

## מטלה - חלוקת חפצים בידיים - פתרון

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

### שאלה 1: חלוקה ללא קנאה מלבד החפץ הכי גרוע

הגדרה: חלוקה של חפצים נקראת "ללא קנאה מלבד החפץ הכי גרוע" (בקיצור EFX), אם לכל שני שחקנים א, ב, ולכל חפץ שנוריד מהסל של ב, שחקן א לא יקנא בשחקן ב.

א. הראו שהתנאי EFX הוא ממש חזק יותר מהתנאי EF1 (תנו דוגמה לחלוקה EF1 שהיא לא EFX).

- **פתרון:** שני שחקנים עם ערכים זהים. הראשון מקבל 9,1,1 והשני מקבל 3. החלוקה היא EF1 כי אם מורידים את ה-9 מהראשון אז השני לא מקנא. אבל החלוקה לא EFX כי אם מורידים את ה-1 מהראשון אז השני עדיין מקנא.

ב. יש שני שחקנים עם העדפות אדיטיביות (= לכל שחקן, ערך של סל הוא סכום הערכים של החפצים בסל), וזהות (= לשני השחקנים יש אותם ערכים לכל החפצים). תארו אלגוריתם המוצא חלוקה EFX.

- **פתרון:** מסדרים את החפצים בסדר יורד של הערך, ומחלקים אותם מהגדול לקטן בעזרת אלגוריתם מעגלי הקנאה. בכל שלב, גודל הקנאה הוא לכל היותר הערך הנמוך ביותר, לכן החלוקה EFX.

ג. יש שני שחקנים עם העדפות אדיטיביות, אבל לא בהכרח זהות. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה EFX.

- **פתרון:** שחקן אחד מחלק את החפצים לשתי קבוצות בעזרת האלגוריתם של חלק ב. השחקן השני בוחר קבוצה.

### שאלה 2: אלגוריתם מעגלי הקנאה - סדר החפצים

זיכור, אלגוריתם מעגלי-הקנאה מתחיל בכך שהוא מסדר את החפצים בסדר שרירותי כלשהו. כלומר, בכל סדר שבו נסדר את החפצים, אנחנו עשויים לקבל תוצאה שונה.

א. הראו דוגמה עם 3 אנשים ו-3 חפצים, שבה כל סידור של החפצים נותן תוצאה אחרת (סה"כ 6 תוצאות).

ב. הראו דוגמה עם 3 אנשים ו-3 חפצים, שבה כל סידור של החפצים נותן אותה תוצאה.

ג. הראו דוגמה עם 3 אנשים ו-3 חפצים, שבה מספר התוצאות האפשריות גדול מ-1 וקטן מ-6.

ד. [בונוס] היכנסו לויקיפדיה האנגלית, לדף "Envy cycles procedure". הוסיפו כותרת חדשה Examples, והוסיפו מתחיה את שלוש הדוגמאות שכתבתם בסעיפים הקודמים. הזוג הראשון שיבצע משימה זו, יקבל 2 נקודות בונוס לציון הבחינה. כדי לזכות בנקודות, אחד מבני הזוג צריך לפתוח חשבון ויקיפדיה בשמו המלא, כך שהעריכות יירשמו על שמו בהסטוריית העריכה. עצה: כדי שהעריכות שלכם יישארו בדף, ולא יימחקו ע"י עורכים אחרים, יש להסביר את הדוגמאות באופן ברור ובאנגלית תקינה. שימו לב: לפני שאתם מתחילים אנא ודאו שלא עשו את זה לפניכם; הניקוד הנוסף יינתן רק לזוג הראשון. סליחה, המשימה תפוסה...

- **פתרון:** דוד טובר [https://en.wikipedia.org/wiki/Envy\\_cycles\\_procedure#Examples](https://en.wikipedia.org/wiki/Envy_cycles_procedure#Examples)

### שאלה 3: מיקסום מכפלת הערכים - חפצים רציפים

כזכור, למדנו שאלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים נותן חלוקה שהיא ללא קנאה כאשר החפצים הם רציפים (ניתנים לחיתוך). תנו דוגמאות לחלוקה של 3 חפצים רציפים בין 2 אנשים, שבהן:

- א. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים לא צריך לחתוך אף חפץ.
- ב. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים צריך לחתוך חפץ אחד בדיוק.
- ג. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים צריך לחתוך שני חפצים בדיוק.
- ד. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים צריך לחתוך שלושה חפצים בדיוק.

• **פתרון:** לא ענו.

