מטלה 3 שאלה 4 – ספיר דהן

נתונים n שחקנים עם תקציבים $b_1, \dots, b_n$.

א. הוכיחו: כל שיווי-משקל תחרותי הוא ללא קנאה ממושקלת.

נגדיר את (X,p) להיות שיווי משקל תחרותי עם תקציבים $b_1, \dots, b_n$. לפי הגדרה של שיווי משקל תחרותי, לכל סוכן i נבחר X_i אשר יהווה את הבחירה הטובה ביותר עבורו עם התקציב b_i. כלומר, $p(X_i) \le b_i$.

יהא j סוכן אחר מתקיים $p(X_j) \le b_j$ ונגדיר $\widehat{X_j} = \frac{b_i}{b_j} X_j$ אז:

$$p\left(\widehat{X_j}\right) = p\left(\frac{b_i}{b_j} X_j\right) = \frac{b_i}{b_j} p(X_j) \le \frac{b_i}{b_j} \cdot b_j = b_i$$

אז $\widehat{X_j}$ אפשרי לקניה על ידי סוכן i. עכשיו מכיוון שסוכן i ממקסם את הערך שהוא מקבל בתקציב שלו נקבל:

$$V_i(X_i) \ge V_i\left(\widehat{X_j}\right) = V_i\left(\frac{b_i}{b_j} X_j\right) = \frac{b_i}{b_j} V_i(X_j)$$

$$\frac{V_i(X_i)}{b_i} \ge \frac{V_i(X_j)}{b_j}$$

מסקנה: כל שיווי משקל תחרותי הוא ללא קנאה ממושקלת.

■

ב. הוכיחו: אם חלוקה X ממקסמת סכום לוגריתמים ממושקל עם משקלים $b_1, \dots, b_n$, אז קיים תמחור p כך שהזוג (X,p) הוא שיווי משקל תחרותי חסכוני עם תקציבים שונים - $b_1, \dots, b_n$.

אנחנו מניחים שיש לנו את החלוקה $X = (x_1, \dots, x_n)$ אשר ממקסם את הסכום הממושקל $\sum_{i=1}^{n} b_i \log(V_i(X_i))$. יש לנו m משאבים עם כמויות זמינות $R = (R, \dots, R_m)$ ו – $X_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,n})$ זה הכמות של סוכן i לכל משאב.

עבור כל משאב r נבחר סוכן i כך ש- $x_{i,r} > 0$ ונגדיר:

$$p(r) = \frac{b_i V_i(r)}{V_i(X_i)}$$

הבהרה: במצגת בהנחה שהתקציבים שווים ל – 1 הנוסחה היא $p(r) = \frac{V_i(r)}{V_i(X_i)}$. כאשר התקציבים שונים יש להוסיף משקל b_i. ההוכחה לכך די זהה להוכחה במצגת רק שלכל איבר צריך להכפיל בתקציב.

לכל סוכן i נחשב את העלות של החלק שהוא קיבל:

$$p(X_i) = \sum_r x_{i,r}\, p(r) = \sum_r x_{i,r} \cdot \frac{b_i V_i(r)}{V_i(X_i)} = \frac{b_i}{V_i(X_i)} \sum_r x_{i,r} V_i(r) = \frac{b_i V_i(X_i)}{V_i(X_i)} = b_i$$

כלומר כל סוכן i מוציא בדיוק את התקציב b_i.

כעת, נניח בשלילה שסוכן i יכול לבחור את Y_i כך ש-$V_i(Y_i) > V_i(X_i)$ ועדיין בעלות $p(Y_i) \le b_i$. לפי הגדרת המחירים נקבל:

$$p(Y_i) = \frac{b_i V_i(Y_i)}{V_i(X_i)} > b_i$$

מה שסותר את מגבלת התקציב. מכן אין חלק Y_i בעל ערך גבוה יותר במסגרת התקציב, ו - X_i הוא אכן אופטימלי עבור סוכן i.

מסקנה: מכיוון שלכל סוכן i מתקיים:

$p(X_i) = b_i$ כלומר, הסוכן מוציא את כל התקציב שלו.

אין חלופה בתקציב כך שסוכן i יעדיף אותה על פני X_i.

מתקיים שכל סוכן בוחר את החבילה האופטימלית עבורו, והחלוקה X עונה על דרישות השוק (כל המשאבים נוצלו). לפיכך, (X,p) הוא שיווי משקל תחרותי עם תקציבים $b_1, \dots, b_n$.

■