מטלה - מכרזים למיקסום רווח

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

שאלה 1: מכרז מסובסד

אתם קבלני-בניין ובזה הרגע סיימתם לבנות דירה. אתם מעוניינים למכור אותה באופן שיעשה אתכם כמה שיותר עשירים (בתוחלת).

יש הרבה קונים פוטנציאליים, וכל קונה מייחס לדירה ערך שונה. מסקר-שוק שביצעתם, התברר שהתפלגות הערכים באוכלוסיה היא התפלגות אחידה בין 0 ל-1000 [באלפי ש"ח].

קונים צעירים במיוחד או מבוגרים במיוחד מזכים את הקבלן בהשתתפות ממשרד השיכון באופן הבא:

- קבלן המוכר דירה לקונה בן 20 ומטה - מקבל ממשרד השיכון 100 אלף ש"ח.
- קבלן המוכר דירה לקונה בן 60 ומעלה - מקבל ממשרד השיכון 150 אלף ש"ח.

תארו מכרז אמיתי שימקסם את תוחלת הרווח שלכם. כיתבו את המנגנון בשפת-תיכנות לבחירתכם או בפסאודו-קוד. הניחו שקיימת המחלקה הבאה המייצגת קונה פוטנציאלי; ניתן להוסיף לה שיטות לפי הצורך (...)

- **פתרון**: חן אוסטרובסקי (כלל הבחירה).

פתרון חלופי: קודם-כל נוסיף כמה שיטות ל-Buyer:

```
class Buyer {
     int age;      // גיל בשנים
     int value;  // ערך באלפי ש"ח

     double virtual_value() { return 2*value-1000; }
           // הערך הוירטואלי – ראו שאלה 4א

     double bonus() { return age<20? 100: age>60? 150: 0; }

     double profit() { return virtual_value() + bonus(); }
           // תוחלת הרווח של המוכר – ערך וירטואלי ועוד בונוס
};
```

הפונקציה עצמה (בפסאודו-קוד):

```
void sellHouse(Buyer[] buyers) {
     // כלל הבחירה – בחר את הקונה עם תוחלת-הרווח הגבוהה ביותר, אם היא מעל 0
     sort(buyers by descending order of buyer.profit());
```

```
    // Now: buyers[0].profit() ≥ buyers[1].profit() ≥ ..
    if (buyers[0].profit() < 0)
         { print("The house is not sold"); return; }
    print("The house is sold to buyer "+buyers[0]);

    // כלל התשלום – ערך הסף //
    if (buyers[1].profit() < 0)// ערך הסף הוא הערך שבו תוחלת-הרווח שווה אפס
      return (1000 – buyers[0].bonus()) / 2;
        // 2 x – 1000 + buyers[0].bonus() = 0
    else                          // ערך הסף הוא הערך שבו תוחלת-הרווח שווה לזו של השני
      return (buyers[1].profit() + 1000 – buyers[0].bonus()) / 2;
        // 2 x – 1000 + buyers[0].bonus() = buyers[1].profit()
}
```

שאלה 2: מיקסום רווח עם ברירת-מחדל

מצאתם ברחוב ציור עתיק. בחנות יד שניה הציעו לכם עבורו X ש"ח. אתם רוצים להשיג סכום גבוה יותר ע"י מכירה לאספן עתיקות ידוע, שהערך שלו לציור מתפלג לפי פונקציה F.

תארו מנגנון אמיתי הממקסם את הרווח שלכם ממכירת הציור. שימו לב - המנגנון תלוי ב-F וגם ב-X.

- **פתרון**: קודם-כל נחשב את פונקציית הערך הוירטואלי של האספן:
- $r(v) = v - (1-F(v))/F'(v)$
- אם אנחנו מוכרים לאספן - תוחלת הרווח שלנו היא התוחלת של $r(v)$. אם אנחנו מוכרים לחנות - תוחלת הרווח שלנו הוא *X*. לכן, צריך למכור לאספן אם-ורק-אם $r(v)$ גדול מ-*X*. המחיר שישלם האספן הוא מחיר הסף - הערך שבו $r(v)=X$.
- לדוגמה, אם ההתפלגות של האספן היא אחידה בין 10 ל-30, אז $r(v)=2v-30$. נניח שהמחיר של החנות הוא 10. אז לפי הנוסחה, מחיר הסף של האספן יהיה 20. תוחלת הרווח שלנו תהיה: בהסתברות 0.5 - האספן קונה ומשלם 20, בהסתברות 0.5 - האספן לא קונה ומוכרים לחנות ב-10. סה"כ תוחלת הרווח 15.

שאלה 3: מכרז לקנייה

אתם מנהלים את מחלקת הרכש ברכבת ישראל. קיבלתם הוראה לקנות קרון חדש במחיר נמוך ככל האפשר. יש כמה חברות המייצרות קרונות, לכל חברה יש עלות אחרת לייצור קרון. אתם לא יודעים את העלויות של החברות השונות, אבל מתוך נתונים סטטיסטיים שאספתם, אתם יודעים שעלות-הייצור מתפלגת לפי פונקציה F (התפלגות זהה עבור כל החברות).

הנהלת הרכבת מעריכה, שהתועלת שתפיק מהקרון היא U (מספר ידוע - נניח 20 מיליארד ש"ח).

תארו מנגנון אמיתי לקניית קרון, שבו תוחלת התועלת של רכבת-ישראל תהיה מקסימלית.

