

"וְנָחֲלֶתֶם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאֻזְיוֹ" (יִזְוָקָא ב״ו 14)

חלוקה הוגנת עם שיתוף מינימלי Fair Division with Minimal Sharing

אראל סגל-הלוי



איך "חותכים" חפץ בדיד?

החפץ שצריך "לחתוך" נשאר בבעלות משותפת.

לא קל, אבל בדרך-כלל אפשרי:

- ילדים - משמורת משותפת;
- דירת מגורים – השכרה וחלוקת הרווחים;
- דירת נופש, רכב – שימוש בזמנים שונים;
- משרדי ממשלה – רוטציה או פיצול;
- פשרה יצירתית כלשהי.

המטרה: למצוא חלוקה הוגנת ויעילה עם
הכי מעט שיתופים שאפשר.

חלוקת חפצים בין שני אנשים

נתונים:

- שני שחקנים.
- m חפצים (או נושאים שיש עליהם מחלוקת).
- כל שחקן מייחס ערך באחוזים לכל חפץ (סכום הערכים = 100).
- האתגר – להחליט מי יקבל כל חפץ כך ש:
- החלוקה תהיה פרופורציונלית וללא קנאה.
- החלוקה תהיה יעילה פארטו.
- נצטרך לחתוך (לשתף) חפץ אחד לכל היותר.

אלגוריתם "המנצח המתוקן" (Adjusted Winner) Brams and Taylor, 1996

א. סדר חפצים בסדר עולה של יחס הערכים:

ערך-עבור-שחקן-א | ערך-עבור-שחקן-ב.

ב. אתחול: תן את כל החפצים לשחקן א.

ג. העבר חפצים לשחקן ב לפי הסדר, עד ש:

(1) סכום הערכים של א שווה לסכום של ב, או -

(2) יש חפץ אחד שאם "נחתוך" אותו הסכום ישתווה.

ראו גליון אלקטרוני מצורף winner.ods.

חלוקה מסודרת

“המנצח המתוקן” מחזיר תמיד **חלוקה מסודרת**:

הגדרה: **חלוקה מסודרת** = יחסי-הערכים של החפצים בסל של שחקן ב קטנים או שווים ליחסי-הערכים של החפצים בסל של שחקן א.

משפט: כל חלוקה מסודרת בין שני שחקנים היא יעילה־פארטו.

הוכחה: בחלוקה מסודרת קיים מספר r , כך ש:

- שחקן א מקבל חפצים עם יחס־ערכים $r \leq$.

- שחקן ב מקבל חפצים עם יחס־ערכים $r \geq$,

- \leq

חלוקה מסודרת [המשך]

המשך הוכחה: נגדיר, עבור כל חפץ:

• $va =$ הערך לשחקן א;

• $vb =$ הערך לשחקן ב;

• $vc = r * vb$ = הערך לשחקן ב כפול r .

לפי הגדרת חלוקה מסודרת:

לחפצים בסל של שחקן א: $va \geq vc \rightarrow va/vb \geq r$

לחפצים בסל של שחקן ב: $vc \geq va \rightarrow va/vb \leq r$

מכאן, שהחלוקה הסופית ממקסמת את הסכום:

$$vc + va = r * vb + va$$

וכל חלוקה הממקסמת סכום של פונקציה עולה כלשהי של הערכים, היא יעילה־פארטו. ***

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

משפט: "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה יעילה-פארטו, פרופורציונלית, וללא קנאה.

הוכחה:

יעילות-פארטו: כי החלוקה מסודרת.

הוגנות: לשני השותפים סל עם ערך שווה. אילו הערך הזה קטן מ-50, הם היו יכולים להתחלק וזה היה שיפור פארטו – סתירה למשפט הקודם. לכן הערך הוא לפחות 50. לכן החלוקה פרופורציונלית וללא קנאה. ***

שיתוף מינימלי – שני שחקנים

אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר חלוקה יעילה והוגנת עם שיתוף של חפץ אחד לכל היותר. **שיתוף זה לא נוח. לכן נעדיף חלוקה יעילה והוגנת בלי שיתוף בכלל, אם אפשר.**

משפט: כל חלוקה יעילה פארטו היא מסודרת.

