

## אלגוריתם היוכל – תהליך הדרגתי לחלוקת נחלות בימינו

אראל סגל הלוי

### תקציר

התורה מצווה על בני ישראל לחלק את ארץ ישראל בין השבטים לפי גודלם, כך שלכל בית אב תהיה נחלה שווה. כמו כן התורה מצווה להחזיר את הקרקעות לבעליהן הראשונים בכל שנת יובל, ובכך נשמרת החלוקה הראשונית. כיום, הקרקעות אינן מחולקות בצורה שוויונית, ולכן קיום מצוות היוכל כפשוטה לא יביא לחלוקה שוויונית של הקרקעות. יתר על כן, חלוקה שוויונית של קרקעות נראית קשה ולא מעשית במציאות של ימינו. מאמר זה מציע אלגוריתם, המבוסס על גרף, שמאפשר לקיים את מצוות היוכל בהדרגה, באופן שיגדיל באופן תמידי את מספרם של בעלי הנחלות, תוך התערבות מזערית בחלוקת הקרקעות הנוכחית, ותוך התחשבות מרבית בהעדפות האישיות של האזרחים. חישובים הסתברותיים והדמיות ממוחשבות מראים, שהאלגוריתם מתכנס למצב שבו לכל אזרח יש נחלה.

### א. מצוות היוכל בהלכה ובהגות הציונית

"וְהָאָרֶץ לֹא תִמָּכַר לְצִמְתָּת כִּי לִי הָאָרֶץ כִּי גֵרִים וְתוֹשָׁבִים אַתֶּם עִמָּדִי. וּבְכָל אֶרֶץ אֲחֻזַּתְכֶם גָּאֵלָה תִתְּנוּ לָאָרֶץ. כִּי יָמוּךְ אַחִיד וּמָכַר מֵאֲחֻזָּתוֹ וּבָא גָאֵל הַקָּרֵב אֵלָיו וְגָאֵל אֶת מִמָּכָר אָחִיו. וְאִישׁ כִּי לֹא יִהְיֶה לוֹ גָּאֵל וְהַשִּׁיגָה יָדוֹ וּמָצָא כָּדִי גָאֲלָתוֹ. וְחָשַׁב אֶת שְׁנֵי מִמָּכָרוֹ וְהָשִׁיב אֶת הָעֶדֶף לְאִישׁ אֲשֶׁר מָכַר לוֹ וְשָׁב לְאֲחֻזָּתוֹ. וְאִם לֹא מָצָא יָדוֹ דֵּי הָשִׁיב לוֹ וְהָיָה מִמָּכָרוֹ בְּיַד הַקֹּנֶה אֹתוֹ עַד שְׁנַת הַיּוֹבֵל וַיֵּצֵא בַּיּוֹבֵל וְשָׁב לְאֲחֻזָּתוֹ" (ויקרא כה, כג-כח).

"וַיִּדְבֹּר ה' אֶל מֹשֶׁה לֵאמֹר. לֹאֵלָה תַחֲלֹק הָאָרֶץ בְּנַחֲלָה בְּמִסְפַּר שְׁמוֹת. לְרֹב תִּרְבֶּה נַחֲלָתוֹ וְלִמְעַט תִּמְעִיט נַחֲלָתוֹ אִישׁ לְפִי פִקְדָּיו יִתֵּן נַחֲלָתוֹ. אֵךְ בְּגוֹרֵל יַחֲלֹק אֶת הָאָרֶץ לְשֵׁמוֹת מִטּוֹת אֲבֹתָם יִנְחֲלוּ. עַל פִּי הַגּוֹרֵל תַּחֲלֹק נַחֲלָתוֹ בֵּין רֵב לְמַעַט" (במדבר כו, נב-נו).

על-פי פסוקים אלו, יש לחלק את קרקעות הארץ בשווה בין בני ישראל. החלוקה הזאת חשובה כל-כך, עד שהתורה קבעה חוק מיוחד שמטרתו לחדש את החלוקה המקורית פעם בחמישים שנה - חוק היוכל.