- **פתרון**: ירדן בן-אמיתי :-)
- פתרון חלופי:

אם הרכבת לא קונה - הערך שלה הוא 0.

אם קונה - הערך הוא U פחות המחיר. אפשר להתייחס למחיר כתשלום שלילי, ואז הערך הוא U ועוד התשלום השלילי.

לפי משפט מיירסון, תוחלת התשלום (השלילי) שווה לתוחלת סכום הערכים הוירטואליים של המוכרים (במקרה הזה הערכים הם שליליים; ערך = מינוס עלות). כיוון שאנחנו קונים רק חפץ אחד, הכי טוב לקנות מהמוכר עם הערך הגבוה ביותר (= העלות הנמוכה ביותר). כלומר צריך לבחור בין:

- לא לקנות - סכום הערכים הוירטואליים הוא 0.
- לקנות מהמוכר עם העלות הכי נמוכה - סכום הערכים הוירטואליים הוא $U + r(-c)$ כאשר c הוא העלות הנמוכה ביותר ו-r הוא פונקציית הערך הוירטואלי:

$$r(-c) = -c - (1-F(-c))/F'(-c)$$

כדי למקסם את התועלת שלנו, נבחר לקנות מהמוכר עם העלות הנמוכה ביותר, בתנאי שהעלות מספיק נמוכה כך ש:

$$U + r(-c) > 0$$

נשלם לו את ערך הסף שלו – כלומר את הערך c שעבורו:

$$U + r(-c) = 0$$

$$c = - [r^{-1}(-U)]$$

למשל, אם העלות מתפלגת באופן אחיד בין 10 ל-30, אז הערך מתפלג אחיד בין -10 ל -30. לפי הנוסחה בשאלה 4א, הערך הוירטואלי הוא:

$$r(-c) = 2*(-c) - (-10) = 10-2c$$

והתשלום הוא:

$$\mathbf{p = min [30 , (U+10)/2]}$$

לסיכום: המכרז הוא "קנה תמורת p מהמוכר עם העלות הנמוכה ביותר, בתנאי שהעלות נמוכה מ (U+10)/2".

שאלה 4: ערך וירטואלי בהתפלגות אחידה

נניח שהערך של קונה מסויים מתפלג אחיד בין a ל- b (שני פרמטרים חיוביים).

א. כיתבו ביטוי לפונקציית הערך הוירטואלי של הקונה, $r(v)$, כפונקציה של a,b.

- **פתרון**: עלי מסראוה. $r(v)=2v-b$

ב. כיתבו ביטוי למחיר האופטימלי למכירת חפץ כלשהו לקונה זה, $r^{-1}(0)$.

- $r^{-1}(0) = b/2$
- אבל המחיר האופטימלי למכירה לקונה זה (בהנחה שהוא הקונה היחיד) הוא:
- max(b/2, a)

ג. כיתבו ביטוי לתוחלת הרווח של המוכר כאשר הוא מוכר רק לקונה זה, ומשתמש במחיר האופטימלי.

- **פתרון**: אם b/2<a, אז המחיר הוא תמיד a, הקונה תמיד קונה ומשלם a, והרווח הוא a.
- אחרת, הקונה קונה בהסתברות:
- (b-b/2)/(b-a) = b/(2b-2a)
- ומשלם b/2, ותוחלת הרווח היא
- b^2/(4b-4a)

שאלה 5: התפלגות אמפירית וערך וירטואלי

כפי שלמדנו בכיתה, מכרז מיירסון למיקסום רווח משתמש בפונקציית הערך הוירטואלי, והיא משתמשת בפונקציית התפלגות ההסתברות:

F(x) = Prob[v < x]

r(x) = x - [1-F(x)]/F'(x)

ברוב המקרים, הפונקציה F אינה ידועה, ואנחנו צריכים לחשב אותה בקירוב מתוך נתונים סטטיסטיים.

כיתבו מחלקה לחישוב פונקציה זו. במחלקה יהיו לפחות שלוש שיטות:

- איתחול (בנאי) - מקבל וקטור של ערכים (שנאספו בסקרי-שוק).
- F - מקבלת ערך x, ומחזירה את ההסתברות האמפירית שהערך יהיה קטן מ-x. שימו לב - הפונקציה F תמיד מחזירה ערך בין 0 ל-1.
- r - מקבלת ערך x, ומחזירה את הערך הוירטואלי המתאים.

הוסיפו שיטות נוספות לפי הצורך.

```
class Distribution {
     Distribution(int[] values);
     double F(int x);
     double r(int x);
}
```

- **רעיון הפתרון**:

- בבנאי, צריך לסדר את הערכים בסדר עולה ולשמור אותם.
- בפונקציה F, עוברים על הערכים מהקטן לגדול, סופרים כמה ערכים קטנים מ-x, ומחלקים במספר הערכים הכולל (זה קירוב להסתברות שהערך קטן מ-x). בפרט, אם x קטן מהערך המינימלי מחזירים 0 ואם הוא גדול מהערך המקסימלי מחזירים 1.
- צריך גם פונקציה dF שמחשבת בקירוב את הנגזרת של F. דרך אפשרית לעשות זאת היא למצוא את הקטע שבו נמצא x – למצוא שני מספרים סמוכים בטבלת הערכים, a ו-b, המקיימים:
  - $a \le x \le b$
- ואז הקירוב לנגזרת בנקודה x הוא השיפוע של F בין a ל b:
  - $(1/n)/(b-a)$