

מטלה - שידוכים ושיבוצים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. הגשה בזוגות, עד תחילת ההרצאה בשבוע הבא.

שאלה 1: שידוך יציב ויעילות

- א. הוכיחו שכל שידוך יציב הוא יעיל-פארטו, אבל ההיפך לא נכון.
- ב. נניח שכל סטודנט מייחס ערך מספרי לכל מחלקה, כאשר המחלקה הכי גרועה בעיניו מקבלת 1, המחלקה הבאה מקבלת 2, וכו' (אם יש m מחלקות אז המחלקה הכי טובה מקבלת m). גם כל מחלקה מייחסת ערך מספרי לכל סטודנט באותו אופן. האם כל שידוך יציב ממקסם את סכום הערכים? הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.

שאלה 2. תיכון מערכת לשיבוץ

- בעקבות תלונות על תהליך השיבוץ בין מתנדבות שירות-לאומי לבין מקומות-שירות, קיבלתם מכתב מרשות השירות הלאומי המבקש מכם לתכנן מערכת שיבוץ חדשה. המערכת אמורה לקבל קלט מהמתנדבות וממקומות-השירות, ולהחזיר כפלט את השיבוץ. הדרישות מהמערכת:
- המערכת יכולה לשבץ כמה מתנדבות לכל מקום-שירות, בהתאם למספר התקנים במקום-השירות (מספר התקנים הוא בין 1 ל-100).
 - הפלט אמור להתקבל במהירות - דקות ספורות לאחר שכל המתנדבות ומקומות-השירות סיימו להקליד את הקלט.
 - לאחר שהתקבל שיבוץ - אף מתנדבת לא יכולה לשפר את מצבה על-ידי פניה טלפונית למקום-שירות שהיא מעדיפה על-פני זה ששובצה אליו, כי אף מקום-שירות כזה לא ירצה אותה. ולהיפך: אף מקום-שירות לא יכול לשפר את מצבו על-ידי פניה טלפונית למתנדבת שהוא מעדיף על-פני אלה ששובצו אליו, כי אף מתנדבת כזאת לא תרצה אותו.
 - בשלב הקלט, אף מתנדבת לא יכולה לשפר את מצבה על-ידי הכנסת קלט לא אמיתי.
- תארו את המערכת בפירוט. יש להסביר את המערכת בעברית באופן שראש הרשות לשירות לאומי יוכל להבין. אין להשתמש בביטויים כמו "כפי שלמדנו בכיתה" כיוון שראש הרשות לא היה בכיתה...
- מהו הקלט למערכת? מה הם מסכי-הקלט הדרושים, מי צריך להשתמש בכל מסך ומה בדיוק להקליד שם? תנו דוגמה לכל מסך.
 - לאחר שכל המשתתפים סיימו להקליד את הקלט, איך בדיוק מתבצע האלגוריתם? הדגימו את פעולת האלגוריתם והפלט שלו על הקלט של סעיף א.
 - הוכיחו שהאלגוריתם מקיים את תכונה 2 ע"י חישוב סיבוכיות זמן הריצה שלו.

שאלה 3: כמה שידוכים יציבים יש?

כשיש 3 סטודנטים ו-3 מחלקות, יש 6 שידוכים אפשריים (3 עצרת). כמה מהם יציבים?

א. הראו דוגמה שבה יש רק שידוך יציב אחד.

ב. הראו דוגמה שבה יש בדיוק 2 שידוכים יציבים.

ג. האם ייתכן שכל 6 השידוכים הם יציבים? אם כן - הראו דוגמה, אם לא - הוכיחו.

שאלה 4: מי נשאר בחוץ?

נניח שמספר הסטודנטים גדול ממספר המחלקות (ובכל מחלקה יש מקום אחד). במצב זה, בכל שידוך, חלק מהסטודנטים יישארו בחוץ.

א. הראו דוגמה עם 3 סטודנטים ו-2 מחלקות, שבה יש לפחות שני שידוכים יציבים. מיצאו את שניהם והראו איזה סטודנט נשאר בחוץ בכל שידוך יציב.

