

## מטלה – חלוקת חפצים עם כסף

### שאלה 1: אלגוריתם חלופי לחלוקת חדרים

- ננסה להתאים את אלגוריתם המכרז לבעיית חלוקת החדרים באופן הבא:
1. מצא השמה ממקסמת-סכום-ערכים בין השחקנים לחדרים (בעזרת שידוך משקל-מקסימום).
  2. גבה מכל שחקן את הערך שהוא מייחס לחדר שלו.
  3. שלם את שכר הדירה.
  4. חלק את ההפרש בין השחקנים שווה בשווה.
- הוכיחו, שהאלגוריתם הזה לא תמיד מחזיר חלוקה ללא-קנאה.

### שאלה 2: חלוקת חדרים ללא קנאה – תכנות

- א. כתבו פונקציה בפייתון, המקבלת כקלט מטריצה של ערכים שהשחקנים מייחסים לחדרים, ומחזירה השמה ותמחור ללא קנאה. כותרת הפונקציה:

```
def envy_free_room_allocation(  
    valuations: list[list[float]], rent:float)
```

כאשר valuations היא מטריצת הערכים. דוגמה לקלט ופלט:

```
>>> envy_free_room_allocation([[150, 0],[140, 10]], rent=100)
```

```
Player 0 gets room 0 with value 150, and pays 115
```

```
Player 1 gets room 1 with value 0, and pays -15
```

יש לחשב את התמחור בשיטת **"המסלול הכבד ביותר"**, כפי שהוסבר בהוכחת המשפט.

יש לכתוב בדיקות על קלטים מגוונים ולוודא שהפונקציה נכונה.

\* ב. כתבו פונקציה נוספת העושה אותו הדבר כמו הפונקציה בסעיף א, פרט לכך שהיא מחשבת את התמחור בעזרת תיכנות ליניארי. השוו את זמני הריצה של שתי הפונקציות על קלטים אקראיים בגדלים שונים; שרטטו גרף של השינוי בזמן הריצה כפונקציה של מספר החדרים. איזו שיטה יעילה יותר?

### שאלה 3: משקל מעגל ממוצע גדול ביותר

כתבו פונקציה בפייתון, המקבלת כקלט גרף מכוון, ומחזירה מעגל שמשקלו הממוצע גדול ביותר. זמן הריצה צריך להיות פולינומיאלי בגודל הקלט.

**הערה:** קיימים אלגוריתמים הפותרים את הבעיה בזמן פולינומיאלי, אבל הם די מסובכים. לכן בשאלה זו מומלץ להיעזר בבניה מלאכותית. עם זאת, **חובה להבין את הפתרון ולוודא שהוא נכון** גם ע"י הוכחה וגם ע"י בדיקות מקיפות. שלא יעבדו עליכם..

#### שאלה 4: האם ייתכן שדייר ישלם יותר מערך החדר?

א. נניח שאנחנו מחלקים חדרים ושכר-דירה בין דיירים קוואזיליניאריים באלגוריתם ללא קנאה. הוכיחו, שאם סכום הערכים של דייר מסוים לכל החדרים בדירה גדול או שווה  $R$  (שכר הדירה הכללי), אז המחיר שישלם על החדר שיקבל, קטן או שווה מהערך שהוא מייחס לחדר.

ב. הראו דוגמה, שבה סכום הערכים של דייר מסוים קטן מ- $R$ , ובכל חלוקה ללא-קנאה (לא רק של אלגוריתם מסויים), הדייר הזה משלם מחיר גבוה יותר מערך החדר שקיבל.

#### שאלה 5: חלוקת חפצים עם אילוץ כמות

רוצים לחלק  $n \cdot k$  חפצים שונים בין  $n$  אנשים עם הערכות שונות, כך שכל אחד יקבל  $k$  חפצים בדיוק.

א. כתבו אלגוריתם לחלוקה ללא כסף, המוצא חלוקה הממקסמת את סכום הערכים, בזמן פולינומיאלי ב- $n, k$  (רמז: רדוקציה לשידוך).

\* ב. כתבו אלגוריתם לחלוקה ללא כסף, שזמן הריצה שלו פולינומיאלי ב- $n$  בלבד ולא ב- $k$  (רמז: רדוקציה לזרימה).

\* ג. כתבו אלגוריתם לחלוקה עם כסף, המוצא חלוקה ללא-קנאה ויעילה פארטו (רמז: רדוקציה לבעיית חלוקת חדרים).