פרק 10 – חלוקה בהגרלה

״אַךְ בְּגוֹרָל יֵחָלֵק אֶת הָאָרֶץ, לִשְׁמוֹת מַטּוֹת אֲבֹתָם יִנְחָלוּ״ (במדבר כו נה).

הגרלה היא אמצעי פשוט ונוח לחלק חפצים בדידים. כשצריך לחלק חפץ אחד בין שני אנשים ללא שיתוף וללא שימוש בכסף, הפתרון ההוגן היחיד הוא להטיל מטבע כך שכל אחד מהשחקנים יקבל את החפץ בהסתברות 0.5.

חלוקה בהגרלה היתה מקובלת בעבר: יהושע בן־נון השתמש בגורל כדי לחלק את ארץ ישראל בין השבטים (יהושע יח ו). גורלות שימשו גם לחלוקת משימות: נחמיה בן־חכליה השתמש בגורל כדי לקבוע מי יהיה אחראי להביא עצים לבית המקדש (נחמיה י לה). באתונה העתיקה, וכן בכמה מהרפובליקות של איטליה בימי הביניים, נהגו לבחור חלק מבעלי תפקידים ציבוריים בהגרלה, בתהליך הנקרא ״סורטיציה״ (sortition).[א]

גם בימינו משתמשים בגורל כדי לחלק נכסים ציבוריים. כשייסדו את השכונה ״אחוזת בית״, השכונה הראשונה בתל־אביב, חילקו את המגרשים בהגרלה בין המייסדים. כיום, בתוכנית ״מחיר למשתכן״, מדינת ישראל מאפשרת לזכאים לקבל דירות במחיר שאמור להיות נמוך ממחיר השוק. כיוון שהביקוש לדירות אלה גדול מההיצע, מתבצעת הגרלה בין המבקשים. בצה״ל מקובל להשתמש בהגרלה כדי להחליט מי יישאר לשמור על הבסיס כששאר החיילים יוצאים לחופשה. בתחרויות ספורט שונות מטילים גורלות כדי לקבוע את סדר ההתמודדויות בין המתחרים. בחלק מהמדינות, שבהן נהוג לשתף חבר־מושבעים במשפט, המושבעים נבחרים בהגרלה.

הגרלות משמשות לא רק כדי להשיג חלוקה הוגנת, אלא גם כדי לפתור בעיות אלגוריתמיות אחרות בצורה יעילה יותר ממה שאפשר להשיג באלגוריתמים ללא הגרלות. אחד האלגוריתמים המוכרים והיעילים ביותר לסידור רשימות – אלגוריתם סידור מהיר (quicksort) – משתמש בהגרלות.

המשימה הראשונה שלנו בפרק זה תהיה להתאים את מושגי ההוגנות והיעילות, שלמדנו בשיעורים הקודמים, למצב של חלוקה באקראי: מהי הגרלה הוגנת? ומהי הגרלה יעילה?

[א] הרעיון לבחור בעלי-תפקידים ציבוריים בהגרלה נראה מוזר במחשבה ראשונה, אבל יש לו יתרון חשוב על תהליכי הבחירות המקובלים: זה תהליך הבחירות היחיד שהוא גם הוגן וגם חסין-אסטרטגיה.

חלק 1: תכונות של הגרלות

כשיש חפץ אחד ושני שחקנים (עם זכויות שוות), יש רק הגרלה אחת שאפשר לקרוא לה "הגרלה הוגנת", והיא, לתת את החפץ בהסתברות 50% לאחד משני השחקנים (למשל ע"י הטלת מטבע הוגן). אבל מה עושים כשיש הרבה חפצים והרבה שחקנים – איך נתרגם את תנאי ההוגנות והיעילות, שהגדרנו עבור חלוקות נתונות, להגרלות בין חלוקות שונות?

הוגנות.

המושג המרכזי המשמש להגדרת הוגנות של חלוקה אקראית הוא ה**תוחלת (expectation)**. תוחלת של משתנה מקרי היא הממוצע המשוקלל של הערכים האפשריים של המשתנה, כאשר המשקלים הם ההסתברויות השונות לקבל כל אחד מהערכים. מושג התוחלת מוכר לכל מי שלמד קורס בהסתברות; לשם רענון ותזכורת, נראה דוגמה מספרית.

דוגמה. שחקן זורק קוביה הוגנת, ומקבל שקלים בהתאם למספר שיצא בקוביה (מספר שלם בין 1 ל-6). מהי תוחלת הרווח שלו?

תשובה: לכל מספר שלם בין 1 ל-6 יש הסתברות 1/6. לכן התוחלת היא:

1/6 * 1 + 1/6 * 2 + 1/6 * 3 + 1/6 * 4 + 1/6 * 5 + 1/6 * 6 = **3.5**.

במקרה של חלוקה בהגרלה, המשתנים המקריים המעניינים אותנו הם **הערכים** שמייחסים השחקנים לסלים השונים. תוחלת הערך שמייחס שחקן כלשהו i לסל שלו תסומן ב: $E[v_i(x_i)]$.

