אוניברסיטת אריאל בשומרון
פקולטה : מדעי הטבע
מחלקה : מדעי המחשב

אלגוריתמים כלכליים

קוד הקורס : 7062310-2 קבוצה 1
שם המרצה : אראל סגל-הלוי
שנה _____ה'תשפ"ו_____ סמסטר ___א___ מועד __ב__
תאריך בחינה :___י"ב באדר ה'תשפ"ו 1/3/2026_____
משך הבחינה : 2.5 שעות = 150 דקות

בבחינה 4 שאלות, יש לפתור את כולן. משקל כל שאלה 20 נקודות.

- *זכאי הקלות מילואים יפתרו 3 שאלות בלבד ; משקל כל שאלה 28 נקודות.*

ציוני המטלות והמענקים יתווספו לציון הבחינה.

יינתנו 2 נקודות נוספות על כתיבה מסודרת, המוגדרת באופן הבא :

- כל השאלות פתורות לפי הסדר, כל שאלה בעמוד נפרד ;
- הכתב ברור וקריא, ללא חיצים קשקושים ומחיקות.

יש לפתור את כל השאלות **על גבי השאלון**.

- רצוי להיעזר במחברת לצורך חישובים וטיוטות.

חומר עזר מותר בשימוש :

- מחשבון פשוט לחישובים מספריים בלבד – ללא גרפים, תיכנות, אפליקציות או אינטרנט.
- דף-נוסחאות אישי בגודל פוליו (A4), כתוב מצד אחד בלבד.
- *זכאי הקלות מילואים, וכן זכאי הקלת "דף-נוסחאות מורחב", רשאים לכתוב משני צדי הדף.*

הנחיות כלליות :

- יש להסביר כל תשובה בפירוט. ניקוד מלא יינתן רק על תשובה נכונה עם הסבר נכון.
- אם נראה לכם ששאלה כלשהי אינה מוגדרת עד הסוף (חסרות הנחות מסוימות), הניחו את ההנחות הנראות בעיניכם הגיוניות ביותר בהתאם לשאלה. הסבירו את ההנחות שלכם.

הנחיות לפתרון שאלות תיכנות :

- יש לתעד את הקוד, ולהסביר היטב בעברית מה עושה כל שורה ואיך זה מתאים לאלגוריתם.
- אתם נבחנים על האלגוריתמים – ולא על התחביר של שפת פייתון.
- אם אתם לא זוכרים פקודה מסוימת, תכתבו מה שאתם זוכרים, ותסבירו בעברית למה התכוונתם.
- אם אתם לא יודעים פייתון בכלל [לא מומלץ], מותר לכתוב בשפת-תיכנות אחרת כלשהי, בתנאי שהאלגוריתם יהיה נכון מפורט ומדויק.

בהצלחה!!

שאלה 0. כתיבה מסודרת

יינתנו 2 נקודות על כתיבה מסודרת:

- כל השאלות פתורות במחברת הבחינה לפי הסדר, כל שאלה בעמוד נפרד;
- הכתב ברור וקריא, ללא חיצים קשקושים ומחיקות.

שאלה 0.5. מטלות

[שאלה זו מיועדת להוספת ציוני המטלות והמענקים. אין צורך לענות].

שאלה 1: חלוקה סופר-פרופורציונלית בעזרת בינה מלאכותית

מצורף תקציר של שיחה עם קלוד. לגבי כל אחד מהאלגוריתמים שלו, הראו דוגמה של עוגה **חד-ממדית**, שבה **קיימת** חלוקה סופר-פרופורציונלית, ולמרות זאת, האלגוריתם של קלוד **אינו מוצא אותה**. הסבירו בפירוט את תשובתכם.

*אני: "הנושא הוא: חלוקה הוגנת של עוגה. חלוקה *סופר פרופורציונלית* היא חלוקה שבה כל אחד מהשחקנים מקבל יותר מאשר 1 חלקי n משווי העוגה כולה עבורו, כאשר n הוא מספר השחקנים. כתוב לי אלגוריתם המוצא תמיד חלוקה סופר-פרופורציונלית".*

קלוד: אציג כאן מספר אלגוריתמים, מהפשוט למורכב:

◇ **אלגוריתם 1: לשני שחקנים (פשוט)**

רעיון :שחקן אחד חותך לחתיכות רבות, והשני בוחר את הרוב.
קלט: 2 שחקנים (אליס, בוב).
שלב 1: אליס חותכת את העוגה ל-3 חלקים שווים (בעיניה). כל חלק = 1/3 מבחינתה.
שלב 2: בוב בוחר 2 חלקים (הטובים ביותר עבורו).
שלב 3: אליס מקבלת את החלק הנותר.

