: התקציב לאיזור הצפון והתקציב לאיזור הדרום.
- אפשר להשתמש באלגוריתם החציון לאיזור הצפון, ואת שאר התקציב לתת לדרום.

נניח ש:

- 51% מהאזרחים בצפון, מצביעים 100%;
- 49% מהאזרחים בדרום, מצביעים 0%.
- אלגוריתם החציון נותן 100% לצפון.
- לא הוגן כלפי תושבי הדרום.

תקציב הוגן לקבוצות

הגדרה. אלגוריתם לקביעת התקציב נקרא *הוגן לקבוצות* אם, כאשר האזרחים מחולקים לקבוצות וכל קבוצה j נותנת 100% מהתקציב לסעיף j, האלגוריתם מחלק את התקציב בין הסעיפים ביחס ישר לגדלי הקבוצות.

- אלגוריתם *הממוצע* – הוגן לקבוצות, אבל לא מגלה-אמת.
- אלגוריתם *החציון* – מגלה אמת, אבל לא הוגן לקבוצות.
- האם קיים אלגוריתם מגלה-אמת והוגן לקבוצות?

אלגוריתם החציון המוכלל

- בחר מראש קבוצה של *הצבעות קבועות:*
$f_1,\ldots,f_k$.
- הוסף אותן לקבוצת הצבעות האזרחים:
$p_1,\ldots,p_n$.
- הפעל את אלגוריתם החציון המקורי על קבוצת n+k ההצבעות (הקבועות ושל האזרחים).

החציון המוכלל - דוגמאות

1) נניח שיש n-1 הצבעות קבועות, וכולן שוות 0.
- אז אלגוריתם החציון המוכלל בוחר את ההצבעה המינימלית של אזרח: $\min_j p_j$.

2) נניח שיש n-1 הצבעות קבועות, וכולן שוות C.
- אז אלגוריתם החציון המוכלל בוחר את ההצבעה המקסימלית של אזרח: $\max_j p_j$.

3) נניח שחצי מההצבעות הקבועות הן 0 והחצי השני הן C.
- אז אלגוריתם החציון המוכלל בוחר את החציון של הצבעות האזרחים.

החציון המוכלל - תכונות

משפט. לכל קבוצה של הצבעות קבועות, החציון המוכלל הוא אנונימי ומגלה-אמת.
הוכחה. זהה לאלגוריתם החציון הרגיל. ***

משפט. אם יש לכל היותר n-1 הצבעות קבועות, אלגוריתם החציון המוכלל יעיל-פארטו.
הוכחה. יש (n+k)/2 הצבעות גדולות או שוות לחציון, וכן (n+k)/2 הצבעות קטנות או שוות לחציון. כאשר k ≤ n-1, שתי הקבוצות כוללות הצבעות של אזרחים, כי (n+k)/2 > k.
לכן לא קיים שיפור פארטו. ***

שני סעיפי תקציב - המשך

נפעיל את אלגוריתם החציון המוכלל עם n-1 הצבעות קבועות מפוזרות אחיד בין 0 ל-C:

$f_j := C * j / n$.

(2n-1 הצבעות בסה"כ; החציון הוא ההצבעה ה-n).

משפט. כשיש שני סעיפי תקציב, אלגוריתם החציון המוכלל עם הצבעות קבועות מפוזרות באופן אחיד בין 0 ל-C הוא *הוגן לקבוצות*.

הוכחה. נניח ש-k אנשים תומכים רק בסעיף א (נותנים C) ו n-k תומכים רק בסעיף ב (נותנים 0). החציון המוכלל יהיה בהצבעה הקבועה מס' k, שערכה הוא בדיוק $C*k/n$. ***

תקציב כללי – m סעיפים

מה יקרה אם נריץ את אלגוריתם החציון על כל סעיף בנפרד?

- נניח שהתקציב 30, יש 3 נושאים, 3 אזרחים. הצבעות: (27, 0, 3); (10, 20, 0); (0, 15, 15).

א. בלי הצבעות קבועות:

חציונים = (10, 15, 3), סכום = **28**.

ב. עם הצבעות קבועות מפוזרות אחיד 10,20:

(10, 15, 10); סכום = **35**.

אפשר לנרמל ע"י הכפלה ב: 30/35, אבל האלגוריתם לא יהיה מגלה-אמת.

