# שוק תחרותי

עד עכשיו הנחנו, שיש מתכנן מרכזי אחד, המחשב חלוקה הוגנת ויעילה, ע"י פתרון בעיית מיטוב. במציאות, חלוקת משאבים בין אנשים נקבעת במקרים רבים ע"י מסחר חופשי בשוק תחרותי. מסחר חופשי הוא ההיפך הגמור מתכנון מרכזי. למרות זאת, אנו רואים שבמקרים רבים, המסחר החופשי מביא לתוצאות יעילות יותר. אנחנו רגילים לכך, שרוב המוצרים שאנחנו רוצים נמצאים בסופרמרקט השכונתי; זאת, למרות שמעולם לא אמרנו ליצרנים מה אנחנו רוצים. איך זה קורה – איך היצרנים יודעים לייצר את המוצרים הנכונים, ובכמויות הנכונות? –היעילות הזאת מושגת ע"י מנגנון המחירים. כשיש הרבה צרכנים המעוניינים מאד במוצר מסויים, הם קונים את כל הסחורה; היצרן רואה שיש ביקוש לסחורה שלו, אז הוא מעלה את המחיר; יצרנים אחרים רואים שמחיר השוק של המוצר עלה, אז הם מחליטים לייצר את אותו מוצר בכמויות גדולות יותר; וכך בסופו של דבר הכמות המיוצרת משתווה לכמות הרצויה. באופן מפתיע, תחת הנחות מסוימות, תוצאות המסחר התחרותי הן לא רק יעילות אלא גם הוגנות.

## א. תיאור השוק

אנחנו ננתח כאן מודל פשוט של שוק. בשוק זה ישנו מוכר אחד, המגיע לשוק עם אוסף של משאבים שונים. יש מספר כלשהו של קונים. לכל קונה יש תקציב - כמות מסויימת של כסף. נסמן באות bi את התקציב של שחקן i. לשם פשטות, אנחנו מניחים שהכסף הוא וירטואלי (כמו שטרות במשחק "מונופול") – יש לו ערך רק בתוך השוק.

בתוך השוק, השחקנים רשאים לשאת ולתת עם המוכר על המשאבים שהם רוצים לקנות, וכמה הם מוכנים לשלם עבורם. המוכר קובע תימחור, כלומר וקטור של מחירים – מחיר לכל משאב. נסמן באות p את התימחור הנוכחי. כל שחקן יכול לחשב את המחירים של כל הסלים האפשריים, לראות איזה סלים הוא יכול לרכוש בעזרת התקציב שלו, ולבחור מביניהם סל הנותן לו ערך גבוה ביותר. סל כזה נקרא סל מבוקש של השחקן. פורמאלית:

Shape

Description automatically generated with medium confidenceהגדרה: סל מבוקש בשוק תחרותי

בשוק תחרותי, סל מבוקש (demanded bundle) של שחקן i ביחס לתימחור p הוא כל סל Xi המקיים את התכונות הבאות:

p(Xi) ≤ bi.

For all Y: p(Y) ≤ bi implies vi(Xi) ≥ vi(Y).

במילים: מחיר הסל קטן או שווה מהתקציב של שחקן i; והשחקן מעדיף את הסל הזה על-פני כל סל אחר, שמחירו קטן או שווה מהתקציב שלו. ההגדרה מאפשרת שיהיו כמה סלים מבוקשים שונים לאותו שחקן, אם השחקן אדיש ביניהם.

לאחר שכל שחקן בחר סל מבוקש, אפשר לחשב מה הביקוש הכולל (aggregate demand) של כל משאב: זוהי הכמות הכוללת של המשאב, הנמצאת בסלים המבוקשים של כל השחקנים יחד. אם הביקוש הכולל למשאב מסויים גדול מההיצע של אותו משאב, אז המוכר מעלה את מחיר המשאב; אם הביקוש הכולל נמוך מההיצע, אז המוכר מוריד את מחיר המשאב. התהליך מסתיים כשמתקבל שיווי משקל – הביקוש של כל משאב שווה להיצע שלו.

הגדרה: שיווי משקל תחרותי

א. שיווי משקל תחרותי (competitive equilibrium)**[[1]](#footnote-1)** הוא זוג (X,p), כאשר X מייצג חלוקה כלשהי של המשאבים ו-p הוא וקטור מחיר כלשהו, שבו כל שחקן i מקבל סל Xi המהווה סל מבוקש עבורו.

