Shape

Description automatically generated with medium confidenceמשפט.

נתונים n שחקנים עם זכויות כלשהן (שוות או שונות), ועם הערכות מנורמלות. קיימת חלוקה פרופורציונלית־חזקה, אם-ורק-אם ישנם שני שחקנים כלשהם, המייחסים ערך שונה לפרוסת עוגה כלשהי.

Shape

Description automatically generated with medium confidence**הוכחה:** כיוון אחד ברור: אם כל השחקנים מייחסים את אותו ערך לכל פרוסת עוגה, אז סכום הערכים בכל חלוקה שווה בדיוק לערך העוגה הכולל, ולכן לא יכולה להתקיים חלוקה פרופורציונלית-חזקה.

את הכיוון השני נוכיח בעזרת אלגוריתם, שפותח ע"י ז'וז'אנה יאנקו (Janko) ואטילה יו (Joo).[[1]](#endnote-2)

הקלט לאלגוריתם הוא שני שחקנים (נניח, שחקנים 1,2) ופרוסת־עוגה כלשהי X, ששני השחקנים מייחסים לה ערך שונה. בלי הגבלת הכלליות, נניח ש:

v1(X) < v2(X)

נסמן את שאר העוגה (כל העוגה פחות הפרוסה X) באות Y. כיוון שההערכות מנורמלות:

v1(Y) > v2(Y)

הרעיון המרכזי של האלגוריתם הוא לחלק את X ואת Y בנפרד, בעזרת אלגוריתם לחלוקה עם זכויות שונות, כך שהזכות של שחקן 1 תהיה קצת יותר קטנה ב־X וקצת יותר גדולה ב־Y; והזכות של שחקן 2 תהיה קצת יותר גדולה ב־X וקצת יותר קטנה ב־Y. הזכויות של שאר השחקנים יישארו אותו הדבר ב־X וב־Y. סכום הזכויות יהיה קצת קטן יותר, ולכן כל השחקנים יקבלו ערך גדול יותר. כעת ניכנס לפרטים.

שלב א: חלוקת הפרוסה X. כיוון ש v1(X)<v2(X), ניתן למצוא שני מספרים רציונליים, d1,x ו־ d2,x, כך ש:

1/v1(X) > d1,x > d2,x > 1/v2(X).

נקטין את הזכות של שחקן 1 ב־d1,x, ונגדיל את הזכות של שחקן 2 ב־d2,x. לשאר השחקנים נשאיר את אותה זכות:

w1,x = 1/n – d1,x

w2,x = 1/n ­­+ d2,x

wi,x = 1/n for all i ≥ 3

נסמן את סכום הזכויות של כל n השחקנים לאחר השינוי ב־WX:

WX = 1 – d1,x + d2,x < 1.

נפעיל את **Error! Reference source not found.** וניתן לכל שחקן i פרוסה שערכה לפחות:

wi,x\*vi(X)/WX > wi,x\*vi(X)

שלב ב: חלוקת הפרוסה Y. כיוון ש v1(Y)>v2(Y), ניתן למצוא שני מספרים רציונליים, d1,y ו־ d2,y, כך ש:

1/v2(Y) > d2,y > d1,y > 1/v1(Y).

נגדיל את הזכות של שחקן 1 ב־d1,y, ונקטין את הזכות של שחקן 2 ב־d2,y. לשאר השחקנים נשאיר את אותה זכות:

w1,y = 1/n + d1,y

w2,y = 1/n – d2,y

wi,y = 1/n for all i ≥ 3

נסמן את סכום הזכויות של כל n השחקנים לאחר השינוי ב־WY:

WY = W – d2,y + d1,y < 1.

נפעיל את **Error! Reference source not found.** וניתן לכל שחקן i פרוסה שערכה לפחות:

wi,y\*vi(Y)/WY > wi,y\*vi(Y)

שלב ג: איחוד הפרוסות. ניתן לכל שחקן את איחוד שתי הפרוסות – הפרוסה שקיבל בחלוקה של X והפרוסה שקיבל בחלוקה של Y. הערך הכולל של שחקן i גדול מ:

wi,x\*vi(X) + wi,y\*vi(Y) (\*)

כדי להוכיח שהחלוקה היא פרופורציונלית־חזקה, מספיק להוכיח שהביטוי המסומן ב(\*) גדול או שווה wi\*vi(C).

עבור כל שחקן i≥3, הביטוי (\*) שווה ל:

[vi(X)/n + vi(Y)/n]

= [vi(X) + vi(Y)]/n

= vi(C)/n

עבור שחקן 1, הביטוי (\*) שווה ל:

[(1/n – d1,x)\*v1(X) + (1/n + d1,y)\*v1(Y)]

***=* [**1/n\*(v1(X)+v1(Y)) + d1,y\*v1(Y) – d1,x\*v1(X)]

***=* [**1/n\*v1(C) + d1,y\*v1(Y) – d1,x\*v1(X)]

**>[**1/n\*v1(C) + 1 – 1]

**=**1/n\*v1(C)

ועבור שחקן 2, הביטוי (\*) שווה ל:

[(1/n + d2,x)\*v2(X) + (1/n – d2,y)\*v1(Y)]

***=* [**1/n \*(v2(X)+v2(Y)) – d2,y\*v2(Y) + d2,x\*v2(X)]

**>[**1/n \*v2(C) – 1 + 1]

**=**1/n \*v2(C)

בזה הוכחנו, שתכונת הפרופורציונליות החזקה מתקיימת לכל השחקנים.

מש"ל.

## מקורות

1. Zsuzsanna Jankó and Attila Joó (2022): "Cutting a Cake for Infinitely Many Guests." The Electronic Journal of Combinatorics: P1-42.‏

   קיום חלוקה פרופורציונלית־חזקה נזכר לראשונה במאמר של שטיינהאוס,**Error! Bookmark not defined.** והוכח ע"י דובינס וספאנייר:

   Lester E. Dubins and Edwin H. Spanier (1961): "How to cut a cake fairly." The American Mathematical Monthly 68.1P1: 1-17.‏

   האלגוריתם הראשון נכתב ע"י דאגלס וודאל:

   Douglas R. Woodall (1986): "A note on the cake-division problem." Journal of Combinatorial Theory, Series A 42.2: 300-301.‏

   והאלגוריתם הראשון לזכויות שונות נכתב ע"י יוליוס ברבנאל:

   Julius Barbanel (1996): "Game-theoretic algorithms for fair and strongly fair cake division with entitlements." Colloquium Mathematicae. Vol. 69. No. 1.

   ניתן למצוא סקירה של הנושא גם בדף ויקיפדיה Strongly-proportional division. [↑](#endnote-ref-2)