

מטלה - חלוקה הוגנת ויעילה

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול.

שאלה 1: אסטרטגיה בבעיות חלוקת משאבים

תזכורת ממטלה 1: **התחכמות** (מניפולציה) היא דיווח (ע"י שחקן כלשהו) על ערכים שונים מהערכים האמיתיים, על-מנת להשיג תוצאה טובה יותר. **התחכמות בטוחה** היא התחכמות שאף פעם לא גורמת לשחקן להפסיד.

א. הוכיחו, שבחלוקת משאבים יעילה-אוטילטרית, קיימת התחכמות בטוחה.

ב. הוכיחו, שבחלוקת משאבים יעילה-אוטילטרית, אם מנרמלים את הערכים של כל השחקנים כך שסכום הערכים של כל המשאבים עבור כל שחקן חייב להיות בדיוק 100, אז לא קיימת התחכמות בטוחה.

ג. הוכיחו, שבחלוקת משאבים לקסימין-אגליטרית, קיימת התחכמות בטוחה.

* ד. הוכיחו, שבחלוקת משאבים לקסימין-אגליטרית, אם מנרמלים את הערכים של כל השחקנים כך שסכום הערכים של כל המשאבים עבור כל שחקן חייב להיות בדיוק 100, אז לא קיימת התחכמות בטוחה.

שאלה 2: מיקסום סכום הערכים תחת אילוצי הוגנות

נתונה בעיית אופטימיזציה עבור חלוקת עוגה בין שני שחקנים:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} && V_1(X_1) + V_2(X_2) \\ & \text{such that} && (X_1, X_2) \text{ is a partition of } C \\ & && \text{and } V_1(X_1) \geq V_1(C)/2 \text{ and } V_2(X_2) \geq V_2(C)/2 \end{aligned}$$

כאשר C היא העוגה כולה ו X_i הוא החלק שמקבל שחקן i .

א. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה פרופורציונלית.

ב. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה יעילה-פארטו [רמז: הניחו בשלילה שיש שיפור פארטו והגיעו לסתירה].

* ג. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה ללא-קנאה.

שאלה 3: חלוקה אגליטרית עם פייתון

תזכורת: בבעיית החלוקה שלמדנו בכיתה, יש n אנשים ו- m משאבים, וכל אדם מייחס ערך לכל משאב.

ניתן לייצג כל בעיה כזאת כמטריצה עם n שורות ו- m עמודות, שבה הערך בשורה i ועמודה j הוא הערך שמייחס אדם i למשאב j .

כיתבו פונקציה בפייתון, בעזרת `cvxpy`, המקבלת כקלט מטריצה כזאת (כללית), וכותבת למסך תיאור של חלוקה אגליטרית. לדוגמה, אם הקלט הוא (כמו הדוגמה במצגת):

```
[[81, 19, 1],
 [70, 1, 29]]
```

אז הפלט הוא (בקירוב):

```
Agent #1 gets 0.47 of resource #1, 1.0 of resource #2, and 0.0 of
resource #3.
```

Agent #2 gets 0.53 of resource #1, 0.0 of resource #2, and 1.0 of resource #3.

* שאלה 4: חלוקה הוגנת ויעילה עם נייר ועט

נתונה בעיית חלוקת משאבים עם הערכים הבאים:

- עמי: פלדה 1, נפט 0.
 - תמי: פלדה t , נפט 1 פחות t
- כאשר t הוא פרמטר כלשהו בין 0 ל-1.

- א. חשבו חלוקה הממקסמת את **סכום הערכים**, כפונקציה של t . עבור איזה t החלוקה ללא קנאה?
- ב. חשבו חלוקה הממקסמת את **סכום השורשים** של הערכים, כפונקציה של t . עבור איזה t החלוקה ללא קנאה?
- ג. חשבו חלוקה הממקסמת את **מכפלת הערכים**, כפונקציה של t . עבור איזה t החלוקה ללא קנאה?
- ד. כתבו בעיית אופטימיזציה ב-cvxpy, המוצאת חלוקה הממקסמת את **מכפלת הערכים**, כפונקציה של t . (רמז: כנראה תקבלו הודעת שגיאה – עליכם למצוא לה פתרון).

שאלה 5: חלוקת משאבים הוגנת ויעילה בעזרת בינה מלאכותית

- במטלה הקודמת ראינו שב"מ יכולה למצוא חלוקה הוגנת, עם קצת עזרה מבני-אדם.
- בשאלה הזאת ננסה לאתגר יותר את הב"מ, ונבקש ממנה למצוא חלוקה שהיא גם **ללא קנאה** וגם **יעילה פארטו**.
- א. [חימום]. בקשו מכלי ב"מ לבחירתכם למצוא חלוקה יעילה-פארטו וללא-קנאה על בעיית חלוקת-המשאבים מההרצאה. ודאו שהחלוקה אכן מקיימת את הדרישות. אם היא לא מצליחה – נסו לעזור לה.
- ב. המציאו בעיה מסובכת יותר (עם יותר משאבים ויותר שחקנים), שבה הב"מ לא תצליח למצוא חלוקה יעילה-פארטו וללא-קנאה.
- אפשר להמציא בעיה בעצמכם, או לבקש מהב"מ עצמה להמציא בעיה קשה, או לבקש מב"מ אחרת להמציא בעיה קשה (למשל אפשר לבקש מ claude להמציא בעיה עבור gpt ולהיפך).
 - בכל מקרה, יש לוודא שהבעיה אכן קשה ולא ניתנת לפתרון יעיל ע"י ב"מ.