### שאלה 4: מיקסום מכפלת הערכים - חפצים בדידים

כזכור, למדנו שאלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים נותן חלוקה שהיא ללא-קנאה-מלבד-1 כאשר החפצים הם בדידים (לא ניתנים לחיתוך). תנו דוגמאות לחלוקה של 4 חפצים בדידים בין 2 אנשים, שבהן:

- א. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים מחזיר חלוקה שהיא ממש ללא קנאה.
- ב. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים נותן חפץ 1 לאדם אחד ו-3 חפצים לשני.
- ג. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים נותן נותן 2 חפצים לכל אחד.

• **פתרון:** דור צור (להוסיף הסבר).

### שאלה 5: חלוקת תיקים בין מפלגות בקואליציה

לאחר הבחירות, שתי מפלגות החליטו להקים ממשלה ביחד, אבל הן בזבזו חודש שלם בויכוחים על איזה מפלגה תקבל איזה תיק. לאחר שהתייאשו מהויכוחים, הן פנו אליכם כדי שתעזרו להם להחליט.

א. הציעו אלגוריתם שיאפשר לשתי המפלגות להחליט על חלוקת-תיקים הוגנת ויעילה-פארטו. **שימו לב:** ההגיונות צריכה להתייחס לגדלים השונים של המפלגות - מספר המנדטים שכל מפלגה קיבלה בבחירות. למפלגה גדולה יותר יש זכות לקבל יותר תיקים (או תיקים יותר "שווים").

ב. הוכיחו שהאלגוריתם מקיים שלוש תכונות: יעילות פארטו, הגיונות (בהתאם לגדלים השונים), וחיתוך תיק אחד לכל היותר.

ג. הדגימו את פעולת האלגוריתם שלכם על אוסף התיקים שהיו באחת מממשלות ישראל האחרונות (לבחירתכם), ועל שתי מפלגות לבחירתכם.

• **פתרון:** הרעיון - בנג'י.

## שאלה 6: בעיית ה-Partition

א. קראו על "בעיית החלוקה":

[https://en.wikipedia.org/wiki/Partition\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_problem)

ב. בחרו אחד מהאלגוריתמים לפתרון היוריסטי/מקורב של הבעיה וממשו אותו בשפת-תיכנות לפי בחירתכם.

ג. הדגימו את פעולת האלגוריתם על כמה קלטים לא טריביאליים.

• **פתרון:** אור, רועי.

## שאלה 7: תיכנות - חלוקה ללא-קנאה-בקירוב

נתונה המחלקה הבאה:

```
class Agent {  
    double item_value(int item_index);  
}
```

המחלקה מייצגת שחקן המשתתף במשחק חלוקה הוגנת. יש בה פונקציה אחת המתארת את הערך שהשחקן מייחס לחפץ שהאינדקס שלו הוא `item_index`.

כיתבו פונקציה הבודקת האם חלוקת-חפצים נתונה כלשהי היא EFX (ראו שאלה 1 למעלה). כותרת הפונקציה:

```
bool is_EFX(Agent[] agents, set<int>[] bundles);
```

הפרמטר `agents` הוא מערך בגודל `n` המייצג את השחקנים.

הפרמטר `bundles` הוא מערך באותו גודל - `n` - המייצג את החלוקה: `bundle[i]` הוא אוסף אינדקסי החפצים שמקבל שחקן `i`.

• **פתרון:** איתן ודניאל.

## מאמרים להרחבה ולמטלת רשות

1. Haris Aziz et al (2015): ["The Adjusted Winner Procedure: Characterizations and Equilibria"](#).
2. Willson, Stephen (1995). ["Fair Division using Linear Programming"](#).
3. B Plaut, T Roughgarden (2018): ["Almost envy-freeness with general valuations"](#)
4. M Kyropoulou, W Suksompong (2019): ["Almost Envy-Freeness in Group Resource Allocation"](#).

5. S Barman, G Ghalme, S Jain, P Kulkarni (2019): "[Fair Division of Indivisible Goods Among Strategic Agents](#)"
6. H Oh, AD Procaccia, W Suksompong (2018): "[Fairly allocating many goods with few queries](#)"
7. S Barman, SK Krishnamurthy, R Vaish (2018): "[Greedy Algorithms for Maximizing Nash Social Welfare](#)".
8. G Amanatidis, G Birmpas, E Markakis (2018): "[Comparing Approximate Relaxations of Envy-Freeness](#)"
9. H Aziz, S Bouveret, I Caragiannis (2018): "[Knowledge, fairness, and social constraints](#)"
10. SJ Brams, TR Kaplan (2004): "[Dividing the indivisible: Procedures for allocating \*cabinet ministries\* to political parties in a parliamentary system](#)".