

# מכרזים אלגוריתמיים

אראל סגל-הלוי

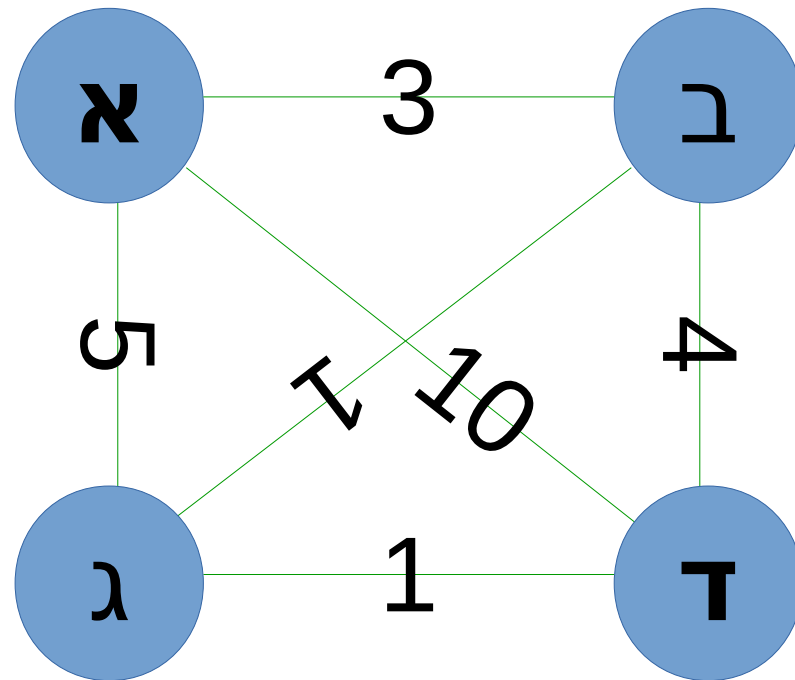
מקורות:

הקורס של טים, הרצאה 3 והלאה:

<http://theory.stanford.edu/~tim/f13/f13.html>

# מציאת מסלול זול ביותר

נתונה רשת. לכל קשת יש עלות-מעבר. צריך להעביר חבילה בין שתי נקודות ברשת (א - <math>\tau</math>), במסלול הזול ביותר.

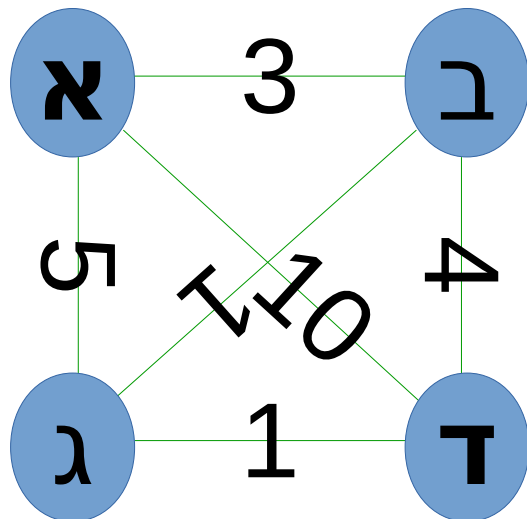


- אם עלות כל קשת ידועה לכולם – **אלגוריתם**.
- אם עלות כל קשת ידועה רק לבעליה – **מכרז**.

# מכרז ויקרי-קלארק-גרובס למסלול זול ביותר

צריך לפתור  $1+6$  בעיות מסלול-זול-ביותר.

- כשכולם נמצאים: המסלול אבגד, הסכום  $-5$ .
- בלי אב: המסלול אגד, הסכום  $-6$ . **תשלום  $-4$** .
- בלי בג: המסלול אגד, הסכום  $-6$ . **תשלום  $-2$** .
- בלי גד: המסלול אבד, הסכום  $-7$ . **תשלום  $-3$** .
- בלי אג/אד/בד: אין שינוי, הסכום  $-5$ . **תשלום  $0$** .
- תשלום כולל  $-9$ .



# בעיית התרמיל (knapsack)

מכניסים אתכם לחדר מלא חפצים, נותנים לכם תרמיל שיכול להכיל עד 100 ק"ג, ואומרים לכם "כל מה שתצליחו להכניס לתרמיל – שלכם".