על-פי מסורת ההלכה, מצווה זו נוהגת רק כאשר כל שבטי ישראל נמצאים בארץ ישראל, וכל שבט יושב בנחלתו:

משגלה שבט ראובן ושבט גד וחצי שבט מנשה, בטלו היובלות, שנאמר "וקראתם דרור בארץ לכל יושביה" - בזמן שכל יושביה עליה: והוא שלא יהיו מעורבין שבט בשבט, אלא כולן יושבים כתקן.<sup>1</sup>

לפי הרמב"ם מצווה זו תתקיים במלוואה רק בימות המשיח:

המלך המשיח עתיד לעמוד ולהחזיר מלכות בית דוד ליושנה לממשלה הראשונה, ובונה מקדש, ומקבץ נדחי ישראל. וחוזרין כל המשפטים בימיו כשהיו מקודם:

<sup>1</sup> רמב"ם, משנה תורה, הלכות שמיטה ויובל, י, ח.

## מקריבין קרבנות, ועושיין שמיטין ויובלות, ככל מצוותן האמורה בתורה.<sup>2</sup>

עם זה החל מראשית הציונות, טענו הוגי דעות ציוניים רבים, שהכלכלה במדינה היהודית העתידית צריכה להתבסס על עקרונות היובל, גם אם לא תהיה אפשרות לקיים את מצוות היובל לפי כל פרטיה ודקדוקיה.<sup>3</sup>

דרכים רבות ומגוונות הוצעו ליישום עקרונות אלו.<sup>4</sup> לשם המחשה אביא כאן כמה דוגמאות בולטות:

1. בקונגרס הציוני הראשון בשנת ה'תרנ"ז (1897) הציע צבי הרמן שפירא להקים קרן ציבורית שתקנה קרקעות בא"י ותמכור אותם ליהודים, תוך הדגשה שהמכירה לא תהיה לצמיתות. הצעה זו זכתה לתמיכתו של בנימין זאב הרצל,<sup>5</sup> ובקונגרס הציוני של שנת ה'תרס"א (1901) היא התגשמה בהקמת הקרן הקיימת לישראל. נהלי הקק"ל קבעו, שכל קרקע תימכר לתקופה של 49 שנים לכל היותר, ולאחר מכן יחזרו לבעלות הקרן. נהלים אלה אומצו מאוחר יותר ע"י מינהל מקרקעי ישראל.<sup>6</sup>

לענ"ד, רעיון זה אינו עולה בקנה אחד עם מצוות חלוקת הנחלות שבתורה, שהרי לפי מצוות התורה (במדבר כו, לעיל) הקרקעות צריכות להיות בבעלות פרטית של האזרחים, ולא בבעלות של גוף אחד ציבורי.

2. זאב ז'בוטינסקי טען, שמטרתה של המצווה היא להבטיח שוויון הזדמנויות, ולפיכך טען שבימינו יש לחלק באופן שוויוני את כל הרכוש, ולא רק את הקרקעות, פעם ביובל: "אדם שנתרושש מחזירים לו את רכושו, המשועבד נעשה בן-חורין; שוב מתכונן שיווי-משקל; התחילו במשחק מראשיתו".<sup>7</sup>

לענ"ד, גם רעיון זה אינו נכון לפי התורה, שהרי דיני החלוקה והיובל שבתורה חלים בפירוש רק על קרקעות, לא על כסף וזהב, לא על צאן ובקר, ואפילו לא על בתים בעיר מוקפת חומה (פרט לערי הלויים).

3. גם שבתי בן דב הציע, בדומה לז'בוטינסקי, חלוקה של כל ההון במדינה, פעם ביובל. לטענתו, "הקרקע הייתה ההון היחיד בימי ראשית התנחלותנו בארץ, ולפיכך לא דובר בתורה אלא על הקרקע בלבד; אבל בימינו, להגביל את עקרון שנת היובל לקרקע בלבד פירושו הוא לרוקן את העניין מתוכנו".<sup>8</sup>

לענ"ד, בניגוד לדבריו, גם בחברה מודרנית ישנה חשיבות כלכלית עצומה לקרקע. הקרקע היא השטח לכל פעילות אנושית – דיור, הקמת מפעל, ואפילו קידוחי נפט. מחיר הקרקע מהווה חלק גדול ממחיר הדירה: אדם שיש לו קרקע, יכול להקים עליה דירה, או לפחות קרוון, תוך פחות משנה, אדם שאין לו קרקע, צריך לעבוד 20 שנה

<sup>2</sup> רמב"ם, **משנה תורה**, הלכות מלכים ומלחמות, יא, א.

