

## מטלה - חלוקת עלויות ומכרזי שירות

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. הגשה בזוגות, עד תחילת ההרצאה הבאה.

### שאלה 1: חלוקת עלויות לבניית מעלית

בבניין עם  $n$  קומות, הדיירים החליטו לבנות מעלית.

העלות של בניית מעלית בגובה  $k$  קומות היא  $k$  אלף ש"ח.

הדיירים מעוניינים לחלק את העלות ביניהם בעזרת ערך שאפלי.

כמה תשלם כל קומה?

הזכרה: חשבו קודם את הערך עבור  $n=2$  ו  $n=3$ , ואז הכלילו ל- $n$  כלשהו.

### שאלה 2: חלוקת רווחי עסק

כדי להקים עסק, צריך משקיע ועובדים.

הרווח של העסק הוא 1000 כפול מספר העובדים.

לפי ערך שאפלי, איך יתחלקו רווחי העסק בין המשקיע לבין העובדים?

הזכרה: חשבו קודם את הערך עבור משקיע ועובד אחד, ועבור משקיע ושני עובדים, ואז הכלילו למספר כלשהו של עובדים.

### שאלה 3: חלוקת עלות נסיעה לאוניברסיטה

לצורך שאלה זו מומלץ להתחבר עם צוות נוסף כך שיהיו לפחות 3 חברים.

א. לכל אחד מחברי הצוות, חשבו בקירוב את עלות הנסיעה במונית מהבית לאוניברסיטה. לצורך החישוב אפשר להשתמש ב-Google Maps. אם אתם לא מצליחים לחשב עלות מדויקת, חשבו את זמן הנסיעה לפי Waze והכפילו בעלות נסיעה במונית לפי מונה.

ב. חשבו את עלות הנסיעה כאשר כל חברי הצוות נוסעים יחד, במסלול הקצר ביותר העובר דרך כולם.

ג. חשבו כמה כל אחד יצטרך לשלם לפי ערך שאפלי. האם זה משתלם?

### שאלה 4: איחוד מפלגות

[נכתב לקראת הבחירות לכנסת, אדר א ה'תשע"ט]

שלוש מפלגות קטנות שוקלות להתאחד למפלגה אחת לקראת הבחירות, אבל הן לא מצליחות להסכים על קביעת המקומות ברשימה המשותפת. סקרי דעת-קהל אמינים מראים ש:

- כל אחת מהמפלגות לא עוברת את אחוז החסימה כשהיא רצה לבד.
  - המפלגה המאוחדת מקבלת 10 מנדטים.
  - אם רק מפלגות א+ב מתאחדות, הן מקבלות 4 מנדטים; ב+ג - 5 מנדטים, ג+א - 6 מנדטים.
- עיצרו למפלגות למצוא פתרון הוגן לחלוקת המקומות בעשירה הראשונה.

## שאלה 5: פונקציה תת-מודולרית

**תזכורת:** פונקציה  $v$  על קבוצות נקראת תת-מודולרית (submodular) אם, לכל שתי קבוצות  $S, T$  ולכל איבר  $i$ , יש עלות שולית פוחתת:

$$\text{If } S \leq T, \text{ then } v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

**הגדרה:** פונקציה  $v$  על קבוצות נקראת תת-חיבורית (subadditive) אם, לכל שתי קבוצות  $S, T$ :

$$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$$

א. תנו דוגמה לפונקציה שהיא גם תת-אדיטיבית וגם תת-מודולרית.

ב. תנו דוגמה לפונקציה שהיא תת-אדיטיבית אבל לא תת-מודולרית.

ג. תנו דוגמה לפונקציה שהיא לא תת-אדיטיבית ולא תת-מודולרית.

ד. הוכיחו שכל פונקציה תת-מודולרית היא תת-אדיטיבית.

אם אתם מסתבכים תסתכלו כאן:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Utility\\_functions\\_on\\_indivisible\\_goods](https://en.wikipedia.org/wiki/Utility_functions_on_indivisible_goods)

## שאלה 6: מכרז מולין-שנקר - דוגמאות

א. הראו דוגמה עם 2 או 3 שחקנים, שבה כלל-התשלום של שאפלי אינו מונוטוני. הראו את טבלת העלויות, חשבו את ערכי שאפלי לכל תת-קבוצה, והסבירו מדוע זה לא מונוטוני.

ב. הראו דוגמה עם 2 או 3 שחקנים, שבה מכרז מולין-שנקר עם כלל-התשלום של שאפלי אינו אמיתי (אפשר להיעזר בסעיף א). הסבירו בפירוט מה יעשה המכרז בדוגמה זו, ומדוע זה לא אמיתי.

