

מטלה - חלוקה הוגנת ויעילה (ב)

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול.

* שאלה 1: אסטרטגיה בבעיות חלוקת משאבים

תזכורת ממטלה 1: **התחכמות** (מניפולציה) היא דיווח (ע"י שחקן כלשהו) על ערכים שונים מהערכים האמיתיים, על-מנת להשיג תוצאה טובה יותר. **התחכמות בטוחה** היא התחכמות שאף פעם לא גורמת לשחקן להפסיד.

הוכיחו או הפריכו: בחלוקת משאבים יעילה-נאש, קיימת התחכמות בטוחה.

שאלה 2: מיקסוס סכום הערכים תחת אילוצי הוגנות

אחת ההצעות של GPT לחישוב חלוקה יעילה-פארטו וללא קנאה (בפתרונות למטלה הקודמת) היא, למקסם את סכום הערכים תחת האילוץ שהחלוקה ללא קנאה. כלומר לפתור את בעיית המיטוב הבאה:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } V_1(X_1) + \dots + V_n(X_n) \\ & \text{Such that } (X_1, \dots, X_n) \text{ is an envy-free allocation} \end{aligned}$$

נשמע הגיוני, לא? אבל בדרך-כלל זה לא עובד.

א. הראו דוגמה עם שלושה שחקנים, שבה החלוקה המתקבלת **אינה** יעילה פארטו.

ב. הוכיחו, שאם יש רק שני שחקנים, החלוקה המתקבלת יעילה פארטו.

שאלה 3: חלוקה הוגנת ויעילה עם זכויות שונות

נתונים n שותפים בחברה מסויימת, שיש להם זכויות שונות בחברה: לכל שחקן i יש w_i מניות.

חלוקה לשחקנים עם זכויות שונות נקראת **ללא קנאה ממושקלת** אם לכל שני שחקנים i, j :

$$V_i(X_i) / w_i \geq V_i(X_j) / w_j$$

כלומר: כל שחקן בודק כמה יחידות-ערך הוא קיבל לכל יחידת-מניה, ומשווה לאותה מנה (יחידת-ערך ליחידת-מניה) אצל האחרים.

סכום הלוגריתמים הממושקל הוא הפונקציה הבאה:

$$\sum_{j=1..n} (w_j * \log(V_j(X_j))) .$$

הוכיחו: החלוקה הממקסמת את סכום הלוגריתמים הממושקל עם משקלים w_1, \dots, w_n היא יעילה-פארטו וללא קנאה ממושקלת.

הדרכה: הכלילו את ההוכחה שנלמדה בשיעור לגבי משקלים שווים.

* שאלה 4: שיווי-משקל תחרותי עם תקציבים שונים

נתונים n שחקנים עם תקציבים b_1, \dots, b_n .

א. הוכיחו: כל שיווי-משקל תחרותי הוא ללא-קנאה-ממושקלת [ראו הגדרה בשאלה 3]
עם משקלים b_1, \dots, b_n .

ב. הוכיחו: אם חלוקה X ממקסמת סכום לוגריתמים ממושקל עם משקלים b_1, \dots, b_n , אז קיים
תימחור p כך שהזוג (X, p) הוא שיווי משקל תחרותי חסכוני עם תקציבים שונים b_1, \dots, b_n .
הדרכה: הכלילו את ההוכחות שבמצגת.

* שאלה 5: חישוב שיווי-משקל תחרותי בפייתון ובבינה מלאכותית

א. כתבו קוד בפייתון המחשב שיווי-משקל תחרותי בבעיית חלוקה כלשהי של m משאבים ו- n שחקנים.
הדרכה: היעזרו בהוכחת המשפט בשקפים האחרונים במצגת (תחת הכותרת "שיווי משקל – חישוב").
ב. הריצו את הקוד שלכם על מספר דוגמאות מעניינות. במקביל, תנו את הדוגמאות הללו לכלי ב"מ
כלשהו לבחירתכם, בקשו ממנו לחשב שיווי-משקל תחרותי, והשוו את התוצאות.

- האם הוא משתמש באלגוריתם דומה או שונה?

- האם התוצאות שלו נכונות?

צרפו קישור-שיתוף לשיחה (אם אי אפשר, צרפו את קובץ השיחה).