

## מטלה - חלוקת חפצים בדידים

### שאלה 0: חובה לכולם

יש להירשם לאתר חלוקת הקורסים: <https://faircourse.csariel.xyz>, ולמלא את ההעדפות שלכם לגבי קורסים. המידע ישמש לצורך הדגמה בשיעור הבא. בנוסף, יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (\*) מזכות בניקוד כפול. סעיפים המסומנים בכוכבית (\*) הם סעיפי רשות, ומזכים את השאלה בניקוד כפול.

### שאלה 1: הסכמי עודפים

**הסכם עודפים** הוא הסכם בין שתי מפלגות, המתבצע באופן הבא:

- לכל זוג של מפלגות שחתם על הסכם, מגדירים מפלגת-על הכוללת את הקולות של שתי המפלגות.
  - מריצים את אלגוריתם חלוקת המושבים על המפלגות המתקבלות.
  - לכל זוג של מפלגות שחתם על הסכם, בודקים כמה מושבים קיבלה מפלגת-העל שלהם, ומחלקים את המושבים בין המפלגות לפי אלגוריתם חלוקת המושבים המקורי.
- א. תארו דוגמה של בחירות עם 3 מפלגות (א, ב, ג), שבה חלוקת המושבים מתבצעת בשיטת ג'פרסון, והתוצאות בלי הסכם עודפים שונות מהתוצאות כאשר מפלגות א+ב עושות הסכם עודפים ביניהן.
- ב. תארו דוגמה כנ"ל, כאשר חלוקת המושבים מתבצעת בשיטת וובסטר; הראו, שמפלגה החותמת על הסכם עודפים עלולה להפסיד מושב.
- רמז: אם לא הצלחתם לפתור עם שיטת וובסטר, נסו לפתור עם שיטת אדמס.
- \* ג. הוכיחו, שבשיטת ג'פרסון, מפלגה החותמת על הסכם עודפים לעולם לא מפסידה מושב.

### \* שאלה 2: זיהוי הטיות באלגוריתמים לחלוקת מושבים

כזכור, שיטת הנטינגטון-היל היא שיטת-מחלק עם פונציית המחלק הבאה:

$$f(s) = \text{sqrt}(s * (s+1))$$

זו השיטה המקובלת בארה"ב לחלוקת מושבים בבית-הנבחרים בין המדינות.

הוכיחו, שבשיטה זו יש הטיה לטובת מפלגות קטנות: בחלוקה בין שתי מפלגות, מספר המושבים של המפלגה הקטנה עשוי להיות מעוגל כלפי מעלה, גם כשהשארית שלה קטנה מ-0.5. הדגימו את ההטיה על בחירות עם 3 מפלגות.

### שאלה 3: חלוקת המושבים בכנסת

א. מצאו באינטרנט את תוצאות הבחירות האחרונות לכנסת. הפעילו את שיטת הנטינגטון-היל על המפלגות שעברו את אחוז החסימה. השוו את התוצאות להרכב הכנסת כיום: אילו מפלגות היו מפסידות ואילו מפלגות היו מרוויחות מהשינוי?

ב. מהו  $y$  הגדול ביותר, כך ששיטת המחלק עם מחלק  $f(s) = s + y$  נותנת כנסת שונה מהכנסת הנוכחית? חשבו את  $y$  ברמת דיוק של 0.001 לפחות.

### שאלה 4: פרדוקס אלאבאמה

אלגוריתמים לחלוקת מושבים משמשים גם לחלוקת המושבים בקונגרס בין המדינות בארה"ב. חלוקת-המושבים נקבעת באופן יחסי לאוכלוסיה, ומתעדכנת לפי מפקד שנערך כל 10 שנים. אחרי המפקד של 1880, רצו להגדיל את מספר-המושבים בקונגרס. התברר, שאם מספר המושבים בקונגרס יהיה 299, אז מדינת אלאבאמה תקבל 8 מושבים; אבל אם מספר המושבים יהיה 300, אז אלאבאמה תקבל רק 7 מושבים. מצב זה נקרא פרדוקס אלאבאמה.

א. הראו דוגמה לפרדוקס אלאבאמה כאשר משתמשים בשיטת המילטון.

ב. הוכיחו שפרדוקס אלאבאמה לא קורה כאשר משתמשים בשיטה עקבית.

### שאלה 5: מיכסה עליונה ותחתונה

המיכסה העליונה של מפלגה היא מספר המושבים המגיע לה מעוגל כלפי מעלה; המיכסה התחתונה של מפלגה היא מספר המושבים המגיע לה מעוגל כלפי מטה.

א. הראו דוגמה שבה שיטת ג'פרסון נותנת למפלגה מסויימת מעל המיכסה העליונה שלה (דרושות שלוש מפלגות לפחות).

ב. הוכיחו שזה לא יכול לקרות עם שיטת אדאמס – כל מפלגה מקבלת לכל היותר את המיכסה העליונה שלה.

ג. הראו דוגמה שבה שיטת אדאמס נותנת למפלגה מסויימת מתחת למיכסה התחתונה שלה (דרושות שלוש מפלגות לפחות).

ד. הוכיחו שזה לא יכול לקרות עם שיטת ג'פרסון – כל מפלגה מקבלת לפחות את המיכסה התחתונה שלה.