הוכחת המשפט: נניח בשלילה ששחקן א קיבל את חפץ 1 או חלק ממנו, ושחקן ב קיבל את חפץ 2 או חלק ממנו, ויחס הערכים הוא לא לפי הסדר הנכון:

$$v_{a1} / v_{b1} < v_{a2} / v_{b2}$$

$$v_{a1} / v_{a2} < v_{b1} / v_{b2}$$

$< ==$

שיתוף מינימלי – שני שחקנים

המשך ההוכחה:

נבחר שני מספרים קטנים מ-1, y ו- z , שהיחס ביניהם נמצא בין היחסים באי־שיוויון הקודם:

$$v_{a1} / v_{a2} < z / y < v_{b1} / v_{b2}$$

נעביר y מחפץ 1 משחקן א לשחקן ב, ונעביר z מחפץ 2 משחקן ב לשחקן א.

שחקן א הפסיד $y*v_{a1}$ אבל הרוויח $z*v_{a2}$, ושחקן ב הפסיד $z*v_{b2}$ אבל הרוויח $y*v_{b1}$. זה שיפור פארטו, כי:

$$z*v_{a2} > y*v_{a1} \quad y*v_{b1} > z*v_{b2}$$

מכאן, שהחלוקה הלא-מסודרת אינה יעילה-פארטו. ***

שיתוף מינימלי – שני שחקנים

הוכחת המשפט - דוגמה מהקובץ winner.ods, שני החפצים מימין:

נושא:	תכשיטים	אחוזת גריניץ
דונאלד:	15	15
איואנה:	40	25
יחס:	0.375	0.6

נניח שדונאלד קיבל את התכשיטים (חפץ 1) ואיואנה את האחוז (חפץ 2). אז:

$$v_{d1} = 15, v_{d2} = 15, v_{d1}/v_{d2} = 1$$

$$v_{i1} = 40, v_{i2} = 25, v_{i1}/v_{i2} = 1.6$$

נבחר למשל: $z/y = 1.2$; $z = 0.6, y = 0.5$

דונאלד נותן לאיואנה 0.5 מהתכשיטים תמורת 0.6 מהאחוז. הוא מפסיד 7.5 אבל מרויח 9;

איואנה מפסידה 15 אבל מרויחה 20. שיפור פארטו!

שיתוף מינימלי – שני שחקנים

חישוב חלוקה יעילה והוגנת עם מינימום שיתופים:

- אם יחס-הערכים הוא *שונה* לכל חפץ, אז יש רק דרך אחת לסדר את החפצים לפי יחס-הערכים. לכן, יש רק $m+1$ חלוקות יעילות-פארטו בלי שיתופים. אפשר לבדוק את כולן בזמן פולינומיאלי: אם אחת מהן פרופורציונלית – מחזירים אותה; אחרת – מריצים את "המנצח המתוקן".
- אם יש הרבה חפצים עם יחס-ערכים *שווה*, אז בעיית השיתוף המינימלי היא NP-קשה. ניתן לפתור אותה בעזרת חיפוש במרחב המצבים, עם גיזום של חלוקות לא-מסודרות.

שלושה שחקנים ויותר

משפט 1. כשיש n שחקנים, ייתכן שנצטרך $n-1$ שיתופים כדי להשיג חלוקה פרופורציונלית.

הוכחה. ייתכן שיש $n-1$ חפצים זהים.

משפט 2. לכל n שחקנים, קיימת חלוקה יעילה-פארטו ופרופורציונלית עם $n-1$ שיתופים כל היותר.

הוכחה. בהמשך השיעור.

n שחקנים – בדיקת יעילות פארטו

חלוקה מסודרת היא תנאי הכרחי ליעילות, אבל
לא תנאי מספיק:

