

שאלה 4: תועלת מינימום

בהרצאה הנחנו, שהתועלת של כל תורם שווה לסכום התרומות לנושאים שהוא תומך בהם:

$$u_i(d) = \text{Sum}[j=1, \dots, m; u_{i,j} > 0] d_j$$

לדוגמה, אם עמי תומך בנושאים א, ב, נושא א מקבל 4000 ו-ב 2000, אז התועלת של עמי היא 6000.

בשאלה זו, נניח שהתועלת של כל תורם שווה לתרומה הקטנה ביותר לנושא כלשהו שהוא תומך בו:

$$u_i(d) = \text{Min}[j=1, \dots, m; u_{i,j} > 0] d_j$$

בדוגמה למעלה, התועלת של עמי היא 2000.

נתונים 100 אזרחים ו-4 נושאים. 90 אזרחים תומכים בנושאים א,ב,ג; 10 אזרחים תומכים בנושאים ג,ד.

א. הראו שהתקציב האנארכי הוא פריק אבל לא יעיל-פארטו.

ב. הראו שהתקציב השווה (כל הנושאים מקבלים אותו סכום) יעיל-פארטו אבל לא פריק.

ג. מיצאו תקציב שהוא גם יעיל פארטו וגם פריק.

* ד. האם קיים אלגוריתם מגלה-אמת המוצא תמיד תקציב יעיל-פארטו ופריק?

תקציב אנארכי - תקציב אנארכי נותן לכל אזרח את חלקו בתקציב C/n , ואומר לו לחלק את הכסף כרצונו בין כל הנושאים שהוא תומך בהם.

א. לפי משפט שראינו בכיתה אנחנו יודעים שתקציב אנארכי יכול להיות לא יעיל.

התקציב צריך להיות גם אנארכי וגם פריק.

כל אחד מהאזרחים מקבל $1/100$ מהתקציב.

90 אזרחים תומכים ב-ABC, לכן כל אחד מהם יקבל 0.3

10 תומכים ב-CD אז כל אחד מהם יקבל 0.05

$(A,B,C,D) \rightarrow (0.3, 0.3, 0.35, 0.5)$

ההגדרה החדשה שקיבלנו היא כזו – התועלת של כל אזרח היא המינימום מבין הכל.

לכן קיים שיפור פארטו כזה:

עבור 90 השחקנים – הם צריכים לתת פחות ל- C כי הוא הכי גדול ולתת יותר ל-AB, ככה

המינימום יהיה גבוהה יותר.

עבור 10 השחקנים – לא לתת כלום ל- C ורק ל- D וככה המינימום שלהם יעלה ל-0.1.

צריך לבחור אחת מהשיטות כי שתיהן לא יכולות לעבוד במקביל.

ב. תקציב שווה – $(A,B,C,D) \rightarrow (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$

יעיל פארטו – מכיוון שההגדרה שלנו של יעילות היא לפי המינימום, אז בשביל לשנות את

החלוקה אנחנו צריכים להוריד כמות מסוימת מאחד ולהביא לאחד אחר.

ההוספה לאחד אחר לא תוסיף לנו ליעילות וההורדה מאחד רק תוריד לנו את היעילות לכן זה

יעיל פארטו.

לא פריק – עבור הקבוצה הקטנה של ה-10 אנשים, התקציב שלהם קטן יותר ממה שיוצא שהחלוקה השווה יוצרת, למשל נושא D מקבל 0.25 אבל סכום כל ה-10 האנשים מגיע רק לעד 0.1.

ג. נסתכל בדוגמא שהבאנו בסעיף א ונשתמש בה כאן –

$$(A,B,C,D) \rightarrow (0.3,0.3,0.3,0.1)$$

יעיל פארטו – עבור הקבוצה של ה-90 – לא ניתן להשיג מינימום גבוהה יותר כי הכל מחולק שווה בשווה, עבור הקבוצה של ה-10 – משתמשים בזה שה-90 הביאו ל- C הרבה אז הם ישמו את כל הסכום שלהם ב- D בשביל להעלות את המינימום שלהם ל-0.1.

פריק – כמו שהסברנו, ה-90 נותנים 0.3 ל-ABC וה-10 נותנים 0.1 ל-D.