

## מטלה 2 - אלגוריתמים כלכליים

מגיש: שי גAli  
קיישור לחקק ד:

<https://gist.github.com/ShayGali/928868585c87d3bf72be09a9926d1aa9>

- \* שאלת 4: חלוקה הוגנת ויעילה עם נייר ועט  
נתונה בעיתות חילוקת משאבים עם הערכים הבאים:  
 • עמי: פלדה 1, נפט 0.  
 • תמי: פלדה 2, נפט 1 פוחתת  
 כאשר  $t$  הוא פרמטר כלשהו בין 0 ל-1.  
 א. חשבו חלוקה הממקסמת את סכום הערכם, כפונקציה של  $t$ . עבור איזה  $t$  החלוקה ללא קנהה?  
 ב. חשבו חלוקה הממקסמת את סכום השוויים של הערכם, כפונקציה של  $t$ . עבור איזה  $t$  החלוקה ללא קנהה?  
 ג. חשבו חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכם, כפונקציה של  $t$ . עבור איזה  $t$  החלוקה ללא קנהה?  
 ד. כתבו בעיתות אופטימיזציה בעקבות, המוצאת חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכם, כפונקציה של  $t$ . (רמי: כנראה תקבל הדעת שגיאיה – עליכם למצוא לה פתרון).

פתרונות:

$$\begin{matrix} X_A & \text{כראס גולג צאן נקי} \\ Y_A & \text{כראס גולג צאן נקי} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} V_A &= X_A \\ V_T &= (1-X_A)t + (1-Y_A)(1-t) \end{aligned}$$

הziein אל מושג שגיאיה – עליכם למצוא לה פתרון.

פתרון הגנומינימום  $P_{\text{GO}}$  מינימום נאקסימום  $\pi$  כפונקציית  $t$ .

$$\begin{aligned} V_A + V_T &= X_A + (1-X_A)t + (1-Y_A)(1-t) \\ &= X_A + t - X_A t + 1 - t - Y_A + Y_A t \\ &= X_A - X_A t - Y_A + Y_A t + 1 \\ &= X_A(1-t) - Y_A(1-t) + 1 \\ &= (1-t)(X_A - Y_A) + 1 \end{aligned}$$

ק. פ. ס

problematic case:  $t=0.5$ ,  $x_A = 1$  and  $y_A = 0$

$$V_T = 1-t \quad V_A = 1 \quad J_C$$

$\rightarrow$  Kupffer  $\rightarrow$   $t \leq 0.5 \rightarrow$   $J_C$

check

$t$  when  $x_A = 1$  and  $y_A = 0$ :  $V_T = 0.5$  and  $V_A = 1$

$$1 - t = t \quad \text{true}$$

$$t \leq 0.5$$

$\rightarrow$  sum rule applies here  $\rightarrow$   $V_T + V_A = 1$

```

47 def max_sum_allocation(t):
48     # Variables for the allocation
49     x_A = cp.Variable() # amount of steel Amy gets
50     y_A = cp.Variable() # amount of oil Amy gets
51
52     # Values for each person
53     v_A = x_A * 1 + y_A * 0 # Amy's value
54     v_T = (1-x_A) * t + (1-y_A) * (1-t) # Tammy's value
55
56     # Constraints
57     constraints = [
58         0 <= x_A, x_A <= 1,
59         0 <= y_A, y_A <= 1,
60     ]
61
62     # Problem: sum is convex
63     objective = cp.Maximize(v_A + v_T)
64     problem = cp.Problem(objective, constraints)
65
66     problem.solve()
67     return x_A.value, y_A.value, v_A.value, v_T.value
68
69 # Example run for t=0.7
70 x_A, y_A, v_A, v_T = max_sum_allocation(0.7)
71 print(f"x_A={x_A}, y_A={y_A}, v_A={v_A}, v_T={v_T}, sum={v_A + v_T}")

```

PROBLEMS DEBUG CONSOLE TERMINAL PORTS SPELL CHECKER COMMENTS OUTPUT

$x_A=0.9999999976957856, y_A=2.304214391295756e-09, v_A=0.9999999976957856, v_T=0.30000000092168577, \text{sum}=1.2999999986174715$

$$1-t \uparrow \text{sum} \quad 0 \cdot 1 \uparrow \text{sum} \quad v_A = x_A \uparrow \quad v_T = y - t \uparrow$$