לכל חפץ יש משקל אחר וערך אחר.

איך תבחרו חפצים שסכום-ערכיהם גדול ביותר?

- הערך של כל חפץ ידוע לכולם – **אלגוריתם**.

- הערך של כל חפץ ידוע רק לחפץ – **מכרז**. (דוגמה: יש 100 שניות המיועדות לפרסומות. לכל מפרסם יש פרסומת עם **אורך אחר וערך אחר**. איך לבחור איזה פרסומות לשים?)

# מכרז ויקרי-קלארק-גרובס למילוי תרמיל

כשיש  $m$  חפצים, צריך לפתור  $m+1$  בעיות-תרמיל.

• **הבעיה:** בעיית התרמיל היא NP-קשה!

• פתרון אפשרי: אלגוריתמי-קירוב.

## אלגוריתם חמדני א:

• סדר את החפצים בסדר יורד של הערך.

• בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

*דוגמה נגדית (גודל התרמיל = 100):*

$\$100/100k$ ,  $\$20/2k$ ,  $\$20/2k$ ,  $\$20/2k$  ...

הראשון יזכה וישלם  $\$1000$  – יותר מהערך שלו!

# מכרז ויקרי-קלארק-גרובס למילוי תרמיל

כשיש  $m$  חפצים, צריך לפתור  $m+1$  בעיות-תרמיל.

- **הבעיה:** בעיית התרמיל היא NP-קשה!

- פתרון אפשרי: אלגוריתמי-קירוב.

**אלגוריתם חמדני ב:**

- סדר את החפצים בסדר יורד של **ערך/משקל**.

- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

**דוגמה נגדית:**

**\$20/2k, \$100/100k.**

**הראשון יזכה וישלם \$100 – יותר מהערך שלו!**

# מכרז ויקרי-קלארק-גרובס למילוי תרמיל

**אלגוריתם א+ב:** הפעל את שני האלגוריתמים  
החמדניים. בחר את התוצאה עם הסכום הגבוה.

**משפט:** אלגוריתם א+ב נותן קירוב  $1/2$ .

**הוכחה:** נניח שאלגוריתם ב נתקע אחרי  $k$  חפצים.

עם החפץ ה- $k+1$  – הסכום הוא מקסימלי++.

הסכום של אלגוריתם א הוא לפחות החפץ ה- $k+1$ .

--< הסכום של אלגוריתמים א+ב מקסימלי++.

--< הסכום של א **או** ב הוא מקסימלי++  $\setminus 2$ .

