

מטלה - שידוכים ושיבוצים - פתרון

שאלה 1: שידוך יציב ויעילות

א. הוכיחו שכל שידוך יציב הוא יעיל-פארטו, אבל ההיפך לא נכון.

- **פתרון חלק ראשון:** נניח בשלילה שיש שיפור פארטו. אז קיים מישור שמצבו השתפר. נניח בה"כ שזה סטודנט ונקרא לו s . אז במקור, s משודך למחלקה m_1 , ובשיפור, s משודך למחלקה m_2 שהיא טובה יותר עבורו. כיוון שזה שיפור פארטו, המחלקה לא מפסידה. לכן m_2 מעדיפה את s על-פני השידוך המקורי שלה. מכאן ש (s, m_2) הם זוג מערער בשידוך המקורי - כלומר השידוך המקורי לא יציב.

- **פתרון חלק שני:** במצגת.

ב. נניח שכל סטודנט מייחס ערך מספרי לכל מחלקה, כאשר המחלקה הכי גרועה בעיניו מקבלת 1, המחלקה הבאה מקבלת 2, וכו' (אם יש m מחלקות אז המחלקה הכי טובה מקבלת m). גם כל מחלקה מייחסת ערך מספרי לכל סטודנט באותו אופן. האם כל שידוך יציב ממקסם את סכום הערכים? הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.

- **פתרון:** ?

שאלה 2. תיכון מערכת לשיבוץ

בעקבות תלונות על תהליך השיבוץ בין מתנדבות שירות-לאומי לבין מקומות-שירות, קיבלתם מכתב מרשות השירות הלאומי המבקש מכם לתכנן מערכת שיבוץ חדשה. המערכת אמורה לקבל קלט מהמתנדבות וממקומות-השירות, ולהחזיר כפלט את השיבוץ. הדרישות מהמערכת:

1. המערכת יכולה לשבץ כמה מתנדבות לכל מקום-שירות, בהתאם למספר התקנים במקום-השירות (מספר התקנים הוא בין 1 ל-100).
 2. הפלט אמור להתקבל במהירות - דקות ספורות לאחר שכל המתנדבות ומקומות-השירות סיימו להקליד את הקלט.
 3. לאחר שהתקבל שיבוץ - אף מתנדבת לא יכולה לשפר את מצבה על-ידי פניה טלפונית למקום-שירות שהיא מעדיפה על-פני זה ששובצה אליו, כי אף מקום-שירות כזה לא ירצה אותה. ולהיפך: אף מקום-שירות לא יכול לשפר את מצבו על-ידי פניה טלפונית למתנדבת שהוא מעדיף על-פני אלה ששובצו אליו, כי אף מתנדבת כזאת לא תרצה אותו.
 4. בשלב הקלט, אף מתנדבת לא יכולה לשפר את מצבה על-ידי הכנסת קלט לא אמיתי.
- תארו את המערכת בפירוט. יש להסביר את המערכת בעברית באופן שראש הרשות לשירות לאומי יוכל להבין. אין להשתמש בביטויים כמו "כפי שלמדנו בכיתה" כיוון שראש הרשות לא היה בכיתה...
- א. מהו הקלט למערכת? מה הם מסכי-הקלט הדרושים, מי צריך להשתמש בכל מסך ומה בדיוק להקליד שם? תנו דוגמה לכל מסך.
- ב. לאחר שכל המשתתפים סיימו להקליד את הקלט, איך בדיוק מתבצע האלגוריתם? הדגימו את פעולת האלגוריתם והפלט שלו על הקלט של סעיף א.

ג. הוכיחו שהאלגוריתם מקיים את תכונה 2 ע"י חישוב סיבוכיות זמן הריצה שלו.

• **פתרון:** אתי יערה ושי.

שאלה 3: כמה שידוכים יציבים יש?

כשיש 3 סטודנטים ו-3 מחלקות, יש 6 שידוכים אפשריים (3 עצרת). כמה מהם יציבים?

א. הראו דוגמה שבה יש רק שידוך יציב אחד.

• **פתרון:** בנג'י.

ב. הראו דוגמה שבה יש בדיוק 2 שידוכים יציבים.

ג. האם ייתכן שכל 6 השידוכים הם יציבים? אם כן - הראו דוגמה, אם לא - הוכיחו.

• **פתרון לא נכון:** אפשר להריץ את אלגוריתם קבלה על תנאי בשני כיוונים (צד א בוחר או צד ב בוחר), ולכן רק שני שידוכים יציבים. זה לא נכון כי ייתכן שיש שידוכים יציבים שהאלגוריתם לא מוצא.

• חן היתה בכיוון, ותיארה דוגמה שנראתה בהתחלה כאילו שיש בה 6 שידוכים יציבים. אבל, לאחר שבדקתי אותה בעזרת התוכנה של איתן ודניאל (שאלה 7) התברר שיש בה רק 3 שידוכים יציבים. הנה הפלט של התוכנית:

Team 1:

```
{Aviva={Rafi=1, Shlomo=2, Tomer=3}, Batia={Rafi=3, Shlomo=1, Tomer=2},  
Galia={Rafi=2, Shlomo=3, Tomer=1}}
```

Team 2:

```
{Rafi={Aviva=3, Batia=1, Galia=2}, Shlomo={Aviva=2, Batia=3, Galia=1},  
Tomer={Aviva=1, Batia=2, Galia=3}}
```

Matchings:

```
{Aviva=Rafi, Batia=Shlomo, Galia=Tomer}: stable  
{Aviva=Rafi, Batia=Tomer, Galia=Shlomo}: unstable  
{Aviva=Shlomo, Batia=Rafi, Galia=Tomer}: unstable  
{Aviva=Shlomo, Batia=Tomer, Galia=Rafi}: stable  
{Aviva=Tomer, Batia=Rafi, Galia=Shlomo}: stable  
{Aviva=Tomer, Batia=Shlomo, Galia=Rafi}: unstable
```

לסיכום: השאלה עדיין פתוחה.