2 100

for 100 gwt in 300 PWD

$$\sqrt{V_A + V_T} = \sqrt{X_A + \sqrt{(1-X_A)t + (1-y_A)(1-t)}}$$

(1)  $\Rightarrow$   $V_A = 0$ , (2)  $\Rightarrow$   $y_A = 0$  &  $t = 1$

$$\sqrt{X_A + \sqrt{(1-X_A)t + (1-t)}}$$

$$= \sqrt{X_A} + \sqrt{t - tX_A + 1 - t}$$

$$= \sqrt{X_A} + \sqrt{1 - tX_A}$$

0 - ∫  $y_A dV$   $X_A$  0 1 200

$$\frac{1}{2\sqrt{X_A}} - \frac{t}{2\sqrt{1-tX_A}} = 0$$

$$\frac{\sqrt{1-tX_A} - t\sqrt{X_A}}{\sqrt{X_A} \cdot \sqrt{1-tX_A}} = 0$$

$$\sqrt{1-tX_A} - t\sqrt{X_A} = 0$$

$$\sqrt{1-tX_A} = t\sqrt{X_A}$$

$$1 - tX_A = t^2 X_A$$

$$1 = t^2 X_A + tX_A = tX_A(1+t)$$

$$X_A = \frac{1}{t(1+t)}$$

$$X_A \in [0, 1] \quad \text{e.g. } \rho \omega$$

$$\frac{1}{t(1+t)} = X_A \leq 1 \quad X_A \leq 1 \quad \text{and}$$

$$1 \leq t(1+t) = t + t^2$$

$$t^2 + t - 1 \geq 0$$

↓

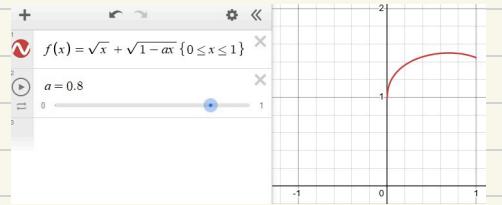
$$t \geq 0.618$$

so we see that  $X_A > 1$  if  $t < 0.618$  and so

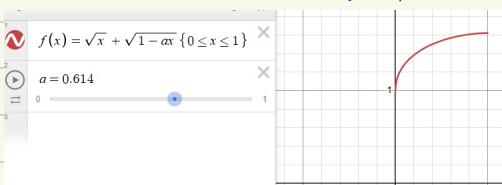
$$Y_A = \begin{cases} \frac{1}{t(1+t)} & t \geq 0.618 \\ 1 & t < 0.618 \end{cases}$$

הה�ן גראם רג'יסטר

POINT 7 IS FOR  $t=0.8$  ONLY



$X=1 \Rightarrow$  קבוצה פנויה



```
57 def max_sqrt_sum_allocation(t):
58     # Variables for the allocation
59     x_A = cp.Variable() # amount of steel Amy gets
60     y_A = cp.Variable() # amount of oil Amy gets
61
62     # Values for each person
63     v_A = x_A * 1 + y_A * 0 # Amy's value
64     v_T = (1-x_A) * t + (1-y_A) * (1-t) # Tammy's value
65
66     # Constraints
67     constraints = [
68         0 <= x_A, x_A <= 1,
69         0 <= y_A, y_A <= 1,
70     ]
71
72     objective = cp.Maximize(cp.sqrt(v_A) + cp.sqrt(v_T))
73     problem = cp.Problem(objective, constraints)
74
75     problem.solve()
76     return x_A.value, y_A.value, v_A.value, v_T.value
77
```

PROBLEMS DEBUG CONSOLE TERMINAL PORTS SPELL CHECKER COMMENTS

Example of max-sqrt-sum allocation (problem 4.2)

For  $t \geq 0.68$   $t=0.8$

Ami gets 0.6945 % of steel and 0.0000 % of oil.  
Tammy gets 0.3055 % of steel and 1.0000 % of oil.  
Ami's value is 0.6945 and Tammy's value is 0.4444.