**כאלגוריתם – טוב, כמכרז – לא מוצלח. דוגמה:**

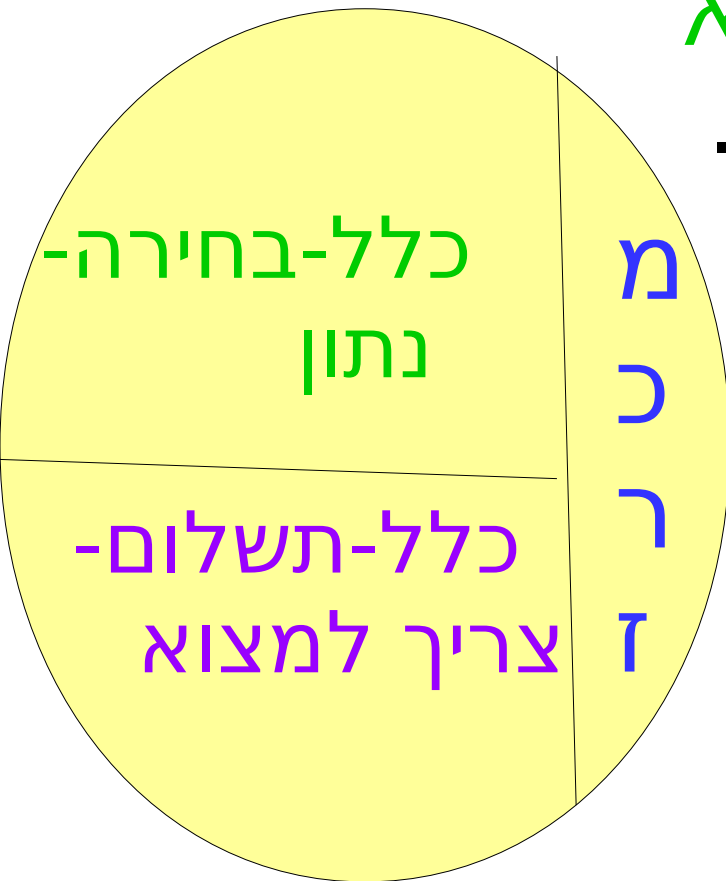
**\$54/52k, \$52/51k, \$49/49k.**

**הראשון יזכה וישלם \$101 – יותר מהערך שלו!**

# מכרז מיירסון (Myerson)

נתונים:

- כלל-בחירה הקובע לכל שחקן אם נבחר או לא:
- "בחר את השלושה עם הערכים הגבוהים"
- "בחר את המסלול הזול ביותר"
- "בחר בעזרת אלגוריתם חמדני א"
- לכל משתתף יש ערך ל"היבחרות".



דרוש: כלל-תשלום,  
שאיתו המכרז יהיה אמיתי.

האם לכל כלל-בחירה קיים  
כלל-תשלום אמיתי?



# כלל-בחירה מונוטוני

**הגדרה:** כלל-בחירה נקרא *מונוטוני* אם, עבור כל שחקן  $i$ , הכלל הוא פונקציה מונוטונית-עולה של  $v_i$ .

- כלל-בחירה *בינארי* הוא מונוטוני אם עבור כל שחקן  $i$ , אם הוא נבחר כשהערך שלו  $x$ , אז הוא נבחר גם כשהערך שלו הוא כל מספר הגדול מ- $x$ .

**דוגמאות לכללים מונוטוניים:**

- בחר את 3 הערכים הגדולים ביותר.
- בחר את הערך הגדול ביותר, בתנאי שהוא מעל 10.
- בחר בעזרת אלגוריתם חמדני  $a / b / a + b$ .

**דוגמאות לכללים לא מונוטוניים:**

- בחר את הערך השני מלמעלה.
- בחר את הערך הגדול ביותר, אם הוא מתחת ל-7.

# משפט מיירסון

**משפט מיירסון:** מונוטוניות היא תנאי הכרחי ומספיק לאמיתיות. כלומר:

(א) **לכל כלל-בחירה לא-מונוטוני -**

**אין כלל-תשלום אמיתי.**

(ב) **לכל כלל-בחירה מונוטוני -**

**קיים כלל-תשלום אמיתי, והוא יחיד.**

**בשקפים הבאים:**

- נוכיח את משפט מיירסון.
- נגדיר במדויק את כלל-התשלומים.

# הוכחת משפט מיירסון

סימונים:

- כלל-הבחירה –  $c$  - פונקציה המקבלת כקלט את הערכים של כל המשתתפים, ומחזירה וקטור בינארי ( $= 1$  "ברכותי", נבחרת!").  $c$  נתון וקבוע.
- כלל התשלום –  $p$  - פונקציה המקבלת כקלט את הערכים של כל המשתתפים, ומחזירה וקטור מספרי של תשלומים. את  $p$  אנחנו מחפשים.

# הוכחת משפט מיירסון - המשך

התועלת של משתתף עם ערך  $v$  שאומר  $x$  היא:

$$v * c(x) - p(x)$$

במכרז אמיתי, חייב להתקיים:

$$v * c(v) - p(v) \geq v * c(x) - p(x)$$

התועלת של משתתף עם ערך  $x$  שאומר  $v$  היא:

$$x * c(v) - p(v)$$

במכרז אמיתי חייב להתקיים:

$$x * c(x) - p(x) \geq x * c(v) - p(v)$$

מחברים את המשוואות ומקבלים:

$$v * [c(v) - c(x)] \geq p(v) - p(x) \geq x * [c(v) - c(x)]$$



# הוכחת משפט מיירסון - המשך

נתון: כלל-בחירה  $c$ . דרוש: כלל-תשלום אמיתי  $p$ :

$$v[c(v)-c(x)] \geq p(v)-p(x) \geq x[c(v)-c(x)]$$

מצב א:  $c(v)=c(x)$

$$0 \geq p(v)-p(x) \geq 0$$

מכאן:  $p(v)=p(x)$  - התשלום על בחירה לא תלוי בערך.