דוגמה. נתון חפץ אחד ושני שחקנים. שחקן א מייחס לחפץ ערך V_a ושחקן ב מייחס לו ערך V_b. החפץ נמסר לשחקן א בהסתברות p ולשחקן ב בהסתברות 1–p. תוחלת הערך שמייחס שחקן א לסל שלו היא:

$$E\left[v_a\left(x_a\right)\right] = p \cdot V_a + \left(1-p\right) \cdot 0 = p \cdot V_a$$

ותוחלת הערך שמייחס שחקן ב לסל שלו היא:

$$E\left[v_b\left(x_b\right)\right] = \left(1-p\right) \cdot V_b + p \cdot 0 = \left(1-p\right) \cdot V_b$$

בעזרת התוחלת, ניתן לתרגם את תנאי ההוגנות שהגדרנו על חלוקות, לתנאי ההוגנות על הגרלות. הוגנות המסתמכת על התוחלת נקראת **הוגנות לכתחילה (ex-ante fairness)**, כי היא מחושבת בתחילת התהליך, לפני שההגרלה בוצעה.

הגדרה. חלוקה אקראית נקראת:

- **פרופורציונלית לכתחילה (ex-ante proportional)** – אם תוחלת הערך של כל שחקן היא לפחות 1/n מהערך שהוא מייחס לכל החפצים:

  $E[v_i(x_i)] \geq v_i(All)$

- **ללא־קנאה לכתחילה (ex-ante envy-free)** – אם לכל שני שחקנים i, j, תוחלת הערך של שחקן i בעיני עצמו גדולה לפחות כמו תוחלת הערך של שחקן j בעיני שחקן i:

  $E[v_i(x_i)] \geq E[v_i(x_j)]$

המשך הדוגמה.

א. ההגרלה בדוגמה הקודמת היא **פרופורציונלית־לכתחילה** עבור שחקן א אם ורק אם $p \cdot V_a \geq \frac{V_a}{2}$, ועבור שחקן ב אם ורק אם $\left(1-p\right) \cdot V_b \geq \frac{V_b}{2}$. לכן ההגרלה פרופורציונלית־לכתחילה אם ורק אם $p = \frac{1}{2}$, כצפוי.

ב. תוחלת הערך של שחקן ב בעיני שחקן א היא:

$$E\left[v_a \left(x_b \right) \right] = \left(1-p\right) \cdot V_a + p \cdot 0 = \left(1-p\right) \cdot V_a$$

ותוחלת הערך של שחקן א בעיני שחקן ב היא:

$$E\left[v_b \left(x_a \right) \right] = p \cdot V_b + \left(1-p\right) \cdot 0 = p \cdot V_a$$

ולכן ההגרלה היא **ללא־קנאה־לכתחילה** עבור שחקן א אם ורק אם $p \cdot V_a \geq \left(1-p\right) V_a$, ועבור שחקן ב אם ורק אם $\left(1-p\right) \cdot V_b \geq p \cdot V_b$. לכן ההגרלה ללא־קנאה־לכתחילה אם ורק אם $p = 1-p = \frac{1}{2}$, כצפוי.

המושג המשלים להוגנות לכתחילה הוא **הוגנות בדיעבד (ex-post fairness)**. תנאי זה מתייחס למצב הסופי, אחרי שההגרלה בוצעה.

הגדרה. חלוקה אקראית נקראת:

* **פרופורציונלית בדיעבד (ex-post proportional)** – אם בכל תוצאה של ההגרלה, הערך של כל שחקן הוא לפחות 1/n מהערך שהוא מייחס לכל החפצים.
* **ללא־קנאה בדיעבד (ex-post envy-free)** – אם בכל תוצאה של ההגרלה, לכל שני שחקנים i, j, הערך ששחקן i מייחס לסל של עצמו גדול לפחות כמו הערך שהוא מייחס לסל של j.

הוגנות־בדיעבד היא דרישה חזקה יותר מהוגנות־לכתחילה.

משפט.

א. כל הגרלה פרופורציונלית־בדיעבד היא פרופורציונלית־לכתחילה, אבל לא להיפך.

ב. כל הגרלה ללא־קנאה־בדיעבד היא ללא־קנאה־לכתחילה, אבל לא להיפך.

הוכחה:

א. כל הגרלה פרופורציונלית־בדיעבד היא פרופורציונלית־לכתחילה. היות וההגרלה היא פרופורציונלית־בדיעבד אזי מתקיים **לכל** תוצאה אפשרית של ההגרלה כי $v_i\left(x_i\right) \geq \frac{v_i\left(All\right)}{n}$. כדי לחשב את התוחלת, יש לעבור על כל הסלים שההגרלה עשויה לתת לשחקן i:

$$E\left[v_i \left(x_i \right) \right] = \sum_{x_i} \Pr\left[x_i \right] \cdot v_i \left(x_i \right)$$

$$\geq \sum_{x_i} \Pr\left[x_i \right] \cdot \frac{v_i\left(All\right)}{n}$$

$$= \frac{v_i\left(All\right)}{n} \cdot \sum_{x_i} \Pr\left[x_i \right]$$

$$= \frac{v_i(All)}{n} \cdot 1$$

לכן תוחלת הערך של שחקן i היא לפחות $\frac{v_i(All)}{n}$.

ב. כל הגרלה ללא־קנאה־בדיעבד היא ללא־קנאה־לכתחילה. היות שההגרלה היא ללא־קנאה־בדיעבד אזי מתקיים לכל תוצאה אפשרית של ההגרלה ולכל שני שחקנים i, j כי $v_i(x_i) \geq v_i(x_j)$.