חציון מוכלל עם פונקציות עולות

- בחר מראש קבוצה של *פונקציות*:

$f_1(t), \ldots, f_{n-1}(t); \quad t \text{ in } [0,1].$

- כל הפונקציות *רציפות* ו*עולות*, ומקיימות:

$f_i(0) = 0; \qquad f_i(1) = C.$

לכל t בין 0 ל-1, אפשר לחשב לכל נושא, חציון מוכלל עם הצבעות קבועות $f_1(t),\ldots,f_{n-1}(t)$.

- עבור t=0, החציון = המינימום; הסכום ≥ C.
- עבור t=1, החציון = המקסימום; הסכום ≤ C.
- לפי משפט ערך הביניים, קיים t* שעבורו סכום הסעיפים = C (ניתן למצוא ע"י חיפוש בינארי).

התקציב = חציון מוכלל עם: $f_1(t^*), \ldots, f_{n-1}(t^*)$.

חציון מוכלל עם פונקציות עולות

משפט: התוצאה של אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות אינה תלויה בבחירה של t^*.

הוכחה: נניח שיש שני ערכים של t, נניח $t_1<t_2$, שעבורם סכום כל הנושאים שווה *C*. כאשר t גדֵל, החציון בכל הנושאים לא קטֵן. כיוון שסכום החציונים נשאר זהה, החציון בכל הנושאים נשאר זהה.***

משפט: לכל n-1 פונקציות רציפות עולות, אלגוריתם החציון המוכלל מגלה-אמת.

הוכחה: במאמר. ***

איזה פונקציות נבחר כדי שהתקציב יהיה הוגן? <

חציון מוכלל עם פונקציות ליניאריות

נגדיר n-1 פונקציות ליניאריות:

$\mathbf{f_i (t) = C * min (1, i*t),}$ for $i = 1, \ldots, n-1$.

- הפונקציות רציפות ועולות.
  - $f_i (0) = C * \min (1, 0) = 0$.
  - $f_i (1) = C * \min (1, i) = C$.

חציון מוכלל עם פונקציות ליניאריות

משפט. אלגוריתם החציון המוכלל עם
פונקציות ליניאריות, $\mathbf{f_i(t) = C * \min(1, i*t)}$,
מוצא תקציב *הוגן לקבוצות*.

הוכחה. נניח שהאזרחים מחולקים לקבוצות של k_j
אזרחים הרוצים לתת 100% לנושא j בלבד.

בכל נושא j, יש $n-k_j$ אזרחים המצביעים 0.

כאשר $t=1/n$, ההצבעות הקבועות בכל נושא הן:

$f_i(t) = C * \min(1, i/n) = C*i/n.$

החציון המוכלל הוא בהצבעה ה-n, שהיא הקבוע ה-
k_j, שהוא $f_{k_j}(t) = \mathbf{C*k_j/n}$. סכום החציונים הוא בדיוק
C; לכן זה התקציב שייבחר, והוא הוגן. ***

חציון מוכלל עם פונקציות ליניאריות

משפט. אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות ליניאריות אינו תמיד יעיל פארטו.

הוכחה. נניח שיש 9 נושאים, 3 אזרחים, C=30:

- **אזרח א**: 6, 0, 0; 6, 6, 6, 6, 0, 0 .
- **אזרח ב**: 0, 6, 0; 0, 0, 6, 6, 6, 6 .
- **אזרח ג**: 0, 0, 6; 6, 6, 0, 0, 6, 6 .

עבור t=1/15, הצבעות קבועות 4, 2, מתקבל:

- 2, 2, 2; 4, 4, 4, 4, 4, 4; סכום 30, הפרש 24.

יש שיפור פארטו:

- 0, 0, 0; 5, 5, 5, 5, 5, 5; סכום 30, הפרש 20.

***

מיזוג הצעות תקציב - טרילמה

משפט. לא קיים אלגוריתם מגלה-אמת, הוגן לקבוצות, ויעיל-פארטו.

הוכחה: במאמר.

מיזוג הצעות תקציב - טרילמה

	יעיל פארטו	הוגן לקבוצות	מגלה אמת
אוטיליטרי	כן	לא	כן
חציון מוכלל	לא	כן	כן
דיקטטורה “הוגנת”	כן	כן	לא