

## מטלה – חלוקה מיטבית של חפצים בדידים

- שאלה 0 (רשות – תוספת 2 נקודות): אלגוריתם חלוקה הוגנת של קורסים היכנסו לחשבון שלכם באתר חלוקת הקורסים, שנרשמתם אליו בשבוע שעבר. אתם אמורים לראות בלשונית "תוצאות" את תוצאות אלגוריתם החלוקה.
- א. נסו לשער, מתוך ההסברים, מה האלגוריתם שהופעל? (זה לא אחד מהאלגוריתמים שנלמדו בשיעור, אבל הוא דומה).
- ב. הוכיחו שהאלגוריתם מחזיר חלוקה EF1.
- ג. ענו על השאלות בלשונית "משוב".

----

בנוסף, יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. סעיפים המסומנים בכוכבית (\*) מזכים בניקוד כפול.

### שאלה 1: אלגוריתם הסבב – התחכמות בטוחה

- משתמשים באלגוריתם הסבב לחלוקת  $m$  חפצים בין  $n$  שחקנים.
- א. הוכיחו, שכאשר  $n \leq m$ , לא קיימת התחכמות בטוחה.
- \* ב. הוכיחו, שגם כאשר  $m = n+1$ , לא קיימת התחכמות בטוחה.

### שאלה 2: חלוקה ללא-קנאה עד-כדי חפץ כלשהו

- חלוקה נקראת "ללא קנאה עד-כדי חפץ כלשהו" ( $EFx$ ) אם לכל שני שחקנים א, ב, אם נוריד חפץ כלשהו מהסל של שחקן ב, אז שחקן א לא יקנא בו.
- א [חימום]. הראו דוגמה לחלוקה שהיא EF1 אבל לא  $EFx$ .
- ב. הוכיחו, שכאשר כל השחקנים מסכימים על סדר ההעדפות של החפצים (כלומר: כל השחקנים מסכימים מה החפץ הכי טוב, מה החפץ השני הכי טוב, וכו'), קיימת חלוקה  $EFx$ .
- ג. תארו אלגוריתם למציאת חלוקה  $EFx$  בין שני שחקנים (רמז: מותר להשתמש בסעיף ב גם אם לא פתרתם אותו).
- \* ד. נסו לגרום לכלי ב"מ כלשהו לתאר לכם אלגוריתם קצר ופשוט למציאת חלוקה  $EFx$  בין שלושה שחקנים. ודאו שהאלגוריתם נכון.
- \*\* ה. נסו לגרום לכלי ב"מ כלשהו לתאר לכם אלגוריתם קצר ופשוט למציאת חלוקה  $EFx$  בין ארבעה שחקנים. ודאו שהאלגוריתם נכון.

### שאלה 3: חלוקה אגליטרית מדויקת – חיפוש במרחב המצבים

א. כתבו תוכנית בפייתון, המבצעת חיפוש במרחב המצבים לבעיית חלוקת חפצים אגליטרית. כותרת הפונקציה:

```
def egalitarian_allocation(  
    valuations: list[list[float]])
```

כאשר valuations היא מטריצת הערכים. דוגמה לקלט ופלט:

```
>>> egalitarian_allocation([[4, 5, 6, 7, 8], [8, 7, 6, 5, 4]])
```

```
Player 0 gets items 3, 4 with value 15
```

```
Player 1 gets items 0, 1, 2 with value 21
```

ממשו את שני כללי-הגיזום שלמדנו בהרצאה.

ב. בדקו את הפונקציה שלכם על קלטים אקראיים - ערכים שלמים בין 1 לבין 2 (בחזקת 32).

ציירו גרף של זמן-הריצה כפונקציה של מספר החפצים, כאשר מספר השחקנים הוא 2, 3 או 4.

\* ג. המציאו כללי-גיזום או חסמים שישפרו עוד יותר את זמן הריצה; ציירו גרף של זמן-הריצה עם הכללים המשופרים שלכם (עוד נקודה אחת תינתן למי ששיגו את זמן הריצה הטוב ביותר).

### שאלה 4: האלגוריתם החמדני לחלוקת חפצים

בהרצאה הוכחנו את יחס הקירוב של האלגוריתם החמדני (LPT) לחלוקת מטלות. ניתן להשתמש באותו אלגוריתם בדיוק גם לחלוקת חפצים (עם ערך חיובי).

א. הוכיחו, שיחס הקירוב של האלגוריתם החמדני לחלוקת חפצים הוא לפחות  $1/2$  [כלומר: האלגוריתם מחזיר חלוקה שבה הערך המינימלי הוא לפחות  $1/2$  מהערך המינימלי בחלוקה אגליטרית].

\* ב. הוכיחו, שיחס הקירוב של האלגוריתם החמדני לחלוקת חפצים הוא לפחות  $2/3$ .

### שאלה 5: מיקסום המכפלה בחלוקת חפצים בדידים

כזכור, חלוקה יעילה-נאש היא חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים של השחקנים.

א. הוכיחו, שהבעיה של מציאת חלוקה יעילה-נאש של חפצים בדידים היא NP-קשה.

ב. תארו אלגוריתם חיפוש-במרחב-המצבים למציאת חלוקה יעילה-נאש.