

## מטלה - חלוקת חפצים בדידים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

### שאלה 1: חלוקה ללא קנאה מלבד החפץ הכי גרוע

- הגדרה: חלוקה של חפצים נקראת "ללא קנאה מלבד החפץ הכי גרוע" (בקיצור EFX), אם לכל שני שחקנים א, ב, ולכל חפץ שנוריד מהסל של ב, שחקן א לא יקנא בשחקן ב.
- א. הראו שהתנאי EFX הוא ממש חזק יותר מהתנאי EF1 (תנו דוגמה לחלוקה EF1 שהיא לא EFX).
- ב. נניח שיש שני שחקנים עם העדפות אדיטיביות (= לכל שחקן, ערך של סל הוא סכום הערכים של החפצים בסל). תארו אלגוריתם המוצא חלוקה EFX.

### שאלה 2: אלגוריתם מעגלי הקנאה - סדר החפצים

- כזכור, אלגוריתם מעגלי-הקנאה מתחיל בכך שהוא מסדר את החפצים בסדר שרירותי כלשהו. כלומר, בכל סדר שבו נסדר את החפצים, אנחנו עשויים לקבל תוצאה שונה.
- א. הראו דוגמה עם 3 אנשים ו-3 חפצים, שבה כל סידור של החפצים נותן תוצאה אחרת (סה"כ 6 תוצאות).
- ב. הראו דוגמה עם 3 אנשים ו-3 חפצים, שבה כל סידור של החפצים נותן אותה תוצאה.
- ג. הראו דוגמה עם 3 אנשים ו-3 חפצים, שבה מספר התוצאות האפשריות גדול מ-1 וקטן מ-6.
- ד [בונוס]. היכנסו לויקיפדיה האנגלית, לדף "Envy-cycles procedure". הוסיפו כותרת חדשה Examples, והוסיפו מתחתיה את שלוש הדוגמאות שכתבתם בסעיפים הקודמים.
- הזוג הראשון שיבצע משימה זו, יקבל 2 נקודות בונוס לציון הבחינה. כדי ליזכות בנקודות, אחד מבני-הזוג צריך לפתוח חשבון ויקיפדיה בשמו המלא, כך שהעריכות יירשמו על שמו בהסטוריית העריכה.
- עצה: כדי שהעריכות שלכם יישארו בדף, ולא יימחקו ע"י עורכים אחרים, יש להסביר את הדוגמאות באופן ברור ובאנגלית תקינה.
- שימו לב: לפני שאתם מתחילים אנא ודאו שלא עשו את זה לפניכם; הניקוד הנוסף יינתן רק לזוג הראשון.

### שאלה 3: מיקסום מכפלת הערכים - חפצים רציפים

- כזכור, למדנו שאלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים נותן חלוקה שהיא ללא קנאה כאשר החפצים הם רציפים (ניתנים לחיתוך). תנו דוגמאות לחלוקה של 3 חפצים רציפים בין 2 אנשים, שבה:
- א. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים לא צריך לחתוך אף חפץ.
- ב. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים צריך לחתוך חפץ אחד בדיוק.
- ג. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים צריך לחתוך שני חפצים בדיוק.

ד. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים צריך לחתוך שלושה חפצים בדיוק.

#### שאלה 4: מיקסום מכפלת הערכים - חפצים בדידים

כזכור, למדנו שאלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים נותן חלוקה שהיא ללא-קנאה-מלבד-1 כאשר החפצים הם בדידים (לא ניתנים לחיתוך). תנו דוגמאות לחלוקה של 4 חפצים בדידים בין 2 אנשים, שבהן:

א. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים מחזיר חלוקה שהיא ממש ללא קנאה.

ב. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים מחלק את החפצים ביחס 1:3.

ג. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים מחלק את החפצים ביחס 2:2.

#### שאלה 5: תיכנות - חלוקה ללא-קנאה-בקירוב

נתונה המחלקה הבאה:

```
class Agent {  
    double item_value(int item_index);  
}
```

המחלקה מייצגת שחקן המשתתף במשחק חלוקה הוגנת. יש בה פונקציה אחת המתארת את הערך שהשחקן מייחס לחפץ שהאינדקס שלו הוא `item_index`.

כיתבו פונקציה הבודקת האם חלוקת-חפצים נתונה כלשהי היא EFX (ראו שאלה 1 למעלה). כותרת הפונקציה:

```
bool is_EF1(Agent[] agents, set<int>[] bundles);
```

הפרמטר `agents` הוא מערך בגודל `n` המייצג את השחקנים.

הפרמטר `bundles` הוא מערך באותו גודל - `n` - המייצג את החלוקה: `bundle[i]` הוא אוסף אינדקסי החפצים שמקבל שחקן `i`.

## מאמרים להרחבה ולמטלת רשות

1. Haris Aziz et al (2015): ["The Adjusted Winner Procedure: Characterizations and Equilibria"](#).
2. Brams, Steven J.; Togman, Jeffrey M. (1996). ["Camp David: Was The Agreement Fair?"](#).
3. Willson, Stephen (1995). ["Fair Division using Linear Programming"](#).
4. B Plaut, T Roughgarden (2018): ["Almost envy-freeness with general valuations"](#)
5. M Kyropoulou, W Suksompong (2019): ["Almost Envy-Freeness in Group Resource Allocation"](#).
6. S Barman, G Ghalme, S Jain, P Kulkarni (2019): ["Fair Division of Indivisible Goods Among Strategic Agents"](#)
7. H Oh, AD Procaccia, W Suksompong (2018): ["Fairly allocating many goods with few queries"](#)
8. S Barman, SK Krishnamurthy, R Vaish (2018): ["Greedy Algorithms for Maximizing Nash Social Welfare"](#).
9. G Amanatidis, G Birmpas, E Markakis (2018): ["Comparing Approximate Relaxations of Envy-Freeness"](#)
10. H Aziz, S Bouveret, I Caragiannis (2018): ["Knowledge, fairness, and social constraints"](#)