אוניברסיטת אריאל בשומרון

פקולטה: מדעי הטבע

מחלקה: מדעי המחשב

# אלגוריתמים כלכליים

קוד הקורס: 2-7062310 קבוצה 1

שם המרצה: אראל סגל-הלוי

שנה \_\_\_\_\_\_ה'תשפ"ג\_\_\_\_\_\_\_ סמסטר \_\_\_א\_\_\_ מועד \_\_א\_\_

תאריך בחינה:\_\_\_ט"ז שבט ה,תשפ"ג 7/2/2023\_\_\_\_

משך הבחינה: 2.5 שעות = 150 דקות

בבחינה 4 שאלות. משקל כל שאלה 22 נקודות. ציוני המטלות והמענקים יתווספו לציון הבחינה.

יש לפתור את כל השאלות במחברת הבחינה.

* אין צורך להעתיק את השאלון למחברת - השאלון יתפרסם באתר הקורס לאחר הבחינה.

חומר עזר מותר בשימוש: דף-נוסחאות אישי בגודל פוליו (A4). אפשר לכתוב משני צדי הדף.

הנחיות כלליות:

* יש להסביר כל תשובה בפירוט. ניקוד מלא יינתן רק על תשובה נכונה עם הסבר נכון.
* אם נראה לכם ששאלה כלשהי אינה מוגדרת עד הסוף (חסרות הנחות מסויימות), הניחו את ההנחות הנראות בעיניכם הגיוניות ביותר בהתאם לשאלה. הסבירו את ההנחות שלכם.

הנחיות לפתרון שאלות תיכנות:

* יש לתעד את הקוד, ולהסביר היטב בעברית מה עושה כל שורה ואיך זה מתאים לאלגוריתם.
* אתם נבחנים על האלגוריתמים – ולא על התחביר של שפת פייתון.
* אם אתם לא זוכרים פקודה מסויימת, תכתבו מה שאתם זוכרים, ותסבירו בעברית למה התכוונתם.
* אם אתם לא יודעים פייתון בכלל [לא מומלץ], מותר לכתוב בשפת-תיכנות אחרת כלשהי, בתנאי שהאלגוריתם יהיה נכון מפורט ומדוייק.

*בהצלחה!!*

## שאלה 0. כתיבה מסודרת [2 נק']

יינתנו 2 נקודות נוספות על כתיבה מסודרת:

* כל השאלות פתורות במחברת הבחינה לפי הסדר, כל שאלה בעמוד נפרד;
* הכתב ברור וקריא, ללא חיצים קשקושים ומחיקות.

## שאלה 0.5. מטלות

[שאלה זו מיועדת להוספת ציוני המטלות והמענקים. אין צורך לענות].

## שאלה 1. משולש החלוקות [22 נק']

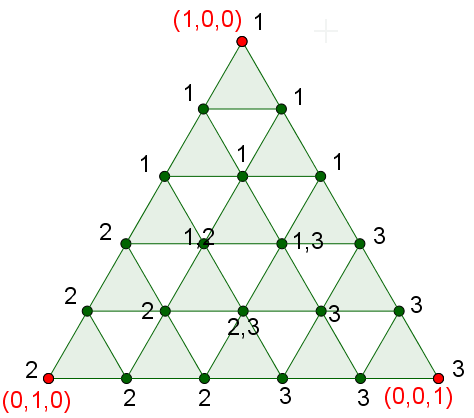
נתונה עוגה חד-ממדית באורך 1. רוצים למצוא חלוקה רציפה וכמעט-ללא-קנאה בין שלושה אנשים, בעזרת אלגוריתם סימונס-סו.

שלושת האנשים מייחסים ערך **אחיד** לכל העוגה, כלומר, הערך של פרוסה באורך x הוא x.

א. רשמו את התוויות שיהיו על הקודקודים של משולש-החלוקות, שבו המרחק בין כל שני קודקודים סמוכים הוא 0.2. שימו לב: בחלק מהקודקודים יש כמה אפשרויות - רשמו את **כל** האפשרויות.

**פתרון** [תשובה נכונה: 6 נק', הסבר נכון: 6 נק']. כל קודקוד מייצג חלוקה, ובכל חלוקה, כל שחקן בוחר את הפרוסה הגדולה ביותר. בקודקוד העליון, ובקודקודים הסמוכים אליו, הפרוסה הגדולה ביותר היא הפרוסה הראשונה, ולכן התווית היא 1; בקודקוד השמאלי התחתון ובסמוכים אליו הפרוסה הגדולה ביותר היא הפרוסה השניה, ולכן התווית היא 2; בקודקוד הימני התחתון ובסמוכים אליו הפרוסה הגדולה ביותר היא הפרוסה השלישית, ולכן התווית היא 3.

