מטלה 9 - אלגוריתמים כלכליים

שאלה 4

מאת רואי ביטון
ת״ז 206400426

שאלה 4
סעיף א)
נניח שיש חלוקה אקראית שהיא ללא קנאה לכתחילה.
לפי ההגדרה, זה אומר שכל שחקן מעדיף את הסל שהוא מקבל בתוחלת, על פני הסלים של שאר השחקנים.

נבחן את השחקן i.
אם הוא לא מקנא באף אחד אחר, אז הערך שהוא מייחס לעצמו (בתוחלת) גדול או שווה לערך שהוא מייחס לכל אחד מהשחקנים האחרים (זה על פי ההגדרה שאנו מכירים מההרצאות).

מכאן, שהערך שהוא מייחס לעצמו גדול או שווה לממוצע של הערכים שהוא מייחס לכל הסלים, כי הוא לפחות כמו כל אחד מהם.

אבל הממוצע של הערכים שהוא מייחס לכל הסלים שווה לערך שהוא מייחס לכל החפצים יחד, חלקי מספר השחקנים (שזה כפי שלמדנו בהרצאה ההגדרה לחלוקה פרופורציונלית לכתחילה).

לכן, אם שחקן לא מקנא באף שחקן אחר, אז הערך שהוא מקבל בתוחלת הוא לפחות פרופורציונלי (כלומר לפחות חלק יחסי של כל החפצים).

ולכן, כל חלוקה ללא קנאה לכתחילה היא גם פרופורציונלית לכתחילה.

סעיף ב)
נניח שיש לנו גרף שמייצג חלוקה אקראית, כלומר יש שחקנים מצד אחד וחפצים מצד שני, וביניהם יש קשתות עם הסתברויות (שזה כמה כל שחקן צפוי לקבל מכל חפץ).

ונניח שלגרף הזה יש פירוק בירקהוף.
משמע, שאפשר לתאר את ההסתברויות שבו באמצעות כמה שידוכים מושלמים, כלומר התאמות שבהן כל שחקן מקבל חפץ אחד בדיוק, וכל חפץ ניתן לשחקן אחד בדיוק, עם הסתברויות שמתאימות לכל שידוך.

בכל שידוך שכזה, כל שחקן וכל חפץ משתתפים פעם אחת בלבד. ולכן, אם נחבר את כל ההסתברויות של השידוכים שבהם שחקן מסוים מופיע – נקבל סך הכול 1 (ולא יותר או פחות). אותו הדבר גם לכל חפץ.

לכן, בכל קודקוד (בין אם הוא שחקן או חפץ), סכום ההסתברויות של הקשתות שיוצאות ממנו שווה ל־1.

מכאן נובע שהגרף מאוזן על פי ההגדרה שלמדנו: לכל קודקוד יש סכום קבוע של הסתברויות שמחוברות אליו.

ולכן, אם יש פירוק בירקהוף, אז בהכרח הגרף מאוזן.