כדי לחשב את התוחלת, יש לעבור על כל זוגות הסלים שההגרלה עשויה לתת לשחקנים i,j:

$$E\left[v_i(x_i)\right] = \sum_{x_i} \Pr\left[x_i\right] \cdot v_i(x_i)$$

$$\geq \sum_{x_i} \Pr\left[x_i\right] \cdot v_i(x_j)$$

$$\sum_{x_i} E\left[v_i(x_j)\right].$$

***

בשני הסעיפים, הכיוון ההפוך אינו נכון: ההגרלה בדוגמה עם p=1/2 היא פרופורציונלית לכתחילה וללא־קנאה לכתחילה, אבל אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הללו בדיעבד, כי השחקן שלא זכה בהגרלה מקנא.

יעילות.

קל מאד להשיג חלוקה הוגנת־לכתחילה לכל מספר של שחקנים וחפצים: פשוט נבחר באקראי שחקן כלשהו בהסתברות אחידה (1/n לכל שחקן), וניתן לו את כל החפצים. ההגרלה הזאת היא **פרופורציונלית לכתחילה** – כי תוחלת הערך של כל שחקן היא בדיוק 1/n מהערך שהוא מייחס לכל החפצים. היא גם **ללא־קנאה לכתחילה** – כי כל השחקנים מקבלים סל אקראי זהה (כל החפצים בהסתברות 1/n, וכלום בהסתברות (n-1)/n). אבל ההגרלה הזאת אינה יעילה. נמחיש זאת תחילה בדוגמה מספרית, ואז נגדיר פורמאלית את תכונת היעילות.

דוגמה. נתונים שני חיילים הצריכים לחלק ביניהם שתי משמרות. הם מייחסים למשמרות את הערכים הבאים:

	משמרת יום	**משמרת לילה**
אלי:	–10	–20
בני:	–20	–10

אם בוחרים חייל אחד באקראי, ונותנים לו את שתי המשמרות, אז תוחלת הערך של שניהם היא –15. לעומת זאת, אם נותנים לאלי את משמרת היום ולבני את משמרת הלילה בהסתברות 1 (בלי הגרלה), אז תוחלת הערך של שניהם היא –10.

מנקודת־מבט של תוחלת־הערך, החלוקה השניה היא **שיפור פארטו** של החלוקה הראשונה.

הגדרה. חלוקה אקראית א נקראת **שיפור־פארטו־לכתחילה** של חלוקה אקראית ב, אם תוחלת הערך של חלק מהשחקנים גבוהה יותר בחלוקה א ("זה נהנה" – בתוחלת), ותוחלת הערך של שאר השחקנים גבוהה לפחות באותה מידה בחלוקה א ("זה לא חסר" – בתוחלת).

חלוקה אקראית נקראת **יעילה לכתחילה (ex-ante efficient)** אם לא קיימת חלוקה אקראית שהיא שיפור־פארטו־לכתחילה שלה.

הגדרה. חלוקה אקראית נקראת **יעילה בדיעבד (ex-post efficient)** אם כל תוצאה של ההגרלה היא חלוקה יעילה־פארטו: בכל תוצאה של ההגרלה, לא קיימת חלוקה אחרת, הנותנת לשחקן אחד ערך גבוה יותר ("זה נהנה"), ולכל שאר השחקנים לפחות אותו ערך ("זה לא חסר").

איזו תכונה חזקה יותר לדעתכם – יעילות־לכתחילה או יעילות־בדיעבד?
אם חשבתם שיעילות־בדיעבד חזקה יותר מיעילות־לכתחילה, כמו שהוגנות־בדיעבד חזקה יותר מהוגנות־לכתחילה) – טעיתם: המצב בדיוק הפוך.

משפט. כל הגרלה יעילה־לכתחילה היא יעילה־בדיעבד, אבל לא להיפך

הוכחה: נניח שהגרלה כלשהי אינה יעילה־בדיעבד, ונוכיח שאינה יעילה־לכתחילה. כיוון שההגרלה אינה יעילה־בדיעבד, קיימת חלוקה כלשהי X, שההגרלה מחזירה בהסתברות חיובית (p>0), וקיימת חלוקה כלשהי Y שהיא שיפור־פארטו של X.

נבנה הגרלה חדשה, הדומה להגרלה המקורית, פרט לכך שבמקום להחזיר את החלוקה X (בהסתברות p), היא מחזירה את החלוקה Y. בהגרלה החדשה, תוחלת הערך של כל השחקנים גדולה לפחות כמו בהגרלה המקורית. בנוסף, עבור כל שחקן שהערך שלו בחלוקה Y גדול יותר מבחלוקה X, תוחלת־הערך בהגרלה החדשה גדולה יותר מבהגרלה המקורית. לכן, ההגרלה החדשה היא שיפור־פארטו של ההגרלה המקורית. לכן, ההגרלה המקורית אינה יעילה־לכתחילה.

הכיוון ההפוך אינו נכון: ההגרלה בדוגמה למעלה היא יעילה־בדיעבד. כל תוצאה של ההגרלה היא יעילה־פארטו: השחקן שאינו מקבל אף משמרת מקבל את הערך הגדול ביותר האפשרי עבורו (0), ולכן לא קיים שיפור־פארטו בדיעבד. ***

מדוע היחס בין "לכתחילה" ל"בדיעבד" ביעילות הפוך מהיחס בהוגנות? אינטואיטיבית, הסיבה היא שיעילות פארטו מוגדרת באופן שלילי: "לא קיים שיפור פארטו". בשיפורי פארטו, היחס בין "לכתחילה" ל"בדיעבד" זהה ליחס בהוגנות: כל שיפור פארטו בדיעבד הוא שיפור פארטו לכתחילה. לכן, אם **לא קיים** שיפור פארטו לכתחילה, אז **לא קיים** שיפור פארטו בדיעבד.