שאלה 4: מי נשאר בחוץ?

נניח שמספר הסטודנטים גדול ממספר המחלקות (ובכל מחלקה יש מקום אחד). במצב זה, בכל שידוך, חלק מהסטודנטים יישארו בחוץ.

א. הראו דוגמה עם 3 סטודנטים ו-2 מחלקות, שבה יש לפחות שני שידוכים יציבים. מיצאו את שניהם והראו איזה סטודנט נשאר בחוץ בכל שידוך יציב.

ב. הוכיחו, שבכל שידוך יציב (לא משנה באיזה אלגוריתם מצאנו אותו), אותם סטודנטים יישארו בחוץ. כלומר, אם מיישמו נשאר בחוץ בשידוך יציב א, אז הוא נשאר בחוץ גם בשידוך יציב ב.

• **פתרון:** ראו בויקיפדיה בדף "Rural hospitals theorem".

שאלה 5: אלגוריתם קבלה-על-תנאי

א. הראו דוגמה עם 3 סטודנטים ו-3 מחלקות שבו אלגוריתם קבלה-על-תנאי מחזיר תמיד את אותו שידוך, בין אם הסטודנטים מציעים או המחלקות מציעות. תארו את ריצת האלגוריתם בכל אחד מהמצבים.

• **פתרון:** אם סטודנט i מדרג במקום הראשון את מחלקה i ולהיפך, אז בכל ריצה יהיה רק שידוך אחד שבו סטודנט i משודך למחלקה i (זה השידוך היציב היחיד).

ב. הוכיחו שאלגוריתם קבלה-על-תנאי כשהמחלקות מציעות, מחזיר את השידוך היציב הכי גרוע עבור הסטודנטים מכל השידוכים היציבים (רמז: הוכיחו שכל שידוך יציב שהוא הכי טוב עבור המחלקות, הוא הכי גרוע עבור הסטודנטים).

• **פתרון:** נתבונן בשני שידוכים יציבים: שידוך א ושידוך ב. נניח שכל המחלקות מעדיפות את שידוך א. נוכיח שכל הסטודנטים מעדיפים את שידוך ב.

נניח בשלילה שיש סטודנט כלשהו s המעדיף את שידוך א. כלומר הוא מעדיף את המחלקה שלו בשידוך א (נניח m), על-פני המחלקה שלו בשידוך ב (נניח n). לפי ההנחה, m מעדיפה את s על-פני הסטודנט שלה בשידוך ב. לכן, (s, m) הם זוג מערער על שידוך ב. זו סתירה להנחה ששידוך ב הוא יציב. ***

עכשיו נחזור לשאלה. אלגוריתם קבלה-על-תנאי כשהמחלקות מציעות מחזיר את השידוך היציב הכי טוב למחלקות, ולכן לפי משפט-העזר שהוכחנו למעלה זה השידוך היציב הכי גרוע לסטודנטים.

ג. באלגוריתם "קבלה על תנאי", כל מחלקה מדרגת את הסטודנטים בלי לראות מה הסטודנטים דירגו. נניח עכשיו שאנחנו מאפשרים למחלקות לראות את הדירוג של הסטודנטים לפני שהן מפרסמות את הדירוג שלהן. האם האלגוריתם עדיין אמיתי?

• **תשובה:** האלגוריתם כבר לא אמיתי, כי הדירוג של מחלקה יכול להיות תלוי בדירוג של הסטודנט. למשל, מחלקה יכולה להגיד "אני מקבלת רק את מי שדירג אותי במקום הראשון". ואז, סטודנט שחושב שלא יצליח להתקבל למחלקה הראשונה שלו, יעדיף לדרג את המחלקה השניה שלו במקום ראשון, כדי שיהיה לו סיכוי להתקבל לשם. לכן, כשממשיכים את האלגוריתם במציאות, מקפידים מאוד על סדירות.

שאלה 6: שידוך יציב לפי גובה

בליגת כדורסל מסויימת, לכל שחקן יש העדפות שונות על הקבוצות, אבל לכל הקבוצות יש אותן העדפות על השחקנים - כל הקבוצות מדרגות את השחקנים מהגבוה לנמוך. כיתבו אלגוריתם לשידוך יציב בין קבוצות לשחקנים, שהוא פשוט יותר מאלגוריתם קבלה-על-תנאי, אך עדיין אמיתי. הוכיחו שהוא אמיתי.

• **פתרון:** מסדרים את השחקנים מהגבוה לנמוך. כל שחקן לפי התור בוחר את הקבוצה שהוא הכי רוצה, מבין הקבוצות שיש בהן מקום פנוי.

ברוך ה' חונן הדעת

- הוכחה שזה יציב: אריק וטל.
- הוכחה שזה אמיתי: יואב.

שאלה 7: תיכנות - יציבות

כיתבו אלגוריתם המקבל שידוך ובודק אם הוא יציב.

בניגוד למטלות הקודמות, הפעם אתם תגדירו את מבני-הנתונים הדרושים, פורמט הקלט והפלט.

- **פתרון:** איתן ודניאל.