ב. שיווי משקל תחרותי נקרא חסכוני (parsimonious) אם כל שחקן i מקבל סל Xi שמחירו נמוך ביותר, מבין כל הסלים המבוקשים עבורו.

### ב. יעילות והוגנות

אחד המשפטים המרכזיים של הכלכלה המודרנית הוא, ששיווי משקל תחרותי הוא יעיל פארטו. משפט זה נקרא משפט הרווחה הראשון – First Welfare Theorem. המשפט נותן הסבר מתימטי לתופעה שתיארנו בתחילת הסעיף, לפיה שוק תחרותי מביא לתוצאות יעילות.

משפט הרווחה הראשון

אם (X,p) הוא שיווי משקל תחרותי חסכוני, אז החלוקה X היא יעילה פארטו.

**הוכחה:** נניח בשלילה, שלחלוקה X קיים שיפור פארטו Y.

לפי הגדרת שיפור פארטו, קיים לפחות שחקן אחד i, שהסל שלו בחלוקה Y טוב ממש מהסל שלו בחלוקה X. אבל Xi הוא סל מבוקש עבור שחקן i, כלומר הוא טוב לפחות כמו כל הסלים שמחירם לכל היותר bi. לכן, לכל שחקן i המעדיף ממש את הסל שלו בחלוקה Y, המחיר של הסל Yi גדול ממש מ-bi, ולכן הוא גם גדול ממש מהמחיר של Xi.

לכל שחקן אחר j, הסל שלו בחלוקה Y טוב בדיוק כמו הסל שלו בחלוקה X. כיוון שאנו מניחים ששיווי-המשקל הוא חסכוני, המחיר של Xj נמוך ביותר מבין כל הסלים המבוקשים עבור j. לכן, המחיר של הסל Yj גדול לפחות כמו המחיר של Xj.

לסיכום, קיבלנו שהמחירים של כל הסלים בחלוקה Y גדולים או שווים, וחלקם גדולים ממש, ממחירי הסלים בחלוקה X. אבל סכום מחירי כל הסלים בשתי החלוקות שווה לסכום מחירי כל המשאבים, ולכן סכום המחירים חייב להיות שווה בשתי החלוקות – סתירה.

מש"ל.

האם שיווי משקל תחרותי מביא גם לחלוקה הוגנת? – זה תלוי בתקציבים.

משפט. הוגנות של שיווי-משקל תחרותי

(א) נתונים שני שחקנים i,j עם תקציבים המקיימים bj ≥ bi. אם (X,p) הוא שיווי משקל תחרותי, אז בחלוקה X, שחקן j אינו מקנא בשחקן i.

(ב) אם לכל השחקנים יש תקציב שווה, אז בכל שיווי-משקל תחרותי (X,p), החלוקה X היא ללא קנאה.[[2]](#footnote-2)

**הוכחה:**

(א) לפי הגדרת שיווי משקל, הסל Xi עולה לכל היותר bi; והסל Xj טוב עבור שחקן j לפחות כמו כל סל אחר העולה לכל היותר bj. כיוון ש bj ≥ bi, הסל Xj טוב עבור j לפחות כמו הסל Xi; לכן j אינו מקנא ב-i.

(ב) נובע ישירות מ(א).

מש"ל.

שני המשפטים יחד מראים, ששיווי-משקל תחרותי (חסכוני) עם תקציבים שווים משיג את השילוב המושלם של יעילות והוגנות. בשיעור קודם למדנו, שגם החלוקה הממקסמת את סכום הלוגריתמים היא יעילה-פארטו וללא-קנאה. מתברר, ששתי החלוקות הללו הן זהות.

Shape

Description automatically generated with medium confidenceמשפט. מיקסום סכום הלוגריתמים ושיווי-משקל תחרותי

אם לכל השחקנים יש הערכות חיבוריות, וחלוקה X כלשהי ממקסמת את סכום הלוגריתמים של ערכי השחקנים, אז קיים וקטור מחיר p כך שהזוג (X,p) הוא שיווי-משקל תחרותי חסכוני עם תקציבים שווים.

