

## מטלה - חלוקת חפצים בדידים

### שאלה 0: חובה לכולם

יש להירשם לאתר חלוקת הקורסים: <https://faircourse.csariel.xyz>, ולמלא את ההעדפות שלכם לגבי קורסים. המידע ישמש לצורך הדגמה בשיעור הבא. בנוסף, יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (\*) מזכות בניקוד כפול. סעיפים המסומנים בכוכבית (\*) הם סעיפי רשות, ומזכים את השאלה בניקוד כפול.

### שאלה 1: הסכמי עודפים

**הסכם עודפים** הוא הסכם בין שתי מפלגות, המתבצע באופן הבא:

- לכל זוג של מפלגות שחתם על הסכם, מגדירים מפלגת-על הכוללת את הקולות של שתי המפלגות.
  - מריצים את אלגוריתם חלוקת המושבים על המפלגות המתקבלות.
  - לכל זוג של מפלגות שחתם על הסכם, בודקים כמה מושבים קיבלה מפלגת-העל שלהם, ומחלקים את המושבים בין המפלגות לפי אלגוריתם חלוקת המושבים המקורי.
- א. תארו דוגמה של בחירות עם 3 מפלגות (א, ב, ג), שבה חלוקת המושבים מתבצעת בשיטת ג'פרסון, והתוצאות בלי הסכם עודפים שונות מהתוצאות כאשר מפלגות א+ב עושות הסכם עודפים ביניהן.
- ב. תארו דוגמה כנ"ל, כאשר חלוקת המושבים מתבצעת בשיטת וובסטר; הראו, שמפלגה החותמת על הסכם עודפים עלולה להפסיד מושב.
- רמז: אם לא הצלחתם לפתור עם שיטת וובסטר, נסו לפתור עם שיטת אדמס.
- \* ג. הוכיחו, שבשיטת ג'פרסון, מפלגה החותמת על הסכם עודפים לעולם לא מפסידה מושב.

### \* שאלה 2: זיהוי הטיות באלגוריתמים לחלוקת מושבים

כזכור, שיטת הנטינגטון-היל היא שיטת-מחלק עם פונציית המחלק הבאה:

$$f(s) = \text{sqrt}(s * (s+1))$$

זו השיטה המקובלת בארה"ב לחלוקת מושבים בבית-הנבחרים בין המדינות.

הוכיחו, שבשיטה זו יש הטיה לטובת מפלגות קטנות: בחלוקה בין שתי מפלגות, מספר המושבים של המפלגה הקטנה עשוי להיות מעוגל כלפי מעלה, גם כשהשארית שלה קטנה מ-0.5. הדגימו את ההטיה על בחירות עם 3 מפלגות.

### שאלה 3: חלוקת המושבים בכנסת

א. מצאו באינטרנט את תוצאות הבחירות האחרונות לכנסת. הפעילו את שיטת הנטינגטון-היל על המפלגות שעברו את אחוז החסימה. השוו את התוצאות להרכב הכנסת כיום: אילו מפלגות היו מפסידות ואילו מפלגות היו מרוויחות מהשינוי?

ב. מהו  $y$  הגדול ביותר, כך ששיטת המחלק עם מחלק  $f(s) = s + y$  נותנת כנסת שונה מהכנסת הנוכחית? חשבו את  $y$  ברמת דיוק של 0.001 לפחות.

### שאלה 4: אלגוריתם הסבב - התחכמות בטוחה

משתמשים באלגוריתם הסבב לחלוקת  $m$  חפצים בין  $n$  שחקנים.

א. הוכיחו, שכאשר  $n \leq m$ , לא קיימת התחכמות בטוחה.

\* ב. הוכיחו, שגם כאשר  $m = n + 1$ , לא קיימת התחכמות בטוחה.

### שאלה 5: חלוקה ללא-קנאה עד-כדי חפץ כלשהו

חלוקה נקראת "ללא קנאה עד-כדי חפץ כלשהו" ( $EFx$ ) אם לכל שני שחקנים א, ב, אם נוריד חפץ כלשהו מהסל של שחקן ב, אז שחקן א לא יקנא בו.

א [חימום]. הראו דוגמה לחלוקה שהיא  $EF1$  אבל לא  $EFx$ .

ב. הוכיחו, שכאשר כל השחקנים מסכימים על סדר העדיפויות בין החפצים, תמיד קיימת חלוקה  $EFx$ .

ג. תארו אלגוריתם למציאת חלוקה  $EFx$  בין שני שחקנים

(רמז: מותר להשתמש בסעיף ב גם אם לא פתרתם אותו).

\* ד. נסו לגרום לכלי ב"מ כלשהו לתאר לכם אלגוריתם **קצר ופשוט** למציאת חלוקה  $EFx$  בין שלושה שחקנים. ודאו שהאלגוריתם נכון.

\*\* ה. נסו לגרום לכלי ב"מ כלשהו לתאר לכם אלגוריתם **קצר ופשוט** למציאת חלוקה  $EFx$  בין ארבעה שחקנים. ודאו שהאלגוריתם נכון.