פתרון: נתונה עוגה עם שלושה אזורים:
הערכים של אליס: 10, 10, 10
הערכים של בוב: 30, 0, 0
קיימת חלוקה סופר-פרופורציונלית, למשל: בוב מקבל את החלק הימני ואליס את כל השאר. כל שחקן מקבל הרבה יותר מ-0.5 מערך העוגה כולה עבורו.
אבל באלגוריתם של קלוד, אליס חותכת לשלושה אזורים, בוב מקבל שניים ואליס רק חלק אחד. הערך שלה הוא רק שליש – החלוקה אפילו לא פרופורציונלית.

◇ **אלגוריתם 2: לשני שחקנים (סימטרי). אלגוריתם "הדדי מורחב":**

קלט: 2 שחקנים.
שלב 1: אליס חותכת את העוגה ל-4 חלקים שווים (עבורה).
שלב 2: בוב מסמן את 2 החלקים הטובים ביותר עבורו.
שלב 3: אליס בוחרת 2 חלקים:
- חלק אחד מתוך המסומנים של בוב;
- חלק אחד מתוך הלא-מסומנים.

שלב 4: בוב מקבל את 2 החלקים הנותרים.

פתרון: נתונה עוגה עם ארבעה אזורים:
הערכים של אליס: 10, 10, 10, 10
הערכים של בוב: 20, 20, 0, 0
קיימת חלוקה סופר-פרופורציונלית, למשל: בוב מקבל את האזור הימני וחצי מהאזור שלידו (ערך כולל 30) ואליס מקבלת את כל השאר (ערך כולל 25). כל שחקן מקבל מעל 20 שזה 0.5 מהערך העוגה כולה.
אבל באלגוריתם של קלוד, אליס חותכת לארבעה אזורים, בוב מסמן את שני הימניים. אליס בוחרת אזור אחד ימני ואזור אחד שמאלי. הערך הכולל שלה הוא 20, שזה בדיוק 0.5 – לא יותר מ-0.5.

שאלה 2. חלוקת מטלות עם כללי גיזום

במפעל "מכונות כלכליות" יש שלושה פועלים. בכל יום יש תשע מטלות לביצוע: שלוש מטלות של 40 דקות, שתי מטלות של 50 דקות, שתי מטלות של 60 דקות, ושתי מטלות של 70 דקות. ההעדפות של כל הפועלים זהות: כל הפועלים מעדיפים לעבוד כמה שפחות זמן. מנהל המפעל רוצה לחלק את המטלות בין העובדים בהתאם לעקרון האגליטרי. לשם כך הוא משתמש באלגוריתם חיפוש במרחב המצבים, עם כל כללי-הגיזום שלמדנו.

א. תארו **חסם אופטימי יעיל ולא טריוויאלי** (לא מספר קבוע), המתאים לחלוקה אגליטרית של מטלות. הוכיחו שהוא אכן חסם אופטימי. הדגימו את חישוב החסם על מצב כלשהו.

פתרון: בחלוקת חפצים, חסם אופטימי אפשרי הוא לתת את כל החפצים לכולם. אבל בחלוקת מטלות זה בכלל לא אופטימי – אם ניתן את כל המטלות לכולם, נקבל תוצאה גרועה מאד. חסם אופטימי אפשרי הוא אפס – לא לתת אף מטלה לאף אחד. אבל זה חסם מאד לא יעיל, שלא יביא לגיזום משמעותי.

לכן נשתמש ברעיון שהוצג בפתרון מטלה 3 שאלה 1ג: נתייחס למטלות כאילו שהן רציפות, ונחלק אותן בצורה האופטימלית ("אלגוריתם המשפך"). לדוגמה, נניח שבמצב הנוכחי העלויות של השחקנים הן [60, 50, 40], ויש עוד מטלה אחת עם עלות 60. אז אם נתייחס אליה כרציפה, נוכל לתת 10 לשחקן א, 20 לשחקן ב, ו-30 לשחקן ג, ונגיע לעלות אגליטרית של **70**. (כמובן במציאות נצטרך לתת את כל המטלה לאחד השחקנים, נניח לשחקן ג, ואז העלות תהיה 100). זה חסם אופטימי, כי בחלוקה רציפה אפשר תמיד להגיע לתוצאה טובה לפחות כמו בחלוקה לא רציפה.

ב. תארו **חסם פסימי יעיל ולא טריוויאלי** (לא מספר קבוע), המתאים לחלוקה אגליטרית של מטלות. הוכיחו שהוא אכן חסם אופטימי. הדגימו את חישוב החסם על מצב כלשהו.