חלק 2: חלוקת חפצים בהגרלה

ישנה רדוקציה כללית מבעיית חישוב הגרלה על חפצים בדידים, לבעיית חלוקת משאבים רציפים:

1. התייחס לכל חפץ בדיד כאל משאב רציף, והנח שהכמות הנתונה ממשאב זה היא 1.
2. הפעל על המשאבים שהתקבלו אלגוריתם כלשהו לחלוקת משאבים רציפים.
3. בחלוקה המתקבלת, כל שחקן מקבל שבר כלשהו מכל חפץ; התייחס לשבר הזה כאל הסתברות. הגרל כל חפץ בין השחקנים שקיבלו שבר חיובי ממנו, כך שהסתברות הזכיה של כל שחקן שווה לשבר שקיבל.

לדוגמה, ניתן למצוא הגרלה אגליטרית־לכתחילה ע"י פתרון תוכנית לינארית, כפי שראינו בשיעורים הקודמים:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad z \\
&\text{such that} \quad 0 \le x_{i,g} \le 1 && \text{for all i and g;} \\
&\qquad \sum_i x_{i,g} = 1 && \text{for all g;} \\
&\qquad z \le \sum_g v_{i,g} \cdot x_{i,g} && \text{for all i.}
\end{aligned}$$

לכל שחקן i ולכל חפץ g, ישנו משתנה $x_{i,g}$. בהקשר של חלוקת משאבים רציפים, משמעות המשתנה הזה היתה "החלק של משאב g שניתן לשחקן i". בהקשר של חלוקה אקראית של חפצים בדידים, משמעות המשתנה הזה היא "ההסתברות שחפץ g נמסר לשחקן i". לכל חפץ g, סכום ההסתברויות על פני כל השחקנים חייב להיות בדיוק 1, כי החפץ חייב להימסר לשחקן אחד בדיוק. תוחלת הערך של שחקן i היא הסכום, על־פני כל החפצים, של ההסתברות שהשחקן מקבל את החפץ, כפול ערך החפץ עבורו ($v_{i,g}$). תוחלת הערך של כל שחקן i צריכה להיות לפחות כערכו של המשתנה z, המייצג את הערך האגליטרי.

לאחר שחישבנו ערכים עבור המשתנים $x_{i,g}$, נבצע את ההגרלות עבור כל חפץ בנפרד. לדוגמה, אם קיבלנו $x_{1,1} = 0.5, x_{2,1} = 0.3, x_{3,1} = 0.2$, אז ניתן את חפץ מס' 1 לשחקן 1 בהסתברות 0.5, לשחקן 2 בהסתברות 0.3, ולשחקן 3 בהסתברות 0.2.

ההגרלה המתקבלת היא "אגליטרית לכתחילה" – היא ממקסמת את תוחלת־הערך הנמוכה ביותר של שחקן כלשהו. כדי שההגרלה תהיה גם יעילה־לכתחילה, אפשר להריץ אלגוריתם למציאת חלוקה לקסימין־אגליטרית. כל התכונות של חלוקה לקסימין־אגליטרית של משאבים רציפים, מתקיימות בתוחלת עבור הגרלות על משאבים בדידים:

משפט. כל הגרלה לקסימין־אגליטרית־לכתחילה היא יעילה־לכתחילה (ולכן יעילה־בדיעבד). בנוסף, אם הערכות השחקנים מנורמלות (כך שסכום הערכים של כל שחקן הוא קבוע), אז כל הגרלה לקסימין־אגליטרית־לכתחילה היא פרופורציונלית־לכתחילה.

הוכחה: נובע ישירות מהמשפטים שהוכחנו בשיעורים הקודמים לגבי חלוקה לקסימין־אגליטרית: חישוב תוחלת הערך בחלוקת־חפצים אקראית זהה לחלוטין לחישוב הערך בחלוקת משאבים רציפים.

***

הבעיה העיקרית של אלגוריתם הרדוקציה שתיארנו למעלה היא, שהוא אינו מבטיח שום דבר על הוגנות בדיעבד. החלוקה המתקבלת עלולה להיות מאד לא הוגנת: תיאורטית, ייתכן ששחקן אחד יפסיד בכל ההגרלות ולא יקבל אף חפץ, ושחקן אחר ינצח בכל ההגרלות ויקבל את כל החפצים.

האתגר העיקרי בחלוקה אקראית הוא להבטיח שהחלוקה תקיים תכונות הוגנות מסויימות **בדיעבד**, בנוסף לתכונות של הוגנות ויעילות **לכתחילה**. בחלקים הבאים נראה מספר דרכים לעשות זאת.

