

מטלה - חלוקה הוגנת ויעילה

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול.

שאלה 1: יעילות-פארטו חלשה וחזקה

הגדרות:

- מצב א נקרא **שיפור פארטו חזק** של מצב ב, אם מצב א טוב יותר לכל המשתתפים.
- מצב נקרא **יעיל פארטו חלש** אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור-פארטו-חזק שלו.

א. תנו דוגמה לחלוקה שהיא יעילה-פארטו-חלש אבל לא יעילה-פארטו.

ב. הוכיחו, שכל חלוקה אגליטרית היא יעילה-פארטו-חלש.

ג. הוכיחו, שאם כל השחקנים מייחסים ערך חיובי ממש לכל משאב, אז כל חלוקה יעילה-פארטו-חלש היא גם יעילה-פארטו.

ד. הוכיחו, שאם לכל השחקנים יש הערכות זהות, אז כל חלוקה יעילה-פארטו-חלש היא גם יעילה-פארטו.

* שאלה 2: שיווי-משקל תחרותי

אחת הדרכים המקובלות לחלק משאבים היא בעזרת מנגנון השוק החופשי. יש מחיר לכל מוצר; לכל קונה יש ביקוש – שהוא סל המוצרים שהוא רוצה לקנות במחיר הנוכחי; אם סכום הביקושים למוצר מסויים גדול מההיצע – אז המחיר של המוצר גדל; אם סכום הביקושים קטן מההיצע – אז המחיר קטן. כך משתנים המחירים עד שמגיעים לשיווי-משקל. פורמלית, הקצאת-משאבים נתונה נקראת **שיווי משקל תחרותי שווה-תקציב** (competitive equilibrium with equal income, בקיצור CEEI) אם קיים וקטור-מחיר p (מחיר לכל משאב), כך שלכל משתתף i מתקיימים התנאים הבאים:

- המחיר הכולל של הסל שקיבל משתתף i הוא לכל היותר 1;
- כל משתתף מעדיף את הסל שקיבל על-פני כל שאר הסלים שהמחיר שלהם הוא לכל היותר 1.

בסמלים:

$$p(X_i) \leq 1$$

$$\text{For every } Y: \text{ if } p(Y) \leq 1 \text{ then } V_i(X_i) \geq V_i(Y)$$

א. תנו דוגמה להקצאה שהיא שיווי-משקל תחרותי שווה-תקציב בבעיה כלשהי של חלוקת משאבים, למשל הדוגמה במצגת:

$$\begin{aligned} & [[80, 19, 1], \\ & [79, 1, 20]] \end{aligned}$$

תארו את ההקצאה ואת וקטור המחיר p , והסבירו מדוע זה אכן ש"מ תחרותי שווה-תקציב.

ב. הוכיחו שכל ש"מ תחרותי שווה-תקציב הוא ללא קנאה.

ג. הוכיחו שכל ש"מ תחרותי שווה-תקציב הוא יעיל פארטו חלש (ראו הגדרה בשאלה 1).

שאלה 3: חלוקה אגליטרית וקנאה

נניח שיש שלושה משאבים וחמישה שחקנים עם הערכים הבאים:

שחקן	ברזל	נפט	עצים
א	6	9	0
ב	0	5	10
ג	0	0	15
ד	0	0	15
ה	0	0	15

- הוכיחו, שבכל חלוקה אגליטרית בדוגמה זו, כל שחקן מקבל ערך לפחות 5.
- הוכיחו, שבכל חלוקה אגליטרית בדוגמה זו, כל העצים ניתנים לשחקנים ג, ד, ה, וכל הנפט לשחקן ב.
- הוכיחו, שבכל חלוקה אגליטרית בדוגמה זו, יש קנאה (מי מקנא במי ומדוע?)

שאלה 4: חלוקה הוגנת ויעילה עם נייר ועט

נתונה בעיית חלוקת משאבים עם הערכים הבאים:

- עמי: פלדה 1, נפט 0.

- תמי: פלדה t , נפט 1 פחות t

כאשר t הוא פרמטר כלשהו בין 0 ל-1.

- חשבו חלוקה הממקסמת את **סכום הערכים**, כפונקציה של t . עבור איזה t החלוקה ללא קנאה?
 - חשבו חלוקה הממקסמת את **סכום השורשים** של הערכים, כפונקציה של t . עבור איזה t החלוקה ללא קנאה?
 - חשבו חלוקה הממקסמת את **מכפלת הערכים**, כפונקציה של t . עבור איזה t החלוקה ללא קנאה?
- * ד. כתבו בעיית אופטימיזציה ב-`cvxpy`, המוצאת חלוקה הממקסמת את **מכפלת הערכים**, כפונקציה של t . (רמז: כנראה תקבלו הודעת שגיאה – עליכם למצוא לה פתרון).

שאלה 5: אלגוריתם חלופי לחלוקת משאבים

נתון האלגוריתם הבא לחלוקת משאבים רציפים.

- לכל משאב x :

○ תן לכל שחקן i חלק $V_i(x)/\sum_j V_j(x)$ מהמשאב x .

לדוגמה, בבעייה מהמצגת, עם ערכים $[1, 19, 80]$, $[1, 79]$, עמי יקבל $1/21$ מהפלדה, $19/20$ מהנפט, ו $80/159$ מהעצים (ותמי תקבל את השאר).

- האם האלגוריתם מחזיר תמיד חלוקה פרופורציונלית? הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.
- האם האלגוריתם מחזיר תמיד חלוקה יעילה פארטו? הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.