חלוקה יעילה
Efficient Division

אראל סגל-הלוי

מהי יעילות כלכלית?

נסביר ע"י דוגמה. שלושה אחים רוצים ללכת יחד למסעדה ומתלבטים באיזו מסעדה לבחור.

כל אח מדרג את המסעדות מהכי גרועה בעיניו (1) להכי טובה בעיניו (5):

מסעדה:	א	ב	ג	ד	ה
עמי:	1	2	3	4	5
תמי:	3	1	2	5	4
רמי:	3	5	5	1	1

איזו בחירה – מבין החמש – היא לא יעילה?

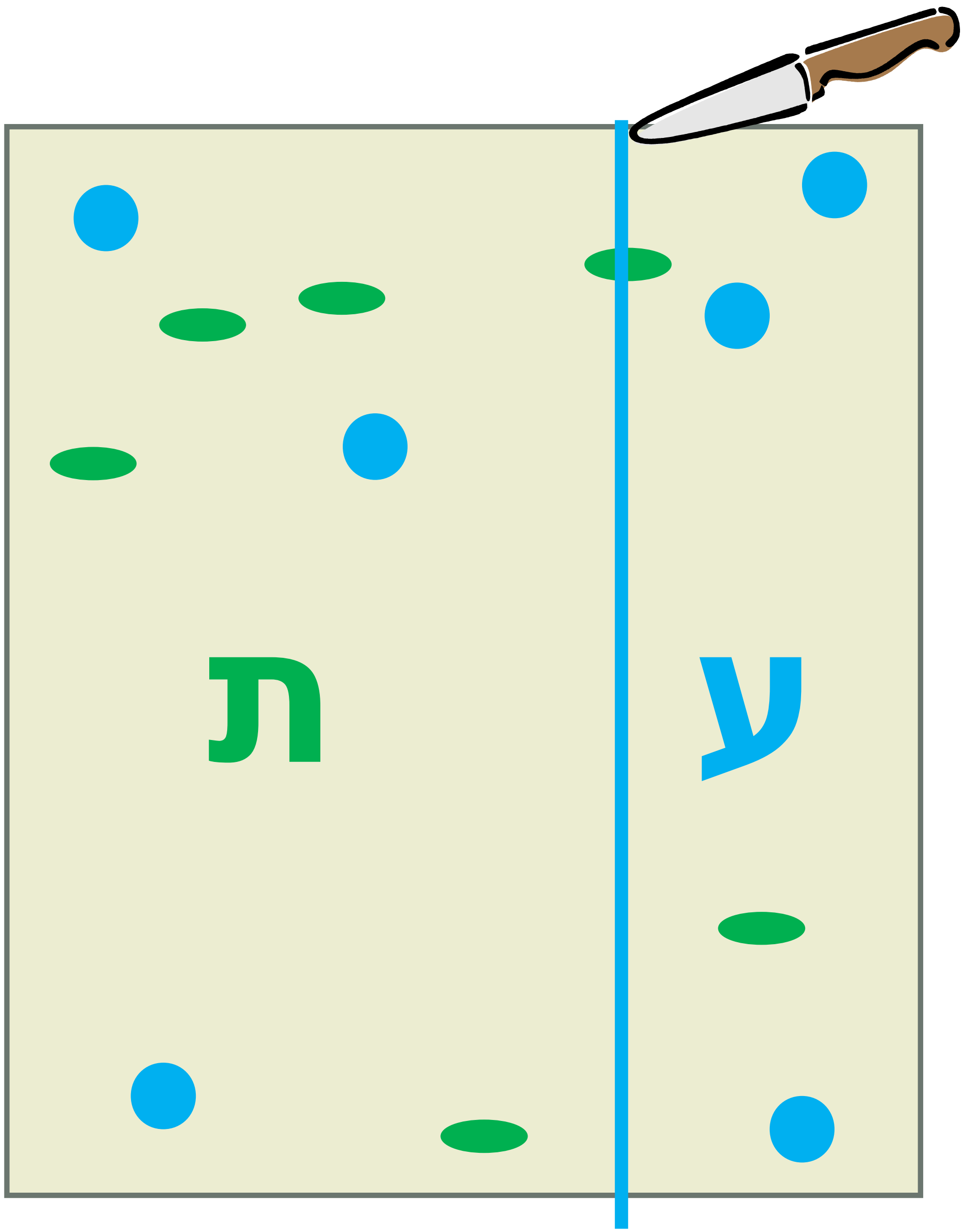
--- **ב**! כי בעיני כולם, היא פחות טובה מ-ג.

