

# מטלה - חלוקה הוגנת של קרקעות ועוגות

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

## שאלה 1: חלוקה פרופורציונלית בשני מימדים

א. נתונה חלקת-אדמה בצורת מלבן. תארו אלגוריתם הנותן חלוקה פרופורציונלית של העוגה בין  $n$  אנשים, כך שכל אחד מקבל מלבן.

ב. הסבירו מהי צורה קמורה ותנו דוגמאות (ראו בויקיפדיה: [https://en.wikipedia.org/wiki/Convex\\_set](https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_set))

ג. נתונה חלקת-אדמה דו-ממדית קמורה. תארו אלגוריתם הנותן חלוקה פרופורציונלית של העוגה בין  $n$  אנשים, כך שכל אחד מקבל פרוסה קמורה.

## שאלה 2: חלוקת תורנויות פרופורציונלית

אמא ואבא נסעו לנופש, והשאירו את  $n$  ילדיהם הגדולים לשמור על התינוקות ה- $n+1$ . הילדים לא כל כך רוצים לשמור אבל אין להם ברירה, אז הם החליטו לחלק ביניהם את הזמן ולעשות תורנויות. לכל ילד יש העדפות שונות לגבי הזמן ביום שהכי קשה לשמור בו - יש כאלה שהכי קשה להם לשמור בלילה, יש כאלה שהכי קשה להם לשמור דווקא בצהריים, וכו'.

א. הגדירו בפירוט מהי חלוקה פרופורציונלית במצב זה (מדוע זה שונה ממה שלמדנו בכיתה?).

ב. כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית של זמן השמירה, כך שכל ילד מקבל תורנות רצופה.

## שאלה 3: חלוקת תורנויות ללא קנאה

אמא ואבא נסעו לנופש וכו', כמו בשאלה 2.

א. תארו אלגוריתם שבו כל אחד מהילדים מקבל תורנות רצופה, והחלוקה היא ללא-קנאה-בקירוב (עד כדי שניה אחת).

ב. תנו דוגמה הממחישה את פעולת האלגוריתם של סעיף א.

## שאלה 4: חלוקה עם זכויות לא שוות (unequal entitlements)

עמי ותמי עזרו לאמא להכין עוגה, אבל תמי עזרה יותר. עמי השקיע שעתיים ותמי השקיעה חמש שעות. אמא רוצה לחלק את העוגה ביניהם בצורה הוגנת בהתאם להשקעה.

א. תנו הגדרה הגיונית למושג "חלוקה פרופורציונלית" במצב זה.

ב. כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית.

## שאלה 5: שינוי חלוקה קיימת

עמי רמי ותמי חילקו ביניהם עוגה בצורה פרופורציונלית (כל אחד קיבל לפחות  $1/3$ ). הם התיישבו לאכול, אבל לפני שהספיקו - נכנסה צומי וטענה שגם לה מגיע חלק. פתחו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית (כל אחד מקבל לפחות  $1/4$ ), ובנוסף, נותן לכל אחד משלושת הילדים הראשונים (עמי רמי ותמי) לפחות  $3/4$  מהערך שהיה לו בחלוקה הראשונה.

## שאלה 6: חלוקה ללא קנאה עם שארית

נתון האלגוריתם הבא לחלוקה בין 3 אנשים (דומה לצעד הראשון של אלגוריתם סלפרידג'-קונוויי):

- 1. עמי חותך את העוגה לשלושה חלקים שווים בעיניו.
  - 2. תמי מקצצת את הפרוסה הטובה ביותר בעיניה, כך שיהיו לה שתי פרוסות טובות ביותר.
  - 3. השחקנים בוחרים פרוסה מבין הפרוסות הנמצאות על השולחן, לפי הסדר: רמי - תמי - עמי.
- שימו לב - באלגוריתם זה לא כל העוגה מחולקת - יש שארית הנשארת על השולחן.

א. הוכיחו שהחלוקה המתקבלת היא ללא קנאה, וכל שחקן מקבל פרוסה השווה בעיניו לפחות  $1/4$  מהשווי הכללי של העוגה.

ב. עכשיו נניח שצריך לחלק עוגה בין 4 שחקנים. תארו אלגוריתם לחלוקה עם שארית, הנותן חלוקה ללא קנאה, שבה כל שחקן מקבל פרוסה השווה בעיניו לפחות  $1/8$  מהשווי הכללי של העוגה.

## שאלה 7: תיכנות - חלוקת-עוגה פרופורציונלית

נניח שרוצים לחלק נהר חד-ממדי, המיוצג ע"י הקטע  $[0,1]$ . כל משתתף מיוצג ע"י המחלקה הבאה:

```
class Agent {
    double eval(double x);
        // INPUT:  x, a number between 0 and 1.
        // OUTPUT: v, the value of [0,x]

    double mark(double v);
        // INPUT:  v, a number between 0 and 1.
        // OUTPUT: a number such that the value of [0,x] is v.
}
```

א. כיתבו בשפה לבחירתכם (אפשר גם פסאודו-קוד) את אלגוריתם "חתוך ובחר":

```
void cutAndChoose(Agent a, Agent b)
```

הפונקציה מקבלת שני שחקנים וכותבת את החלוקה בפורמט הבא (לדוגמה):

*Agent a receives [0,0.3]. Agent b receives [0.3,1].*

ב. כיתבו בשפה לבחירתכם את אלגוריתם "המפחית האחרון":

```
void lastDiminisher(Agent[] agents)
```

הפונקציה מקבלת מערך של שחקנים וכותבת את החלוקה בפורמט הבא (לדוגמה):

*Agent 0 receives [0,0.3]. Agent 1 receives [0.3,0.6]. Agent 2..*

## מאמרים להרחבה ולמטלת רשות

1. Woeginger, Gerhard J. (2007). "On the complexity of cake cutting". Discrete Optimization. 4 (2): 213–220. [doi:10.1016/j.disopt.2006.07.003](https://doi.org/10.1016/j.disopt.2006.07.003).
2. Agnes Cseh, Tamas Fleiner (2018): "The Complexity of Cake Cutting with Unequal Shares". <https://arxiv.org/pdf/1709.03152.pdf>
3. Procaccia, Ariel (2009). "[Thou Shalt Covet Thy Neighbor's Cake](#)". IJCAI'09 Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence: 239–244.
4. Aziz, Haris; MacKenzie, Simon (2016). "A discrete and bounded envy-free cake cutting protocol for any number of agents". FOCS 2016. [arXiv:1604.03655](https://arxiv.org/abs/1604.03655). להתעקד באלגוריתמים 1,2 כולל הדגמה.
5. X Bei, G Huzhang, W Suksompong (2018). [Truthful Fair Division without Free Disposal](#). arXiv:1804.06923.
6. G. Cheze (2018), "[How to share a cake with a secret agent](#)"
7. G. Cheze (2018), "Don't cry to be the first! Symmetric fair division exist"  
<https://arxiv.org/abs/1804.03833>
8. R Freeman, DM Pennock, JW Vaughan (2019), [An Equivalence Between Wagering and Fair-Division Mechanisms](#)
9. [Frédéric Meunier](#), [Shira Zerbib](#) (2019): "Envy-free cake division without assuming the players prefer nonempty pieces"
10. L. Kranich (2018): "[Divide-and-choose with nonmonotonic preferences](#)"