

מטלה - חלוקה הוגנת של קרקעות ועוגות

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות או סעיפים המסומנים בכוכבית * מזכים בניקוד כפול.

שאלה 1: חלוקת תורנויות פרופורציונלית

אמא ואבא נסעו לנופש, והשאירו את n ילדיהם הגדולים לשמור על התינוקת ה- $n+1$. הם מעוניינים לחלק ביניהם את זמן השמירה בצורה הוגנת. לכל ילד יש העדפות שונות לגבי זמן השמירה - יש כאלה שמעדיפים לשמור בלילה, יש כאלה שמעדיפים לשמור דווקא בצהריים, וכו'. עליכם למצוא חלוקה שבה כל ילד מקבל משמרת קשירה.

[חימום]. בסעיפים א, ב הניחו שהילדים **אוהבים** לשמור על התינוקת - כל אחד רוצה לשמור כמה שיותר.

א. באיזה אלגוריתם תשתמשו כדי למצוא חלוקה פרופורציונלית?

ב. באיזה אלגוריתם תשתמשו כדי למצוא חלוקה ללא-קנאה בקירוב (עד-כדי שניה אחת)?

בסעיפים הבאים הניחו שהילדים **לא אוהבים** לשמור - כל אחד רוצה לשמור כמה שפחות.

ג. הסבירו למה האלגוריתם של סעיף א לא עובד.

ד. תארו אלגוריתם חדש המוצא חלוקה קשירה ופרופורציונלית של התורנויות. הדגימו את האלגוריתם, והוכיחו את נכונותו.

* ה. האם האלגוריתם של סעיף ב עובד? אם כן, הוכיחו. אם לא, מצאו דוגמה נגדית.

שאלה 2: חלוקה פרופורציונלית בשני ממדים

א. [חימום]. נתונה חלקת-אדמה בצורת מלבן. תארו אלגוריתם הנותן חלוקה פרופורציונלית של העוגה בין n אנשים, כך שכל אחד מקבל מלבן.

ב. נתונה חלקת-אדמה בצורת ריבוע. יש לחלק אותה בין שני אנשים, כך שכל אחד יקבל **ריבוע**. הראו דוגמה שבה לא קיימת חלוקה פרופורציונלית.

ג. נתונה חלקת-אדמה בצורת ריבוע. יש לחלק אותה בין **ארבעה** אנשים, כך שכל אחד יקבל ריבוע. הראו דוגמה שבה לא קיימת חלוקה פרופורציונלית.

* ד. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה "חצי פרופורציונלית" לשני אנשים, כלומר, כל שחקן i מקבל ריבוע X_i ששווי לפחות רבע מהעוגה כולה:

$$V_i(X_i) \geq V_i(C) / 4$$

הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

שאלה 3: חלוקה עם זכויות לא-שוות

נתונים n שותפים בקרקע, שלכל אחד מהם יש חלק אחר בקרקע: לאדם i יש חלק t_i מהקרקע, כאשר הסכום של כל ה- t_i הוא 1. לדוגמה, ייתכן שלשחקן א מגיעה $1/7$ מהקרקע, לשחקן ב מגיעות $2/7$, ולשחקן ג מגיעות $4/7$.

א. תנו הגדרה הגיונית למושג "חלוקה פרופורציונלית" במצב זה, בעזרת הפונקציה V_i (פונקציית הערך של שחקן i), ובעזרת הפרמטרים t_i .

ב. כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית לפי ההגדרה של סעיף א. סיבוכיות זמן הריצה צריכה להיות $O(2^n \log(D))$, כאשר D הוא המכנה המשותף של כל השברים t_i (בדוגמה למעלה $D=7$). הדגימו את פעולת האלגוריתם, הוכיחו את נכונותו, והוכיחו את זמן הריצה.

שאלה 4: חלוקה סופר-פרופורציונלית

חלוקת-עוגה נקראת סופר-פרופורציונלית אם כל שחקן מקבל פרוסה ששווה עבורו יותר מ $1/n$ חלקי-משווי העוגה כולה.

א. הראו דוגמה לחלוקה סופר-פרופורציונלית בין שלושה אנשים.

ב. הראו דוגמה שבה לא קיימת חלוקה סופר-פרופורציונלית לשלושה אנשים. הוכיחו את תשובתכם.

ג. נתונה בעיית חלוקת עוגה לשלושה אנשים. נתון שיש שני אנשים כלשהם (נניח עמי ותמי), שמייחסים ערך שונה לפרוסת-עוגה כלשהי X . כתבו אלגוריתם המקבל כקלט את הפרוסה X , ומוצא חלוקה סופר-פרופורציונלית. רמז: אפשר להעזר באלגוריתם של שאלה 3 (גם אם לא פתרתם אותה).

* שאלה 5: חלוקת עוגה בעזרת בינה מלאכותית

מטרת השאלה היא להבין איך בינה מלאכותית פותרת בעיות של חלוקה הוגנת. יש לפתור את השאלה בעזרת ב"מ החביבה עליכם.

כדי לתאר את העוגה לב"מ, נתייחס לעוגה חד-ממדית, המורכבת ממספר איזורים סמוכים. נתאר את הערכים, שכל שחקן מייחס לאיזורי העוגה, בוקטור של מספרים. לדוגמה, נניח שיש שישה איזורים ושלושה שחקנים. אפשר לתאר את ההערכות שלהם באופן הבא:

- עמי: 5, 5, 5, 5, 5, 5.

- תמי: 10, 10, 3, 3, 2, 2.

- רמי: 2, 3, 3, 10, 10.

כלומר: עמי מעריך את כל האיזורים ב-5; תמי מעריכה את שני האיזורים הימניים ב-10, את שני האיזורים האמצעיים ב-3, ואת שני האיזורים השמאליים ב-2; וכו'. במקרה זה, קל לראות חלוקה פרופורציונלית וקשירה, לדוגמה: תמי מקבלת את שני האיזורים הימניים, עמי את שני האיזורים האמצעיים, ורמי את שני האיזורים השמאליים.

עכשיו נראה, איך בינה מלאכותית פותרת שאלה כזאת, כאשר מספר השחקנים והאיזורים גדול יותר.

א [חימום]. תנו לב"מ את הדוגמה למעלה (6 איזורים, 3 שחקנים) ובקשו ממנה למצוא חלוקה הוגנת וקשירה. מה התוצאה?

ב. המציאו בעיות גדולות יותר (למשל, 10 שחקנים ו-20 איזורים); אפשר ליצור את המספרים באקראי, למשל באקסל. תנו לב"מ את הדוגמאות ובקשו ממנה למצוא חלוקה הוגנת וקשירה. מה התוצאה?

ג. נסו להבין מתוך הדוגמאות: איך הב"מ מוצאת חלוקה הוגנת וקשירה? באיזה אלגוריתם היא משתמשת, אם בכלל? האם התוצאות מתאימות להגדרה כלשהי של הוגנות?

הגישו קובץ הכולל את כל השיחה, או קישור-שיתוף המאפשר לראות את השיחה.