פתרון: אפשר להשתמש באלגוריתם החמדני לחלוקת מטלות (LPT). לדוגמה, נניח שבמצב הנוכחי העלויות של השחקנים הן [60, 50, 40], ויש עוד שלוש מטלות עם עלויות 15, 20, 25. נסדר אותן בסדר יורד. ניתן את ה-25 לשחקן ג (שיגיע ל-65), 20 לשחקן ב (שיגיע ל-70), 15 לשחקן א (שיגיע ל-75). העלות המקסימלית היא **75**, ולכן זהו החסם הפסימי.

ג. תארו את שני השלבים הראשונים של ביצוע האלגוריתם עם הקלט הנתון בשאלה - המצב ההתחלתי, והמצבים ברמה הראשונה. עבור כל אחד מהמצבים, פרטו את חישוב כללי הגיזום. השתמשו באלגוריתמים של סעיפים א, ב במקומות המתאימים

פתרון: וקטור המצב שומר את מספר המטלות שחולקו עד כה, וכן את הערך הכולל של כל אחד מהשחקנים.

מצב התחלתי: [0 ; 0,0,0].

- חסם פסימי: נשתמש באלגוריתם החמדני לחלוקת מטלות: 50+50+70, 40+60+70, 40+40+60. הערך האגליטרי הוא העלות המקסימלית, שהיא **170** (העלות של שחקן א), ולכן זהו החסם הפסימי.
- חסם אופטימי: נתייחס לכל המטלות כרציפות. סכום כל העלויות הוא 480. אם נחלק אותן בצורה רציפה לשלושת הפועלים, אז כל פועל יקבל **160**, לכן זהו החסם האופטימי.

רמה ראשונה, מצב א: [1; 40, 0, 0].
רמה ראשונה, מצב ב: [1; 0, 40, 0].

רמה ראשונה, מצב ג: [1; 0, 0, 40].

- **גיזום מצבים זהים**: כל המצבים שקולים, כי לכל השחקנים יש הערכות זהות. לכן נשאיר רק את מצב א: [1; 40, 0, 0].
- **חסם פסימי**: נשתמש באלגוריתם החמדני על המטלות שנשארו ונקבל: 50+60+40, 40+60+70, 40+50+70. הערך האגליטרי הוא העלות המקסימלית, שהיא **170**, ולכן זהו החסם הפסימי.
- **חסם אופטימי**: נתייחס למטלות שנשארו כרציפות. הערך הכולל שלהן הוא 440. אם נחלק אותן בצורה רציפה, נוכל לתת 120 לשחקן א ועוד 160 לשחקנים ב,ג, והערך האגליטרי יהיה **160**. לכן זהו החסם האופטימי.

שאלה 3: טרילמה – חלוקת תקציב רציף

השאלה עוסקת בחלוקת תקציב רציף בין ארגונים שונים. בשאלה מופיעה הוכחה של משפט. אתם צריכים להשלים את הנימוק לטענות ב, ג, ד, ה.

משפט. לא קיים אלגוריתם המקיים בו-זמנית את התכונות הבאות:

- יעיל-פארטו;
- מגלה-אמת;
- הוגן – אפילו ליחידים;
- אנונימי – לא מושפע משינוי הסדר בין האזרחים;
- ניטרלי – לא מושפע משינוי הסדר בין הנושאים.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים אלגוריתם כזה, ונבדוק מה אמור להיות הפלט שלו כשיש ארבעה ארגונים וחמישה אזרחים עם ההעדפות הבאות:

- אזרח 1 תומך בארגונים א+ב;
- אזרח 2 תומך בארגונים א+ג;
- אזרח 3 תומך בארגונים א+ד;
- אזרח 4 תומך בארגונים ב+ג;
- אזרח 5 תומך בארגון א בלבד.

טענה א: האלגוריתם חייב לתת לארגונים ב, ג את אותו סכום בדיוק.

נימוק: בגלל ניטרליות ואנונימיות. אם נחליף את הסדר בין ארגונים ב,ג ובין אזרחים 1,2, נקבל בעיה זהה לחלוטין.

טענה ב: הסכום הנ"ל חייב להיות **חיובי ממש** (לא אפס).

נימוק: אם הסכום הניתן לארגונים ב, ג הוא אפס, אז התועלת של אזרח 4 היא אפס, בניגוד להנחה שהאלגוריתם הוגן ליחידים.

כעת נניח שאזרח 1, במקום להגיד א+ב, אומר ב+ד. אז הקלט החדש הוא:

- אזרח 1 תומך בארגוניס ב+ד;
- אזרח 2 תומך בארגונים א+ג;
- אזרח 3 תומך בארגונים א+ד;
- אזרח 4 תומך בארגונים ב+ג;
- אזרח 5 תומך בארגון א בלבד.

