

מטלה - אלגוריתמים מגלי-אמת

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בניקוד כפול.
יש להוכיח את נכונות התשובות. אפשר לכתוב אלגוריתם בפסאודו-קוד, אבל הוא צריך להיות מדויק ומפורט ברמה של שפת תכנות.

שאלה 1: אלגוריתם מגלה-אמת לחלוקת חדרים

נתונים n דיירים ו- m חדרים. צריך לתת חדר אחד בדיוק לכל דייר, כך שסכום הערכים יהיה גדול ביותר. האלגוריתם צריך להיות **מגלה אמת**.

- א. הדגימו את פעולת אלגוריתם VCG על בעיית חלוקת חדרים עם שני דיירים ושני חדרים.
- ב. הדגימו את פעולת אלגוריתם VCG על בעיית חלוקת חדרים עם שלושה דיירים ושלושה חדרים.
- * ג. הוכיחו, שאלגוריתם VCG לבעיית חלוקת החדרים נותן תמיד חלוקה ללא קנאה.

שאלה 2: תיכנות - אלגוריתם מגלה-אמת למציאת מסלול קל ביותר

כיתבו פונקציה בפייתון, המקבלת גרף ממושקל ושני צמתים, מוצאת את המסלול הזול ביותר בין שני הצמתים, ומדפיסה כמה כסף צריכה לקבל כל קשת במסלול זה, בהתאם לאלגוריתם VCG:

```
def vcg_cheapest_path(graph, source, target): ...
```

לצורך חישוב המסלול הקל ביותר, השתמשו בספריה `networkx`:

https://networkx.github.io/documentation/stable/reference/algorithms/shortest_paths.html

כתבו בדיקות ודוגמאות לפונקציה שלכם בעזרת `doctest`.

שאלה 3: עידוד השתתפות

הגדרה: אלגוריתם הוא מעודד השתתפות אם התועלת של כל שחקן המשתתף באלגוריתם היא לפחות 0 (אף אחד לא ניזוק מהשתתפות באלגוריתם).

נתונה בעיה כללית של החלטה בין אפשרויות שונות (כמו בעיית "בחירת המסעדה" שהודגמה בשיעור).

- א. הוכיחו, שאם כל שחקן מייחס ערך לפחות אפס לכל אפשרות, אז אלגוריתם VCG מעודד השתתפות.
- * ב. הוכיחו, שאם כל שחקן i מייחס ערך לפחות אפס לאפשרות הנבחרת כשהוא לא משפיע (האפשרות הממקסמת את סכום הערכים של השחקנים האחרים כאשר מתעלמים משחקן i), אז אלגוריתם VCG מעודד השתתפות.

ג. הוכיחו, שאם התנאי בסעיף ב אינו מתקיים, אז אלגוריתם VCG אינו מעודד השתתפות.

שאלה 4: מכרזי פירסום - איכות המודעה (הקורס של טים, תרגילים 32, 34)

בשיעור הנחנו, שהסתברות ההקלקה על מודעה מסויימת תלויה רק במיקום שלה ולא במודעה. במציאות, הסתברות ההקלקה על מודעה תלויה גם במיקום וגם במודעה עצמה.

א. נניח שלכל מודעה j יש מקדם איכות q_j , והסתברות ההקלקה כששמים אותה במקום k היא:

$$r_{j,k} = r_k * q_j$$

תארו אלגוריתם המשבץ מודעות למיקומים וממקסם את סכום הערכים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

(שימו לב: עדיין לכל מפרסם j יש ערך שונה לקליק v_j).

ב. נניח שהסתברות ההקלקה של מודעה נתונה על-ידי פונקציה לא-ליניארית כלשהי:

$$r_{j,k} = f(r_k, q_j)$$

הראו דוגמה לפונקציה f כלשהי, שבה האלגוריתם מסעיף א לא עובד (לא מוצא שיבוץ הממקסם את סכום הערכים).

שאלה 5: מכרזים לא-מגלי-אמת

א. הצעד הראשון במכרז VCG הוא מציאת האפשרות הממקסמת את סכום ערכי המשתתפים. הראו, שאם במקום זה מוצאים את האפשרות הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים – המכרז אינו מגלה-אמת.

