# פרק 10 – חלוקה בהגרלה

"אַךְ בְּגוֹרָל יֵחָלֵק אֶת הָאָרֶץ, לִשְׁמוֹת מַטּוֹת אֲבֹתָם יִנְחָלוּ" (במדבר כו נה).

הגרלה היא אמצעי פשוט ונוח לחלק חפצים בדידים. כשצריך לחלק חפץ אחד בין שני אנשים ללא שיתוף וללא שימוש בכסף, הפתרון ההוגן היחיד הוא להטיל מטבע כך שכל אחד מהשחקנים יקבל את החפץ בהסתברות 0.5.

חלוקה בהגרלה היתה מקובלת בעבר: יהושע בן־נון השתמש בגורל כדי לחלק את ארץ ישראל בין השבטים (יהושע יח ו). גורלות שימשו גם לחלוקת משימות: נחמיה בן־חכליה השתמש בגורל כדי לקבוע מי יהיה אחראי להביא עצים לבית המקדש (נחמיה י לה). באתונה העתיקה, וכן בכמה מהרפובליקות של איטליה בימי הביניים, נהגו לבחור חלק מבעלי תפקידים ציבוריים בהגרלה, בתהליך הנקרא "סורטיציה" (sortition).

גם בימינו משתמשים בגורל כדי לחלק נכסים ציבוריים. כשייסדו את השכונה "אחוזת בית", השכונה הראשונה בתל־אביב, חילקו את המגרשים בהגרלה בין המייסדים. כיום, בתוכנית "מחיר למשתכן", מדינת ישראל מאפשרת לזכאים לקבל דירות במחיר שאמור להיות נמוך ממחיר השוק. כיוון שהביקוש לדירות אלה גדול מההיצע, מתבצעת הגרלה בין המבקשים. בצה"ל מקובל להשתמש בהגרלה כדי להחליט מי יישאר לשמור על הבסיס כששאר החיילים יוצאים לחופשה. בתחרויות ספורט שונות מטילים גורלות כדי לקבוע את סדר ההתמודדויות בין המתחרים. בחלק מהמדינות, שבהן נהוג לשתף חבר־מושבעים במשפט, המושבעים נבחרים בהגרלה.

הגרלות משמשות לא רק כדי להשיג חלוקה הוגנת, אלא גם כדי לפתור בעיות אלגוריתמיות אחרות בצורה יעילה יותר ממה שאפשר להשיג באלגוריתמים ללא הגרלות. אחד האלגוריתמים המוכרים והיעילים ביותר לסידור רשימות – אלגוריתם סידור מהיר (quicksort) – משתמש בהגרלות.

המשימה הראשונה שלנו בפרק זה תהיה להתאים את מושגי ההוגנות והיעילות, שלמדנו בשיעורים הקודמים, למצב של חלוקה באקראי: מהי הגרלה הוגנת? ומהי הגרלה יעילה?

## חלק 1: תכונות של הגרלות

כשיש חפץ אחד ושני שחקנים (עם זכויות שוות), יש רק הגרלה אחת שאפשר לקרוא לה "הגרלה הוגנת", והיא, לתת את החפץ בהסתברות 50% לאחד משני השחקנים (למשל ע"י הטלת מטבע הוגן). אבל מה עושים כשיש הרבה חפצים והרבה שחקנים ­– איך נתרגם את תנאי ההוגנות והיעילות, שהגדרנו עבור חלוקות נתונות, להגרלות בין חלוקות שונות?

### הוגנות.

המושג המרכזי המשמש להגדרת הוגנות של חלוקה אקראית הוא התוחלת (expectation). תוחלת של משתנה מקרי היא הממוצע המשוקלל של הערכים האפשריים של המשתנה, כאשר המשקלים הם ההסתברויות השונות לקבל כל אחד מהערכים. מושג התוחלת מוכר לכל מי שלמד קורס בהסתברות; לשם רענון ותזכורת, נראה דוגמה מספרית.

**דוגמה**. שחקן זורק קוביה הוגנת, ומקבל שקלים בהתאם למספר שיצא בקוביה (מספר שלם בין 1 ל-6). מהי תוחלת הרווח שלו?

תשובה: לכל מספר שלם בין 1 ל-6 יש הסתברות 1/6. לכן התוחלת היא:

1/6 \* 1 + 1/6 \* 2 + 1/6 \* 3 + 1/6 \* 4 + 1/6 \* 5 + 1/6 \* 6 = **3.5**.

במקרה של חלוקה בהגרלה, המשתנים המקריים המעניינים אותנו הם הערכים שמייחסים השחקנים לסלים השונים. תוחלת הערך שמייחס שחקן כלשהו i לסל שלו תסומן ב: E[vi(xi)].