בשלושה קודקודים פנימיים יש שתי אפשרויות. לדוגמה, הקודקוד המסומן ב 1,2 מתאים לחלוקה 0.4, 0.4, 0.2 שבה פרוסות 1,2 הן גדולות ביותר.



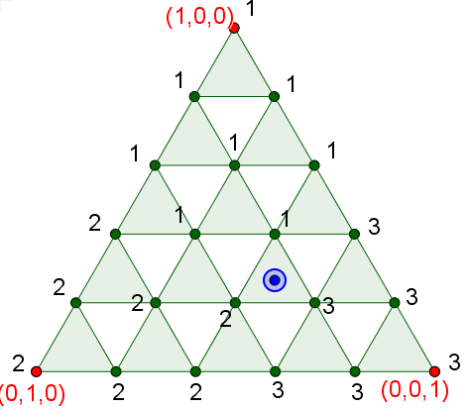
בסעיפים הבאים יש לבחור, עבור כל קודקוד עם כמה תוויות אפשריות, את התווית **הקטנה** ביותר.

ב. האם התיווי שהתקבל הוא תיווי ספרנר? הסבירו מדוע כן או מדוע לא.

**פתרון**  [5 נק']: כן. על כל קודקוד ראשי יש תווית אחרת, ועל כל צלע בין שני קודקודים ראשיים יש רק תוויות שנמצאות על הקודקודים הראשיים: על הצלע בין 1 ל-2 מופיעות רק התוויות 1 ו-2, על הצלע בין 2 ל-3 מופיעות רק התוויות 2 ו-3, ועל הצלע בין 3 ל-1 מופיעות רק התוויות 3 ו-1.

ג. כמה משולשונים מגוונים יש? סמנו את כולם.

**פתרון** [5 נק']: אם בוחרים, בכל קודקוד שבו יש שתי אפשרויות, את האפשרות הקטנה ביותר, מתקבל התיווי הבא, ובו משולש מגוון אחד, המסומן בכחול:



## **2**. חלוקה אגליטרית וקנאה [22 נק'].

מחלקים שלושה משאבים רציפים בין חמישה שחקנים. ערכי השחקנים נתונים בטבלה:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **קמח** | **מים** | **שמן** |
| **עמי:** | 0 | 0 | 33 |
| **תמי:** | 0 | 11 | 22 |
| **רמי:** | 0 | 0 | 33 |
| **חמי:** | 15 | 16 | 0 |
| **ימי:** | 0 | 0 | 33 |

א. חשבו חלוקה אגליטרית **אחת** כלשהי. הסבירו את שלבי החישוב. הוכיחו שזו אכן חלוקה אגליטרית.

**פתרון** [11 נק']: עמי, רמי וימי מייחסים ערך חיובי רק לשמן. לכן, הערך הגבוה ביותר שאפשר להבטיח לשלושתם יחד הוא 11 – אם מחלקים את כל השמן שווה בשווה לשלושתם. לכן, הערך האגליטרי הגבוה ביותר האפשרי הוא לכל היותר 11. לכן, אם נמצא חלוקה שבה כל השחקנים מקבלים ערך לפחות 11 – מצאנו חלוקה אגליטרית.

אכן קיימת חלוקה כזאת: אפשר לתת את כל המים לתמי (והערך שלה יהיה 11), ואת כל הקמח לחמי (והערך שלו יהיה 15).

ב. הוכיחו, ש**בכל** חלוקה אגליטרית (לא רק בחלוקה שחישבתם בסעיף א) יש קנאה. מי מקנא במי ומדוע?

**פתרון** [11 נק']: בכל חלוקה אגליטרית, צריך לחלק את השמן שווה בשווה בין עמי רמי וימי כדי שיקבלו ערך 11; לא נשאר כל שמן לתמי, ולכן תמי חייבת לקבל את כל המים כדי שתקבל ערך 11; ולכן חמי מקבל רק את הקמח. חמי מקנא בתמי – כי חמי מעריך את הקמח שקיבל ב-15, ואת המים שקיבלה תמי ב-16.

