סיכום המאמר "Polycubes with Small Perimeter Defect"

המאמר הוצג בכנס Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms

מבוא, מונחים וסימונים מוסכמים

Polycube – להלן: פ"ק [פולי-קוביה]. קבוצה סופית של קוביות תלת-מימדיות שוות המסודרות במרחב כגוף אחד. כל שתי קוביות מהקבוצה לא נוגעות זו בזו כלל או נוגעות דרך השקה מלאה של שתי פאות, פאה אחת מקוביה אחת ופאה שניה מקוביה שניה.

Fixed-Polycube – פולי-קוביה-קבועה. לעניין חישוב מספר הפ"ק-יות [פולי-קוביות] שניתן להרכיב מ-n קוביות שוות, משתמשים דווקא במונח פ"ק-קבועה במקום פ"ק, כאשר מחשיבים שני פ"ק-יות שצורתם זהה, אבל האוריינטציה שלהם במרחב שונה, כשתי פ"ק-יות שונות. **המאמר הנוכחי מתעסק אך-ורק בפ"ק-קבועות, ולכן נסכים שבכותבנו פ"ק במאמר זה כוונתנו היא לפ"ק-קבועות.**

P – סימון מוסכם לפ"ק נתונה.

נפח של פ"ק – מספר הקוביות הכלולות בה.

n – סימון מוסכם לנפח של פ"ק נתונה.

היקף של פ"ק – מספר "הקוביות הריקות" המהוות שכנות של קוביות הפ"ק הנתונה.

p – סימון מוסכם להיקף של פ"ק נתונה. [**p**erimeter]

קובית היקף – "קוביה ריקה" השכנה לקוביה החברה בפ"ק נתונה.

$\boldsymbol{A_3(n)}$ – סימון מוסכם למספר הפ"ק השונות בעלות נפח n.

$\boldsymbol{A_3(n,p)}$ – סימון מוסכם למספר הפ"ק השונות בעלות נפח n והיקף p.

גרף דואלי של פ"ק P – מסומן ע"י *P. גרף קשיר ולא מכוון המייצג את P. הקדקודים של גרף זה מייצגים את הקוביות ב-P, ובין שני קדקודים בגרף נמצאת צלע, אם"ם שתי הקוביות התואמות שלהן בפ"ק נושקות זו לזו.

k – בהינתן פ"ק P בנפח n והיקף p, פרמטר k מסמן את הפחת של ההיקף p מהחסם העליון להיקף האפשרי לכל הפ"ק-יות מאותו נפח n. כלומר, זהו מספר שלם אי-שלילי, השווה לחיסור של p הנתון מהחסם העליון של p לאותו נפח n נתון. אפשר לראות את k של פ"ק נתונה כהופכי של p ביחס להיקף המקסימלי האפשרי ל-n הנתון.

יתרה – בהינתן פ"ק P, וקובית היקף X של P, היתרה של X היא מספר הקוביות השכנות של X, ששייכות ל-P, פחות 1. אם X שכנה רק של קוביה אחת מ-P, אזי היתרה שלה היא אפס. אם היא שכנה של שתיים מ-P, אזי היתרה שלה היא 1, וכן הלאה.

קוביה עודפת – קובית היקף שהיתרה שלה גדולה מאפס.

e – סימון מוסכם לסך היתרות של כל קוביות ההיקף של פ"ק נתונה.

דרגת המעגל של P – מספר הצלעות המינימלי שיש להסיר מגרף נתון כדי להביא אותו לכדי גרף-עץ.

r – סימון לדרגת המעגל של פ"ק נתונה.

מוטיבציה ויישומים

לפ"ק-יות ולחישוביהן יש שימוש בתחומים שונים: פיזיקה, סטטיסטיקה, מתמטיקה ומדעי המחשב. לענייננו, במדעי המחשב, יש לפ"ק-יות שימוש חשוב במה שקשור למידול עצמים תלת-מימדיים בצורה בדידה, צורה מיחשובית כדרך להצגתם בגרפיקה ממוחשבת.

לב המאמר

חוקרים שונים במהלך השנים הציעו דרכים שונות לחישוב $A_3(n)$ ו- $A_3(n,p)$ עבור ערכי n מסוימים (נמוכים). כותבי המאמר הנוכחי מציגים דרך מעשית לחישוב שני גורמים אלו עבור **כל ערך של n** (לפחות החל מערך די נמוך ומעלה). בסיס הפיתוח של הדרך שהם מציגים, מורכב משלוש התובנות הבאות:

א. שני גורמים **יחידים** במבנה של פ"ק P בעל נפח n קובעים את ההיקף שלו, והשינויים שהם גורמים להיקף, **זרים**.
נבנה פ"ק P בעל נפח n. במצב ההתחלתי כל n הקוביות נפרדות זו מזו. ההיקף ממילא הוא 6n.
שני הגורמים ששינויים מביא לשינוי בהיקף של P, הם:
(1) **השקה בין קוביות**. כל שתי קוביות נפרדות שהופכות לנושקות, מפחיתות 2 מסך ההיקף.
בגרף הדואלי השקה מוצגת כצלע. כל צלע שנוספת לגרף מורידה 2 מההיקף.

(2) **גידול ביתרה הכוללת** של P – פרמטר e. אם e גדל ב-1, אזי בהכרח יצרנו עיקול ב-P, איחדנו שתי קוביות היקף לאחת, ובזה הורדנו ב-1 את ההיקף.

ב. פיתוח שמציג **חסם עליון** להיקף של כל הפ"ק-יות מסדר n מסוים, כתלות באותו n: $p \leq 4n + 2$.
ממילא, פרמטר k – פחת ההיקף p מן החסם העליון לנפח n – הוא: $k = (4n + 2) - p$.

