מטלה - מכרזים אמיתיים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

שאלה 1: וריאציות על מכרז ויקרי (הקורס של טים, שאלות 27, 29)

א. ויקי המציאה מכרז חדש למכירת חפץ יחיד: מי שההכרזה שלו גבוהה ביותר זוכה בחפץ, ומשלם את המחיר **השלישי** (במקום המחיר השני במכרז ויקרי). האם המכרז של ויקי אמיתי? הוכיחו.

ב. כדי לגייס כסף לשיפוץ הבית, החלטתם למכור את אוסף העטים הנדירים שלכם. באוסף יש 10 עטים זהים. ישנם 20 אנשים המעוניינים להשתתף במכרז. כל אחד מעוניין בעט אחד לכל היותר. תארו מכרז אמיתי ויעיל פארטו למכירת העטים.

• פתרון: א – דניאל ואיתן. ב – ירדן בן-אמיתי.

שאלה 2: מכרזי פירסום - איכות המודעה (הקורס של טים, תרגילים 32, 34)

בשיעור הנחנו, שהסתברות ההקלקה על מודעה מסויימת תלויה רק במיקום שלה ולא במודעה. במציאות, הסתברות ההקלקה על מודעה תלויה גם במיקום וגם במודעה עצמה.

א. נניח שלכל מודעה j יש מקדם איכות q_i והסתברות ההקלקה כששמים אותה במקום א. נניח שלכל

$$r_{j,k} = r_k * q_j$$

תארו אלגוריתם המשבץ מודעות למיקומים וממקסם את סכום הערכים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

- פתרון: הערך המטוצע של מפרסס j כששמים אותו במיקום k הוא הסתברות ההקלקה כפול הערך לקליק (v_i):
- $v_i * q_i * r_k$
- כך ש: $V_j^*q_j$ כדי למקסם את סכום הערכים, נסזר את המפרסמים בסזר יורז של המכפלה $V_j^*q_j$ כך ש:
- $v_1*q_1 > v_2*q_2 > v_3*q_3 > \dots$
- ונסדר אותם לפי הסדר במקום 1, 2, 3, וכוי.
- הוכחה שהאלגוריתם החמדני אכן ממקסם את סכום הערכים:
 - ינתבונן בשני מפרסמים j,i ובסדר אחר שבו:

•
$$v_j *q_j < v_i *q_i$$
 $r_{k(j)} > r_{k(i)}$

- :מחליף את מפרסמים iו-i. השינוי בסכום הערכים
- $v_i *q_i *(r_{k(j)} r_{k(i)}) v_j *q_j *(r_{k(j)} r_{k(i)}) = (v_i *q_i v_j *q_j)(r_{k(j)} r_{k(i)}) > 0$ $v_i *q_i *(r_{k(j)} r_{k(i)}) v_j *q_j *(r_{k(j)} r_{k(i)}) = (v_i *q_i v_j *q_j)(r_{k(j)} r_{k(i)}) > 0$ $v_i *q_i *(r_{k(j)} r_{k(i)}) v_j *q_j *(r_{k(j)} r_{k(i)}) = (v_i *q_i v_j *q_j)(r_{k(j)} r_{k(i)}) > 0$ $v_i *q_i *(r_{k(j)} r_{k(i)}) v_j *q_j *(r_{k(j)} r_{k(i)}) = (v_i *q_i v_j *q_j)(r_{k(j)} r_{k(i)}) > 0$
 - $r_{j,k}$: נניח שלכל מודעה j ומיקום j יש הסתברות הקלקה כללית (לא דווקא ליניארית). הראו דוגמה שבה האלגוריתם מסעיף א לא עובד (לא מוצא שיבוץ הממקסם את סכום הערכים).