For  $t < 0.68$   $t=0.2$

Ami gets 1.0000 % of steel and 0.0000 % of oil.  
Tammy gets 0.0000 % of steel and 1.0000 % of oil.  
Ami's value is 1.0000 and Tammy's value is 0.8000.

$$Y_A = 0 \quad X_A = \begin{cases} \frac{1}{t(1-t)} & t \geq 0.618 \\ 1 & t < 0.618 \end{cases}$$

$$X_A \geq 1 - X_A \quad t \geq 0.618$$

$$\frac{1}{t(1+t)} \geq 1 - \frac{1}{t(1-t)}$$

$$\frac{2}{t(1+t)} \geq 1$$

$$2 \geq t(1+t) \geq 0.618 \cdot 1.618$$

•  $t \leq 0.618$

$$(t \leq 0.618) \Rightarrow t(1+t) \geq 0.618 \cdot 1.618$$

$$t \leq 0.618 \Rightarrow t \leq 0.618$$

$$V_7 := t(1-X_A) + (1-t)$$

$$V_A = t X_A$$

$$t(1-X_A) + 1-t \geq t X_A$$

$$t - t X_A + 1 - t \geq t X_A$$

$$X_A \leq \frac{1}{2t}$$

$$\frac{1}{t(t+1)} \leq \frac{1}{2t}$$

$$(t(t+1) \geq 2t \quad \dots)$$

$t \geq 0.68$  11/28

$$1 \leq \frac{1}{2t}$$

$t < 0.68$  11/28

$$\frac{1}{2t} \leq 1$$

$$t \leq \frac{1}{2}$$

$$0.5 < t < 0.68$$

2 f<sub>00</sub>

ר' 10 ג' 10 ג'

$$V_A \cdot V_T = X_A (t(1-X_A) + (1-t)(1-X_A))$$

$$Y_A = 0 : \text{לפנינו}$$

ר' 10 ג' 10 ג' 10 ג' 10 ג' 10 ג'

$$V_A \cdot V_T = X_A (t(1-X_A) + (1-t)$$

$$= X_A (t - t X_A + 1 - t)$$

$$= X_A (1 - t X_A)$$

$$= X_A - t X_A^2$$

$$0 < X_A < 1$$

$$1 - 2t X_A = 0$$

$$2t X_A = 1$$

$$X_A = \frac{1}{2t}$$

$$X_A \geq 1 \quad \text{ולפנינו} \quad t \leq \frac{1}{2} \quad \text{ולפנינו} \quad X_A \in [0, 1] \text{ ו } t \in [0, 1]$$

$$X_A = 1 \quad \text{ולפנינו}$$

$$X_A = \frac{1}{2}t \quad \text{পরী} \quad \frac{1}{2}t \leq 1 \quad \text{সুতরা} \quad t > \frac{1}{2} \quad \text{পরী}$$

$$Y_A = 0$$

$$X_A = \begin{cases} 1 & t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

কোর্টে পরী ত সময় কোর্টে

$1 - X_A$  এখন সম্ভব  $X_A$  এবং পরী নির্দেশ কর মুক্তি সহজে সহজে

$$X_A \geq 1 - X_A$$

ব্য

$$X_A \geq \frac{1}{2}$$

$$X_A = 1 \quad t \leq \frac{1}{2} \quad \text{কোর্ট সহজে}$$

$$\frac{1}{2}t \geq \frac{1}{2} \quad \text{সম্ভব পরী} \quad X_A = \frac{1}{2}t \quad t > \frac{1}{2} \quad \text{কোর্ট সহজে}$$

$0 < t \leq 1$  কোর্ট সহজে কোর্ট সহজে

$t > 1$  কোর্ট সহজে কোর্ট সহজে

$$V_7 = t(1 - X_A) + (1 - t)$$

কোর্ট সহজে কোর্ট সহজে

$$V_A = t X_A$$

কোর্ট সহজে কোর্ট সহজে

$$t(1 - X_A) + 1 - t \geq t X_A$$

$$t - t X_A + 1 - t \geq t X_A$$

$$1 \geq 2t X_A$$

$$X_A \leq \frac{1}{2t}$$

$$X_A = 1 = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{t}} \leq \frac{1}{2t} \quad \text{for } t > 0$$