Shape

Description automatically generated with medium confidence**הוכחה:**[[3]](#endnote-2)

נשתמש בלמה מהשיעור הקודם, עם הפונקציה f(v)=ln(v), ונזכור ש f’(v)=1/v. לפי הלמה, בחלוקה הממקסמת את סכום הלוגריתמים, כל משאב r ניתן לשחקן j כלשהו, שעבורו המנה vj(r)/vj(Xj) גדולה ביותר. אם המשאב r מחולק בין כמה שחקנים שונים, אז המנה הזאת גדולה ביותר (ולכן זהה) עבור כולם. נגדיר את המנה הזאת כמחיר של כל משאב r. כלומר לכל משאב r נגדיר:

(\*) pr := vj(r)/vj(Xj)

עבור כל שחקן j המקבל כמות חיובית של משאב r.

כעת נוכיח, שהזוג (X,p) הוא שיווי משקל תחרותי עם תקציבים שוים. בפרט, נוכיח שזה שיווי משקל תחרותי כאשר התקציב של כל שחקן הוא 1.

ראשית, נחשב את מחיר הסל Xj של שחקן j. נניח שהסל כולל, מכל משאב r, כמות כלשהי xj,r. אז:

p(Xj) = sumr (pr \* xj,r) = sumr (vj(r)\*xj,r) / vj(Xj).

כיוון שההערכות חיבוריות, המונה שווה בדיוק ל vj(Xj). לכן p(Xj)=1. הדבר נכון לכל שחקן j: כל שחקן מקבל סל שמחירו 1 בדיוק.

כעת, נבדוק את הערך שמייחס שחקן j לסל אחר כלשהו Y, שמחירו לכל היותר 1. נסמן את הכמות של משאב r בסל Y ב- yr. אז:

vj(Y) = sumr (vj(r)\*yr) (1)

המחיר של כל משאב r הוא, לפי הגדרתו (\*), המקסימום על-פני כל השחקנים i של המנה vi(r)/vi(Xi). בפרט:

pr  ≥ vj(r)/vj(Xj)

vj(r) ≤ pr \* vj(Xj) (2)

נציב את (2) ב-(1) ונקבל:

vj(Y) ≤ sumr(pr \* yr) \* vj(Xj)

אבל הסכום שווה בדיוק למחירו הכולל של הסל Y, ומכאן:

vj(Y) ≤ p(Y) \* vj(Xj)

מכאן: אם p(Y) ≤ 1, אז vj(Y) ≤ vj(Xj), בהתאם להגדרת שיווי-משקל תחרותי.

ועוד: אם p(Y)<1, אז vj(Y) < vj(Xj), ומכאן שזהו שיווי-משקל תחרותי חסכוני.

מש"ל.

המשפט למעלה נותן לנו גם אלגוריתם יעיל לחישוב שיווי-משקל תחרותי חסכוני: מחשבים חלוקה הממקסמת את סכום הלוגריתמים ע"י פתרון בעיית תיכנות קמור, ואז מחשבים את המחירים ע"פ הנוסחה המופיעה בהוכחת המשפט.

מה מוסיפים לנו המחירים – מדוע לא להסתפק בחלוקה? – אם יש רק חלוקה, אז אנחנו (המתכננים) יודעים שהחלוקה היא ללא קנאה, אבל השחקנים אינם יודעים זאת – כדי לוודא שהחלוקה ללא קנאה, הם יצטרכו לבדוק איזה סל קיבל כל אחד מהשחקנים האחרים. לעומת זאת, אם נתון גם וקטור מחירים, אז כל שחקן יכול לוודא, שהסל שלו הוא הסל הטוב ביותר עבורו מבין כל הסלים שמחירם נמוך מהתקציב; הוא לא צריך לדעת מה בדיוק קיבל כל שחקן אחר. במילים אחרות. וקטור המחירים מוסיף להוגנות וליעילות, גם שקיפות – המאפשרת להוכיח לשחקן שהחלוקה היא הוגנת, יחד עם שמירה על פרטיות של השחקנים האחרים.

## מאמר להרחבה:

1. נקרא גם שיווי־משקל שוק (market equilibrium) או שיווי־משקל מחירים (price equilibrium). [↑](#footnote-ref-1)
2. שיווי משקל תחרותי עם תקציבים שווים נקרא גם שיווי-משקל תחרותי מהכנסות שוות – Competitive Equilibrium from Equal Incomes או בקיצור CEEI. [↑](#footnote-ref-2)
3. Erel Segal-Halevi and Balázs R. Sziklai (2019): "Monotonicity and competitive equilibrium in cake-cutting." Economic Theory 68.2: 363-401.‏ [↑](#endnote-ref-2)