פתרון: הערך המטוצע של מפרסס j כששטים אותו בטיקום k הוא הסתברות ההקלקה כפול הערך לסליק:

 $V_j * r_{j,k}$

נניח שיש שני מפרסמים עם:

- האלגוריתם החמדני ישים את פפרסם 1 בפיקום 1 ומפרסם 2 בפיקום 2; סכום הערכים הוא 9.5.
 - אבל בשיבוץ ההפוך, סכוסו הערכים הוא 12.5.

שאלה 3: חשיפת מידע

מצאתם בעליית-הגג שלכם שרשרת אבני-חן ישנה, ואתם מאד רוצים לדעת מה השווי שלה. השכן שלכם הוא מומחה לאבני-חן ויודע בדיוק מהו שווי השרשרת, אבל הוא לא רוצה להגיד לכם. הציעו מנגנון שיגרום לשכן שלכם לגלות לכם, מרצונו החופשי, את שוויה האמיתי של השרשרת.

• פתרון: בנג'י, רועי (והתשובה הכי מקורית - אור וגיא).

שאלה 4: הקצאה אמיתית של מעונות סטודנטים

משרד המעונות של האוניברסיטה מקצה מעונות לסטודנטים בעזרת האלגוריתם הבא:

- כל סטודנט רושם את שלושת סוגי המעונות שהוא הכי רוצה, לפי הסדר.
- המשרד מסדר את הסטודנטים לפי סדר עדיפות כלשהו (ותק, ציונים וכד').
- המשרד עובר על הסטודנטים לפי הסדר, ונותן לכל סטודנט את החדר הכי גבוה בדירוג שלו שעדיין זמין. אם כל השלושה לא זמינים, הסטודנט מקבל חדר זמין כלשהו באקראי.
 - א. הוכיחו שהאלגוריתם אינו אמיתי.
 - פתרון: חן.
 - ב. הוכיחו, שגם אם כל הסטודנטים מדווחים את ההעדפות האמיתיות שלהם, האלגוריתם אינו יעיל פארטו.
- **פתרון**: נניח שלכל הסטודנטים יש אותן שלוש העדפות ראשונות. מתישהו החדרים האלה יתמלאו. מכאן והלאה, כל הסטודנטים ישובצו באקראי, וזה ודאי לא יעיל פארטו (קל למצוא דוגמה).
 - ג. הציעו שיפור קטן לאלגוריתם, שיהפוך אותו לאמיתי וגם יעיל פארטו.
 - פתרון: כל סטודנט ירשום את כל ההעדפות שלו לפי הסדר (לא רק 3).
 - האלגוריתס אמיתי: סדר הסטודנטים קבוע מראש ולא תלוי בהעדפות. בהינתן הסדר הקבוע, החדר הטוב ביותר שעדיין זמין כשמגיע תורו. זה בדיוק מה שהאלגוריתם נותן לו כשהוא אמיתי.
 - האלגוריתס יעיל פארטו כהנחה שההעדפות חזקות (- סטודנטים לא אדישים בין חדרים): נניח בשלילה שיש שיפור פארטו. נניח שהסטודנט הראשון (בסדר העדיפויות) שנהנה מהשיפור נמצא במקום k. האלגוריתם נותן לו את החדר הטוב ביותר שעדיין זמין בזמן k, אבל בשיפור הוא מקבל חדר טוב יותר זה חייב להיות חדר שכבר לא זמין בזמן k. נניח שהחדר נלקח בזמן

ברוך ה' חונו הדעת

j <k. אז בשיפור, סטודנט j מקבל חדר אחר. לפי ההנחה, j לא נהנה מהשיפור, וההעדפות הן חזקות (אין אדישות), ולכן j מפסיד – סתירה לשיפור פארטו.

