# מטלה – חלוקה בהגרלה

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול. סעיפים המסומנים בכוכבית (*) הם רשות ומזכים בניקוד כפול.

## * שאלה 1: דיקטטורה סדרתית אקראית (random serial dictatorship)

רוצים לחלק n מטלות בין n שחקנים, כך שכל שחקן יקבל מטלה אחת בדיוק. אלגוריתם **דיקטטורה סדרתית אקראית** פועל באופן הבא:

- מסדרים את השחקנים בסדר אקראי כלשהו;
- כל שחקן בתורו בוחר את המטלה שהוא הכי רוצה, מבין המטלות שנשארו.

הוכיחו שהאלגוריתם מקיים את התכונות הבאות:

א. מגלה-אמת;

ב. יעיל בדיעבד (בהנחה שעבור כל שחקן, כל המטלות הן שונות – אף שחקן אינו אדיש בין שתי מטלות).

ג. **לא** יעיל לכתחילה;

ד. פרופורציונלי לכתחילה;

ה. **לא** ללא-קנאה לכתחילה;

ו. **לא** פרופורציונלי בדיעבד.

[א, ב, ד, ו קלים יחסית; ג, ה יותר קשים]

## שאלה 2: אלגוריתם בירקהוף

א. המציאו גרף דו-צדדי מאוזן בגודל 4 (שונה מהגרף של ההרצאה). תארו שתי ריצות אפשריות שונות של אלגוריתם בירקהוף על אותו גרף (ריצות המוצאות שידוכים שונים).

ב. הפעילו את אלגוריתם בירקהוף על גרף לא־מאוזן, והראו שהוא נכשל (לא מוצא פירוק בירקהוף).

---

* ג. רשות: כתבו קוד בפייתון הפותר את השאלה באופן כללי, כולל יצירת גרפים להמחשה של שלבי הביניים.

## שאלה 3: אלגוריתם בירקהוף מורחב

א. נתונים 3n חפצים שיש לחלק בין n שחקנים, כך שכל שחקן מקבל בדיוק 3 חפצים. נתונה מטריצת הסתברויות עם n שורות (שורה לכל שחקן) ו־3n עמודות (עמודה לכל חפץ). סכום הערכים בכל שורה הוא 3, וסכום הערכים בכל עמודה הוא 1. הוכיחו, שניתן לפרק את המטריצה להגרלה על חלוקות, שבכל אחת מהן, כל שחקן מקבל בדיוק 3 חפצים.

ב. הכלילו את סעיף א לשחקנים עם אילוצים לא־סימטריים, כגון: שחקן א צריך לקבל בדיוק 2 חפצים, שחקן ב צריך לקבל בדיוק 4 חפצים, וכו'. הגדירו תנאי הכרחי על מטריצת ההסתברויות, והוכיחו שהתנאי הזה מספיק לכך שקיים פירוק להגרלות על השמות המקיימות את האילוצים.

* ג. הכלילו את סעיף א למטריצה עם מספרים לא־שלמים. לדוגמה, נניח שיש 23 חפצים שיש לחלק בין 10 שחקנים. נתונה מטריצת הסתברויות עם 10 שורות (שורה לכל שחקן) ו־23 עמודות. סכום הערכים בכל שורה הוא 2.3, וסכום הערכים בכל עמודה הוא 1. הוכיחו, שניתן לפרק את המטריצה להגרלה על חלוקות, שבכל אחת מהן, כל שחקן מקבל 2 או 3 חפצים.

## שאלה 4: הוכחות

א. הוכיחו, שכל חלוקה ללא-קנאה לכתחילה, היא גם פרופורציונלית לכתחילה.

ב. הוכיחו, שאם לגרף מסויים יש פירוק בירקהוף, אז הגרף בהכרח מאוזן.

## * שאלה 5: חלוקה יעילה-לכתחילה וללא-קנאה-לכתחילה

תארו אלגוריתם המוצא חלוקה יעילה-לכתחילה וללא-קנאה-לכתחילה. הדגימו את האלגוריתם על בעיה של חלוקת 3 חפצים ל-4 אנשים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.