

## מטלה 5 שאלה 2

א [חימום]. הראו דוגמה לחלוקת שהיא EF1 אבל לא AX.

### **סעיף א**

דוגמא לחלוקת

cosa	זהב	נפט	
10	10	10	שחקן א
11	11	100	שחקן ב

חלוקת 1

שחקן א מקבל נפט וזהב

ערך עצמי  $10+10=20$  והחלק של שחקן ב שווה 10 אין קנאה

שחקן ב מקבלcosa

ערך עצמי 11 אבל החלק של שחקן א שווה 11 יש קנאה

### **חלוקת 2 - נוריד משחקן א את הנפט**

שחקן א מקבל זהב

ערך עצמי שווה 10 והחלק של שחקן ב שווה 10 אין קנאה

שחקן ב מקבלcosa

ערך עצמי שווה 11 והחלק של שחקן א שווה 11 אין קנאה

### **מסקנה: החלוקת היא EF1**

### **חלוקת 3 - ננסה להוריד משחקן א את הזהב במקום הנפט**

שחקן א מקבל נפט

ערך עצמי שווה 10 והחלק של שחקן ב שווה 10 אין קנאה

שחקן ב מקבלcosa

ערך עצמי שווה 11 והחלק של שחקן א שווה 11 יש קנאה

### **מסקנה: החלוקת שהראמנו בהתחלה היא EF1 אבל לא EFX מכיוון שהורדת הנפט ביטלה את ההקנאה אבל ההורדת של הזהב לא ביטלה את הקנאה**

ב. הוכיחו, שכאשר כל השחקנים מסכימים על סדר העדפות של החפצים (כלומר: כל השחקנים מסכימים מה החפץ הכii טוב, מה החפץ השני הכii טוב, וכו'), קיימת חלוקה EFX.

### סעיף ב

נתונים:

A שחקנים עם תועלות שוות לכל מוצר

o מוצרים

מטרה: להוכיח קיימת חלוקה שהיא EFX

נראה אלגוריתם

1. מיוון החפצים בסדר יורד של העדפה (מהחפץ הטוב ביותר לחלש ביותר).

2. נקיצה כל חפץ לפי הסדר לשחקן אשר בשלב זה החבילה שלו היא בעלת הערך הנמור ביותר (לפי סכום התועלות).

המיון בסדר יורד נועד לחזק את השחקנים החלשים ביותר בכל שלב.  
העיקרון הוא שכל חפץ טוב יחזק את השחקן שזקוק לו יותר, ובכך נצמצם פערים ונימנע מיקנהה.

נניח בשלילה שקיים שחקן  $j$  שמקנא לשחקן  $i$  גם אחרי שימושים חפץ כלשהו  $g$  מהחבורה של  $i$  :

$g \setminus (A_i) > (A_j) \cap$

אבל דבר זה לא הגיוני על פי האלגוריתם שתיארנו מכיוון שrank השחקן עם חבילה ענייה מקבל מוצר כלומר לפני שהוספנו את  $g$  לחבילה של  $i$  החבילה שלו הייתה יותר קטנה מ  $j$  :

כלומר :

$g \setminus (A_i) < (A_j) \cap$

ואז לא  $j$  לא קינה ב-

### סתירה

### מסקנה:

לכן, לא יתכן מצב של קינה גם לאחר הסרת כל חפץ — כלומר, החלוקת היא EFX.

## ג. תארו אלגוריתם למציאת חלוקה EFX בין שני שחקנים

### סעיף ג

מכיוון שהסעיף לא ביקש ייעילות נובוד **brute force**

נתאר את האלגוריתם:

1. עבור כל חלוקה אפשרית של O לשתי קבוצות לא חופפות  $A_1$  ו- $A_2$  (כך ש- $O = A_1 \cup A_2$ ):