ג. הראו דוגמה עם 2 או 3 שחקנים, שבה מכרז מולין-שנקר עם כלל-התשלום של שאפלי אינו יעיל-פארטו. הסבירו בפירוט מה יעשה המכרז בדוגמה זו, ומדוע זה לא יעיל-פארטו.

ד [בונוס]. היכנסו לויקיפדיה האנגלית, לדף "Cost-sharing mechanism". מיצאו את תת-הכותרת "Binary service, decreasing marginal costs". הוסיפו את הדוגמאות שלכם במקומות המתאימים בדף (אם אתם לא בטוחים איפה בדיוק להוסיף, תשאלו אותי).

הזוג הראשון שביצע משימה זו, יקבל 2 נקודות בונוס לציון הבחינה. כדי לזכות בנקודות, אחד מבני-הזוג צריך לפתוח חשבון ויקיפדיה בשמו המלא, כך שהעריכות יירשמו על שמו בהסטוריית העריכה.

עצה: כדי שהעריכות שלכם יישארו בדף, ולא יימחקו ע"י עורכים אחרים, יש להסביר באופן ברור ובאנגלית תקנית.

שימו לב: לפני שאתם מתחילים אנא ודאו שלא עשו את זה לפניכם; הניקוד הנוסף יינתן רק לזוג הראשון.

## שאלה 7: מכרז VCG - איזון תקציבי

לפניכם גירסה משופרת של מכרז וק"ג, שאמורה להשיג איזון תקציבי.

המכרז מקבל כקלט כלל-תשלום  $p(S, i)$ , הקובע, עבור כל תת-קבוצה של נוסעים  $S$ , כמה ישלם כל נוסע  $i$  אם הקבוצה הזאת היא הקבוצה הנבחרת. הכלל צריך להיות מאוזן-תקציבית - לכל תת-קבוצה, סכום התשלומים של חברי הקבוצה שווה לעלות הנסיעה של תת-הקבוצה.

עבור כל נוסע  $i$  וכל תת-קבוצה  $S$ , הערך של  $i$  לבחירת הקבוצה  $S$  הוא:

- $p(S, i) - v[i]$  אם  $i$  נמצא בקבוצה (נסמן ערך זה ב  $u(i, S)$ ).
- אפס - אם  $i$  לא נמצא בקבוצה.

(שימו לב - בגירסה שלמדנו בכיתה, הערך של  $i$  לבחירת  $S$  היה  $v[i]$  אם  $i$  נמצא בקבוצה).

בגירסה הזאת אין שחקן המייצג את ה"נהג".

המכרז בוחר את האפשרות  $S$  שבה סכום התועלות -  $u(i, S)$  - הוא הגבוה ביותר, ומחשב את התשלום של כל נוסע לפי כלל VCG.

א. תנו דוגמה עם 2 נוסעים לפעולת המכרז עם כלל-התשלום הגובה סכום זהה מכל נוסע.

ב. תנו דוגמה עם 2 נוסעים לפעולת המכרז עם כלל-התשלום הגובה מכל נוסע את ערך שאפלי.

ג. תנו דוגמה שבה, לכל כלל-תשלום שנבחר, עלול להיות מצב שבו לאחד הנוסעים יש תועלת שלילית (הוא משלם יותר מהערך שלו).

## שאלה 8: תיכנות - ערך שאפלי

א. מצאו בשפת python (או בשפה אחרת החביבה עליכם) פונקציית-ספרייה המאפשרת לעבור על כל הסדרים האפשריים (פרמוטציות) של קבוצה נתונה.

ב. השתמשו בפונקצייה זו על-מנת לכתוב פונקציה המחשבת את ערך שאפלי.

## מאמרים להרחבה ולמטלת רשות

1. Shahar Dobzinski, Aranyak Mehta, Tim Roughgarden, Mukund Sundararajan (2018): "[Is Shapley cost sharing optimal?](#)"
2. Yuhui Jin, Chuei-Tin Chang, Shaojun Li, Da Jiang (2018), "[On the use of risk-based Shapley values for cost sharing in interplant heat integration programs](#)"
3. Dongshuang Hou, Hao Sun, Panfei Sun, Theo Driessen (2018): "[A note on the Shapley value for airport cost pooling game](#)"
4. Khaled Maafa, Lhouari Nourine, Mohammed Said Radjef (2018): "[Algorithms for computing the Shapley value of cooperative games on lattices](#)"
5. Christoph M.: "Interpretable machine learning - Shapley values"  
<https://christophm.github.io/interpretable-ml-book/shapley.html>
6. Tjeerd van Campen, Herbert Hamers, Bart Huislage, Roy Lindelauf: "A new approximation method for the Shapley value applied to the WTC 9/11 terrorist attack" - ערך שאפלי והפיגוע במגדלי התאומים