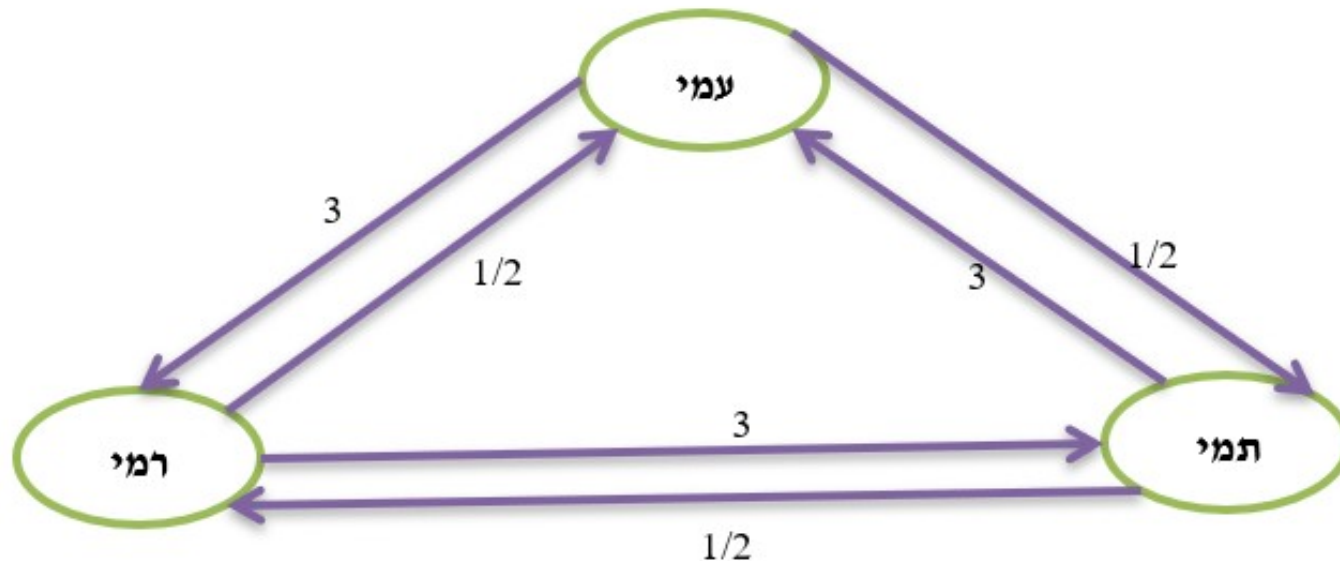
	אווהל	דירה	מחסן
עמי:	3	1	6
תמי:	6	3	1
רמי:	1	6	3

החלוקה המודגשת היא מסודרת לכל זוג של
שחקנים (כי $1/3 < 3/6$), אבל לא יעילה פארטו.

גרף ההחלפות

הגדרה. גרף-ההחלפות של חלוקה נתונה הוא גרף מכוון שלם, עם

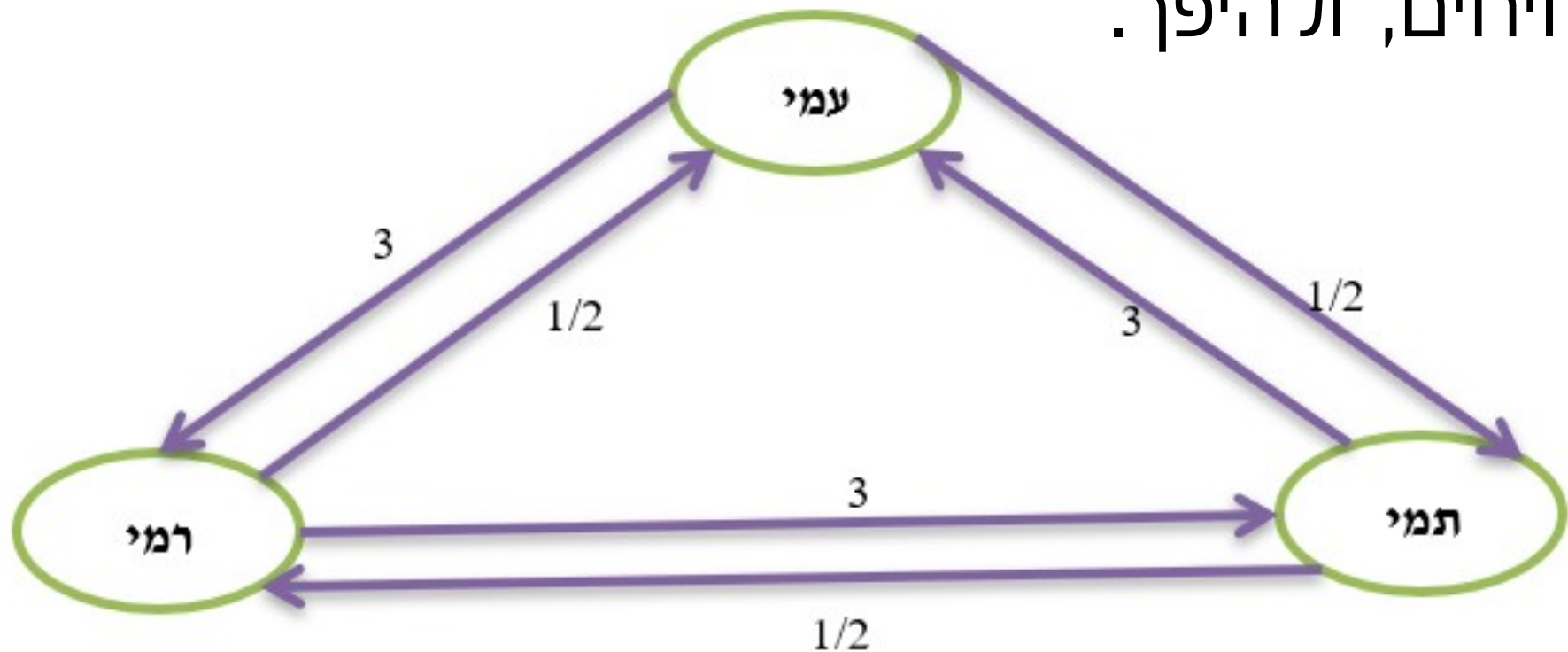
- n צמתים - צומת לכל שחקן.
- קשת מכוונת בין כל שני שחקנים i, j .
- משקל הקשת $j \rightarrow i = \text{היחס (ערך של } i \text{ \setminus ערך של } j)$
- הקטן ביותר של חפץ הנמצא בסל של שחקן i .