ב. במכרז VCG, תשלומי השחקנים נמסרים למנהל-המכרז. הראו, שאם תשלומי השחקנים מחולקים שווה בשווה בין המשתתפים – המכרז אינו מגלה-אמת.

שאלה 1: אלגוריתם מגלה-אמת לחלוקת חדרים

נתונים n דיירים ו- m חדרים. צריך לתת חדר אחד בדיוק לכל דייר, כך שסכום הערכים יהיה גדול ביותר. האלגוריתם צריך להיות **מגלה אמת**.

א. הדגימו את פעולת אלגוריתם VCG על בעיית חלוקת חדרים עם שני דיירים ושני חדרים.

ב. הדגימו את פעולת אלגוריתם VCG על בעיית חלוקת חדרים עם שלושה דיירים ושלושה חדרים.

* ג. הוכיחו, שאלגוריתם VCG לבעיית חלוקת החדרים נותן תמיד חלוקה ללא קנאה.

הסכום של אלגוריתם VCG

הנחות:

יש מספר סופי של תוצאות אפשריות.

לכל משתתף יש ערך כספי לכל תוצאה.

התועלת = ערך התוצאה פחות התשלום (קוואזי-ליניארית).

האלגוריתם:

בחר את התוצאה עם סכום-הערכים הגבוה ביותר.

עבור כל שחקן:

חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים.

חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים.

אילו השחקן הנוכחי לא היה משתתף.

גבה מהשחקן את ההפרש בין שני הסכומים.

קובץ תרגילים 2 מיליון ש"ח:

Ⓔ טבלת תוצאות:

| 2 דור | 1 דור | |
|-------|-------|------|
| 20 | 80 | אלים |
| 80 | 50 | קוק |

Ⓕ טבלת התוצאות:

| 2 דור | 1 דור | |
|-------|-------|------|
| 20 | 80 | אלים |
| 80 | 50 | קוק |

מיקסוס סכום תוצאות: אלים זקוקים אל דור 1.

קוק זקוק אל דור 2.

$$160 = \text{סכום}$$

כדי חלק מתוצאות: אלא אלים - קוק זקוק אל דור 2 = 80

אלא קוק - אלים זקוק אל דור 1 = 80

חישוב גולשים:

$$80 - 160 + 80 = 0 \quad \leftarrow \text{אלים גולשים}$$

$$(80 - 80) = 0$$

אויגה - סכום

$$80 - 160 + 80 = 0 \quad \leftarrow \text{קוק גולשים}$$

יש ♥ בקבוצה זו, אל אחז לא צריך לשלם, כיוון שחבר אל אל
סלעציו עקור תמונת האחרים-סחה.

פירען 3 קרן

(P)

| 3 קרן | 2 קרן | 1 קרן | |
|-------|-------|-------|------|
| 30 | 40 | 80 | אלים |
| 10 | 80 | 50 | קוק |
| 30 | 50 | 30 | זאלי |

אלה הערכים:

| 3 קרן | 2 קרן | 1 קרן | |
|-------|-------|-------|------|
| 30 | 40 | 80 | אלים |
| 10 | 80 | 50 | קוק |
| 30 | 50 | 30 | זאלי |

אלה הערכים:

מיקסוס סכום הערכים: אלים מוקד אל חדר 1.

קוק מוקד אל חדר 2.

(קדמי ידני ואחר max) זאלי מוקד אל חדר 3.

$$\underline{\underline{190 = \text{סכום}}}$$

קלי חלק מהמקרים: אלא אלים - קוק יוקד אל חדר 2 = 80

זאלי יוקד אל חדר 3 = 30

$$\underline{\underline{110 = \text{סכום}}}$$

אלא קוק - אלים מוקד אל חדר 1 = 80

זאלי מוקד אל חדר 2 = 50

$$\underline{\underline{130 = \text{סכום}}}$$

אלא זאלי - אלים מוקד אל חדר 1 = 80

קוק יוקד אל חדר 2 = 80

$$\underline{\underline{160 = \text{סכום}}}$$

$$110 - 190 + 80 = 0$$

← wir sind

$$(119 - 110) = 9 \quad 1 \text{ כ}$$

$$130 - 190 + 80 = 20$$

← 204 p/p

$$\begin{pmatrix} 130 & -110 \end{pmatrix} = 20$$

$$160 - 190 + 30 = 0$$

← 204 11/13

[illegible]