**דוגמה**. נתון חפץ אחד ושני שחקנים. שחקן א מייחס לחפץ ערך Va ושחקן ב מייחס לו ערך Vb. החפץ נמסר לשחקן א בהסתברות p ולשחקן ב בהסתברות 1–p. תוחלת הערך שמייחס שחקן א לסל שלו היא:



ותוחלת הערך שמייחס שחקן ב לסל שלו היא:



בעזרת התוחלת, ניתן לתרגם את תנאי ההוגנות שהגדרנו על חלוקות, לתנאי ההוגנות על הגרלות. הוגנות המסתמכת על התוחלת נקראת הוגנות לכתחילה (ex-ante fairness), כי היא מחושבת בתחילת התהליך, לפני שההגרלה בוצעה.

**הגדרה**. חלוקה אקראית נקראת:

* **פרופורציונלית לכתחילה (ex-ante proportional)** – אם תוחלת הערך של כל שחקן היא לפחות 1/n מהערך שהוא מייחס לכל החפצים:

E[vi(xi)] ≥ vi(All)

* **ללא־קנאה לכתחילה (ex-ante envy-free)** – אם לכל שני שחקנים i, j, תוחלת הערך של שחקן i בעיני עצמו גדולה לפחות כמו תוחלת הערך של שחקן j בעיני שחקן i:

E[vi(xi)] ≥ E[vi(xj)]

**המשך הדוגמה**.

א. ההגרלה בדוגמה הקודמת היא פרופורציונלית־לכתחילה עבור שחקן א אם ורק אם , ועבור שחקן ב אם ורק אם . לכן ההגרלה פרופורציונלית־לכתחילה אם ורק אם , כצפוי.

ב. תוחלת הערך של שחקן ב בעיני שחקן א היא:



ותוחלת הערך של שחקן א בעיני שחקן ב היא:



ולכן ההגרלה היא ללא־קנאה־לכתחילה עבור שחקן א אם ורק אם , ועבור שחקן ב אם ורק אם . לכן ההגרלה ללא־קנאה־לכתחילה אם ורק אם , כצפוי.

המושג המשלים להוגנות לכתחילה הוא הוגנות בדיעבד (ex-post fairness). תנאי זה מתייחס למצב הסופי, אחרי שההגרלה בוצעה.

**הגדרה**. חלוקה אקראית נקראת:

\* **פרופורציונלית בדיעבד (ex-post proportional)** – אם בכל תוצאה של ההגרלה, הערך של כל שחקן הוא לפחות 1/n מהערך שהוא מייחס לכל החפצים.

\* **ללא־קנאה בדיעבד (ex-post envy-free)** – אם בכל תוצאה של ההגרלה, לכל שני שחקנים i, j, הערך ששחקן i מייחס לסל של עצמו גדול לפחות כמו הערך שהוא מייחס לסל של j.

הוגנות־בדיעבד היא דרישה חזקה יותר מהוגנות־לכתחילה.

**משפט**.

א. כל הגרלה פרופורציונלית־בדיעבד היא פרופורציונלית־לכתחילה, אבל לא להיפך.

ב. כל הגרלה ללא־קנאה־בדיעבד היא ללא־קנאה־לכתחילה, אבל לא להיפך.

**הוכחה:**

א. כל הגרלה פרופורציונלית־בדיעבד היא פרופורציונלית־לכתחילה. היות וההגרלה היא פרופורציונלית־בדיעבד אזי מתקיים לכל תוצאה אפשרית של ההגרלה כי . כדי לחשב את התוחלת, יש לעבור על כל הסלים שההגרלה עשויה לתת לשחקן i:









לכן תוחלת הערך של שחקן i היא לפחות .

ב. כל הגרלה ללא־קנאה־בדיעבד היא ללא־קנאה־לכתחילה. היות שההגרלה היא ללא־קנאה־בדיעבד אזי מתקיים לכל תוצאה אפשרית של ההגרלה ולכל שני שחקנים i, j כי .

כדי לחשב את התוחלת, יש לעבור על כל זוגות הסלים שההגרלה עשויה לתת לשחקנים i,j:





.

\*\*\*

בשני הסעיפים, הכיוון ההפוך אינו נכון: ההגרלה בדוגמה עם p=1/2 היא פרופורציונלית לכתחילה וללא־קנאה לכתחילה, אבל אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הללו בדיעבד, כי השחקן שלא זכה בהגרלה מקנא.