<sup>3</sup> מסתבר שהגישה הציונית למצוות היובל משקפת את הגישה הציונית לחזון הגאולה בכלל – שיש להשתדל לקיימו בכלים אנושיים, ולא להסתפק בציפייה סבילה למשיח. דוגמה נוספת לגישה זו: על-פי הרמב"ם הנ"ל, גם קיבוץ גלויות הוא מתפקידיו של המשיח ("המשיח.... מקבץ נדחי ישראל"), וגם בתחום זה, טענה התנועה הציונית שיש לפעול כמיטב יכולתנו בדרך הטבע. להרחבה ראו: הרב יואל בן נון, **נס קיבוץ גלויות**, ה'תשע"א.

<sup>4</sup> ראו: אראל סגל הלוי, **התחילו במשחק מראשיתו – מצוות חלוקת הנחלות והיובל מראשית הציונות ועד ימינו**, "אקדמות" אדר ה'תשע"ג.

<sup>5</sup> ההצעה קיבלה ביטוי גם ברומן העתידני שלו: הרצל, **אלטנוילנד**, ה'תרס"ב-1902, ספר שלישי, חלק 1; ברשת: [http://benyehuda.org/herzl/tel\\_aviv.html](http://benyehuda.org/herzl/tel_aviv.html)

<sup>6</sup> החלטה מספר 1 של מועצת מינהל מקרקעי ישראל, ה'תשכ"ה - 17.5.1965. אמנם, בחזונו של הרצל באלטנוילנד, כל הקרקעות חוזרות לחברה הציבורית באותה שנה – שנת היובל; ובהחלטת מינהל מקרקעי ישראל, כל קרקע מוכרת בנפרד לתקופה של 49 שנה, כך שכל קרקע חוזרת בשנה אחרת.

<sup>7</sup> זאב ז'בוטינסקי, רעיון היובל – השיטה המקראית לצדק חברתי, ה'תר"ץ-1930, ברשת:

<http://www.global-report.com/thehope>

<sup>8</sup> שבתי בן-דב (ה'תרפ"ד - ה'תשל"ח), חבר לח"י שהפך להוגה-דעות לאחר קום המדינה, 'משטר היובל', **גאולת ישראל במשבר המדינה**, ה'תש"ך-1960; התפרסם מחדש ככרך ב' בכתביו אשר יצאו לאור ע"י יהודה עציון, **סולם למלכות ישראל היעודה**, ה'תשס"ז, 314-335; ברשת: <http://www.daat.ac.il/daat/vl/tohen.asp?id=496>

כדי לשלם את המשכנתה לבנק.

מעבר לכך, התורה מסבירה בפירוש, מדוע דין קרקע שונה מדין כל סוג אחר של רכוש: **"כִּי לִי הָאָרֶץ"** (ויקרא כה, כג). הארץ שייכת לה' כי ה' יצר אותה לבדו. מוצרים אחרים נוצרו בשיתוף פעולה של האדם והטבע, אולם הקרקע היא כולה יצירה אלוהית, ולפיכך חוקי הבעלות הרגילים אינם חלים עליה.

מעבר לכך, לקרקע יש ערך מהותי, הרבה מעבר לערך הכלכלי שלה. בעלות על קרקע עדיין קשורה באופן הדוק לחירות. מכיוון שכל אדם צריך מקום כלשהו להימצא בו, הרי שאדם שאין לו קרקע הוא בהכרח עבד, כי הוא חייב למלא את כל הוראותיו של בעל הקרקע שהוא נמצא בה. במקרה הטוב, הוראות אלה מסתפקות בתשלום דמי-שכירות (שגם הוא סוג של שיעבוד); במקרה הגרוע, בעל הקרקע יכול לדרוש מהדייר לעזוב, כמו שעשה יוסף לאחר שקנה את הקרקעות במצרים (בראשית מז). לכן התורה מדגישה, שחוק היובל נועד לשמור על החופש:

**"וְקִדְשְׁתֶּם אֶת שְׁנַת הַחֲמִשִּׁים שָׁנָה, וְקִרְאתֶם דְּרוֹר בְּאֶרֶץ לְכָל יֹשְׁבֶיהָ; יוֹבֵל הוּא תִהְיֶה לָכֶם, וְשַׁבָּתֶם אִישׁ אֶל אַחֲזָתוֹ וְאִישׁ אֶל מִשְׁפַּחְתּוֹ תֵּשְׁבוּ" (ויקרא כה, י).**

דרור = חירות; <sup>9</sup> דרור – גם מלשון דיור; <sup>10</sup> בהקשר של קרקעות, דרור הוא חופש הדיור – החופש לבנות דירה, חופש שזוכה בו רק מי שיש לו אדמה פרטית. אם כך, גם בימינו יש היגיון ליישם את דין החלוקה דווקא על קרקעות, על-מנת להבטיח חופש לכל אזרח.