מא כל הנתון קיין מקור. j

נזכיר ש $j \in [n]$ ונקיים: $u_i \geq v_i(r_j) - t_j$ זהו תנאי "התקפות" של האמר.

$$u_i = X^* - X_{-i}^* \quad \text{נשמר את הסימנים:}$$

(*) (מורס קהמס, חסר להסבר קרוב הנוכחי)

$$v_i(r_j) - t_j$$

$$= v_i(r_j) - \underbrace{\left[X_{-j}^* - \sum_{h \neq j} v_h(r_h) \right]}_{\text{הנזכר גמול (קנסיות) כולל אולי}}$$

$$= \underbrace{\sum_{h \in [n]} v_h(r_h)}_{\text{סכום הכוללת}} - X_{-j}^* + \underbrace{v_i(r_j) - v_j(r_j)}_{\text{הפרש}}$$

יש לנו $u_i \geq v_i(r_j) - t_j$ מאליה אנחנו נזכיר, ונקיים
 על אף נוכח Δ : $u_i - [v_i(r_j) - t_j] \geq 0$ (החסר אולי)
 נסמן Δ

נחשב את החסר Δ , נזכיר זהו צמצום: (אנחנו רוצים את זה)

$$\Delta = u_i - [v_i(r_j) - t_j] \quad \text{קייא זקוק}$$

$$\text{נזכיר ש} = X^* - X_{-i}^* - [v_i(r_j) - [X_{-j}^* - \sum_{h \neq j} v_h(r_h)]]$$

$$\text{פיתא סלר} = X^* - X_{-i}^* - [v_i(r_j) - X_{-j}^* + \sum_{h \neq j} v_h(r_h)]$$

$$\text{פיתא סלר} = X^* - X_{-i}^* - v_i(r_j) + X_{-j}^* - \sum_{h \neq j} v_h(r_h)$$

$$\text{הנפיקה ב (-)} = X_{-i}^* - X_{-j}^* + v_i(r_j) - X^* + \sum_{h \neq j} v_h(r_h) \quad \text{חסיני רס}$$

$$- \left[\sum_i \dots \right] + \left[\sum_j \dots \right] = - \left[\sum_j \dots \right]$$

$$\Delta = X_{-i}^* - X_{-j}^* + V_i(r_j) - V_j(r_j) \quad (3)$$

$$X_{-j}^* \geq X_{-i}^* - V_j(r_j) + V_i(r_j) - V_i(r_i) \quad (2) \quad \text{אם } r_j \geq r_i$$

$$X_{-j}^* \geq X_{-i}^* - V_j(r_j) + V_i(r_j) \quad \text{כי } X_{-i}^* \geq X_{-i}^* - V_i(r_i) \text{ לכל } r_i$$

$$X_{-j}^* - X_{-i}^* \geq V_i(r_j) - V_j(r_j) \quad (4) \quad \text{לפי (2)}$$

$$\Delta \geq 0 \quad \text{לפי (4) + (3)}$$

$$u_i \geq v_i(r_j) - t_j \quad \text{כל } i$$

□ ולכן יש לנו שכל i מתקיים $u_i \geq v_i(r_j) - t_j$

$$u_i = v_i(r_i) - t_i$$

הנחה * - $v_i(r_i)$ היא פונקציית התועלת

הנחה : t_i הוא תשלום המס

הנחה : t_i הוא תשלום המס

הנחה : t_i הוא תשלום המס

$$u_i = v_i(r_i) - \left(\left[\text{סכום תשלומים} \right] - \sum_{j \neq i} v_j(r_j) \right)$$

=

הנחה :
הסכום הכולל
המקסימלי

$$u_i = \left[\text{סכום תשלומים} \right] - \left[\text{סכום תשלומים} \right] \quad (1)$$

כלומר, ההנחה היא שהתשלום המס הוא פונקציה של התועלת