מטלה 9

שאלה 4: פונקציית תועלת שונה

בהרצאה הגדרנו את פונקציית התועלת השלילית (העלות) של כל שחקן i כסכום המרחקים בין התקציב האידיאלי שלו (p_i) לבין התקציב בפועל (d):

$$\sum_{j=1}^{m} |d_j - p_{i,j}|$$

נניח שמגדירים את פונקציית התועלת השלילית של כל שחקן כסכום **ריבועי** המרחקים:

$$Cost_i(d) = \sum_{j=1}^{m} (d_j - p_{i,j})^2$$

א. הוכיחו שאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות לינאריות אינו מגלה אמת. העזרו בדוגמה הבאה, עם שלושה נושאים ושני אזרחים:

- אזרח א': $(20, 60, 20)$
- אזרח ב': $(50, 50, 0)$

ב. הוכיחו שעם פונקציות התועלת הריבועיות, אלגוריתם הממוצע הוא יעיל פארטו לכל מספר של נושאים

פתרון:

בשאלה זו נתונים אזרחים עם פונקציית עלות ריבועית: $Cost_i(d) = \sum_{j=1}^{m} (d_j - p_{i,j})^2$

סעיף א':

הטענה: אלגוריתם החציון המוכלל (עם פונקציות לינאריות) אינו מגלה אמת תחת עלות ריבועית

הוכחה באמצעות דוגמה נגדית: נתונים 2 אזרחים ו 3 נושאים, תקציב $C = 100$

באלגוריתם החציון המוכלל עבור $n = 2$, קיים "פנטום" יחיד x הנקבע כך שסכום החציונים יהיה 100 התקציב לכל נושא j הוא:

$$d_j = \text{median}(p_{A,j}, p_{B,j}, x)$$

1. **חישוב התוצאה עבור הצבעות האמת:** ננחש כי $20 \leq x \leq 50$

- נושא 1: $\text{median}(20, 50, x) = x$
- נושא 2: $\text{median}(60, 50, x) = 50$ (כי $x \leq 50$)
- נושא 3: $\text{median}(20, 0, x) = 20$ (כי $x \geq 20$)

בדיקת הסכום: $x + 50 + 20 = 100 \Rightarrow x = 30$

התוצאה (אמת): $\mathbf{d} = (30, 50, 20)$

חישוב העלות לאזרח A:

$$Cost_A(d) = (30-20)^2 + (50-60)^2 + (20-20)^2 = 200$$

2. מניפולציה של אזרח A: כדי שהדיווח יישאר תקציב חוקי (סכום 100), A מעביר 5 יחידות מנושא 2 לנושא 3 ומדווח:

$$P'_A = (20, 55, 25)$$

ננחש כי $20 \leq x' \leq 25$

- נושא 1: $\text{median}(20, 50, x') = x'$
- נושא 2: $\text{median}(55, 50, x') = 50$ (כי $x' \leq 50$)
- נושא 3: $\text{median}(25, 0, x') = x'$ (כי $0 \leq x' \leq 25$)

בדיקת הסכום: $x' + 50 + x' = 100 \Rightarrow 2x' = 50 \Rightarrow x' = 25$

התוצאה (שקר): $\mathbf{d}' = (25, 50, 25)$

חישוב העלות החדשה לאזרח A:

$$Cost_A(d') = (25-20)^2 + (50-60)^2 + (25-20)^2 = 150$$

מסקנה: כיוון ש $150 < 200$, משתלם ל-A לשקר ולכן האלגוריתם אינו מגלה אמת

סעיף ב':

הטענה: תחת פונקציות תועלת ריבועיות, אלגוריתם הממוצע הוא יעיל פארטו

הוכחה:

1. נגדיר את פונקציית הרווחה החברתית כסכום התועלות של האזרחים (או מינימום סך העלויות):
2. ידוע כי כל פתרון הממקסם סכום משוקלל של תועלות (עם משקולות חיוביים) הוא יעיל פארטו. כאן נראה שהממוצע ממקסם את סכום התועלות הפשוט (משקולות 1)
3. נגזור את פונקציית המטרה לפי d_j (עבור נושא ספציפי) ונשווה ל 0 למציאת מינימום:

$$\frac{\partial}{\partial d_j} \sum_{i=1}^{n} (d_j - p_{i,j})^2 = \sum_{i=1}^{n} 2(d_j - p_{i,j}) = 0$$

4. נפתור את המשוואה:

$$\sum_{i=1}^{n} d_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} \implies n \cdot d_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} \implies d_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}$$

5. קיבלנו שוקטור התקציב הממזער את סכום ריבועי המרחקים הוא בדיוק וקטור הממוצעים
6. מכיוון שאלגוריתם הממוצע מחזיר את האופטימום החברתי, לא ניתן לשפר מצב של אזרח אחד מבלי לפגוע בסכום הכולל (ובכך באחרים), ולכן הוא יעיל פארטו