בימינו, רוב הקרקעות בארץ ישראל אינן חופשיות – הן שייכות למדינה. גם מי שקונה קרקע, אינו חופשי לבנות בה את ביתו כרצונו, אלא הוא תלוי בוועדות התכנון והבניה הקובעות את ייעוד הקרקע. על-פי התורה, יש למצוא דרך לחלק את הקרקעות בצורה שווה, כך שלכל אזרח תהיה קרקע פרטית, חופשית לחלוטין ממגבלות ואיסורים; קרקע שתישאר בבעלותו ובבעלות משפחתו לתמיד.

כאמור, היישום המלא של מצווה זו יהיה רק בימות המשיח, אולם, במאמר זה אני נוקט בגישה הציונית, שלפיה יש להשתדל ליישם את חזון הגאולה כמיטב יכולתנו בדרך הטבע. בהתאם לכך, אנסה בהמשך המאמר לברר, איך אפשר לקיים את עקרון חלוקת הקרקעות והיובל במדינת ישראל של ימינו, ולהתקרב למצב שבו לכל אזרח יש קרקע פרטית.

## ב. איך מחלקים קרקעות בימינו

כדי לממש את עקרון חלוקת הקרקעות בימינו, יש להתייחס לכמה שאלות:

● **א. למי לחלק?** מי הם הזכאים? בזמן התורה חולקו קרקעות לכל אלה שנספרו במפקד שנערך לפני הכניסה לארץ: **"שָׂאוּ אֶת רֹאשׁ כָּל עַדַּת בְּנֵי יִשְׂרָאֵל מִבֶּן עֶשְׂרִים שָׁנָה וְיָמָעָלָה לְבֵית אֲבֹתָם, כָּל יֹצֵא צֶבֶא בְּיִשְׂרָאֵל ... לְאַלֶּה תַּחֲלֹק הָאָרֶץ בְּנִחְלָה"** (במדבר כו, ב-ג). האם הגיל מקנה זכות לקבל קרקע – "מבן עשרים שנה ומעלה", או השירות הצבאי – "כל יוצא צבא"? האם בימינו יש לחלק נחלות לכל אדם מעל גיל 20, או לכל אדם ששירת בצה"ל בלי קשר לגילו?

● **ב. כמה לחלק לכל אחד?** איך לבצע חלוקה שווה והוגנת של הקרקעות? בתורה נאמר: **"לָרֹב תִּרְבֶּה נַחֲלָתוֹ וְלַמְעַט תִּמְעִיט נַחֲלָתוֹ, אִישׁ לְפִי פָקֶדְיוֹ יִתֵּן נַחֲלָתוֹ"** (שם נד), והמשמעות הפשוטה היא שיש לחלק לפי גודל – למשפחה גדולה יש לתת נחלה גדולה, ולמשפחה קטנה יש לתת נחלה קטנה, כך שבסופו של דבר כל אזרח יקבל נחלה באותו גודל. אולם,

<sup>9</sup> אונקלוס שם.  
<sup>10</sup> רבי יהודה, בבלי ראש השנה ט, ב.

בתלמוד ישנה דעה שלפיה החלוקה צריכה להיות "בכסף", כלומר לפי הערך הכלכלי.<sup>11</sup> חכמי התלמוד מתייחסים לשני גורמים שלפיהם יש לחשב את ערך הקרקע - האיכות החקלאית שלה, והקרבה שלה לירושלים, בימינו יש כמובן גורמים רבים נוספים המשפיעים על ערך הקרקע, ואין זה ברור אם אפשר לחשב ערך של קרקע באופן אובייקטיבי. ועוד: בימינו ערך הקרקע עשוי להשתנות באופן ניכר תוך שנים ספורות, ולפיכך, גם אם בחלוקה הראשונית כל אזור יקבל קרקע באותו ערך, מסתבר שביובל הבא, כאשר כל אחד יקבל בחזרה את נחלתו הראשונה, הערך כבר יהיה שונה. אם כך, האם בכלל יש טעם לבצע את התהליך המסובך של חישוב ערך הקרקע מלכתחילה, או שעדיף להסתפק בחלוקה הפשוטה לפי גודל?

ג. **איך לחלק?** איך להגיע מהמצב הנוכחי, שבו לרוב האזרחים אין קרקע פרטית, למצב שבו לכל אזור יש קרקע פרטית?