חלק 3: השמה בהגרלה

ישנן בעיות חלוקה רבות, שבהן חשוב להבטיח שכל שחקן יקבל לכל היותר חפץ אחד; בעיות כאלו נקראות **בעיות השמה (assignment)** או **שידוך (matching)**. דוגמה אחת היא חלוקת חדרים בדירה שכורה בין דיירים. שם השגנו הוגנות על־ידי שינוי דמי־השכירות של החדרים, בהתאם להערכות של השחקנים. אולם ישנם מקרים שבהם אי־אפשר להשתמש בפתרון זה. לדוגמה, כשמחלקים מעונות לסטודנטים, דמי־השכירות בדרך־כלל קבועים מראש. לכן ננסה להשיג הוגנות על־ידי הגרלה.

דוגמה נוספת לבעיית השמה היא חלוקת תורנויות: יש n תורנויות שצריך לחלק בין n אנשים. כל התורנויות מתבצעות באותו זמן, ולכן בהכרח כל אדם חייב לבצע תורנות אחת בדיוק. האתגר המרכזי בבעיות השמה הוא: איך להשיג חלוקה הוגנת ויעילה לכתחילה, ויחד עם זה, להבטיח שכל שחקן יקבל חפץ אחד בדיוק **בוודאות**, לכל תוצאה אפשרית של ההגרלה?

נניח שאנחנו רוצים להשיג השמה אגליטרית־לכתחילה. אנחנו יכולים להשתמש באותה תוכנית ליניארית שהשתמשנו בה כדי להשיג **חלוקה** אגליטרית־לכתחילה, בתוספת אילוץ האומר, שכל שחקן מקבל חפץ אחד בדיוק:

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize} && z \\
&\text{such that} && 0 \le x_{i,g} \le 1 && \text{for all } i \text{ and } g; \\
& && \sum_i x_{i,g} = 1 && \text{for all } g; \\
& && \sum_g x_{i,g} = 1 && \textbf{for all i;} \\
& && z \le \sum_g v_{i,g} \cdot x_{i,g} && \text{for all } i.
\end{aligned}
$$

שימו לב שיש כאן שני סכומים, שאנחנו דורשים שיהיו שווים ל־1: סכום ההסתברויות על כל חפץ צריך להיות 1 – כי כל חפץ נמסר לשחקן אחד בדיוק; וסכום ההסתברויות על כל שחקן צריך להיות 1 – כי כל שחקן מקבל חפץ אחד בדיוק. אם הערכות השחקנים מנורמלות, נקבל השמה פרופורציונלית־לכתחילה. אם נשתמש באלגוריתם הלקסימין, נקבל השמה שהיא גם יעילה־לכתחילה. האתגר כאן הוא **איך לבצע את ההגרלות**?

דוגמה. נניח שהפעלנו את האלגוריתם הלקסימין־אגליטרי על בעיית השמה של ארבעה סוגי מעונות (בקתה, צריף, וילה ומרתף) לארבעה סטודנטים, והפתרון שהתקבל הוא:

	בקתה	**צריף**	**וילה**	**מרתף**
סטודנט א:	0.7	0.3	0	0
סטודנט ב:	0	0	0.7	0.3
סטודנט ג:	0.3	0	0.3	0.4
סטודנט ד:	0	0.7	0	0.3

שימו לב שסכום הערכים בכל שורה ובכל עמודה הוא 1 – בהתאם לאילוצים שהגדרנו. אולם, אם נבצע הגרלה על כל חפץ בנפרד, בהתאם להסתברויות הכתובות בעמודה המתאימה, ייתכן שלא נקבל השמה חוקית. לדוגמה, ייתכן שסטודנט א יזכה גם בבקתה וגם בצריף.

כדי לוודא שתתקבל השמה חוקית, עלינו לבצע הגרלה על **השמות שלמות**, ולא על כל חפץ בנפרד. לשם כך, עלינו למצוא סדרה של השמות $X_1,...,X_k$ (עבור k שלם כלשהו), וסדרה מקבילה של הסתברויות, $p_1,...,p_k$, כך שסכום ההסתברויות הוא 1, ואם נבחר את השמה X_j בהסתברות p_j, ההסתברות של כל אחד מהשחקנים לקבל כל אחד מהחפצים תהיה זהה להסתברויות הרשומות בטבלה.

בדוגמה למעלה, הגרלה אפשרית היא:

- בהסתברות 0.3: א–צריף, ב–מכולה, ג–בקתה, ד–מרתף.
- בהסתברות 0.4: א–בקתה, ב–מכולה, ג–מרתף, ד–צריף.
- בהסתברות 0.3: א–בקתה, ב–מרתף, ג–מכולה, ד–צריף.

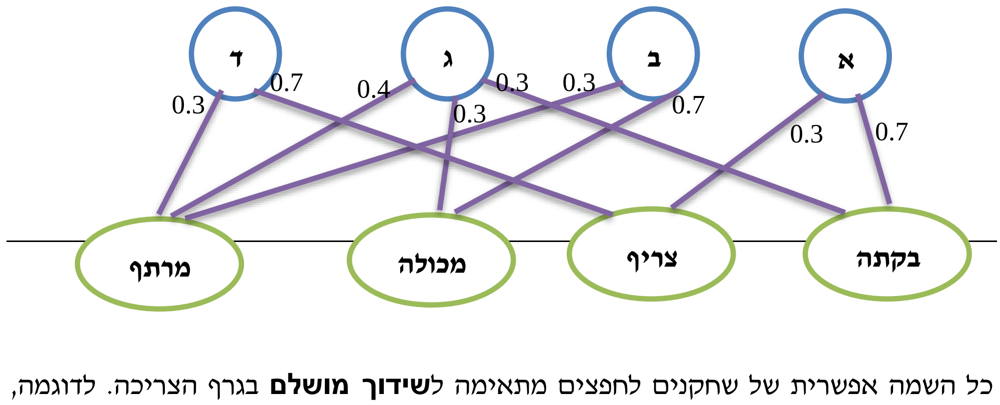
בהגרלה זו k=3. כדי לוודא שההגרלה מתאימה לטבלה, ניתן לחשב, עבור כל סטודנט וכל חדר, מה ההסתברות שהסטודנט יקבל את החדר. לדוגמה, סטודנט א מקבל את הבקתה בהסתברות 0.4+0.3=0.7, בהתאם לרשום בטבלה.

