חלוקה הוגנת של חפצים בדידים

Fair Indivisible Item Allocation

אראל סגל-הלוי

חלוקה הוגנת בקירוב

מקרה פשוט:

- 99 חפצים זהים.
- 2 שחקנים עם זכויות שוות.

מה הן החלוקות שאפשר לקרוא להן "הוגנות בקירוב"?

- 50:49 או 49:50.
- בכל חלוקה אחרת, יש חוסר-הוגנות שאי-אפשר להצדיק בכך שהחפצים בדידים.

חלוקה הוגנת בקירוב - הכללות

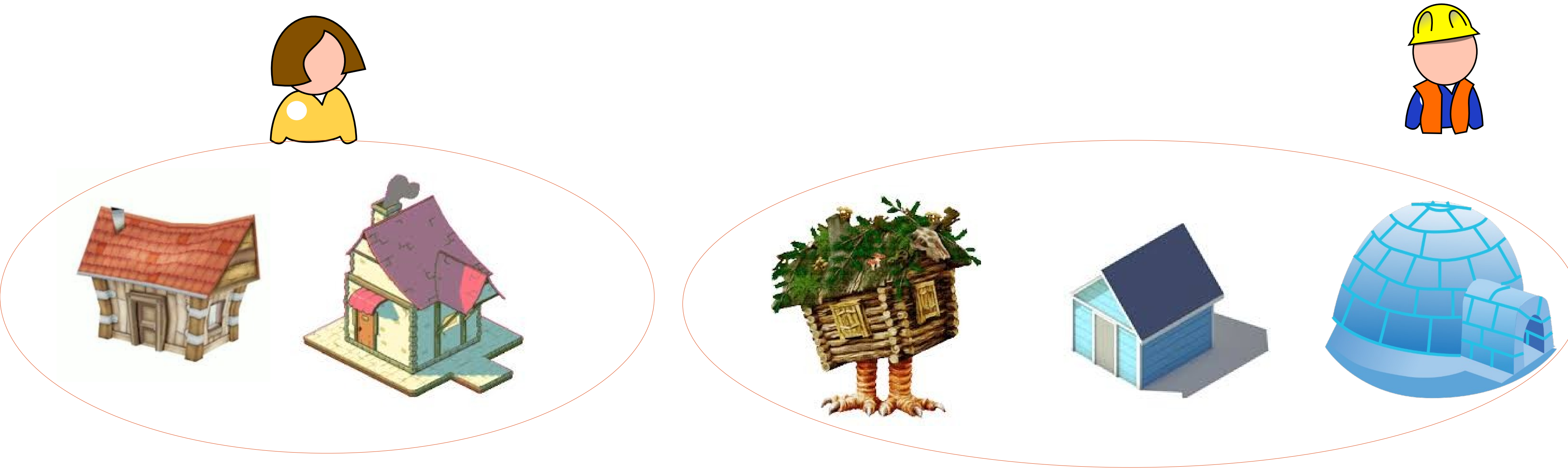
א. חפצים זהים – זכויות שונות.

ב. חפצים שונים – זכויות שוות.

ג. חפצים שונים – זכויות שונות.

חלוקה הוגנת בקירוב

הגדרה: חלוקה נקראת “ללא קנאה מלבד 1” (Envy Free except 1, **EF1**) אם לכל שני משתתפים א,ב, קיים חפץ כלשהו, שאם נוריד מהסל של ב, אז שחקן א לא יקנא בו.



חלוקה הוגנת בקירוב

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1" (Envy Free except 1, **EF1**) אם לכל שני משתתפים א,ב, קיים חפץ כלשהו, שאם נוריד מהסל של ב, אז שחקן א לא יקנא בו.

המשמעות: רמת-הקנאה ניתנת להצדקה בהתחשב בעובדה שהחפצים בדידים.

האם תמיד קיימת חלוקה ***EF1****?*

אלגוריתם הסֶבֶב (round robin)

1. מסדרים את השחקנים בסדר שרירותי כלשהו.
2. כל שחקן לוקח, מבין החפצים שנשארו,
   את החפץ שהוא הכי רוצה.
3. אם נשארו חפצים – חוזרים לשלב 2.

משפט. אלגוריתם הסבב מחזיר חלוקה EF1.

הוכחה. נוכיח את תנאי EF1 לכל שני שחקנים א,ב;
נניח בה"כ ששחקן א מופיע בסבב לפני שחקן ב.

- א לא מקנא כלל: על כל חפץ ש-ב בחר, א בחר לפניו.
- עכשיו נניח שמורידים מהסל של א את החפץ הראשון
  שבחר. על כל חפץ שנשאר בסל של א, ב בחר לפניו.
  לכן החלוקה EF1 גם עבור שחקן ב. ***

חלוקה הוגנת בקירוב - הכללות

א. חפצים זהים – זכויות שונות.

