

מטלה - חלוקה יעילה

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

שאלה 1: מיקסום סכום של פונקציה עולה

נניח שאנחנו מחלקים "עוגה", המייצגת אוסף של משאבים, בעזרת בעיית האופטימיזציה הבאה:

Maximize $(V_1(X_1))^{0.6} + (V_2(X_2))^{0.6}$
such that (X_1, X_2) is a partition

(מציאת מקסימום של הסכום של הערכים בחזקת 0.6).

א. תנו דוגמה לבעיית-חלוקה שבה הפתרון הוא יעיל-פארטו וגם הוגן (ללא קנאה). תארו את הבעיה בטבלה, תארו את הפתרון, והוכיחו שהפתרון הוגן.

ב. תנו דוגמה לבעיית-חלוקה שבה הפתרון הוא יעיל-פארטו אבל לא הוגן (יש קנאה). תארו את הבעיה בטבלה, תארו את הפתרון, והוכיחו שהפתרון לא הוגן.

שאלה 2: חישוב חלוקה הוגנת ויעילה

עמי תמי וצומי רוצים להשתמש במחשב-העל המחלקתי לצורך ביצוע חישובים מורכבים. הערך של עמי הוא: 1*כמות הדיסק שהוא מקבל ועוד 2*כמות המעבד שהוא מקבל ועוד 3*כמות הזיכרון שהוא מקבל. הערכים של תמי ושל צומי נקבעים באופן דומה רק עם מספרים שונים, בהתאם לטבלה הבאה:

עמי	תמי	צומי	זיכרון	מעבד	דיסק
3	6	9	2	5	8
1	4	7	1	4	7

כיתבו פקודה בשפת Mathematica (או בשפה אחרת לבחירתכם) המוצאת חלוקה יעילה-פארטו וללא קנאה של משאבי המיחשוב.

שאלה 3: יעילות-פארטו חלשה וחזקה

הגדרות:

- מצב א נקרא **שיפור פארטו חזק** של מצב ב, אם מצב א טוב יותר לכל המשתתפים.
- מצב נקרא **יעיל פארטו חלש** אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור-פארטו-חזק שלו.

א. תנו דוגמה לחלוקה שהיא יעילה-פארטו-חלש אבל לא יעילה-פארטו.

ב. הוכיחו שכל חלוקה יעילה-פארטו היא גם יעילה-פארטו-חלש.

ג. הוכיחו, שאם פונקציות הערך של כל השחקנים הן חיוביות ממש בכל נקודה ונקודה בעוגה, אז כל חלוקה יעילה-פארטו-חלש היא גם יעילה-פארטו.

ד. הוכיחו, שאם לכל השחקנים ישנה אותה פונקציית-ערך, אז כל החלוקות הן יעילות-פארטו.

שאלה 4: מיקסום סכום הערכים תחת אילוצי הגינות

נתונה הבעיה:

Maximize $V_1(X_1) + V_2(X_2)$
such that (X_1, X_2) is a partition
and $V_1(X_1) \geq 1/2$ and $V_2(X_2) \geq 1/2$

א. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה פרופורציונלית.

ב. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה יעילה-פארטו.

ג. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה ללא-קנאה.

שאלה 5: תיכנות - יעילות פארטו

מטרת האלגוריתם היא לבדוק האם בחירה מסויימת היא יעילה פארטו. ישנם כמה שחקנים הצריכים לבחור באפשרות אחת מתוך כמה אפשרויות. כל שחקן מייחס ערך מסויים לכל אחת מהאפשרויות, לפי המחלקה הבאה:

```
class Agent {  
    double value(int option);  
    // INPUT: the index of an option.  
    // OUTPUT: the value of the option to the agent.  
}
```

א. כיתבו אלגוריתם המקבל מערך של שחקנים ושתי אפשרויות (כל אפשרות מיוצגת ע"י מספר שלם), ובודק האם אפשרות 1 היא שיפור פארטו של אפשרות 2:

```
bool isParetoImprovement(Agent[] agents, int option1, int option2)
```

ב. כיתבו אלגוריתם המקבל מערך של שחקנים, אפשרות, ומערך של כל האפשרויות, ובודק האם האפשרות הנתונה יעילה פארטו:

```
bool isParetoOptimal(Agent[] agents, int option, int[] allOptions)
```

מאמרים להרחבה ולמטלת רשות

1. [Anna Bogomolnaia](#) , [Hervé Moulin](#) , [Fedor Sandomirskiy](#) , [Elena Yanovskaya](#) (2017): "[Competitive division of a mixed manna](#)"
2. Walter Stromquist (2007), "[A Pie That Can't Be Cut Fairly](#)"
3. Dall'Aglia, M. (2001): "The Dubins–Spanier optimization problem in fair division theory". J. Comput. Appl. Math. 130(1–2), 17–40
4. Dall'Aglia, M., Hill, T.P. (2003): "Maximin share and minimax envy in fair-division problems". J. Math. Anal. Appl.
5. [D Kurokawa](#), [AD Procaccia](#), [N Shah](#) (2018), "[Leximin Allocations in the Real World](#)".
6. [Y Chen](#), JK Lai, [DC Parkes](#), [AD Procaccia](#) (2013): "[Truth, justice, and cake cutting](#)".