

מטלה 8 שאלה 5 – ספיר דהן

יש לכם רכב ישן. אתם יודעים שהוא שווה בין 10,000 ל-20,000, אבל אין לכם מושג כמה בדיוק. אתם רוצים לדעת את הערך המדויק שלו. אתם יכולים להזמין שמאי, אבל הוא גם ייקח מכם הרבה כסף, וגם לא בטוח שהוא יגיד לכם את האמת. הציעו רעיון שיאפשר לכם לגרום לשמאי להגיד לכם את הערך האמיתי של הרכב, בלי שתצטרכו לשלם לו כסף מהכיס.

הנחה שלי: בעל הרכב רק מעוניין לשמוע מה המחיר נכון ולא בהכרח לקבל את המחיר הזה.

סימונים:

טווח הערכים שלנו הוא $a=10000$ ו- $b=20000$

ערך האמת של הרכב הוא $v \in [a, b]$

דיווח השמאי הוא $p \in [a, b]$

המטרה שלנו היא רק לגרום לק להיות שווה ל v . כלומר לגרום לשמאי להגיד ערך אמת ובלי לשלם לו כסף מהכיס.

***הערה:** השמאי יודע את האלגוריתם מראש אבל יודע את המספר שהוגרל רק אחרי הוא אומר את הערכה שלו לגבי מחיר הרכב.

האלגוריתם:

1. מבקשים מהשמאי להגיד את p .
2. בוחרים באופן אקראי בצורה יוניפורמית מספר R בין a ל- b ($R \sim U([a, b])$).
3. אם $p \geq R$: השמאי קונה את הרכב ומעביר לכם סכום R .
4. אחרת ($p < R$): אין עסקה ואין תשלום לאף צד.

עכשיו נוכיח שהאסטרטגיה הכי טובה של השמאי זה לומר את האמת, כלומר $v=p$.

אם השמאי יגיד ערך p נמוך מ- v הוא מפסיד הזדמנות לקנות את הרכב ולעשות עליו רווח (אם R יצא מספר בין p ל- v).

אם יגיד p גדול מ- v הוא עלול לשרוף כסף (אם R יצא מספר בין p ל- v הוא יקנה את הרכב בהפסד כלומר ישלם יותר מ- v).

הוכחה פורמלית:

נוכיח שהתועלת של השמאי מקסימלית כאשר הוא מספר אמת.

$$U(p) = \mathbb{E}(R[\text{gain}]) = \int_a^b \begin{cases} v - R, & R \leq p \\ 0, & R > p \end{cases} \cdot \frac{1}{b-a} dR = \frac{1}{b-a} \int_a^p (v - R) dR$$

$$\int_a^p (v - R) dR = \left[vR - \frac{R^2}{2} \right]_a^p = v(p - a) - \frac{1}{2}(p^2 - a^2)$$

$$U(p) = \frac{1}{b-a}(v(p-a) - \frac{1}{2}(p^2 + a^2))$$

עכשיו אנחנו בעצם רוצים למצוא את המקסימום של פונקציית התועלת:

$$\frac{dU}{dp} = \frac{1}{b-a}(v - p)$$

נשווה ל 0 למציאת נקודת קיצון:

$$0 = \frac{1}{b-a}(v - p)$$

$$0 = v - p$$

$$v = p$$

כאשר נגזור את הנגזרת עוד פעם נקבל נגזרת שניה והיא תהיה שווה ל -1, כלומר הנקודת קיצון שקיבלנו היא מקסימום.

לסיכום, פונקציית התועלת של השמאי היא מקסימום כאשר הוא מדבר אמת.

■