ב. חפצים שונים – זכויות שוות.

ג. חפצים שונים – זכויות שונות.

דוגמה: חלוקת תיקים בממשלה בין מפלגות.

חפצים שונים – זכויות שונות

הגדרה: *רמת הקנאה המוצדקת* בין שני משתתפים j ,i עם זכויות w_i, w_j היא:

$$V_i(X_j)/w_j - V_i(X_i)/w_i$$

חלוקה *ללא קנאה מוצדקת* (WEF) = רמת הקנאה המוצדקת היא 0 (לכל היותר).

דוגמה: לשחקן i זכות 1, לשחקן j זכות 2. שחקן i לא מקנא ב-j אם הוא מקבל לפחות חצי ממנו, כלומר: $V_i(X_i) >= V_i(X_j)/2$

- $V_i(X_j)/2 - V_i(X_i)/1 <= 0$
- רמת הקנאה המוצדקת היא:
- $\mathbf{V_i(X_j)/2 - V_i(X_i)/1}$

חפצים שונים – זכויות שונות

הגדרה: *רמת הקנאה המוצדקת* בין שני משתתפים j ,i עם זכויות w_i, w_j היא:

$$V_i(X_j)/w_j - V_i(X_i)/w_i$$

- בחלוקה EF1, כשהמשקלים 1 – רמת הקנאה המוצדקת היא לכל היותר $V_i(g)$, כאשר g = החפץ עם הערך הגדול ביותר (עבור i) אצל j.
- מה רמת הקנאה המותרת ב"חלוקה *ללא קנאה מוצדקת* עד-כדי חפץ אחד" ("WEF1")? -->

חפצים שונים – זכויות שונות

הגדרה: *רמת הקנאה המוצדקת* בין שני משתתפים j, i עם זכויות w_i, w_j היא:

$$V_i(X_j)/w_j - V_i(X_i)/w_i$$

- g =: החפץ עם הערך הגדול ביותר בסל של j.
- מה רמת הקנאה המותרת ב"חלוקה ללא *קנאה מוצדקת* עד-כדי חפץ אחד" ("WEF1")?
  - $V_i(g)/w_j$ – הסרת חפץ מהסל של j?
  - $V_i(g)/w_i$ – שיכפול חפץ לסל של i?
  - ממוצע של שני הביטויים הקודמים?

אלגוריתם סֶבֶּב משוקלל

- אתחול: כל שחקן מקבל 0
- כל עוד יש חפצים:
  - מחשבים, לכל שחקן:
    הזכות שלו
    ----
    f(מספר החפצים נוכחי)
  - השחקן, שהמנה שלו גדולה ביותר, בוחר, מבין החפצים שנשארו, את החפץ שהוא הכי רוצה.

נבחר פונקציה כלשהי f, המייחסת לכל מספר שלם s, מספר ממשי כלשהו בתחום [s, s+1].

חפצים שונים – זכויות שונות

משפט: אלגוריתם הסבב המשוקלל עם פונקציית-מחלק $f(s)=s+y$ מחזיר חלוקה שבה לכל שני משתתפים i, j עם זכויות w_i, w_j, רמת הקנאה המשוקללת היא לכל היותר:

$$y*V_i(g)/w_i + (1-y)*V_i(g)/w_j$$

- $f(s)=s$ ~ הסרת חפץ מהסל של j;
- $f(s)=s+1$ ~ שיכפול חפץ לסל של i;
- $f(s)=s+0.5$ ~ ממוצע שני הביטויים.

חפצים שונים – זכויות שונות

משפט: אלגוריתם הסבב המשוקלל עם פונקציית-מחלק $f(s)=s+y$ מחזיר חלוקה שבה לכל שני משתתפים j ,i עם זכויות w_i ,w_j, רמת הקנאה המשוקללת היא לכל היותר:

$$y*V_i(g)/w_i \ + \ (1-y)*V_i(g)/w_j$$

- **דוגמה**: לשחקן i זכות 1, לשחקן j זכות 2. רמת הקנאה המוצדקת של שחקן i בשחקן j היא לכל היותר:
- $y*V_i(g)/1 \ + \ (1-y)*V_i(g)/2 \ =(y+(1-y)/2)* \ V_i(g)$
  - $y=0$: $V_i(g)/2$ – פחות קנאה – טוב יותר לשחקן
  - $y=1$: $V_i(g)$ – יותר קנאה – טוב יותר לשחקן השני
  - $y=0.5$: $3*V_i(g)/4$ – ממוצע