מטלה 8

שאלה 2: זכויות לפי גובה המס

נניח שאזרח i משלם מס בגובה C_i (התקציב C שווה לסכום המיסים שמשלמים כל האזרחים). אנחנו רוצים להגדיר מערכת לחלוקת תקציב, שתתן זכויות רבות יותר לאזרחים המשלמים יותר מיסים. לדוגמה, ההגדרה של תכונת "הוגנות ליחידים" תהיה: "התועלת של אזרח i היא לפחות C_i"

א. כתבו הגדרה מוכללת של תקציב הוגן לקבוצות, ושל תקציב פריק

ב. הוכיחו, שכל תקציב פריק הוא הוגן לקבוצות בהתאם להגדרות של סעיף א

ג. נגדיר "תקציב נאש מוכלל" כתקציב d הממקסם את הסכום:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \log(u_i(d))$$

(מכפילים את הלוג של אזרח i בגובה המס ששילם אזרח i)

הוכיחו שתקציב נאש מוכלל הוא פריק (לפי ההגדרה של סעיף א)

שאלה 2:

סעיף א':

נסמן ב C_i את גובה המס ששילם אזרח i, וב$C = \sum C_i$ את התקציב הכולל.
התועלת של אזרח i מתקציב d מוגדרת כסכום התקציבים של הנושאים בהם הוא תומך:

$$u_i(d) = \sum_{j=1}^{m} u_{i,j} \cdot d_j$$

מושגים:

- $u_{i,j} \in \{0,1\}$: משתנה בינארי. ערכו **1** אם אזרח i תומך בנושא j, ו **0** אם אינו תומך.
- d_j: סכום הכסף שהוקצה בפועל לנושא j בתקציב.

הגדרה (תקציב הוגן לקבוצות: מוכלל)**.** תקציב d נקרא **הוגן לקבוצות** אם לכל קבוצת אזרחים $S \subseteq N$, סך התקציב המוקצה לנושאים שנתמכים ע"י לפחות חבר אחד מהקבוצה, הוא לפחות סך המיסים ששילמו חברי הקבוצה. פורמלית, נסמן:

$$M(S) = \bigcup_{i \in S} \{j \mid u_{i,j} = 1\}$$

התנאי להוגנות הוא:

$$\sum_{j \in M(S)} d_j \geq \sum_{i \in S} C_i$$

הסבר:

- אגף שמאל ($\sum_{j \in M(S)} d_j$): סך כל הכסף שהלך לנושאים שחשובים ללפחות מישהו אחד בקבוצה.
- אגף ימין ($\sum_{i \in S} C_i$): סך כל המיסים ששילמו חברי הקבוצה יחד.

כמו כן:

הגדרה (תקציב פריק: מוכלל)**.** תקציב d נקרא **פריק** אם ניתן להציגו כסכום של הקצאות אישיות $d_{i,j} \geq 0$, המקיימות את התנאים הבאים:

1. **עקביות לתקציב הנושא:** לכל נושא j, סך ההקצאות שווה לתקציב הנושא: $\sum_{i=1}^{n} d_{i,j} = d_j$
2. **עקביות למס האזרח:** לכל אזרח i, סך ההקצאות שווה למס ששילם: $\sum_{j=1}^{m} d_{i,j} = C_i$
3. **תמיכה בלבד:** $d_{i,j} > 0$ רק אם האזרח תומך בנושא ($u_{i,j} > 0$)

סעיף ב':

הטענה: כל תקציב פריק הוא הוגן לקבוצות (במובן המוכלל)

הוכחה. תהא d תקציב פריק, ותהי S קבוצת אזרחים כלשהי. נסמן ב$M(S)$ את אוסף הנושאים הנתמכים ע"י חברי הקבוצה נחשב את סך התקציב הפוקצה לנושאים אלו: מכיוון שכל הרכיבים אי שליליים, נוכל לחסום מלמטה על ידי סכימה רק על חברי הקבוצה $k \in S$: לפי תכונת הפריקות (3), אזרח i מקצה כסף ($d_{i,j} > 0$) **רק** לנושאים שהוא תומך בהם. כל נושא כזה נמצא בהכרח ב $M(S)$. לכן הסכום הפנימי מכסה את כל ההקצאות של האזרח i, זאת אומרת:

$$\sum_{j\in M(S)} d_j = \sum_{j\in M(S)} \left(\sum_{i=1}^{n} d_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j\in M(S)} d_{i,j}\right) \geq \sum_{i\in S} \left(\sum_{j\in M(S)} d_{i,j}\right) = \sum_{i\in S} \left(\sum_{j=1}^{m} d_{i,j}\right) = \sum_{i\in S} C_i$$