מצב ב:  $c(v)>c(x)$ , כלומר  $c(v)=1$  וגם  $c(x)=0$ :

$$v \geq p(v)-p(x) \geq x$$

מכאן:  $v>x$  – הפונקציה  $c$  חייבת להיות מונוטונית.

נשים את  $x$  קצת מתחת ל"סף" ואת  $v$  קצת מעל ל"סף", ונקבל:  $p(v)-p(x)$  חייב להיות שווה לערך הסף!

# משפט מיירסון – ערך הסף

ערך הסף = הערך שבו הפונקציה  $c$   
מתחלפת מ-0 ל-1.

- ערך-הסף יכול להיות שונה משחקן לשחקן. דוגמאות:
- אם הכלל הוא "בחר את כל הערכים הגדולים מ-10", אז ערך-הסף לכל השחקנים הוא 10.
  - אם הכלל הוא "בחר את הערך הגבוה ביותר", אז ערך-הסף של הנבחר הוא המחיר השני.
  - אם הכלל הוא "הרץ אלגוריתם חמדני ב", אז ערך-הסף של כל שחקן יהיה תלוי במשקל שלו.

# הוכחת משפט מיירסון - סיום

מצאנו כלל-תשלום אחד ויחיד המועמד להיות אמיתי:

- לכל שחקן  $i$  יש ערך-סף מסויים  $t_i$ . נקבע לפי  $c$ .
- אם  $v_i > t_i$ , אז השחקן נבחר ומשלם  $t_i$ .
- אחרת, השחקן לא נבחר ולא משלם.

הוכחה שכלל-תשלום זה הוא אמיתי:

- אם נבחרת ותכריז מעל  $t_i$ , או לא נבחרת ותכריז מתחת ל  $t_i$  - כלום לא ישתנה.
- אם נבחרת, ותכריז מתחת ל- $t_i$  - לא תיבחר, והתועלת שלך תהיה 0, אבל קודם התועלת שלך היתה חיובית (כי  $v_i > t_i$ ).
- אם לא נבחרת, ותכריז מעל  $t_i$  - תיבחר ותשלם  $t_i$ , והתועלת שלך תהיה שלילית (כי  $v_i < t_i$ ). \*\*\*

# מכרז מיירסון למילוי תרמיל

הנחה: המשקל של כל משתתף ידוע. כל משתתף צריך להגיד רק את הערך שלו.

## אלגוריתם חמדני א:

- סדר את החפצים בסדר יורד של הערך.
  - בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.
- $\$100/100k, \$20/2k, \$20/2k, \$20/2k \dots$   
הראשון נבחר ומשלם את ערך הסף שלו -  $\$20$ .

## אלגוריתם חמדני ב:

- סדר את החפצים בסדר יורד של ערך/משקל.
  - בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.
- $\$20/2k, \$5/1k, \$100/100k$ .

שני הראשונים נבחרים:

הראשון משלם  $\$2$ , השני משלם  $\$1$ .



# מכרז מיירסון למילוי תרמיל

• אלגוריתם א+ב: הפעל את שני האלגוריתמים החמדניים. בחר את התוצאה עם הסכום הגבוה.

\$54/52k, \$52/51k, \$49/49k.

הראשון זוכה ומשלים:  $(52k/51k) * \$52$

\$100/100k, \$20/2k, \$20/2k.

הראשון זוכה ומשלים \$40.

\$100/100k, \$60/2k, \$60/2k.

שני האחרונים זוכים ומשלים: ?

# ויקרי-קלארק-גרובס לעומת מיירסון

מיירסון	וק"ג	
אחד	הרבה (למשל: בחירת מסעדה)	פרמטרים לכל שחקן
כל כלל מונוטוני (למשל: קירוב בעיית התרמיל, מיקסום רווח)	מיקסום סכום ערכים	כלל בחירה