## שאלה 3: מיזוג הצעות תקציב בין מפלגות

בכנסת ישראל החליטו לממש אלגוריתם למיזוג הצעות תקציב. שלוש מפלגות הציעו הצעות:

* מפלגה א רוצה להעביר את כל התקציב למשרד הביטחון.
* מפלגה ב רוצה לחלק את התקציב שווה בשווה בין משרד החינוך למשרד הפנים.
* מפלגה ג רוצה לחלק את התקציב שווה בשווה בין משרד החינוך למשרד הביטחון.

א. מהו התקציב המתקבל ע"י אלגוריתם החציון הפשוט?

**פתרון** [7 נק']: נסמן את התקציב הכולל באות C. הצבעות המפלגות הן:

* נושא: ביטחון, חינוך, פנים.
* מפלגה א: C, 0, 0.
* מפלגה ב: 0, C/2, C/2.
* מפלגה ג: C/2, C/2, 0

החציון של תקציב הביטחון הוא C/2, של תקציב החינוך – C/2, ושל תקציב הפנים – 0.

(במקרה זה יצא שסכום החציונים שווה בדיוק C; לא תמיד זה כך).

ב. מהו התקציב המתקבל ע"י אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניארית? פרטו לפחות שלושה שלבים בחיפוש הבינארי (לפחות שני ערכים לא מתאימים, והערך הנכון).

**פתרון** [15 נק']: אנחנו צריכים להוסיף שתי הצבעות קבועות. הצבעה קבועה i נקבעת לפי הפונקציה:

fi(t) = C \* min(1, i\*t)

עבור t=1/2, ההצבעות הקבועות הן C/2, C. החציונים הם:

* ביטחון – C/2. חינוך – C/2. פנים – C/2. הסכום **גדול** מהתקציב הכולל.

עבור t=1/4, ההצבעות הקבועות הן C/4, C/2. החציונים הם:

* ביטחון – C/2. חינוך – C/2. פנים – C/4. הסכום **עדיין גדול** מהתקציב הכולל.

עבור t=1/8, ההצבעות הקבועות הן C/8, C/4. החציונים הם:

* ביטחון – C/4. חינוך – C/4. פנים – C/8. הסכום **קטן** מהתקציב הכולל.

כאן אפשר לנחש מספר כלשהו בין 1/4 לבין 1/8. ננחש t=1/5, ההצבעות הקבועות הן C/5, 2C/5. החציונים הם:

* ביטחון – 2C/5. חינוך – 2C/5. פנים –C/5. הסכום **שווה בדיוק** לתקציב הכולל, ולכן זה התקציב שיוחזר.

## שאלה **4**: חלוקת שכר דירה עם הטיה לטובת אחד הדיירים [22 נק']

נתונה בעיית חלוקת שכר דירה עם שלושה חדרים ושלושה דיירים. הערכות הדיירים הן:

* דייר א: a1, a2, a3
* דייר ב: b1, b2, b3
* דייר ג: c1, c2 ,c3.

נתון, שההשמה היחידה הממקסמת את סכום הערכים היא: דייר א – חדר 1, דייר ב – חדר 2, דייר ג – חדר 3.

כתבו קוד בפייתון, המוצא חלוקת שכר דירה ללא קנאה. מבין כל החלוקות ללא קנאה, יש למצוא את **החלוקה הטובה ביותר עבור דייר א** (= החלוקה שבה התועלת של דייר א היא הגדולה ביותר). השלימו את הקוד הבא:

import cvxpy

TOTAL\_RENT=1000

p1  = cvxpy.Variable() # price of room 1

p2  = cvxpy.Variable() # price of room 2

p3  = cvxpy.Variable() # price of room 3

problem = cvxpy.Problem(

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

)

problem.solve()

print(f"rents: 1={p1}, 2={p2}, 3={p3}")

הסבירו מדוע הקוד שלכם אכן פותר את הבעיה.

**פתרון**:

נגדיר פונקציית מטרה – מקסימום תועלת לשחקן 1:

objective = cvxpy.Maximize(a1-p1)

(לחלופין, כיוון שערך החדר a1 קבוע, אפשר גם לחפש מינימום מחיר לשחקן 1: Minimize(p1)).

בשורות הבאות יש לכתוב את האילוצים – סכום המחירים שווה לשכר הדירה הכולל, ואף שחקן לא מקנא:

constraints = [

p1+p2+p3 = R,

a1 – p1 ≥ a2 – p2, a1 – p1 ≥ a3 – p3,

b2 – p2 ≥ b1 – p1, b2 – p2 ≥ b3 – p3,

c3 – p3 ≥ c1 – p1, c3 – p3 ≥ c2 – p2]