

## מטלה - חלוקת חפצים בידיים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

### שאלה 1: חלוקה ללא קנאה מלבד החפץ הכי גרוע

הגדרה: חלוקה של חפצים נקראת "ללא קנאה מלבד החפץ הכי גרוע" (בקיצור EFX), אם לכל שני שחקנים א, ב, ולכל חפץ שנוריד מהסל של ב, שחקן א לא יקנא בשחקן ב.

א. הראו שהתנאי EFX הוא ממש חזק יותר מהתנאי EF1 (תנו דוגמה לחלוקה EF1 שהיא לא EFX).

ב. נניח שיש שני שחקנים עם העדפות אדיטיביות (= לכל שחקן, ערך של סל הוא סכום הערכים של החפצים בסל), וזהות (= לשני השחקנים יש אותם ערכים לכל החפצים). תארו אלגוריתם המוצא חלוקה EFX.

ג. נניח שיש שני שחקנים עם העדפות אדיטיביות, אבל לא בהכרח זהות. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה EFX.

### שאלה 2: אלגוריתם מעגלי הקנאה - סדר החפצים

כזכור, אלגוריתם מעגלי-הקנאה מתחיל בכך שהוא מסדר את החפצים בסדר שרירותי כלשהו. כלומר, בכל סדר שבו נסדר את החפצים, אנחנו עשויים לקבל תוצאה שונה.

א. הראו דוגמה עם 3 אנשים ו-3 חפצים, שבה כל סידור של החפצים נותן תוצאה אחרת (סה"כ 6 תוצאות).

ב. הראו דוגמה עם 3 אנשים ו-3 חפצים, שבה כל סידור של החפצים נותן אותה תוצאה.

ג. הראו דוגמה עם 3 אנשים ו-3 חפצים, שבה מספר התוצאות האפשריות גדול מ-1 וקטן מ-6.

ד. [בונוס] היכנסו לויקיפדיה האנגלית, לדף "Envy cycles procedure". הוסיפו כותרת חדשה Examples, והוסיפו מתחתיה את שלוש הדוגמאות שכתבתם בסעיפים הקודמים. הזוג הראשון שיבצע משימה זו, יקבל 2 נקודות בונוס לציון הבחינה. כדי לזכות בנקודות, אחד מבני-הזוג צריך לפתוח חשבון ויקיפדיה בשמו המלא, כך שהעריכות יירשמו על שמו בהסטוריית העריכה. עצה: כדי שהעריכות שלכם יישארו בדף, ולא יימחקו ע"י עורכים אחרים, יש להסביר את הדוגמאות באופן ברור ובאנגלית תקינה. שימו לב: לפני שאתם מתחילים אנא ודאו שלא עשו את זה לפניכם; הניקוד הנוסף יינתן רק לזוג הראשון. סליחה, המשימה תפוסה...

### שאלה 3: מיקסום מכפלת הערכים - חפצים רציפים

כזכור, למדנו שאלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים נותן חלוקה שהיא ללא קנאה כאשר החפצים הם רציפים (ניתנים לחיתוך). תנו דוגמאות לחלוקה של 3 חפצים רציפים בין 2 אנשים, שבה:

א. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים לא צריך לחתוך אף חפץ.

- ב. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים צריך לחתוך חפץ אחד בדיוק.
- ג. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים צריך לחתוך שני חפצים בדיוק.
- ד. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים צריך לחתוך שלושה חפצים בדיוק.

## שאלה 4: מיקסום מכפלת הערכים - חפצים בדידים

- כזכור, למדנו שאלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים נותן חלוקה שהיא ללא-קנאה-מלבד-1 כאשר החפצים הם בדידים (לא ניתנים לחיתוך). תנו דוגמאות לחלוקה של 4 חפצים בדידים בין 2 אנשים, שבהן:
- א. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים מחזיר חלוקה שהיא ממש ללא קנאה.
  - ב. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים נותן חפץ 1 לאדם אחד ו-3 חפצים לשני.
  - ג. אלגוריתם מיקסום-מכפלת-הערכים נותן נותן 2 חפצים לכל אחד.

