## חלק 2: חלוקת חפצים בהגרלה

ישנה רדוקציה כללית מבעיית חישוב הגרלה על חפצים בדידים, לבעיית חלוקת משאבים רציפים:

1. התייחס לכל חפץ בדיד כאל משאב רציף, והנח שהכמות הנתונה ממשאב זה היא 1.

2. הפעל על המשאבים שהתקבלו אלגוריתם כלשהו לחלוקת משאבים רציפים.

3. בחלוקה המתקבלת, כל שחקן מקבל שבר כלשהו מכל חפץ; התייחס לשבר הזה כאל הסתברות. הגרל כל חפץ בין השחקנים שקיבלו שבר חיובי ממנו, כך שהסתברות הזכיה של כל שחקן שווה לשבר שקיבל.

לדוגמה, ניתן למצוא הגרלה אגליטרית־לכתחילה ע"י פתרון תוכנית לינארית, כפי שראינו בשיעורים הקודמים:

Maximize z

such that  for all i and g;

 for all g;

 for all i.

לכל שחקן i ולכל חפץ g, ישנו משתנה . בהקשר של חלוקת משאבים רציפים, משמעות המשתנה הזה היתה "החלק של משאב g שניתן לשחקן i". בהקשר של חלוקה אקראית של חפצים בדידים, משמעות המשתנה הזה היא "ההסתברות שחפץ g נמסר לשחקן i". לכל חפץ g, סכום ההסתברויות על פני כל השחקנים חייב להיות בדיוק 1, כי החפץ חייב להימסר לשחקן אחד בדיוק. תוחלת הערך של שחקן i היא הסכום, על־פני כל החפצים, של ההסתברות שהשחקן מקבל את החפץ, כפול ערך החפץ עבורו (). תוחלת הערך של כל שחקן i צריכה להיות לפחות כערכו של המשתנה z, המייצג את הערך האגליטרי.

לאחר שחישבנו ערכים עבור המשתנים , נבצע את ההגרלות עבור כל חפץ בנפרד. לדוגמה, אם קיבלנו , אז ניתן את חפץ מס' 1 לשחקן 1 בהסתברות 0.5, לשחקן 2 בהסתברות 0.3, ולשחקן 3 בהסתברות 0.2.

ההגרלה המתקבלת היא "אגליטרית לכתחילה" – היא ממקסמת את תוחלת־הערך הנמוכה ביותר של שחקן כלשהו. כדי שההגרלה תהיה גם יעילה־לכתחילה, אפשר להריץ אלגוריתם למציאת חלוקה לקסימין־אגליטרית. כל התכונות של חלוקה לקסימין־אגליטרית של משאבים רציפים, מתקיימות בתוחלת עבור הגרלות על משאבים בדידים:

**משפט**. כל הגרלה לקסימין־אגליטרית־לכתחילה היא יעילה־לכתחילה (ולכן יעילה־בדיעבד).

בנוסף, אם הערכות השחקנים מנורמלות (כך שסכום הערכים של כל שחקן הוא קבוע), אז כל הגרלה לקסימין־אגליטרית־לכתחילה היא פרופורציונלית־לכתחילה.

**הוכחה:** נובע ישירות מהמשפטים שהוכחנו בשיעורים הקודמים לגבי חלוקה לקסימין־אגליטרית: חישוב תוחלת הערך בחלוקת־חפצים אקראית זהה לחלוטין לחישוב הערך בחלוקת משאבים רציפים. \*\*\*

הבעיה העיקרית של אלגוריתם הרדוקציה שתיארנו למעלה היא, שהוא אינו מבטיח שום דבר על הוגנות בדיעבד. החלוקה המתקבלת עלולה להיות מאד לא הוגנת: תיאורטית, ייתכן ששחקן אחד יפסיד בכל ההגרלות ולא יקבל אף חפץ, ושחקן אחר ינצח בכל ההגרלות ויקבל את כל החפצים.

האתגר העיקרי בחלוקה אקראית הוא להבטיח שהחלוקה תקיים תכונות הוגנות מסויימות בדיעבד, בנוסף לתכונות של הוגנות ויעילות לכתחילה. בחלקים הבאים נראה מספר דרכים לעשות זאת.