n שחקנים – בדיקת יעילות פארטו

משפט. חלוקה היא יעילה-פארטו אם-ורק-אם
בגרף-ההחלפות שלה, בכל מעגל מכוון,
מכפלת-המשקלים גדולה או שווה 1.

רעיון ההוכחה: כל מעגל מכוון עם מכפלה > 1
מתאים להחלפה שבה כל השחקנים במעגל
מרויחים, ולהיפך.



n שחקנים – בדיקת יעילות פארטו

דוגמה. נניח שיש מעגל מכוון באורך 3:

א ← ב ← ג ← א

ויחסי-הערכים: r | s | t כאשר $1 < rst$.

של החפצים: x | y | z

שחקן א מעביר חלק מ-x ששווה לו e לשחקן ב.

• לשחקן ב, זה שווה e/r.

שחקן ב מעביר חלק מ-y ששווה לו e/r לשחקן ג.

• לשחקן ג, זה שווה e/rs.

שחקן ג מעביר חלק מ-z ששווה לו e/rs ל-א.

• לשחקן א, זה שווה $e > e/rst$.

א הרויח והשאר לא הפסידו – שיפור פארטו!

n שחקנים – בדיקת יעילות פארטו

איך מחפשים מעגל עם מכפלת-משקלים > 1 ?

(1) הופכים כל משקל ללוגריתם שלו;

(2) מחפשים מעגל עם סכום-משקלים שלילי

• (למשל, בעזרת אלגוריתם בלמן-פורד).

איך מחפשים חלוקה הוגנת ויעילה ללא שיתופים?

• מבצעים חיפוש במרחב המצבים;

• גוזמים מצבים המתאימים לחלוקות לא יעילות.

אבל מה עושים אם לא מצאנו חלוקה הוגנת ויעילה

בלי שיתופים? \leq

n שחקנים, $n-1$ שיתופים

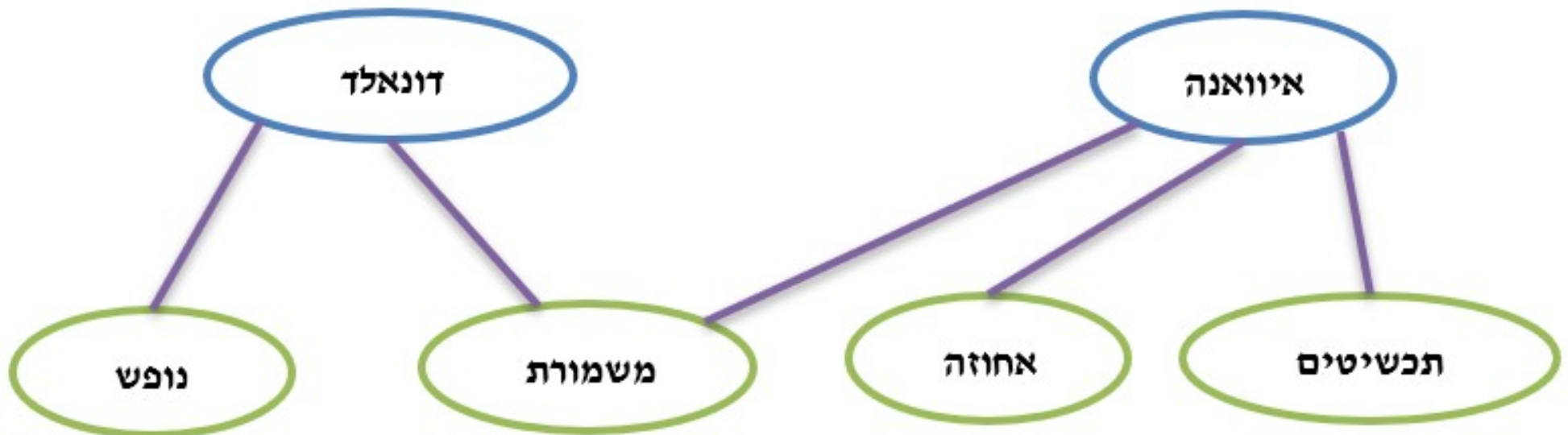
הגדרה. חלוקה ב היא שיפור פארטו חלש של חלוקה א, אם הערך שמקבל כל שחקן בחלוקה ב גדול לפחות כמו הערך שהוא מקבל בחלוקה א.