שאלה 5: הקצאת אמיתית של זמן חישוב

כמה אנשים מעוניינים להריץ תהליכים על מחשב-על. לכל אדם יש תהליך אחד. לכל תהליך יש זמן ריצה שונה. מחשב-העל יכול להריץ תהליך אחד בכל פעם. המחשב פעיל במשך זמן מסויים (נניח 10 שעות) אבל זמן-הריצה הכולל של כל התהליכים הוא גדול יותר, כך שלא כל התהליכים יוכלו לרוץ. מנהל המערכת רוצה לתזמן את התהליכים (באופן סדרתי) כך שמספר התהליכים הכולל יהיה הגדול ביותר.

כל אדם יודע מה זמן-הריצה של התהליך שלו (כמה דקות הוא צריך), אבל מנהל-המערכת אינו יודע את זמני הריצה של התהליכים. עיזרו למנהל-המערכת לפתח אלגוריתם **אמיתי**, שיגרום לכל אדם להצהיר על הזמן האמיתי של התהליך שלו, ויריץ את המספר הגדול ביותר של תהליכים במסגרת הזמן הקצוב.

• פתרון: כל אדם מצהיר על אורך התהליך שלו. האלגוריתם מסדר את התהליכים מהקצר לארוך, מריץ אותם לפי הסדר עד שנגמר הזמן, ועוצר כל תהליך כשנגמר הזמן שהוא הצהיר עליו. האלגוריתם אמיתי: מי שיצהיר על זמן קצר מדי – התועלת שלו תהיה אפס כי התהליך שלו לא יסתיים. מי שיצהיר על זמן ארוך מדי – עלול להפסיד כי ייתכן שלא ישבצו אותו.

שאלה 6: עיצוב דף פירסום

בדף-אינטרנט מסויים אפשר אפשר לשים **או** פירסומת אחת ארוכה, **או** שתי פרסומות קצרות.

ישנם מספר מפרסמים המתחרים על מקום בדף. ההעדפות של כל מפרסם מיוצגות ע"י המחלקה:

```
class Advertiser {
	float longvalue;
	// כמה המפרסם מרויח (בשקלים) אם פרסומת ארוכה שלו מופיעה בדף
	float shortvalue;
	// כמה המפרסם מרויח (בשקלים) אם פרסומת קצרה שלו מופיעה בדף
};
```

מפרסם שאינו מופיע בדף מרויח 0 שקלים. מנהלי האתר רוצים שהמפרסמים יהיו מרוצים - המטרה שלהם היא למקסם את סכום רווחי המפרסמים. עיזרו להם להחליט איזה פירסומות לשים באתר!

א. כיתבו אלגוריתם, בעברית או בפסאודו-קוד, המקבל כקלט את רשימת המפרסמים, ומחזיר כפלט:

- כמה פירסומות יהיו בעמוד (אחת או שתיים);
 - איזה מפרסם/מפרסמים יופיעו בעמוד.

ב. תכננו מכרז הממקסם את סכום רווחי המפרסמים, וגם מעודד כל מפרסם לחשוף את הערכים ב. תכננו מכרז הממקסם את סכום רווחי המפרסמים, שלו. המנגנון מקבל כקלט את רשימת המפרסמים, ומחזיר כפלט: כמה פירסומות יהיו בעמוד, איזה מפרסם/מפרסמים יופיעו בעמוד, ואיזה מחיר ישלם/ישלמו המפרסם/מפרסמים למנהל האתר (בשקלים).

הערה: אם מפרסם מסויים מופיע בדף ומשלם מחיר, התועלת שלו היא הרווח מהפירסום פחות המחיר. ג. הדגימו את פעולת המכרז שכתבתם על הקלט הבא, ובו ארבעה מפרסמים:

```
ad[0].longvalue=10; ad[0].shortvalue=8;
```

ברוך ה' חונן הדעת

```
ad[1].longvalue=9; ad[1].shortvalue=1;
ad[2].longvalue=8; ad[2].shortvalue=4;
ad[3].longvalue=7; ad[3].shortvalue=3;
```

• **פתרון**: ראו פתרון בחינת מועד א ה'תשע"ח, שאלה 1.