2. חשב את התוצאות:

$$u_A(A_1), u_A(A_2), u_B(A_1), u_B(A_2)$$

3. בדוק האם מתקיימים קנהה:

$$\text{אם } u_A(A_1) < u_A(A_2) \text{ אז } A \text{ מקנה ב-} B$$

$$\text{אם } u_B(A_1) < u_B(A_2) \text{ אז } B \text{ מקנה ב-} A$$

4. עבור כל שחקן שמקנהו:

עבור כל חפץ  $g$  בחבילה השחקן שבו מקנאים:

בדוק אם הקנהה נעלמת לאחר הסרת  $g$ :

(לדוגמא: אם  $A$  מקנה ב- $B$ , בדוק האם  $(u_A(A_1) \geq u_A(A_2 \setminus \{g\})$ )

5. אם הקנהה לא נעלמת עבור כל  $g$  שירד אז זו אינה חלוקה EFX, תמשיך לחלוקת הבאה

6. אם אין קנהה כלל, או הקנהה נעלמת עבור כל  $g$  שירד — מצאת חלוקה EFX. החזר אותה.

7. אם עברת על כל החלוקת האפשרות ולא מצאת חלוקה — החזר 'לא נמצאה חלוקה EFX'

\* ד. נסו לגרום לכלי ב"מ כלשהו לתאר לכם אלגוריתם קצר ופיטוט למציאת חלוקה EF בין שלושה שחknim. ודאו שהאלגוריתם נכון.

## סעיף ד

בתחילת שדרתי עם ה-45gb הוא נותן את אלגוריתם מסובך וארוך שהוכח לפניהם כמה שנים שעבד אבל התבקשו למציאת אלגוריתם קצר ופיטוט בקשי קיצור ופיטוט האלגוריתם וזה התוצאה:

### שלב 1 – אתחול:

כל שחkn מתחילה עם חבילה ריקה.

$$O = \{o_1, o_2, \dots, o_m\}$$

קובץ החפצים הוא:

### שלב 2 – חלוקה הדרגתית (גרידית):

עבור כל חפץ, O<sub>j</sub> סבכע את הפעולות הבאות:

- נסחה להקצת את החפץ לשחקן אוクリ או תיוצר קנאה חזקה אצל שחknים אחרים.

- איך מודאים זאת? עבור כל שחkn אחר  $f = i$ , בזוק:

$$u_j(A_j) \geq u_j(A_i \cup \{o\} \setminus \{g\}) \quad \text{for all } g \in A_i \cup \{o\}$$

כלומר – גם אם נוסיף את ס' ל-ז-ונסיר כל פריט מהחביבה שלו, השחקן יעדין לא יקנא.

- אם נמצא שחkn צזה – החפץ מוקצה לו.
- אם אין אפשרות צזה – שומרים את החפץ לשבב תיקון מאוחר יותר.

### שלב 3 – תיקון קנאה (אם נוצרה):

אם לאחר הקצאה נוצר מצב שבו שחkn מקנא לאחר גם לאחר הסרת כל חפץ – מבצעים תיקון:

מאתרים מעגל קנאה A: מקנא ב B-B-C-B-A-

בכל מעגל צזה – מחליפים חפצים בין השחקנים כדי לאזן את התועלות ולשבור את הקנאה.

### לב 4 – המשך עד סיום:

משיכים להקצת את שאר החפצים שלא שובצו.

מתקנים את הקנאה המקומית רק אם צריך.

התהיליך ממשיך עד שכל החפצים שובזו, ואיש לא מקנא גם לאחר הסרת כל פריט כלומר : AXFoshga.

#### **סיכום:**

האלגוריתם בונה את החלוקה **שלב אחריו שלב**, תוך שמירה על איזון מתמיד. במקרה שמתעוררת קנהה חזקה – היא מטופלת באמצעות **החלפות מוחזירות** בין השחקנים. למראות שהאלגוריתם לא בהכרח אופטימלי מבחינת זמן, הוא **מבוסס על עקרונות מוכחים מהאלגוריתם המלא של Chaudhury ושות (2020)** ('וניתן לבדוק אותו ידנית עבור מקרים קטנים').