טענה ג: עם הקלט החדש, האלגוריתם חייב לתת לארגונים ג, ד את אותו סכום בדיוק.

נימוק: שוב בגלל ניטרליות ואנונימיות. אם נחליף את הסדר בין ארגונים ג,ד ובין אזרחים 1,2, נקבל בעיה זהה לחלוטין.

כעת יש שתי אפשרויות:

- אפשרות אחת: האלגוריתם נותן לארגונים ג, ד תקציב אפס (כלומר: נותן את כל התקציב רק לארגונים א, ב).
  - **טענה ד**: אפשרות זו סותרת את ההנחה שהאלגוריתם מגלה-אמת.
  - **נימוק**: באפשרות זו, התועלת האמיתית של אזרח 1 (שבאמת תומך רק בארגונים א+ב) גדולה יותר מאשר כשהוא אומר אמת: כשהוא אומר אמת חלק מהתקציב הולך לארגון ג, וכשהוא משקר כל התקציב מגיע רק לארגונים א+ב שהוא תומך בהם.
- אפשרות שניה: האלגוריתם נותן לנושאים ג, ד סכום חיובי ממש (וזהה).
  - **טענה ה**: אפשרות זו סותרת את ההנחה שהאלגוריתם יעיל-פארטו.
  - **נימוק**: קיים שיפור פארטו: מעבירים חלק מהתקציב של ג לארגון א, וחלק מהתקציב של ד לארגון ג. אז התועלת של אזרחים

1,2,3,4 נשארת זהה (רק עבר כסף מארגון אחד שהם תומכים בו לארגון אחר שהם תומכים בו), אבל התועלת של אזרח 5 גדלה.

בשני המקרים הגענו לסתירה, ולכן לא קיים אלגוריתם כפי שהנחנו. מש"ל

שאלה 4. חלוקת עלויות לפי האקסיומות

איטלקי, בולגרי וגרוזיני עולים למונית. הם מעוניינים לחלק ביניהם את עלות הנסיעה לפי כלל שאפלי.

א. עלות הנסיעה עבור כל תת-קבוצה נתונה בטבלה הבאה:

א	ב	ג	א+ב	ב+ג	ג+א	א+ב+ג
2	4	6	8	10	12	12

כמה ישלם כל אחד מהנוסעים לפי כלל שאפלי? פרטו את שלבי החישוב.

פתרון: נחשב את העלות השולית של כל שחקן בכל אחד מהסדרים:

- אבג: א=2, ב=6, ג=4
- אגב: א=2, ג=10, ב=0
- באג: ב=4, א=4, ג=4
- בגא: ב=4, ג=6, א=2
- גאב: ג=6, א=6, ב=0
- גבא: ג=6, ב=4, א=2
- סכומים: א=18, ב=18, ג=36
- ממוצעים: **א=3, ב=3, ג=6**.

ב. עלות הנסיעה משתנה, ועכשיו העלות היא:

א	ב	ג	א+ב	ב+ג	ג+א	א+ב+ג
4	8	12	16	20	24	24

השתמשו באקסיומות של ערך שאפלי, והסבירו כמה ישלם כל אחד מהנוסעים לאחר השינוי.

פתרון: לפי אקסיומת הליניאריות: העלויות הן בדיוק כפולות מבסעיף א, ולכן אחד אחד ישלם בדיוק כפול: 6, 6, 12.

ג. עלות הנסיעה משתנה, ועכשיו העלות היא:

א	ב	ג	א+ב	ב+ג	ג+א	א+ב+ג
4	4	4	8	8	8	24

השתמשו באקסיומות של ערך שאפלי, והסבירו כמה ישלם כל אחד מהנוסעים לאחר השינוי.

פתרון: לפי אקסיומת הסימטריה: לשחקנים א, ב, ג יש אותן עלויות שוליות בדיוק, ולכן הם צריכים לשלם בדיוק אותו הדבר: 8, 8, 8.

ד. עלות הנסיעה משתנה, ועכשיו העלות היא:

א	ב	ג	א+ב	ב+ג	ג+א	א+ב+ג
8	12	16	24	28	32	48

השתמשו באקסיומות של ערך שאפלי, והסבירו כמה ישלם כל אחד מהנוסעים לאחר השינוי. העזרו בתשובותיכם לסעיפים ב,ג

פתרון: לפי אקסיומת הליניאריות: העלויות השוליות בסעיף זה הן בדיוק סכום העלויות השוליות בסעיפים ב,ג. לכן גם התשלומים הם הסכום: 14, 14, 20.

שימו לב: בסעיפים ב, ג, ד לא תתקבל תשובה הכוללת חישוב מחדש – יש להשתמש בתכונות של ערך שאפלי בלבד.