האם **לכל** מטריצת השמה אקראית קיימת הגרלה על השמות שלמות? התשובה היא כן! כדי להסביר תשובה זו, נשתמש בכלים מתורת הגרפים.

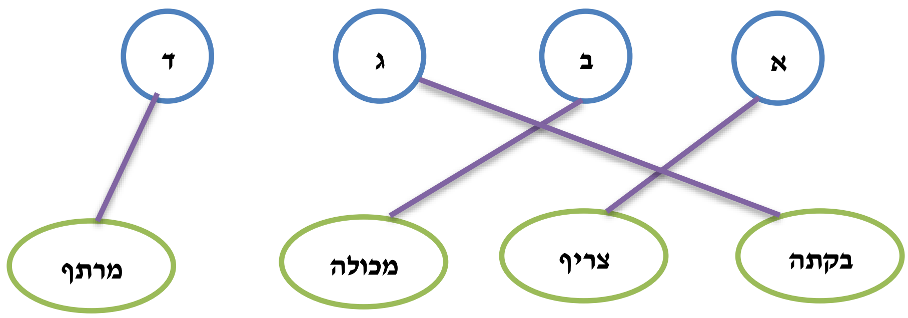
הגדרה. נתונה מטריצת־הסתברויות המייצגת חלוקה של הסתברויות על חפצים בין שחקנים. **גרף הצריכה** של המטריצה הוא גרף דו־צדדי לא־מכוון, שבו:

* הקודקודים בצד אחד הם n השחקנים;
* הקודקודים בצד השני הם m החפצים;
* יש צלע בין שחקן i לבין חפץ g אם שחקן i מקבל את חפץ g בהסתברות חיובית ממש;
* משקל הצלע בין i ל־g שווה להסתברות ששחקן i מקבל את חפץ g.

הנה גרף הצריכה המתאים למטריצה ב.Error! Reference source not found:



כל השמה אפשרית של שחקנים לחפצים מתאימה **לשידוך מושלם** בגרף הצריכה. לדוגמה, ההשמה א–צריף, ב–מכולה, ג–בקתה, ד–מרתף מתאימה לשידוך הבא:



אנחנו רוצים "לפרק" את גרף־הצריכה לשידוכים מושלמים. הפירוק נקרא על־שם המתמטיקאי גארט בירקהוף (Birkhoff), שתיאר את הפירוק לראשונה.

הגדרה. נתון גרף G עם משקלים חיוביים על הקשתות. **פירוק בירקהוף (Birkhoff decomposition)** של G הוא סדרה של שידוכים מושלמים $X_1,...,X_k$ (עבור k שלם כלשהו), וסדרה מקבילה של משקלים, $p_1,...,p_k$, כך שהמשקל של כל קשת e בגרף G שווה לסכום המשקלים של השידוכים המכילים את e.

האם לכל גרף יש פירוק בירקהוף? התשובה היא לא: הרי יש גרפים שאין בהם אפילו שידוך מושלם אחד. אבל אנחנו מתעניינים בגרפים מיוחדים – גרפי־צריכה של מטריצת השמה אקראית. הגרפים האלה מתאפיינים בתכונה הבאה:

הגדרה. גרף G עם משקלים חיוביים על הקשתות נקרא **מאוזן** אם לכל קודקוד v בגרף, סכום המשקלים של הקשתות המחוברות ל-v הוא מספר קבוע.

גרף־הצריכה של כל מטריצת השמה אקראית הוא מאוזן, כי לכל קודקוד, סכום המשקלים של הקשתות המחוברות אליו הוא 1. הדבר נובע מההגדרה של השמה אקראית: סכום הסתברויות ההשמה של כל חפץ הוא 1, וסכום ההסתברויות המשוייכות לכל שחקן הוא 1.

משפט. בכל גרף דו־צדדי מאוזן ולא ריק יש שידוך מושלם.

הוכחה: נוכיח את המשפט בעזרת משפט ידוע בתורת הגרפים – **משפט הנישואין של הול** (Hall's marriage theoren). המשפט קובע, שבגרף דו־צדדי יש שידוך מושלם אם־ורק־אם, לכל קבוצה של k קודקודים באחד הצדדים, יש ביחד לפחות k שכנים בצד השני.

