

## שאלה 0 [רשות]: הזדמנות נוספת לפתור את שאלה 2 מהשיעור הקודם

**סעיף ב** [2 נק']. תארו אלגוריתם יעיל (זמן ריצה פולינומיאלי במספר השחקנים), המוצא חלוקה  $EFx$  בין כל מספר של שחקנים, כאשר השחקנים מסכימים על סדר ההעדפות של החפצים (כלומר: כל השחקנים מסכימים מה החפץ הכי טוב, מה החפץ השני הכי טוב, וכו').

שימו לב: השחקנים לא חייבים להסכים על **הערכים** של החפצים, אלא רק על **הסדר** בין החפצים. לדוגמה, ייתכן ששחקן 1 מייחס לחפצים א,ב,ג את הערכים 33,22,11 ושחקן 2 מייחס לאותם חפצים את הערכים 99,77,22, וכד'.

יש להדגים את פעולת האלגוריתם, ולהוכיח שהוא מוצא תמיד חלוקה  $EFx$ .

**סעיף ה**. נסו לגרום לכלי ב"מ כלשהו לתאר לכם אלגוריתם קצר ופשוט למציאת חלוקה  $EFx$  בין שלושה שחקנים, או אלגוריתם כלשהו למציאת חלוקה כנ"ל בין ארבעה שחקנים. הוכיחו פורמלית שהאלגוריתם נכון, והדגימו אותו על מספר דוגמאות. [זו שאלה פתוחה – רבים ניסו ולא הצליחו... מי שיצליח יקבל 100 בקורס + סיכוי לתיזה].

## מטלה חדשה – חלוקת חפצים עם כסף

בנוסף לשאלה 0 (אם פתרתם אותה), יש לענות על שאלה אחת מהשאלות למטה לבחירתכם. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בניקוד כפול.

### שאלה 1: אלגוריתם המכרז עם מס

נתונה בעיית חלוקה עם כסף, של  $m$  חפצים בין  $n$  אנשים. כל אדם המקבל סכום כסף חיובי כלשהו  $x$  צריך לשלם  $t \cdot x$  מס הכנסה, כאשר  $t$  הוא מספר קבוע כלשהו בין 0 ל-1 (נניח  $t=0.3$  זה 30% מס).

א. הראו שאלגוריתם "המכרז השווה" לא תמיד מחזיר חלוקה ללא קנאה.

- שימו לב: מס הכנסה מתייחס לתשלום **נטו**, לדוגמה, אם שחקן שילם 100 וקיבל 150, הוא ישלם מס רק על 50; אם הוא שילם 100 וקיבל 50, הוא לא ישלם מס בכלל.

\* ב. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה יעילה-פארטו וללא קנאה, או הוכיחו שלא קיים כזה.

### שאלה 2: אלגוריתם המכרז: התחכמויות

א.  $n$  שחקנים מחלקים ביניהם חפץ אחד בעזרת אלגוריתם "המכרז השווה". שחקן 1 הצליח לגלות את הערכים של כל השחקנים 2, ...,  $n$ , לאותו חפץ. שחקן 1 רוצה להשתמש במידע הזה כדי להתחכם - למסור לאלגוריתם ערך שונה מהערך האמיתי שלו, כך שהתועלת שלו תהיה גדולה ביותר. תארו אלגוריתם שיעזור לשחקן 1 למצוא התחכמות טובה ביותר (כלומר: להחליט איזה ערך למסור לאלגוריתם כדי להשיג את התועלת הגבוהה ביותר האפשרית).

**הדרכה:** לפני שתנסו לפתח אלגוריתם כללי, נסו לבדוק מקרים פרטיים ולהבין מה קורה. לדוגמה, שני שחקנים עם ערכים 10, 20 או 20, 10.

ב. הוכיחו, שאם שחקן 1 לא יודע את הערכים של השחקנים 2, ...,  $n$ , אז לא קיימת התחכמות בטוחה.

### שאלה 3: השמת חפצים אגליטרית

נתונים  $n$  שחקנים ו- $n$  חדרים. צריך לתת חדר אחד בדיוק לכל שחקן, ללא כספים. תארו אלגוריתמים יעילים (- זמן ריצה פולינומיאלי ב- $n$ ) למציאת השמות המקיימות את התנאים הבאים:

א. השמה הממקסמת את מכפלת הערכים.

ב. השמה אגליטרית (השמה הממקסמת את הערך הקטן ביותר).

\* ג. השמה לקסימין-אגליטרית.

הדגישו והוכיחו את נכונות האלגוריתמים שלכם.

### שאלה 4: בניית סימפלס התמחורים

נתונה דירה עם שלושה חדרים, ושלושה דיירים עם תועלות קוואזיליניאריות, והערכים הבאים:

מרתף	חדר שינה	סלון	
10	20	70	אבי
20	45	35	בני
10	45	45	גבי

כמו כן, נתון  $R=T=100$ .

א. בנו את סימפלס התימחורים המחולק למשולשים שצלעם באורך 0.2. לכל קודקוד בסימפלס, ציינו את החדר המועדף על כל אחד מהשחקנים [מומלץ להיעזר בקוד].

ב. מיצאו את כל המשולשונים המגוונים בסימפלס מסעיף א.

ג. מיצאו חלוקה אחת ללא קנאה; ציינו את התימחור ואת ההשמה.

### שאלה 5: חלוקה ללא קנאה של מטלות

צריך לחלק  $n$  מטלות בין  $n$  שחקנים. השחקנים מייחסים ערכים שונים (שליליים) למטלות השונות. כל המטלות מתבצעות באותו זמן, ולכן כל שחקן צריך לקבל מטלה אחת בדיוק. כדי לפצות את השחקנים על המאמץ, אנחנו מוכנים לשלם לכל שחקן סכום-כסף כלשהו; התקציב הכולל שלנו הוא 1000. המטרה היא למצוא חלוקה ללא-קנאה של מטלות וכסף, כך שאף שחקן לא יקנא בסל (מטלה + תקבול-כסף) של שחקן אחר.

נתון: כל שחקן מעדיף לעשות כל מטלה בתשלום, על פני כל מטלה אחרת בחינם.

הוכיחו שתמיד קיימת חלוקה ללא קנאה.