

מטלה – תקצוב משתף רציף

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בניקוד כפול.

* שאלה 1: התחכמות בטוחה באלגוריתם נאש

למדנו שאלגוריתם נאש (מיקסום המכפלה) לחלוקת תקציב רציף אינו מגלה-אמת. אבל כמה מידע בדיוק צריך כדי לחשב התחכמות בטוחה? [תזכורת: התחכמות בטוחה היא דיווח לא-אמיתי, שבמקרים מסוימים יכול להגדיל את תועלת השחקן, ובאף מקרה לא יכול להקטין אותה].

האם לשחקן, שאין לו שום מידע על פעולות השחקנים האחרים, יכולה להיות התחכמות בטוחה? אם כן – הראו דוגמה והוכיחו שההתחכמות בטוחה. אם לא – הוכיחו שבשום מקרה אין התחכמות בטוחה.

שאלה 2: זכויות לפי גובה המס

נניח שאזרח i משלם מס בגובה C_i (התקציב C שווה לסכום המיסים שמשלמים כל האזרחים). אנחנו רוצים להגדיר מערכת לחלוקת תקציב, שתתן זכויות רבות יותר לאזרחים המשלמים יותר מיסים. לדוגמה, ההגדרה של תכונת "הוגנות ליחידים" תהיה: "התועלת של אזרח i היא לפחות C_i ".

א. כתבו הגדרה מוכללת של תקציב הוגן לקבוצות, ושל תקציב פריק.

ב. הוכיחו, שכל תקציב פריק הוא הוגן לקבוצות – בהתאם להגדרות של סעיף א.

ג. נגדיר "תקציב נאש מוכלל" כתקציב d הממקסם את הסכום:

$$\text{Sum}[i=1, \dots, n] C_i * \log(u_i(d))$$

(מכפילים את הלוג של אזרח i בגובה המס ששילם אזרח i).

הוכיחו שתקציב נאש מוכלל הוא פריק (לפי ההגדרה של סעיף א).

הדרכה: הכלילו את ההוכחות מההרצאה.

* שאלה 3: תיכנות – תקציב פריק

כתבו פונקציה, המקבלת תקציב כלשהו, ובודקת אם הוא פריק, ואם כן – מחזירה פירוק אחד שלו. כותרת הפונקציה:

```
def find_decomposition(
    budget: list[float], # (... ,1,0) לפי הסדר
    preferences: list[set[int]] # הנושאים שכל אזרח תומך בהם
)
```

דוגמה לקלט:

```
budget = [400, 50, 50, 0] # נושא 0 קיבל 300, נושא 1 קיבל 100, וכו'
preferences = [ {0,1}, {0,2}, {0,3}, {1,2}, {0} ]
```

שחקן א תומך בנושאים 0,1; שחקן ב תומך בנושאים 0,2; וכו' #

במקרה זה התקציב פריק. דוגמה לפירוק: שחקנים א, ב, ג, ה תורמים 100 לנושא 0; שחקן ד תורם 50 לנושא 1 ו-50 לנושא 2.

שאלה 4: תועלת מינימום

בהרצאה הנחנו, שהתועלת של כל תורם שווה לסכום התרומות לנושאים שהוא תומך בהם:

$$u_i(d) = \sum_{j=1, \dots, m; u_{i,j} > 0} d_j$$

לדוגמה, אם עמי תומך בנושאים א, ב, נושא א מקבל 4000 ו-ב 2000, אז התועלת של עמי היא 6000.

בשאלה זו, נניח שהתועלת של כל תורם שווה לתרומה הקטנה ביותר לנושא כלשהו שהוא תומך בו:

$$u_i(d) = \min_{j=1, \dots, m; u_{i,j} > 0} d_j$$

בדוגמה למעלה, התועלת של עמי היא 2000.

נתונים 100 אזרחים ו-4 נושאים. 90 אזרחים תומכים בנושאים א,ב,ג; 10 אזרחים תומכים בנושאים ג,ד.

א. הראו שהתקציב האנארכי הוא פריק אבל לא יעיל-פארטו.

ב. הראו שהתקציב השווה (כל הנושאים מקבלים אותו סכום) יעיל-פארטו אבל לא פריק.

ג. מיצאו תקציב שהוא גם יעיל פארטו וגם פריק.

* ד. האם קיים אלגוריתם מגלה-אמת המוצא תמיד תקציב יעיל-פארטו ופריק?

שאלה 5: מונוטוניות של אלגוריתמי תקצוב

אלגוריתם לחלוקת תקציב רציף נקרא **מונוטוני** אם, כשמפעילים אותו עם תקציב גדול יותר, וההצבעות של כל האזרחים לא משתנות, ההקצאה לכל אחד מהנושאים לא קטנה. לכל אחד מהאלגוריתמים הבאים, הוכיחו שהוא מונוטוני, או הביאו דוגמה נגדית:

א. אוטיליטרי;

ב. אוטיליטרי על תנאי;

ג. נאש (מיקסום המכפלה).