משפט. קיים אלגוריתם עם זמן-ריצה פולינומיאלי המוצא, לכל חלוקה נתונה, שיפור-פארטו-חלש עם לכל היותר $n-1$ שיתופים.

גרף הצריכה

הגדרה. גרף-הצריכה של חלוקה נתונה הוא גרף דו-צדדי לא-מכוון וללא משקלים, שבו:

- הקודקודים בצד אחד הם n השחקנים;
- הקודקודים בצד השני הם m החפצים;
- יש צלע בין שחקן i לבין חפץ j , אם ורק אם שחקן i מקבל חלק חיובי של חפץ j .



גרף הצריכה

משפט*. קיים אלגוריתם עם זמן-ריצה פולינומיאלי המוצא, לכל חלוקה נתונה, שיפור-פארטו-חלש עם **גרף צריכה ללא מעגלים** (\leq) לכל היותר $m+n-1$ צלעות (\leq) לכל היותר $n-1$ שיתופים).

הוכחה. אם אין מעגל בגרף-הצריכה – סיימנו!

נניח שבגרף הצריכה יש מעגל – למשל:

א – x – ב – y – ג – z – א

בגרף ההחלפות יש שני מעגליים מכוונים מנוגדים:

א ← ב ← ג ← א ; א ← ג ← ב ← א

המשקל על קשת **א ← ב** $v_a(x)/v_b(x) \geq$

המשקל על קשת **ב ← א** $v_b(x)/v_a(x) \geq$

\leq מכפלת המשקלים על קשתות מנוגדות ≥ 1 .

גרף צריכה ללא מעגלים

המשך ההוכחה.

\leq מכפלת הערכים במעגל הראשון * מכפלת הערכים במעגל השני ≥ 1 . לכן, לפחות לאחד משני מעגלי-ההחלפה יש מכפלת ערכים ≥ 1 .

- אם מכפלת הערכים באחד המעגלים > 1 , אז אפשר לבצע החלפה ולקבל שיפור-פארטו.

- אם מכפלת הערכים בשני המעגלים $= 1$, אז אפשר לבצע החלפה ולקבל שיפור-פארטו-חלש, ולקבוע את גודל ההחלפה כך שאחת הצלעות במעגל תיעלם.

נמשיך בתהליך זה עד שלא יישארו מעגלים בגרף הצריכה. ***

חלוקה הוגנת ויעילה עם $n-1$ שיתופים

- (1) נמצא חלוקה פרופורציונלית ויעילה-פארטו (למשל: לקסימין-אגליטרית עם הערכות מנורמלות).
- (2) נמצא שיפור-פארטו-חלש עם גרף-צריכה ללא מעגלים.

החלוקה החדשה היא:

- יעילה-פארטו – כי היא שיפור-פארטו-חלש של חלוקה יעילה-פארטו.
- פרופורציונלית – כי היא שיפור-פארטו-חלש של חלוקה פרופורציונלית.
- יש בה לכל היותר $n-1$ שיתופים – לפי המשפט.

חלוקה הוגנת ויעילה עם $n-1$ שיתופים – זכויות שונות

אם לשחקנים יש זכויות **שונות**, ניתן להשתמש באותו אלגוריתם, אבל להתחיל מחלוקה שהיא יעילה-פארטו ופרופורציונלית בהתחשב בזכויות השונות

- (למשל: לקסימין-אגליטרית עם הערכות מנורמלות בהתאם לזכויות השונות).

פתרון לבעיית הרכבת הממשלה

ניתן להקים ממשלה עם n מפלגות,
ולחלק את התיקים בהוגנות מדוייקת,
בהתאם לגדלים השונים של המפלגות,
כך שיהיו לכל היותר $n-1$ תיקים עם רוטציה.

