**סעיף א:**

הבעיה הזאת דומה מאוד לבעיה של מציאת שידוך מושלם בגרף דו־צדדי ממושקל עם סכום משקלים מקסימלי.

פורמלית – נניח שיש לנו גרף דו־צדדי G=( X∪Y , E) עם פונקציית משקלים אזי שידוך מושלם בגרף G הוא תת קבוצה של הצלעות *כך שלכל ולכל אם הצלע אז לכל מתקיים : .*

*שידוך M יקרא מושלם אם הוא מכסה את כל הקודקודים בגרף, ניתן למצוא שידוך מקסימלי עם סכום משקלים מקסימלי בגרף דו־צדדי עם האלגוריתם ההונגרי.*

*כדי לקשר את בעיית השידוך המושלם עם סכום מקסימלי לבעיית מציאת חלוקה הממקסמת את סכום הערכים, אפשר לחשוב על השחקנים בתור קודקודים בגרף, והשחקנים יהיו שייכים לקבוצת הקודקודים X , הפריטים לחלוקה יהיו קבוצת הקודקודים Y , ונעביר צלע בין כל שחקן i לפריט r כאשר המשקל של כל צלע הוא הערך שהשחקן i נותן לפריט זה (כלומר, אם השחקן i נותן ערך לפריט r אזי ).  
כעת אם נמצא שידוך מושלם אזי כל שחקן יקבל חפץ אחד בדיוק וסכום הערכים יהיה מקסימלי בגלל שהשידוך עצמו הוא מקסימלי.*

*נתאר אלגוריתם שמוצא חלוקה כפי שנתבקשנו בשאלה על ידי מציאת שידוך מקסימלי בגרף ממושקל דו צדדי :*

1. *עבור כל שחקן ניצור K קודקודים זהים : , ניצור מכל הקודקודים הללו קבוצה בשם X .*
2. *עבור כל פריט ניצור קודקוד בשם ונכניס אותו לקבוצה Y .*
3. *לכל קוקוד ולכל פריט ניצור צלע עם משקל שהוא הערך שנותן שחקן i לפריט J .*
4. *בנה גרף דו צדדי* G=( X∪Y , E) *כאשר הצלעות הן לפי מה שיצרנו סעיף קודם*
5. *הפעל את האלגוריתם ההונגרי למציאת שידוך מושלם ממושקל מקסימלי בגרף G ,* *נסמן את תוצאת השידוך כ M .*
6. *אם החזר: "לא קיימת חלוקה חוקית."  
   אחרת, עבור כל קודקוד שקיים בצלע כלשהי ב M תו לשחקו I את הפריט המתאים מהצלע.*

*קל לראות שהאלגוריתם מחזיר חלוקה שבה כל שחקן מקבל k פריטים בדיוק כמו כן סכום המשקלים הוא מקסימלי כי השידוך הוא מקסימלי.*

*סעיף ג:*

***ניזכר במספר משפטים מההרצאה:  
משפט 1 – כאשר השחקנים הם קוואזילינאריים, חלוקה היא יעילה פארטו אם ורק אם היא ממקסמת את סכום הערכים.  
משפט 2 – בכל השמה ללא קנאה, סכום הערכים של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.  
משפט 3 – כל השמה ללא קנאה, תישאר ללא קנאה לכל השמה שממקסמת את סכום הערכים.  
משפט 4 – האלגוריתם הבא מוצא חלוקת חדרים ללא קנאה:***

1. *מצא חלוקה כלשהיא X הממקסמת את סכום הערכים.*
2. *מצא תמחור p שאיתו החלוקה X היא ללא קנאה.*

*ניתן לבצע את האלגוריתם לפי מה שלמדנו בהרצאה – כדי למצוא חלוקה שממקסמת את סכום הערכים, ניתן להפוך את הבעיה לגרף דו־צדי ולמצוא שידוך מקסימלי עם משקל מקסימלי בגרף הזה. כדי למצוא תמחור p שאיתו החלוקה שמצאנו היא ללא קנאה, ניתן להשתמש באלגוריתם של תכנות ליניארי.*

*כדי לפתור את השאלה שלנו, אנחנו צריכים למצוא רדוקציה בין הבעיה שלנו, לבעיית חלוקת חדרים ולמצוא לבעיית חלוקת חדרים חוקה ללא קנאה. לפי משפטים 1,2,3,4 החלוקה שנמצא היא גם ללא קנאה וגם יעילה פארטו.*

*הרדוקציה:  
בעיית חלוקת חדרים היא מקרה פרטי של בעיית חלוקת חפצים עם כסף: מספר החדרים שווה למספר החפצים , כל שחקן צריך לקבל חדר ( במקרה שלנו חפץ) אחד בדיוק וסכום התשלומים של השחקנים הינו מספר קבוע מראש.*

*הרדוקציה שלנו תיקח את כל החפצים ותמיר אותם לחדרים, שכר הדירה הכולל יהיה סכום העדפות של כל השחקנים והתמחור ייקבע לפי העדפות השחקנים.*

*במקרה שנו יש n שחקנים ו nk חפצים ודורשים שכל שחקן יקבל k חפצים בדיוק .*

*כדי לפתור את הבעיה נשתמש באותה שיטה מסעיף קודם – על כל שחקן נוסיף 5 שחקנים שמקושרים לאותו שחקן.*

*לאחר שנפעיל את הרדוקציה נקבל שהבעיה היא בעיית חוקת חדרים ונוכל להפעיל עליה את האלגוריתם של משפט 4.   
האלגוריתם ימצא חלוקה כלשהיא x הממקסמת את סכום הערכים וגם ימצא תמחור p שאיתו החלוקה X היא ללא קנאה*

*לפי משפט 1 החלוה הזו גם יעילה פארטו בגלל שהיא ממקסמת את סכום הערכים*

*לאחר שקיבלנו חלוקת חדרים , כל שחקן i יקבל את החדרים שהשחקנים קיבלו והמחיר שלו יהיה הסכום של השחקנים*

*אם לכל העותקים של שחקן קיימת הקצאה עם תמחור ללא קנאה אזי גם ההקצאה והתמחור לשחקנים המקוריים היא לא קנאה*

*נסמן את החפצים שהוקצאו לעותק ןב ואת המחיר שהוא משלם ב*

*נגדיר עבור כל שחקן מקורי i :*

*איחוד כל החפצים של העותקים של i   
 סכום התשלומים של כל העותקים של i*

*צריך להוכיח שאין קנאה בין השחקנים המקוריים כלומר שאף שחקן i לא מקנא בשחקן אחר l :*

נניח בשלילה ש i מקנא ב l אזי :

נתח את הביטויים ונקבל:

באופן דומה נעשה זאת לתמחורים ונקבל :

נציב באי שוויון ונקבל :

אבל מההנחה שלכל אחד מהעותקים של i לא הייתה קנאה כלפי העותקים האחרים מתקיים ש:

נסכום עכשיו את כל ה k אי שוויונים :

כלומר נקבל :

וזו סתירה להנחה ש i מקנא ב l