מטלה – חלוקה מיטבית של חפצים בדידים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. סעיפים המסומנים בכוכבית (*) מזכים בנקודה נוספת. בכל השאלות המבקשות לתאר אלגוריתם "מהיר", הכוונה לאלגוריתם עם זמן ריצה פולינומיאלי בגודל הקלט. בכל השאלות יש להוכיח את נכונות האלגוריתמים.

* שאלה 1: חיפוש במרחב המצבים - כללי גיזום משופרים

א. נתונה בעיית חלוקה אגליטרית של חפצים בין ארבעה שחקנים עם הערכות **זהות**. הציעו כלל גיזום משופר, שיכול להקטין את מספר המצבים בערך פי 24. הוכיחו שהכלל נכון (כלומר: הוכיחו שאלגוריתם החיפוש עם כלל הגיזום מוצא את הפתרון המיטבי).

ב. בהרצאה הראינו חסם אופטימי, הנותן את כל החפצים שנשארו לכל השחקנים יחד. נניח שלכל השחקנים הערכות זהות, וסכום ערכי כל החפצים הוא V. אז במצב ההתחלתי, החסם שהראינו נותן ערך אופטימי V. תארו חסם אופטימי משופר, שערכו במצב זה הוא V/n. הוכיחו שזה אכן חסם אופטימי.

ג. הסבירו איך אפשר לחשב את החסם האופטימי המשופר של סעיף ב למצב כלשהו (לא רק למצב ההתחלתי). הוכיחו שהאלגוריתם שכתבתם אכן נותן תמיד חסם אופטימי, ושהחסם הזה אכן טוב יותר מהחסם המקורי.

שאלה 2: חיפוש חלוקה הוגנת

א [חימום]. כתבו אלגוריתם חיפוש במרחב המצבים, המקבל כקלט בעיית חלוקת חפצים, ובודק אם קיימת חלוקה פרופורציונלית. אם כן – האלגוריתם מחזיר חלוקה אחת כזאת; אם לא – האלגוריתם אומר "לא". תארו בפירוט את המצבים ואת כללי הגיזום.

ב. כתבו אלגוריתם חיפוש במרחב המצבים, המקבל כקלט בעיית חלוקת חפצים, ובודק אם קיימת חלוקה **ללא קנאה**. אם כן – האלגוריתם מחזיר חלוקה אחת כזאת; אם לא – האלגוריתם אומר "לא". תארו בפירוט את המצבים ואת כללי הגיזום.

* שאלה 3: חלוקה מיטבית עם אילוצי קיבולת

נתונים n שחקנים ו־n חפצים בדידים. צריך לתת חפץ **אחד בדיוק** לכל שחקן. כתבו אלגוריתמים מהירים למציאת השמות המקיימות את התנאים הבאים:

א [חימום]. השמה אוטיליטרית (= ממקסמת את סכום הערכים).

ב. השמה יעילה־נאש (= ממקסמת את מכפלת הערכים).

ג. השמה אגליטרית (= ממקסמת את הערך הקטן ביותר).

שאלה 4: האלגוריתם החמדני לחלוקת חפצים

בהרצאה הוכחנו את יחס הקירוב של האלגוריתם החמדני (LPT) לחלוקת מטלות. ניתן להשתמש באותו אלגוריתם בדיוק גם לחלוקת חפצים (עם ערך חיובי).

א. הוכיחו, שיחס הקירוב של האלגוריתם החמדני לחלוקת חפצים הוא לפחות 1/2 [כלומר: האלגוריתם מחזיר חלוקה שבה הערך המינימלי הוא לפחות 1/2 מהערך המינימלי בחלוקה אגליטרית].

* ב. הוכיחו, שיחס הקירוב של האלגוריתם החמדני לחלוקת חפצים הוא לפחות 2/3.

שאלה 5: חלוקה ללא-קנאה עד-כדי חפץ אחד

תזכורת: חלוקה נקראת "ללא קנאה עד-כדי חפץ אחד" (EF1) אם לכל שני שחקנים א,ב, קיים חפץ כלשהו בסל של שחקן ב, שאם נסתיר אותו, אז שחקן א לא יקנא בו.

נתונים n*k חפצים. צריך לחלק אותם בין n שחקנים, כך שכל שחקן יקבל k חפצים בדיוק.

כתבו אלגוריתם מהיר, המוצא חלוקה כזו שהיא גם EF1. הוכיחו את תשובתכם.

* שאלה 6: חלוקה יעילה ו-EF1

אחת השאלות הפתוחות המעניינות הקשורות לחלוקת חפצים בדידים היא: האם קיים אלגוריתם פולינומיאלי למציאת חלוקה יעילה-פארטו וגם EF1?

בשיעור למדנו אלגוריתם המוצא חלוקה יעילה-פארטו וגם EF1 – אלגוריתם מיקסום מכפלת הערכים. אבל האלגוריתם הזה אינו פולינומיאלי – מציאת חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים היא בעיה NP-קשה.

א. הוכיחו את הטענה הנ"ל (רמז: רדוקציה מבעיית חלוקת המספרים).

התשובה בסעיף א עדיין לא מוכיחה, שמציאת חלוקה יעילה ו-EF1 היא NP-קשה. הסיבה היא, שהתנאי של מיקסום המכפלה הוא תנאי **ממש חזק יותר** מהתנאי של יעילות+EF1.

ב. הוכיחו את הטענה הנ"ל (הראו דוגמה לחלוקה יעילה+EF1, שאינה ממקסמת את מכפלת הערכים).

בהתאם לתשובה של סעיף ב, ייתכן שקיים אלגוריתם פולינומיאלי לחישוב חלוקה יעילה+EF1.

ג. בקשו מהב"מ החביבה עליכם לכתוב אלגוריתם לחלוקה יעילה+EF1.

האלגוריתם שלה כנראה **לא** יהיה נכון (הב"מ של ימינו עדיין לא יודעות לפתור שאלות פתוחות...)

ד. הוכיחו את הטענה הנ"ל (מצאו דוגמה נגדית לאלגוריתם של הב"מ).