#### **! האמת המדעית:**

אין אלגוריתם פשוט ידוע כיום שモבetta שתרミニ ימצא חלוקת EFX עבור שלושה שחקנים עם העדפות שונות. ככלומר – האלגוריתם **שפישטי** עבורו הוא ניסיין **מעשי** שמתבסס על עקרונות מוכחים (כמו תוספת הדרגתית ותיקון קנהה), אבל הוא לא מוכח כתקף לכל מקרה.

בנוסף שאלתי אותו מה הוא חושב על **Brute Force**

#### **\* פתרון Brute Force כאלגוריתם קצר ופשוט:**

למרות שאינו עיל, אלגוריתם Brute Force נוחש לפתרון קצר ופשוט מבחינת רעיון: הוא בודק את כל החלוקות האפשריות של החפצים ובוחן האם המהן מקיימת את תנאי EFX. עבור מספר קטן של שחקנים וחפצים – זהה שיטה קונסטרוקטיבית פשוטה וברורה שmbטיחה תוצאה נכונה. לכן, במלות תיאורתיות או במצחים בהם הייעלה אינה נדרשת, Brute Force מהויה פתרון לגיטימי ויעיל לבדיקת קיום חלוקה EFX.

\*\* ה. נסו לגרום לכלי ב"מ כלשהו לתאר לכם אלגוריתם **קצר ופושט** למציאת חלוקה EFX בין ארבעה שחקנים. ודאו שהאלגוריתם נכון.

#### סעיף ה

אתה לא יכול להסיק בלבד אלגוריתם ? למרות שלא מצאו?

ChatGPT said:

שאלה הנדרת — והיא נוגעת בדיקת נקודה בין המחקר הפתוח לבין היצירתיות האלגוריתמית.

 **אך אם אני יכול למציא אלגוריתם חדש ל- EFX עם 4 שחקנים, גם אם לא מצאו אחד מוכח?** התשובה היא: אני כן יכול להציג רעיון חדש, אבל אני לא יכול להוכיח שהוא תמיד יעבוד (כלומר, אין לי דרך להבטיח שהוא יחזיר תמיד חלוקה EFX לכל קלט).

אבל... אם אתה מחשש **אלגוריתם "קצר ופושט"** שאפשר לבדוק עליו דוגמאות, אני יכול להציג אחד עכשווי. הוא לא מובטח — אבל הוא יצירתי, קונקרטי, ונitin לבדיקה ידנית על מקרים קטנים.

---

#### \* **אלגוריתם מוצע (חדש) EFX-4 by Round-Robin + תיקון לוקלי**

 **רעיון כללי:**

מחלקים את החפצים בסבב (כמו EF1) ואז מתקנים קנהה "חזקה" בעזרת החלפת פריטים.

---

#### ■ **שלבים:**

##### 1. **Round-Robin Allocation:**

- כל שחקן בתורו בוחר את החץ המועדף עליו מבין החפצים שנותרו.
- חוזרים על הסבבים עד שכל החפצים שובצו.

##### 2. **בדיקה קנהה חזקה (EFX):**

- עברו כל זוג שחקנים: j,i
  - בדוק האם i מקנה לפחות j-gam אחרי שימושים כל פריט מחבילת j
  - אם כן – זו קנהה שלא עומדת ב- EFX

##### 3. **תיקון לוקלי:**

- עברו מקרה זה, נסה להסיר את הפריט שגורם לכך הרבה לקנהה מחבילת j או להחליף בין פריטים של j,i.
- אם זה לא עוזר – נסה לשים את הפריט בצד (לא מוקצה לאף אחד)

##### 4. **חזור על 2–3 עד שאין קנהה חזקה או שהפריטים נגמרים**

  **יתרונות:**

- קצר, קל להסביר, אפשר לישם ביד או בקוד פשוט
- מוצא פתרונות EFX במקרים רבים (בדוק על דוגמאות קטנות)

  **חסרונות:**

- **לא מובטח** שהוא אכן נמצא חלוקה EFX תמיד
- עלול לא להתכנס (או להיכנס לולאה) במקרה רע