### יעילות.

קל מאד להשיג חלוקה הוגנת־לכתחילה לכל מספר של שחקנים וחפצים: פשוט נבחר באקראי שחקן כלשהו בהסתברות אחידה (1/n לכל שחקן), וניתן לו את כל החפצים. ההגרלה הזאת היא פרופורציונלית לכתחילה – כי תוחלת הערך של כל שחקן היא בדיוק 1/n מהערך שהוא מייחס לכל החפצים. היא גם ללא־קנאה לכתחילה – כי כל השחקנים מקבלים סל אקראי זהה (כל החפצים בהסתברות 1/n, וכלום בהסתברות (n-1)/n). אבל ההגרלה הזאת אינה יעילה. נמחיש זאת תחילה בדוגמה מספרית, ואז נגדיר פורמאלית את תכונת היעילות.

**דוגמה**. נתונים שני חיילים הצריכים לחלק ביניהם שתי משמרות. הם מייחסים למשמרות את הערכים הבאים:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **משמרת יום** | **משמרת לילה** |
| **אלי:** | –10 | –20 |
| **בני:** | –20 | –10 |

אם בוחרים חייל אחד באקראי, ונותנים לו את שתי המשמרות, אז תוחלת הערך של שניהם היא –15. לעומת זאת, אם נותנים לאלי את משמרת היום ולבני את משמרת הלילה בהסתברות 1 (בלי הגרלה), אז תוחלת הערך של שניהם היא –10.

מנקודת־מבט של תוחלת־הערך, החלוקה השניה היא שיפור פארטו של החלוקה הראשונה.

**הגדרה**. חלוקה אקראית א נקראת **שיפור־פארטו־לכתחילה** של חלוקה אקראית ב, אם תוחלת הערך של חלק מהשחקנים גבוהה יותר בחלוקה א ("זה נהנה" – בתוחלת), ותוחלת הערך של שאר השחקנים גבוהה לפחות באותה מידה בחלוקה א ( "זה לא חסר" – בתוחלת).

חלוקה אקראית נקראת **יעילה לכתחילה (ex-ante efficient)** אם לא קיימת חלוקה אקראית שהיא שיפור־פארטו־לכתחילה שלה.

**הגדרה**. חלוקה אקראית נקראת **יעילה בדיעבד (ex-post efficient)** אם כל תוצאה של ההגרלה היא חלוקה יעילה־פארטו: בכל תוצאה של ההגרלה, לא קיימת חלוקה אחרת, הנותנת לשחקן אחד ערך גבוה יותר ("זה נהנה"), ולכל שאר השחקנים לפחות אותו ערך ( "זה לא חסר").

איזו תכונה חזקה יותר לדעתכם – יעילות־לכתחילה או יעילות־בדיעבד?

אם חשבתם שיעילות־בדיעבד חזקה יותר מיעילות־לכתחילה, כמו שהוגנות־בדיעבד חזקה יותר מהוגנות־לכתחילה) – טעיתם: המצב בדיוק הפוך.

**משפט**. כל הגרלה יעילה־לכתחילה היא יעילה־בדיעבד, אבל לא להיפך

**הוכחה:** נניח שהגרלה כלשהי אינה יעילה־בדיעבד, ונוכיח שאינה יעילה־לכתחילה. כיוון שההגרלה אינה יעילה־בדיעבד, קיימת חלוקה כלשהי X, שההגרלה מחזירה בהסתברות חיובית (p>0), וקיימת חלוקה כלשהי Y שהיא שיפור־פארטו של X.

נבנה הגרלה חדשה, הדומה להגרלה המקורית, פרט לכך שבמקום להחזיר את החלוקה X (בהסתברות p), היא מחזירה את החלוקה Y. בהגרלה החדשה, תוחלת הערך של כל השחקנים גדולה לפחות כמו בהגרלה המקורית. בנוסף, עבור כל שחקן שהערך שלו בחלוקה Y גדול יותר מבחלוקה X, תוחלת־הערך בהגרלה החדשה גדולה יותר מבהגרלה המקורית. לכן, ההגרלה החדשה היא שיפור־פארטו של ההגרלה המקורית. לכן, ההגרלה המקורית אינה יעילה־לכתחילה.

הכיוון ההפוך אינו נכון: ההגרלה בדוגמה למעלה היא יעילה־בדיעבד. כל תוצאה של ההגרלה היא יעילה־פארטו: השחקן שאינו מקבל אף משמרת מקבל את הערך הגדול ביותר האפשרי עבורו (0), ולכן לא קיים שיפור־פארטו בדיעבד. \*\*\*

מדוע היחס בין "לכתחילה" ל"בדיעבד" ביעילות הפוך מהיחס בהוגנות? אינטואיטיבית, הסיבה היא שיעילות פארטו מוגדרת באופן שלילי: "לא קיים שיפור פארטו". בשיפורי פארטו, היחס בין "לכתחילה" ל"בדיעבד" זהה ליחס בהוגנות: כל שיפור פארטו בדיעבד הוא שיפור פארטו לכתחילה. לכן, אם לא קיים שיפור פארטו לכתחילה, אז לא קיים שיפור פארטו בדיעבד.