מהי יעילות כלכלית?

הגדרות:

- מצב א נקרא **שיפור פארטו** (Pareto) של מצב ב, אם הוא *טוב יותר* לחלק מהמשתתפים, וטוב *לפחות באותה מידה* לכולם.
  - בעברית: "**זה נהנה וזה לא חסר**".
- מצב נקרא **יעיל פארטו** אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור-פארטו שלו.
- יעילות פארטו – תנאי הכרחי לבחירה שהיא "נכונה" מנקודת-מבט כלכלית.
- האם האלגוריתמים לחלוקת-עוגה שראינו הם מחזירים תמיד חלוקה שהיא יעילה פארטו?

יעילות אלגוריתם "חתוך ובחר"



בדרך-כלל, אלגוריתם "חתוך ובחר" אינו יעיל פארטו.

דוגמה

(עמי חותך ותמי בוחרת):

יעילות אלגוריתם "חתוך ובחר"

משפט: אלגוריתם "חתוך ובחר" מחזיר תוצאה יעילה פארטו אם מתקיימים התנאים הבאים:

1) העוגה חד-ממדית.
2) שני השחקנים רוצים רק חתיכות קשירות.
3) לכל נקודה בעוגה יש ערך חיובי ממש.
4) החותך חותך לשני חלקים שוים ולא "מתחכם"

הוכחה:

לפי תנאים 1+2, יש רק שתי אפשרויות: או שהחותך משמאל והבוחר מימין, או הפוך.

לפי תנאי 3, בסדר שנבחר, אין שיפור פארטו.

לפי תנאי 4, גם בסדר ההפוך אין שיפור פארטו.

***

יעילות – המקרה הכללי

.... אבל מה קורה אם:

1) העוגה רב-ממדית?
2) השחקנים רוצים חתיכות לא דווקא קשירות?
3) יש הרבה שחקנים – יותר משניים?
4) אנחנו רוצים שהחלוקה תהיה גם ללא קנאה?

הנחות:

- ה"עוגה" מחולקת לאיזורים. הערך של כל שחקן אחיד בכל איזור *(אבל שונה לכל שחקן)*.
- אין חשיבות לקשירות.
  - לדוגמה: ה"איזורים" מייצגים משאבי מיחשוב.

יעילות – מיקסום סכום הערכים

ניסיון ראשון: חלוקה הממקסמת את סכום הערכים:

$$\max_X \sum_{j=1}^{n} V_j(X_j)$$

אלגוריתם: תן כל אזור לשחקן עם הערך הכי גבוה:

	דיסק	זיכרון	מעבד
עמי:	0	**19**	**81**
תמי:	**20**	0	80

רואים שהאלגוריתם לא הוגן. האם הוא יעיל?

יעילות – מיקסום סכום הערכים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום הערכים היא יעילה פארטו.

הוכחה: נתונה חלוקה **א** הממקסמת סכום ערכים.

- נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו.
- אז קיימת חלוקה **ב** שהיא שיפור-פארטו שלה.
- בחלוקה **ב**, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו בחלוקה **א**, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.
- לכן בחלוקה **ב** סכום הערכים גבוה יותר – בסתירה לכך שחלוקה **א** ממקסמת את סכום הערכים.

יעילות – מיקסום סכום עולה

ניסיון שני: נמצא חלוקה הממקסמת את הסכום של *פונקציה עולה* של הערכים:

$$\max \sum_{j=1}^{n} f(V_j(X_j))$$

דוגמה: שחקן א מקבל x אחוזים מהאזור השמאלי:

	דיסק	זיכרון	מעבד
עמי:	0	19	81
תמי:	20	0	**80**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & f(81\ x + 19) + f(80(1\text{-}x)+20) \\ \text{subject to} & 0 \le x \le 1 \end{array}$$

יעילות – מיקסום סכום עולה

משפט: כל חלוקה הממקסמת סכום של *פונקציה עולה כלשהי* של הערכים, היא יעילה פארטו.

הוכחה: נתונה חלוקה **א** הממקסמת סכום זה.

- נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו.
- אז קיימת חלוקה **ב** שהיא שיפור-פארטו שלה.
- בחלוקה **ב**, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו בחלוקה **א**, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.
- *כיוון שהפונקציה עולה*, בחלוקה **ב** הסכום גבוה יותר – סתירה לכך שחלוקה **א** ממקסמת את הסכום.

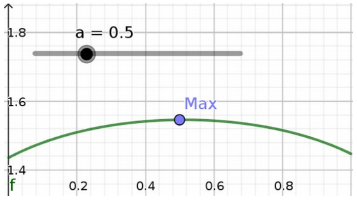
מיקסום סכום עולה - דוגמה

דוגמה לבעיית אופטימיזציה הממקסמת סכום של פונקציה עולה של הערכים:

$$\max \sum_{j=1}^{n} \sqrt{V_j(X_j)}$$

דוגמה: שחקן א מקבל x אחוזים מהאזור השמאלי:

	דיסק	זיכרון	מעבד
עמי:	0	19	81
תמי:	20	0	80



המקסימום ב: x~0.5
במקרה הזה הוגן!

$$\begin{aligned} \max \quad & \sqrt{81x+19}+\sqrt{80(1-x)+20} \\ \text{s.t.} \quad & 0 \le x \le 1 \end{aligned}$$

יעילות – מיקסום סכום קמור

משפט: לכל פונקציה קעורה יש נקודת מקסימום אחת ויחידה בכל תחום קמור.

מסקנה: מקסימום **מקומי** של הפונקציה הוא גם מקסימום **גלובלי**.

מסקנה מעשית: קיימים אלגוריתמים מהירים למציאת נקודת מקסימום *(דוגמה: טיפוס על גבעה)*.

ראו בקורס חקר ביצועים או בתוכנות מתימטיות, למשל Mathematica:

```
In[9]:= FindMaximum[{
(81 x + 19)^0.5 + (80 (1 - x) + 20)^0.5, 0 <= x
<= 1}, {x}]
Out[9]= {15.4601, {x -> 0.512327}}
```

• יעילות – מיקסום סכום קמור

עכשיו כשאנחנו יודעים שקיימים אלגוריתמים מהירים לחישוב מקסימום של סכום קעור של הערכים,
השאלה הנשארת היא – **איזו פונקציה *f* לבחור**?

מתברר שאם הפונקציה *f* היא לוגריתמית:

$$f(V) = \log(V)$$

אז החלוקה לא רק יעילה אלא גם ללא קנאה!

יעילות – מיקסום סכום לוגים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה.

הוכחה: נסתכל בפרוסת עוגה אינפיניטיסימלית, *Z*.

התרומה שלה ל-$f(V_j(X_j))$ היא: *(חשבון אינפי 1)*

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(Z)$$

לכן, אלגוריתם האופטימיזציה ייתן כל פרוסה *Z* לשחקן *j* שהמכפלה הזאת עבורו גדולה ביותר:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(Z) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(Z)$$

נסכם את המשוואה על כל הפרוסות שניתנו ל-*j*:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

יעילות – מיקסום סכום לוגים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה.

הוכחה [המשך]:

לכל חלוקה הממקסמת את הסכום של $f(V)$:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

כאשר f היא פונקציה לוגריתמית, מקבלים:

$$(1 / V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq (1 / V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

מעבירים אגף ומקבלים, לכל שני שחקנים j,i:

$$V_i(X_i) \geq V_i(X_j)$$

וזו בדיוק ההגדרה של חלוקה ללא קנאה! ***

יעילות, הגינות וקשירות

ראינו שתמיד אפשר למצוא חלוקה שהיא:
- הוגנת ויעילה,
- הוגנת וקשירה,
- יעילה וקשירה.

האם תמיד קיימת חלוקה הוגנת, יעילה וקשירה?
-- לא! הנה דוגמה:

עמי	2	0	3	0	2	0	0
תמי	0	0	0	0	0	7	0
צומי	0	2	0	2	0	0	3

חלוקה ללא קנאה - סיכום

קשיר > יעיל פארטו V	לא	כן
לא	עזיז-מקנזי: זמן היפר-אקספוננציאלי במספר השחקנים.	סימונס-סו: זמן אקספוננציאלי ברמת הדיוק של הקירוב.
כן	אופטימיזציה קמורה: זמן פולינומיאלי במספר השחקנים *והאיזורים*.	*לא קיים.*