

מטלה - חלוקה יעילה

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

שאלה 1: מיקסוס סכום של פונקציה עולה

נניח שאנחנו מחלקים "עוגה", המייצגת אוסף של משאבים, בעזרת בעיית האופטימיזציה הבאה:

Maximize $(V_1(X_1))^{0.6} + (V_2(X_2))^{0.6}$
such that (X_1, X_2) is a partition

(מציאת מקסימום של הסכום של הערכים בחזקת 0.6).

א. תנו דוגמה לבעיית-חלוקה שבה הפתרון הוא יעיל-פארטו וגם הוגן (ללא קנאה). תארו את הבעיה בטבלה, תארו את הפתרון, והוכיחו שהפתרון הוגן.

ב. תנו דוגמה לבעיית-חלוקה שבה הפתרון הוא יעיל-פארטו אבל לא הוגן (יש קנאה). תארו את הבעיה בטבלה, תארו את הפתרון, והוכיחו שהפתרון לא הוגן.

פתרון: יערה אתי ושי.

שאלה 2: חישוב חלוקה הוגנת ויעילה

עמי תמי וצומי רוצים להשתמש במחשב-העל המחלקתי לצורך ביצוע חישובים מורכבים. הערך של עמי הוא: 1*כמות הדיסק שהוא מקבל ועוד 2*כמות המעבד שהוא מקבל ועוד 3*כמות הזיכרון שהוא מקבל. הערכים של תמי ושל צומי נקבעים באופן דומה רק עם מספרים שונים, בהתאם לטבלה הבאה:

דיסק	מעבד	זיכרון	
1	2	3	עמי
4	5	6	תמי
7	8	9	צומי

כיתבו פקודה בשפת Mathematica (או בשפה אחרת לבחירתכם) המוצאת חלוקה יעילה-פארטו וללא קנאה של משאבי המיחשוב.

פתרון: ראובן ואביתר.

שאלה 3: יעילות-פארטו חלשה וחזקה

הגדרות:

- מצב א נקרא **שיפור פארטו חזק** של מצב ב, אם מצב א טוב יותר לכל המשתתפים.
- מצב א נקרא **יעיל פארטו חלש** אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור-פארטו-חזק שלו.

א. תנו דוגמה לחלוקה שהיא יעילה-פארטו-חלש אבל לא יעילה-פארטו.

ב. הוכיחו שכל חלוקה יעילה-פארטו היא גם יעילה-פארטו-חלש.

ג. הוכיחו, שאם פונקציות הערך של כל השחקנים הן חיוביות ממש בכל נקודה ונקודה בעוגה, אז כל חלוקה יעילה-פארטו-חלש היא גם יעילה-פארטו.

ד. הוכיחו, שאם לכל השחקנים ישנה אותה פונקציית-ערך, אז כל החלוקות הן יעילות-פארטו.

פתרון: סעיפים א, ב, ד: עמנואל.

סעיף ג: נתונה חלוקה X . נניח שקיימת חלוקה y שהיא שיפור-פארטו של X . נוכיח שקיימת חלוקה Z שהיא שיפור-פארטו-חזק של X .

הוכחה: בחלוקה y יש שחקן אחד לפחות (נניח j) שהערך שלו גדול ממש מבחלוקה X , ולכל שאר השחקנים הערך גדול לפחות כמו ב- X .

ניקח לשחקן j כמות קטנה מאוד מכל אחד מהמשאבים; הערך שלו עדיין גדול ממש מבחלוקה X . נחלק את המשאבים שלקחנו מ- j בין השחקנים האחרים שווה בשווה; כיוון שלכל משאב יש ערך חיובי לכל שחקן, הערך של כל שאר השחקנים גדל ממש. לכן הערך של כל שאר השחקנים גדול ממש מבחלוקה X .

קיבלנו חלוקה חדשה Z שהיא שיפור פארטו חזק של X . ***

שאלה 4: מיקסום סכום הערכים תחת אילוצי הגינות

נתונה הבעיה:

Maximize $V_1(X_1) + V_2(X_2)$
such that (X_1, X_2) is a partition
and $V_1(X_1) \geq 1/2$ and $V_2(X_2) \geq 1/2$

א. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה פרופורציונלית.

ב. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה יעילה-פארטו.

ג. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה ללא-קנאה.

פתרון: סעיפים א, ג: דניאל ואיתן.

סעיף ב: נניח בשלילה שקיים שיפור פארטו Y . לפי הגדרת שיפור פארטו, החלוקה Y עדיין מקיימת את האילוץ של הבעיה, כי:

$$V_1(Y_1) \geq V_1(X_1) \geq 1/2, \quad V_2(Y_2) \geq V_2(X_2) \geq 1/2$$

אבל סכום הערכים ב- Y גדול ממש מב- X :

$$V_1(Y_1) + V_2(Y_2) > V_1(X_1) + V_2(X_2)$$

זו בסתירה להנחה ש- X היא פתרון של בעיית המקסימיזציה. ***

שאלה 5: תיכנות - יעילות פארטו

מטרת האלגוריתם היא לבדוק האם בחירה מסויימת היא יעילה פארטו. ישנם כמה שחקנים הצריכים לבחור באפשרות אחת מתוך כמה אפשרויות. כל שחקן מייחס ערך מסויים לכל אחת מהאפשרויות, לפי המחלקה הבאה:

```
class Agent {
    double value(int option);
    // INPUT: the index of an option.
```

ברוך ה' חונן הדעת

```
// OUTPUT: the value of the option to the agent.
```

```
}
```

א. כיתבו אלגוריתם המקבל מערך של שחקנים ושתי אפשרויות (כל אפשרות מיוצגת ע"י מספר שלם),
ובודק האם אפשרות 1 היא שיפור פארטו של אפשרות 2:

```
bool isParetoImprovement(Agent[] agents, int option1, int option2)
```

ב. כיתבו אלגוריתם המקבל מערך של שחקנים, אפשרות, ומערך של כל האפשרויות, ובודק האם
האפשרות הנתונה יעילה פארטו:

```
bool isParetoOptimal(Agent[] agents, int option, int[] allOptions)
```

פתרון: יואב.