סעיף ג':

נגדיר את פונקציית המטרה (הרווחה החברתית על פי נאש מוכלל):

$$W(d) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \log(u_i(d))$$

הסבר לפונקציה: אנו משתמשים ב-$\log$ כדי לבטא "תועלת שולית פוחתת" (דאגה להוגנות ואיזון), וכופלים ב-C_i כדי לתת משקל רב יותר לרווחה של מי ששילם מס גבוה יותר

הגדרה (ערך שולי)**.** הערך השולי (MG_j) של נושא j הוא השינוי ברווחה הכללית כתוצאה מהוספת "שקל" אחד לתקציב של נושא זה. מתמטית, זוהי הנגזרת החלקית של W לפי d_j:

$$MG_j = \frac{\partial W}{\partial d_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial d_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{u_i(d)} \cdot u_{i,j}$$

(השתמשנו בכלל השרשרת: הנגזרת של $\log(u_i)$ היא $\frac{1}{u_i}$, והנגזרת של u_i לפי d_j היא 1 אם האזרח תומך ו 0 אחרת)

הוכחה. נניח בשלילה שהתקציב d הוא אופטימלי (ממקסם את W), אך הערך השולי של הכסף אינו שווה בין כל הנושאים המתוקצבים כלומר, נניח שיש שני נושאים j, k שמקבלים תקציב חיובי, ועבורם $MG_j > MG_k$. במצב זה, אם נעביר סכום קטן ϵ מנושא k לנושא j:

- ההפסד מנושא k יהיה בקירוב $\epsilon \cdot MG_k$
- הרווח מנושא j יהיה בקירוב $\epsilon \cdot MG_j$

מכיוון ש $MG_j > MG_k$, סך הרווחה W תגדל. זו סתירה לכך שd הוא המקסימום, לכן באופטימום, התרומה השולית חייבת להיות זהה לכל הנושאים המתוקצבים, נסמן קבוע זה ב Z:

$$\forall j \text{ s.t. } d_j > 0: \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i u_{i,j}}{u_i(d)} = Z$$

חישוב הקבוע Z: כדי למצוא את ערכו המספרי של Z, נכפיל את המשוואה ב d_j ונסכום על כל הנושאים (כלומר, נבדוק את סך התרומה השולית על כל התקציב):

$$\sum_j d_j \left(\sum_i \frac{C_i u_{i,j}}{u_i(d)}\right) = \sum_j d_j \cdot Z$$

נחליף את סדר הסכימה באגף שמאל (נסכום קודם לפי אזרחים):

$$\sum_i \frac{C_i}{u_i(d)} \underbrace{\left(\sum_j d_j u_{i,j}\right)}_{u_i(d)} = Z \cdot \underbrace{\left(\sum_j d_j\right)}_{C}$$

שימו לב שהביטוי בסוגריים באגף שמאל הוא בדיוק ההגדרה של התועלת $u_i(d)$. הוא מצטמצם עם המכנה:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \frac{u_i(d)}{u_i(d)} = Z \cdot C$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i = Z \cdot C \quad \Longrightarrow \quad C = Z \cdot C \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Z = 1}$$

משמעות: בנקודת האיזון, כל שקל בתקציב תורם בדיוק יחידת תועלת משוקללת 1.
הגענו לתנאי האופטימליות:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i u_{i,j}}{u_i(d)} = 1 \quad (1)$$

בניית הפירוק (הוכחת הפריקות): כעת, נשתמש בנוסחה שמצאנו כדי "לחלק" את התקציב של כל נושא בין האזרחים. נגדיר את החלק של אזרח i בנושא j כך:

$$d_{i,j} = d_j \cdot \frac{C_i u_{i,j}}{u_i(d)}$$

(כלומר: החלק של האזרח יחסי למשקל המס שלו ולתמיכה שלו)
נוודא שזה מקיים את תנאי הפריקות:

1. **עקביות לתקציב הנושא:**

$$\sum_i d_{i,j} = \sum_i \left(d_j \cdot \frac{C_i u_{i,j}}{u_i(d)} \right) = d_j \cdot \underbrace{\sum_i \frac{C_i u_{i,j}}{u_i(d)}}_{\text{לפי משוואה } (1)} = d_j$$

2. **עקביות למס האזרח:**

$$\sum_j d_{i,j} = \sum_j \left(d_j \cdot \frac{C_i u_{i,j}}{u_i(d)} \right) = \frac{C_i}{u_i(d)} \cdot \underbrace{\sum_j d_j u_{i,j}}_{=u_i(d)} = C_i$$

כלומר, תקציב נאש המוכלל הוא פריק