## שאלה 5: חלוקת תיקים בין מפלגות בקואליציה

- לאחר הבחירות, שתי מפלגות החליטו להקים ממשלה ביחד, אבל הן בזזו חודש שלם בויכוחים על איזה מפלגה תקבל איזה תיק. לאחר שהתיאשו מהויכוחים, הן פנו אליכם כדי שתעזרו להם להחליט.
- א. הציעו אלגוריתם שיאפשר לשתי המפלגות להחליט על חלוקת-תיקים הוגנת ויעילה-פארטו. **שימו לב:** ההגינות צריכה להתייחס לגדלים השונים של המפלגות - מספר המנדטים שכל מפלגה קיבלה בבחירות. למפלגה גדולה יותר יש זכות לקבל יותר תיקים (או תיקים יותר "שווים").
  - ב. הוכיחו שהאלגוריתם מקיים שלוש תכונות: יעילות פארטו, הגינות (בהתאם לגדלים השונים), וחיתוך תיק אחד לכל היותר.
  - ג. הדגימו את פעולת האלגוריתם שלכם על אוסף התיקים שהיו באחת מממשלות ישראל האחרונות (לבחירתכם), ועל שתי מפלגות לבחירתכם.

## שאלה 6: בעיית ה-Partition

- א. קראו על "בעיית החלוקה":  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Partition\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_problem)
- ב. בחרו אחד מהאלגוריתמים לפתרון היוריסטי/מקורב של הבעיה וממשו אותו בשפת-תיכנות לפי בחירתכם.
- ג. הדגימו את פעולת האלגוריתם על כמה קלטים לא טריביאליים.

## שאלה 7: תיכנות - חלוקה ללא-קנאה-בקירוב

נתונה המחלקה הבאה:

```
class Agent {  
    double item_value(int item_index);  
}
```

המחלקה מייצגת שחקן המשתתף במשחק חלוקה הוגנת. יש בה פונקציה אחת המתארת את הערך שהשחקן מייחס לחפץ שהאינדקס שלו הוא `item_index`.  
כיתבו פונקציה הבודקת האם חלוקת-חפצים נתונה כלשהי היא EFX (ראו שאלה 1 למעלה). כותרת הפונקציה:

```
bool is_EFX(Agent[] agents, set<int>[] bundles);
```

הפרמטר `agents` הוא מערך בגודל `n` המייצג את השחקנים.

הפרמטר `bundles` הוא מערך באותו גודל - `n` - המייצג את החלוקה: `bundle[i]` הוא אוסף אינדקסי החפצים שמקבל שחקן `i`.

## מאמרים להרחבה ולמטלת רשות

1. Haris Aziz et al (2015): ["The Adjusted Winner Procedure: Characterizations and Equilibria"](#).
2. Willson, Stephen (1995). ["Fair Division using Linear Programming"](#).
3. B Plaut, T Roughgarden (2018): ["Almost envy-freeness with general valuations"](#)
4. M Kyropoulou, W Suksompong (2019): ["Almost Envy-Freeness in Group Resource Allocation"](#).
5. S Barman, G Ghalme, S Jain, P Kulkarni (2019): ["Fair Division of Indivisible Goods Among Strategic Agents"](#)
6. H Oh, AD Procaccia, W Suksompong (2018): ["Fairly allocating many goods with few queries"](#)
7. S Barman, SK Krishnamurthy, R Vaish (2018): ["Greedy Algorithms for Maximizing Nash Social Welfare"](#).
8. G Amanatidis, G Birmpas, E Markakis (2018): ["Comparing Approximate Relaxations of Envy-Freeness"](#)
9. H Aziz, S Bouveret, I Caragiannis (2018): ["Knowledge, fairness, and social constraints"](#)

10. SJ Brams, TR Kaplan (2004): "Dividing the indivisible: Procedures for allocating *cabinet ministries* to political parties in a parliamentary system".