ב. הוכיחו, שבכל שידוך יציב (לא משנה באיזה אלגוריתם מצאנו אותו), אותם סטודנטים יישארו בחוץ. כלומר, אם מישהו נשאר בחוץ בשידוך יציב א, אז הוא נשאר בחוץ גם בשידוך יציב ב.

אם אתם נתקעים, קראו בויקיפדיה על "Rural hospitals theorem".

שאלה 5: אלגוריתם קבלה-על-תנאי

א. הראו דוגמה עם 3 סטודנטים ו-3 מחלקות שבו אלגוריתם קבלה-על-תנאי מחזיר תמיד את אותו שידוך, בין אם הסטודנטים מציעים או המחלקות מציעות. תארו את ריצת האלגוריתם בכל אחד מהמצבים.

ב. הוכיחו שאלגוריתם קבלה-על-תנאי כשהמחלקות מציעות, מחזיר את השידוך היציב הכי גרוע עבור הסטודנטים מכל השידוכים היציבים (רמז: הוכיחו שכל שידוך יציב שהוא הכי טוב עבור המחלקות, הוא הכי גרוע עבור הסטודנטים).

ג. באלגוריתם "קבלה על תנאי", כל מחלקה מדרגת את הסטודנטים בלי לראות מה הסטודנטים דירגו. נניח עכשיו שאנחנו מאפשרים למחלקות לראות את הדירוג של הסטודנטים לפני שהן מפרסמות את הדירוג שלהן. האם האלגוריתם עדיין אמיתי?

שאלה 6: שידוך יציב לפי גובה

בליגת כדורסל מסויימת, לכל שחקן יש העדפות שונות על הקבוצות, אבל לכל הקבוצות יש אותן העדפות על השחקנים - כל הקבוצות מדרגות את השחקנים מהגבוה לנמוך. כיתבו אלגוריתם לשידוך יציב בין קבוצות לשחקנים, שהוא פשוט יותר מאלגוריתם קבלה-על-תנאי, אך עדיין אמיתי. הוכיחו שהוא אמיתי.

שאלה 7: תיכנות - יציבות

כיתבו אלגוריתם המקבל שידוך ובודק אם הוא יציב.

בניגוד למטלות הקודמות, הפעם אתם תגדירו את מבני-הנתונים הדרושים, פורמט הקלט והפלט.

מאמרים להרחבה ולמטלת רשות

1. Hassidim, Romm, Shorrer (2017): "[Redesigning the Israeli Psychology Master's Match](#)", 2017
2. Hassidim, Marciano, Romm (2017): "[The Mechanism Is Truthful, Why Aren't You?](#)"
http://scholar.harvard.edu/files/ran/files/redesigning_the_israeli_psychology_masters_match.pdf
3. Alvin Roth, Ran Shorrer (2015): "[The redesign of the medical intern assignment mechanism in Israel](#)"
4. Wu, Roth (2018): "[The lattice of envy-free matchings](#)"
5. Z Peng, W Shan, P Jia, B Yu, Y Jiang, B Yao (2018): "[Stable ride-sharing matching for the commuters with payment design](#)"
6. T Wang, F Liu, J Guo, H Xu (2016): "[Dynamic SDN controller assignment in data center networks: Stable matching with transfers](#)"
7. Y Chen, L Lin, G Cao, Z Chen (2018): "[Stable combinatorial spectrum matching](#)"
8. Itay Ashlagi, Yannay Gonczarowski (2018): "[Stable matching mechanisms are not obviously strategy-proof](#)"
9. K Iwama, S Miyazaki (2008): "[A survey of the stable marriage problem and its variants](#)"
10. P BirÓ, RW Irving, I Schlotter (2011): "[Stable matching with couples: an empirical study](#)"
11. Kojima, Pathak, Roth (2013): "[Matching with couples: Stability and incentives in large markets](#)"