

מטלה 7 - אלגוריתמים כלכליים

שאלה 4

מאת רואי ביטון

ת"ז 206400426

פתרון שאלה 4א

נניח שהשמה ותמחור מתקבלים מתוך האלגוריתם שהוצג בהרצאה, כך שהם מקיימים את תנאי "ללא קנאה" (אני מניח זאת לאחר שוידאתי מול אראל במייל של הקורס, שלכך הוא התכוון בשאלה). כלומר, כל דייר קיבל חדר כך שהתועלת שלו מהחדר שקיבל אינה פחותה מהתועלת שהיה מקבל מכל חדר אחר. נגדיר תועלת של דייר בתור ערך שהוא מייחס לחדר פחות המחיר שהוא משלם עבורו.

הנתון בשאלה הוא: סכום הערכים של דייר מסוים לכל החדרים בדירה הוא גדול או שווה לשכר הדירה הכולל R .

צריך להוכיח שבמקרה כזה, המחיר שישלם הדייר עבור החדר שקיבל לא יעלה על הערך שהוא מייחס לאותו חדר.

נסמן:

j מייחס לחדר i הערך שדייר $v(i,j)$

i החדר שהוקצה לדייר $X(i)$

j המחיר של חדר $p(j)$

j עבור כל $v(i,j)$ לכל החדרים, כלומר סכום i סכום הערכים של דייר $S(i)$

בהנחה שהשמה היא ללא קנאה, מתקיים:

j עבור כל $v(i,X(i)) - p(X(i)) \geq v(i,j) - p(j)$

נסכם את כל התועלות האפשריות של דייר i :

סכום $p(j) - v(i,j)$ עבור כל j שווה ל:

סכום הערכים $S(i) -$ פחות סכום המחירים, שהוא R .

לכן, התוצאה היא $S(i) - R$

בהנחה ש- $S(i) \geq R$, כפי שנתון לנו סעיף זה, נקבל שסכום התועלות האפשריות של הדייר הוא אי שלילי.

נניח בשלילה שהמחיר שדייר i משלם על החדר שקיבל גדול מהערך שהוא מייחס לו, כלומר:

$v(i,X(i)) > p(X(i))$

מכאן נובע שהתועלת שלו שלילית:

$v(i,X(i)) - p(X(i)) < 0$

אבל אם התועלת שלו שלילית, והסכום הכולל של התועלות האפשריות הוא אי שלילי, חייבת להיות לפחות תועלת אחת חיובית עבור חדר אחר. כלומר, היה חדר אחר שהיה נותן לו תועלת גדולה יותר וזה סותר את ההנחה שההשמה היא ללא קנאה.

וכך הגענו לסתירה.

מכאן נובע בהכרח:

המחיר שהדייר משלם עבור החדר שקיבל הוא קטן או שווה לערך שהוא מייחס לו.

מ.ש.ל

פתרון שאלה 4ב

אציג כפי שמבוקש בשאלה דוגמה בה דייר שהסכום בו הוא מעריך את כלל חדרי הדירה קטן ממחיר שכר הדירה, ונראה כפי שביקשו שבכל חלוקה ללא קנאה הוא תמיד ישלם מחיר גבוה מהמחיר בו העריך את החדר שקיבל.

נניח שני דיירים ושני חדרים. שכר הדירה הכולל הוא 100.
הערכים:

דייר 0 מעריך את חדר 0 ב-30 ואת חדר 1 ב-30. סך הכל 60.
דייר 1 מעריך את חדר 0 ב-30 ואת חדר 1 ב-30. סך הכל 60.

כל אחד מהדיירים מעריך את כל הדירה בפחות מהשכר הכולל. לכן מתקיים התנאי שסכום הערכים של הדייר קטן מ-R (התבקשנו להראות על דייר אחד, במקרה זה זה תקף אפילו לשניהם).

נבחן את ההשמה שבה דייר 0 מקבל את חדר 0 ודייר 1 מקבל את חדר 1.

כדי שלא תהיה קנאה, שני הדיירים צריכים לשלם את אותו הסכום, כך שגם תהיה להם את אותה תועלת, כי הם מעריכים את החדרים בדיוק באותו אופן. לכן נקבע שמחיר כל חדר יהיה 50.

התוצאה היא:

דייר 0 מקבל חדר שהוא מעריך ב-30 ומשלם עליו 50 (שזה יותר ממה שהוא העריך). התועלת שלו היא שלילית (30 פחות 50 שווה מינוס 20).

דייר 1 מקבל חדר שהוא מעריך ב-30 ומשלם עליו 50 (שזה יותר ממה שהוא העריך). גם התועלת שלו שלילית (מינוס 20).

שניהם לא מקנאים כי שניהם באותו מצב. אבל כל אחד מהם משלם יותר מערך החדר שהוא קיבל.

גם אם נהפוך את ההשמה – כלומר, דייר 0 יקבל את חדר 1 ודייר 1 את חדר 0 – התוצאה תישאר זזה, וכל אחד מהם ישלם 50 על חדר שהוא מעריך ב-30.

מכאן שבכל חלוקה ללא קנאה, הדייר משלם מחיר גבוה יותר מערך החדר שקיבל, בדיוק כפי שנדרשנו להציג בשאלה.

מ.ש.ל