נוכיח כעת, שהתנאי של הול מתקיים בכל גרף דו־צדדי מאוזן. נסמן באות w את סכום משקלי הקשתות המחוברות לקודקוד כלשהו (המשקל זהה לכל הקודקודים, לפי הגדרת גרף מאוזן). ניקח קבוצה כלשהי של k קודקודים באחד הצדדים, ונסתכל על כל הצלעות היוצאות מהן. סכום המשקלים על כל הצלעות הללו הוא $k \cdot w$. כל קודקוד בצד השני "תורם" לסכום הזה לכל היותר את סכום המשקלים בקשתות המחוברות אליו, שהוא w. לכן, כדי להגיע לסכום של $k \cdot w$, חייבים להיות בצד השני לפחות k שכנים. ***

כעת נוכיח, שלכל גרף דו־צדדי מאוזן יש פירוק בירקהוף. ההוכחה היא על־ידי אלגוריתם המוצא פירוק כזה.

הקלט: גרף דו־צדדי מאוזן ולא ריק, G.

1. איתחול: j=1.
2. מצא שידוך מושלם ב־G; סמן אותו ב X_j.
3. מצא את המשקל הקטן ביותר של קשת כלשהי בשידוך X_j; סמן אותו ב־p_j.

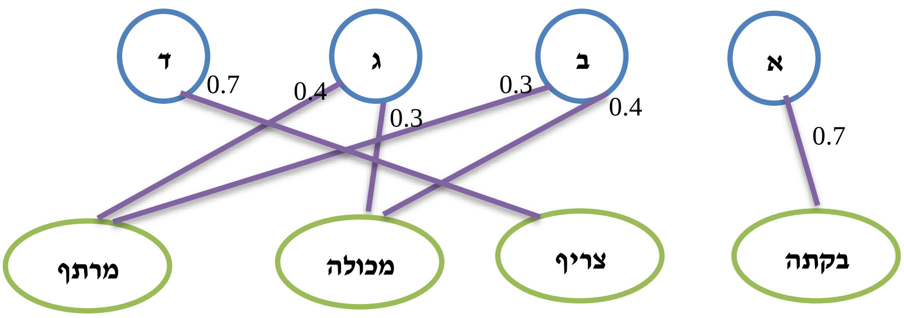
4. לכל קשת e בשידוך X_j: הפחת p_j מהמשקל של e. אם המשקל החדש 0, מחק את e.
5. אם הגרף ריק, סיים; אחרת, הגדל את j ב־1 וחזור לצעד 2.

משפט. האלגוריתם הנ״ל מוצא לכל גרף דו־צדדי מאוזן G, פירוק בירקהוף של G בזמן פולינומיאלי במספר הקודקודים.

הוכחה: נוכיח תחילה **טענת־עזר**: בכל פעם שהאלגוריתם מגיע לצעד 2, הגרף G מאוזן, ולכן לפי המשפט שהוכחנו קודם יש בו שידוך מושלם. **הוכחה**: בתחילת האלגוריתם, הטענה נכונה לפי ההנחה. נסמן באות w את סכום המשקלים בקשתות המחוברות לקודקוד כלשהו. לאחר שהאלגוריתם מוצא שידוך מושלם, הוא מפחית מספר קבוע p_j מהמשקל של כל קשת בשידוך. כיוון שהמספר p_j הוא המשקל הקטן ביותר של קשת כלשהי בשידוך, משקלי כל הקשתות נשארים לפחות 0. כיוון שהשידוך מושלם, כל קודקוד מופיע בשידוך בדיוק פעם אחת. לכן, לכל קודקוד, סכום משקלי הקשתות המחוברות לקודקוד משתנה ל: $w-p_j$. סכום המשקלים עדיין קבוע לכל הקודקודים, ולכן הגרף עדיין מאוזן. **סוף הוכחת הטענה**.

בכל פעם שהאלגוריתם מגיע לצעד 4, לפחות קשת אחת נמחקת – הקשת שמשקלה היה בדיוק p_j. מספר הקשתות בגרף הוא לכל היותר n^2, כאשר n הוא מספר הקודקודים בכל צד (כי יש לכל היותר קשת אחת בין כל קודקוד בצד אחד לכל קודקוד בצד השני). לכן האלגוריתם יסתיים תוך n^2 סיבובים לכל היותר.[ב] בכל סיבוב צריך לחשב שידוך מושלם; הדבר ניתן לביצוע ע״י אלגוריתמים ידועים הרצים בזמן פולינומיאלי. לכן האלגוריתם כולו מסתיים בזמן פולינומיאלי. לפי הגדרת המשקלים p_j, סדרת השידוכים והמשקלים שהאלגוריתם מוצא היא פירוק בירקהוף של G. ***

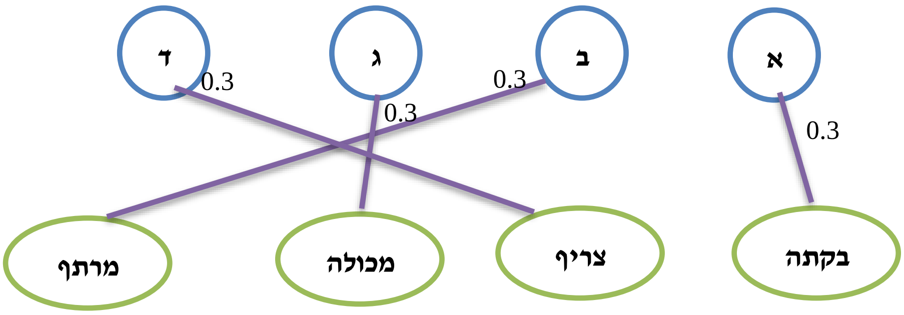
נדגים את האלגוריתם על הגרף בדוגמה למעלה. נניח שבסיבוב 1 נמצא השידוך המושלם א–צריף, ב–מכולה, ג–בקתה, ד–מרתף (זה יהיה השידוך X_1). המשקל הקטן ביותר של קשת בשידוך הוא 0.3, ולכן $p_1=0.3$. אחרי שמפחיתים 0.3 מארבעת הקשתות בשידוך, ומוחקים קשתות שמשקליהן הפכו לאפס, נשאר הגרף הבא:



שימו לב שהגרף עדיין מאוזן – לכל קודקוד, סכום משקלי הקשתות המחוברות לקודקוד הוא 0.7.

