מטלה – מיזוג הצעות תקציב

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות רגילות מזכות בנקודה אחת. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בנקודה נוספת.

שאלה 2: אלגוריתם חלופי

נתון אלגוריתם חלופי למיזוג הצעות תקציב.
1. עבור כל נושא **j**, מצא את החציון $\mathbf{x_j}$.
2. סמן ב-**X** את הסכום של כל ה-$\mathbf{x_j}$.
3. התקציב לכל נושא **j** יהיה:

$$\mathbf{x_j + (C-X)/m}$$

כאשר **C** הוא הסכום הכולל בקופה, ו-**m** הוא מספר הנושאים. שימו לב שסכום התקציבים של כל הנושאים הוא בדיוק **C** (הנירמול מתבצע ע"י הורדת סכום קבוע מכל נושא).

האם האלגוריתם החלופי מגלה-אמת? אם כן – הוכיחו. אם לא – הראו דוגמה נגדית.

שאלה 2: אלגוריתם הממוצע

א. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש רק שני נושאים.

ב. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע **אינו** יעיל פארטו כשיש שלושה נושאים.

ג. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא הוגן לקבוצות.

ד. מצאו אלגוריתם, שהוא גם יעיל-פארטו וגם הוגן לקבוצות (לא חייב להיות מגלה-אמת).

שאלה 5: תיכנות: חישוב תקציב

א. כתבו פונקציה בפייתון, המקבלת כקלט את כמות הכסף בקופה והצבעות האזרחים, ומחשבת את התקציב בעזרת אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות. כותרת הפונקציה:

```
def compute_budget(
     total_budget:float,
     citizen_votes:List[List]
) → List[float]
```

הנה דוגמת קריאה לפונקציה עבור תקציב עם שלושה סעיפים, ושני אזרחים:

```
compute_budget(100, [ [100, 0, 0], [0, 0, 100] ])
```

הערך המוחזר הוא רשימה עם מספרים כמספר הסעיפים, למשל:

```
[50, 0, 50]
```

צרפו דוגמאות-הרצה.

* ב. כתבו קוד, הבודק אם הפונקציה compute_budget מסעיף א מחזירה תמיד תקציב הוגן לקבוצות. כותרת הפונקציה:

```
def test_compute_budget(
    num_citizens:int, num_issues:int,
    total_budget:float)
```

הריצו את הפונקציה עבור תקציב עם 3 נושאים, מדינה עם 10 אזרחים, וכל הצירופים הדרושים על-מנת לוודא שהתקציב הוא אכן הוגן לקבוצות.

שאלה 3: התחכמות קבוצתית

נתון אלגוריתם כלשהו לחלוקת משאבים. נאמר שלתת-קבוצה כלשהי של שחקנים יש **התחכמות קבוצתית מוצלחת** אם הם יכולים לשנות את הקלט שלהם (להגיד ערכים שונים מהערכים האמיתיים שלהם), כך שלפחות שחקן אחד מהקבוצה ירוויח, וכל השחקנים בקבוצה לא יפסידו.

אלגוריתם הוא **מגלה-אמת לקבוצות** (באנגלית group strategyproof) אם לאף תת-קבוצה של שחקנים אין התחכמות קבוצתית מוצלחת. שימו לב: אלגוריתם הוא מגלה-אמת (לפי ההגדרה שראינו באחד השיעורים הקודמים) אם לאף תת-קבוצה בגודל 1 אין התחכמות קבוצתית מוצלחת. לכן, כל אלגוריתם מגלה-אמת-לקבוצות הוא גם מגלה-אמת.

בהרצאה הוכחנו, שאלגוריתם החציון המוכלל הוא מגלה-אמת לקבוצות.

א. הוכיחו, שמכרז ויקרי למכירת חפץ יחיד אינו מגלה-אמת-לקבוצות.

"מכרז אנגלי" הוא מכרז למכירת מוצר אחד, שבו המחיר מתחיל מאפס, ועולה בהדרגה. בתחילת המכרז, כל השחקנים נמצאים בחדר; כשהמחיר עולה, שחקנים יכולים לעזוב את החדר (ולא יכולים להיכנס שוב). כשרק שחקן אחד נשאר בחדר, המכרז מסתיים, והשחקן שנשאר בחדר מקבל את החפץ במחיר הנוכחי.

ב. הוכיחו, שהמכרז האנגלי הוא מגלה-אמת לקבוצות.

ג. הוכיחו, שהתוצאה של המכרז האנגלי זהה לחלוטין לתוצאה של מכרז ויקרי עם אותם שחקנים.

שאלה 1: הוגנות חזקה ליחידים

שאלה זו מתייחסת לאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות. הוכחנו בהרצאה, שכאשר האזרחים מתחלקים לקבוצות "ממוקדות", כך שהאזרחים בכל קבוצה j נותנים 100% מהתקציב לנושא j, התקציב המתקבל מתחלק בין הנושאים ביחס ישר למספר התומכים של כל נושא: נושא שיש לו k תומכים יקבל לפחות C*k/n . בפרט, נושא שיש לו תומך אחד יקבל לפחות C/n.

עכשיו נניח שיש רק אזרח אחד ממוקד, הנותן 100% מהתקציב לנושא j. שאר האזרחים יכולים לחלק את התקציב באופן כלשהו – לא דווקא באופן ממוקד. לדוגמה, נניח שיש שלושה אזרחים ושלושה נושאים והתקציב הכולל הוא 100. הצבעות האזרחים:

- אזרח א: 100, 0, 0.
- אזרח ב: 0, 50, 50.
- אזרח ג: 0, 50, 50.

אזרח א ממוקד, אבל אזרחים ב, ג לא ממוקדים.

הגדרה: אלגוריתם למיזוג הצעות תקציב נקרא **הוגן-חזק ליחידים** אם בכל מצב שבו קיים אזרח ממוקד התומך בנושא j בלבד, נושא j מקבל לפחות C/n.

א. הוכיחו, בעזרת הדוגמה למעלה, שאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות אינו הוגן-חזק ליחידים. פרטו את שלבי החישוב בעזרת חיפוש בינארי.

* ב. הציעו אלגוריתם חציון מוכלל, עם פונקציות שונות מהפונקציות שהראינו בהרצאה, שהוא גם הוגן-חזק ליחידים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם, והדגימו אותו על הדוגמה למעלה. [נמצא בסיכום]