বৃক্ষ এর মধ্যে  $t$

$$\text{বৃক্ষ } t \text{ এর } \text{মধ্যে } X_A = \frac{1}{2t} \quad \text{সুতরাং } t > \frac{1}{2} \quad t > 0$$

$$0 < t < 1 \quad \text{বৃক্ষ } t \text{ এর } \text{মধ্যে } X_A = \frac{1}{2t}$$

```

1 import cvxpy as cp
2
3 def max_product_allocation(t):
4     # Variables for the allocation
5     x_A = cp.Variable() # amount of steel Amy gets
6     y_A = cp.Variable() # amount of oil Amy gets
7
8     # Values for each person
9     v_A = x_A * 1 + y_A * 0 # Amy's value
10    v_T = (1-x_A) * t + (1-y_A) * (1-t) # Tammy's value
11
12    # Constraints
13    constraints = [
14        0 <= x_A, x_A <= 1,
15        0 <= y_A, y_A <= 1,
16    ]
17
18    """
19    # first try - maximize product
20    objective = cp.Maximize(v_A * v_T)
21    problem = cp.Problem(objective, constraints)
22    """
23
24    # second try - maximize log product
25    eps = 1e-6 # to avoid log(0)
26    log_v_A = cp.log(v_A + eps)
27    log_v_T = cp.log(v_T + eps)
28    objective = cp.Maximize(log_v_A + log_v_T)
29    problem = cp.Problem(objective, constraints)
30
31    problem.solve()
32    return x_A.value, y_A.value, v_A.value, v_T.value

```

Example of max-product allocation (problem 4.3)  
For  $t \leq 0.5$        $t = 0.2$   
Ami gets 1.0000 % of steel and 0.0000 % of oil.  
Tammy gets 0.0000 % of steel and 1.0000 % of oil.  
Ami's value is 1.0000 and Tammy's value is 0.8000.  
~~~~~  
For  $t > 0.5$        $t = 0.8$   
Ami gets 0.6250 % of steel and 0.0000 % of oil.  
Tammy gets 0.3750 % of steel and 1.0000 % of oil.  
Ami's value is 0.6250 and Tammy's value is 0.5000.

$$\begin{aligned} \arg \max (X \cdot Y) &= \arg \max (\log(X \cdot Y)) \\ &= \arg \max (\log(X) + \log(Y)) \end{aligned}$$

הגדירה: רצף כוכב ופומרה  
פומרה היא פונקציה קמורה (הינה ג)

**הגדרה מתמטית** [עריכה קוד מקוון | עריכה]  
בහינת קטע ממשי  $I \subseteq \mathbb{R}$  ופונקציה  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , הפונקציה  $f$  תקרא פונקציה קמורה אם ורק אם  $\forall x, y \in I, 0 \leq \lambda \leq 1$  השוויין:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

באופן שקול, ניתן לנסח את תכונה זו כך שילילי  $y < u < x$  בקטע, מתקיים:

$$(y - x)f(u) \leq (y - u)f(x) + (u - x)f(y)$$

הגדירה פומרה היא פונקציה קמורה

**פונקציה לוג-קמורה** [עריכה קוד מקוון | עריכה]  
פונקציה חיבורית  $f$  המוגדרת בקטע  $I$  נקראת פונקציה לוג-קמורה אם  $\log f$  היא פונקציה קמורה בקטע  $I$  והוא קטע כלשהו, סופי או אינסופי). אם  $f$  גדרה פועמיים, תנאי זה שקול לכך  $f'(x)f''(x) \geq f'(x)^2$ . לדוגמה, הפונקציית  $g(x) = e^{x^2}$  פונקציית גמא לוג-קמורה. קל לראות שפונקציה לוג-קמורה היא קמורה, אך ההיפך אינו נכון. לדוגמה, הפונקציה  $f(x) = x^2$  קמורה, אבל  $\log f(x) = 2 \log x$  לא היא פונקציה קמורה.

לעתים מגדירים פומרה כפומרה קטנה (בהתאם לוג-קמורה):

$$\begin{aligned} \arg\max(X \cdot y) &= \arg\max(\log(X \cdot y)) \\ &= \arg\max(\log(X) + \log(y)) \end{aligned}$$

פונקציית האקספוננסיאלית העממית כפומרה

הצהרה - אני מפתח ב vscode ויש לי copilot ממושך עם idea.  
לכן חלק מהקוד והשלים אוטומטיות בעזרת copilot.  
(את המבנה של הקוד ראייתי איך אראל עשה בהרצאה וחיקיתו אותו, וזה copilot השלים אותו. אין ספק שהוא עוזר אבל לא עושה עבודה מושלמת, וחיב לדעת מה כתבים!)