ג. פיתוח, על סמך סעיף קודם, שמביא לכדי **הצגה של פרמטר k כביטוי לינארי התלוי אך ורק ב-e וב-r**: $k = e + 2r$.

משלוש תובנות אלו בשילוב שיקולים קומבינטוריים, נגזרת **דרך מעשית למניית כלל הפ"ק-יות האפשריות עבור n ו-p קבועים** (כלומר, לחישוב $A_3(n,p)$):

בהינתן n ו-p, נדע מיד מה ערכו של הפחת k. הפחת k מורכב משני מחוברים, r ו-e. r ו-e הם מספרים שלמים אי-שליליים. להרכבה של מספר שלם אי-שלילי k מחיבור שני מספרים שלמים אי-שליליים, 2r ו-e, יש מספר סופי של אפשרויות לכל k. לכן נבחן בנפרד את כלל האפשרויות לשילוב ערכים של r ו-e, כך ש- $k = e + 2r$. עבור כל אחד, בהסתמך על שיקולים קומבינטוריים ותובנה א' מלעיל, ניתן להגיע לכדי **צורות** פ"ק מסוימות או **מחלקות-תבניות** מסוימות של פ"ק-יות בעלות מכנה קבוע. נסכום את כלל האפשרויות לאוריינטציות שונות במרחב עבור כל צורה/תבנית. בסוף נסכום את סכומי הביניים שהתקבלו מהצורות/התבניות השונות, ונקבל את $A_3(n,p)$ לערכי n ו-p הנתונים.

הצגת והמחשת דרך החישוב בפועל מתחילה בהצגה דוגמאות פרטניות של אופן החישוב עבור ערכי פחת (k) נמוכים – 0, 1, 2 ו-3. אציג לדוגמה את החישוב ל-P נתון עבור k=1, דהיינו: $A_3(n, 4n + 1)$:

משום ש- $k = e + 2r = 1$, ו-r מספר שלם אי-שלילי, אזי בהכרח יש שילוב יחיד של ערכי r ו-e עבורם k=1, והם r=0 ו- e=1. r, כאמור, הוא דרגת-המעגל של P*, ומשום שהוא 0, אזי משמע שכבר אין מעגלים בגרף P*, ובחזרה ל-P, בפ"ק P אין מקבץ של 4 קוביות הסוגרות ריבוע וגם אין שרשרת של יותר מ-4 קוביות, הסוגרת מעגל. לגבי e, משום ש- e=1, משמע שב-P ה"גולמי" כפס אחד ישר, בוצע כיפוף אחד בלבד, ושתי קוביות היקף אוחדו לאחת. מכאן, שלכל הפ"ק-יות המקיימות k=1, **יש תבנית אחת, והיא פ"ק בתבנית של האות ר'**. כלל n הקוביות מסודרות בפס אחד שכופף פעם אחת בדיוק. פס ישר של n קוביות – **יש אפשרות לכופף ב- n-2 מקומות** (מספר ההשקות בין n הקוביות בפס). את האות ר' יש אפשרות להציב ב-**12 אוריינטציות שונות במרחב** (4 אוריינטציות שונות ביחס למישור נתון, כפול 3 מישורים במרחב התלת-מימדי). לכן, סה"כ: $\boldsymbol{A_3(n, 4n + 1) = 12 \cdot (n - 2)}$.

בדוגמה שהוצגה עבור k=1 מתברר מיד, שקיים רק צירוף r ו-e אחד, ולו קיימת רק תבנית מרחבית אחת לפ"ק שתקיים k=1 (עד כדי האוריינטציה במרחב). לכן במקרה זה סך האוריינטציות לתבנית בודדת זו, הן כל סך ה- $A_3(n,p)$ ל-k זה. באופן כללי, והמאמר מציג זאת עבור $k = 2{,}3$, עשויות להתקבל בהתאם לצירופי r ו-e שונים תבניות מרחביות שונות (ולכל תבנית מספר אוריינטציות), כך ש- $A_3(n,p)$ יתקבל רק מסכימה של כלל האוריינטציות של כלל התבניות ה**שונות**.

בהמשך, כותבי המאמר מציגים הכללה של הדרך הפרטנית כפי שהוצגה עבור $k = 0{,}1{,}2{,}3$, לכדי דרך כוללת יותר באמצעות שימוש ב**פונקציה יוצרת**. עבור כל תבנית המוסקת מצירופי ה-r וה-e האפשריים, אפשר לראות כי נשארים בפונקציה היוצרת המקדמים הרלוונטיים לה. חיבור כלל הפונקציות היוצרות של כלל התבניות שווה ל- $A_3(n,p)$ שנבדק. כותבי המאמר גם מוכיחים, כי לפונקציות עצמן המייצגות את התבניות השונות יש תמיד תבנית קבועה – אלו פונקציות רציונליות עם מבנה קבוע למכנה.

לעתיד

החוקרים מתעתדים לפתח דרך לחישוב $A(n,p)$ ו- $A(n)$ לפ"ק-יות מכל מימד ולא רק מימד שלישי, ולפרמל גם את הפונקציות היוצרות שלהן וגם רכיבים פיזיים בתבניות האפשריות בהם.

עמדה אישית

המאמר הפעים אותי מאד. הוא מרשים ברמת המקוריות שנדרשה בפיתוח של הרעיונות המופיעים בו. היכולת לשלב כלים לוגיים, אנליטיים, אלגבריים וקומבינטוריים בשביל פיתוח מאד מאד יעיל ורחב מרשימה אותי מאד.