בסיבוב 2, האלגוריתם עשוי למצוא את השידוך המושלם א–בקתה, ב–מכולה, ג–מרתף, ד–צריף (זה יהיה השידוך X_2). המשקל הקטן ביותר של קשת בשידוך הוא 0.4, ולכן $p_2=0.4$. אחרי שמפחיתים 0.4 מארבעת הקשתות בשידוך, ומוחקים קשתות במשקל אפס, נשאר הגרף הבא:

[ב] למעשה, האלגוריתם יסתיים תוך n^2-n+1 סיבובים לכל היותר, כי בסיבוב האחרון נשארות תמיד n קשתות שמשקליהן הופכים ל־0 בו־זמנית.



שימו לב שהגרף עדיין מאוזן – לכל קודקוד, סכום משקלי הקשתות המחוברות אליו הוא 0.3. בסיבוב השלישי נשאר רק שידוך מושלם אחד: א–בקתה, ב–מרתף, ג–מכולה, ד–צריף. זהו השידוך X_3. משקל כל הקשתות בו הוא 0.3, ולכן $p_3=0.3$. אחרי שמפחיתים 0.3 מארבעת הקשתות בשידוך, ומוחקים קשתות במשקל אפס, נשאר גרף ריק, ולכן האלגוריתם מסתיים.

הגרלה הוגנת ויעילה לכתחילה.

בעזרת הכלים שלמדנו בסעיף הקודם, נתאר אלגוריתם המוצא הגרלה בין השמות, שהיא גם הוגנת־לכתחילה וגם יעילה־לכתחילה.

1. מצא חלוקה שברית לקסימין־אגליטרית, לפי האלגוריתם בפרק 3, עם אילוץ נוסף הקובע, שסכום השברים המשוייך לכל שחקן שווה בדיוק ל־1.
2. בנה את גרף־הצריכה של החלוקה.
3. מצא פירוק־בירקהוף של גרף־הצריכה בעזרת אלגוריתם בירקהוף. פירוק זה מגדיר הגרלה בין השמות.

ההגרלה המוחזרת היא לקסימין־אגליטרית, ולכן היא יעילה־לכתחילה. אם ערכי השחקנים מנורמלים, אז ההגרלה היא גם פרופורציונלית־לכתחילה.

מה אם רוצים שההגרלה תהיה לא רק **פרופורציונלית**־לכתחילה אלא גם **ללא־קנאה**־לכתחילה? כאן התשובה מורכבת יותר. למדנו, שחלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי השחקנים (או את סכום הלוגריתמים של ערכי השחקנים) היא יעילה־פארטו וללא־קנאה. היה אפשר לחשוב, שאם נוסיף את האילוץ, שסכום השברים המשוייך לכל שחקן שווה 1, נקבל מטריצת השמה אקראית, שהיא ללא־קנאה־לכתחילה. אבל זה לא נכון אפילו כשיש שני שחקנים.

דוגמה. נתונים שני חפצים ושני שחקנים עם הערכים הבאים:

	בקתה	צריף
עמי:	6	12
תמי:	12	18

ללא האילוץ שסכום השברים של כל שחקן צריך להיות 1, החלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים נותנת לעמי 5/6 מהצריף, ואת כל השאר לתמי (מכפלת הערכים היא $10\cdot 15=150$). ניתן לוודא שאף אחד מהם אינו מקנא בשני. עם זאת, כיוון שגרף־הצריכה של ההשמה אינו מאוזן, אי־אפשר לפרק אותו להגרלה על השמות.

אם מוסיפים את האילוץ שסכום השברים של כל שחקן שווה 1, החלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים נותנת לעמי את הצריף בהסתברות 1, ולתמי את הבקתה בהסתברות 1 (מכפלת הערכים היא $144 = 12 \cdot 12$). זוהי כבר השמה לא־אקראית, ואין צורך לפרק אותה. אבל יש בה קנאה – תמי מקנאת בעמי.

אאנונד היילנאנד (Hylland) וריצ׳ארד זקהאוסר (Zeckhauser) פיתחו אלגוריתם אחר, המוצא חלוקה יעילה־לכתחילה וללא־קנאה־לכתחילה עם האילוץ שסכום השברים של כל שחקן שווה 1, כך שאפשר לפרק את המטריצה להגרלה על השמות. האלגוריתם שלהם הוא מסובך למדי, זמן הריצה שלו אינו פולינומיאלי במספר השחקנים, והסיבוכיות המדוייקת שלו היא עדיין שאלה פתוחה. למיטב ידיעתנו, עדיין לא נמצא אלגוריתם פולינומיאלי לפתרון הבעיה.

סיכם: אראל סגל-הלוי.