מאמר זה ינסה לפתור רק את השאלה השלישית, ולשם כך נניח ששתי השאלות הראשונות כבר נפתרו, בפרט:

א. נניח שישנה קבוצה של אנשים הזכאים לקבל קרקעות - נקרא להם "האזרחים".

ב. נניח שנעשתה חלוקה של ארץ ישראל לחלקות "שוות", שמספרן בדיוק כמספר האזרחים - נקרא להן "הנחלות". אם החלטנו להתעלם מהערך הכלכלי, אז הנחלות יהיו שוות בגודלן, ואם החלטנו להתחשב בערך הכלכלי, אז הנחלות יהיו שוות בערכן. אם מישהו מחזיק בשטח גדול יותר או בעל ערך כלכלי רב יותר, נאמר שהוא מחזיק במספר נחלות; לדוגמה, אם נחלה אחת שווה רבע דונם, אז אדם המחזיק בבעלותו 2 דונם למעשה מחזיק 8 נחלות שונות.

בנוסף, במאמר זה לא נתייחס לסוגיות של הורשת נחלות וחלוקתן בין צאצאים, אלא נניח שלכל אזור ישנו יורש אחד בדיוק, המקבל אזרחות בדיוק ברגע שבו המוריש שלו נפטר, כך שמספר האזרחים הוא קבוע.

מטרתנו העיקרית היא למצוא אלגוריתם, שיביא אותנו מהמצב הנוכחי למצב האידיאלי על-פי התורה, שבו, בכל שנת יובל, **לכל אזור ישנה נחלה אחת**.<sup>12</sup>

בכפוף למטרה העיקרית, ננסה למצוא אלגוריתם שיאפשר כמה שיותר **חופש-בחירה** לאזרחים. בזמן התנ"ך, הנחלות חולקו על-פי גורל א-לוהי, וכל אזור קיבל בדיוק את הנחלה שה' ייעד עבורו, אולם בימינו אין לנו גורל אלוהי, ואין לנו דרך לקבוע מהי הנחלה המיועדת לכל אזור, ולכן נעדיף לאפשר לכל אזור לבחור את הנחלה שהוא מעדיף, במידת האפשר.

לרעיון זה של חופש הבחירה ישנו תקדים בתורה: בני גד ובני ראובן בקשו ממשה לקבל את שטחי עבר הירדן המזרחי, ומשה הסכים - בתנאי שישרתו בצבא וישתתפו בכיבוש הארץ כמו כל שאר השבטים.<sup>13</sup> בהתאם לכך, נחפש גם אנחנו פתרון שיאפשר לאזרחים את מרב חופש הבחירה לגבי נחלותיהם.

<sup>11</sup> בבלי בבא בתרא קכב, א.

<sup>12</sup> ויש לעיין, אם מחר יתקיימו כל התנאים ההלכתיים להחזרת מצוות היובל, איך תתקיים מצווה זו בפועל, הרי אף אחד לא יודע מהי הנחלה שלו? הרמב"ם (מלכים יב, ג) כתב שהמשיח עתיד לייחס את האנשים לשבטים ואז כל אחד יוכל לחזור לנחלתו, אולם מה נעשה אם התנאים ההלכתיים להחזרת מצוות היובל יתקיימו לפני ביאת המשיח? אינני יודע אם דנו בשאלה זו.

<sup>13</sup> במדבר לב.

לשם המחשה, נציג תחילה שני פתרונות שבוודאי אינם טובים :

1. ניתן לבצע כבר היום רישום של הבעלות על כל הנחלות, ולהתחיל כבר ממחר לספור את השנים לקראת היובל הבא. כעבור 50 שנה, תוחזר כל נחלה לבעליה הרשומים. פתרון זה בוודאי אינו ראוי, שהרי כיום לאזרחים רבים אין נחלה, ושנת היובל תנציח מצב זה, בניגוד גמור לכוונת התורה שלכל אזרח תהיה נחלה.

2. ניתן להכריח כל אזרח, המחזיק יותר מנחלה אחת, למכור את כל הנחלות פרט לאחת, לאזרחים שאין להם נחלה. פתרון זה יבטיח נחלה לכל אזרח, אולם הוא יפגע באופן משמעותי בבחירה החופשית של בעלי הקרקע הנוכחיים.

3. למיטב ידיעתי, היחיד שהציע תוכנית מעשית לחלוקת נחלות בימינו הוא אהוד טוקטלי.<sup>14</sup> הוא מציע להקים "קרן קיימת חדשה" (קק"ח), שתרכוש קרקעות בארץ ישראל, ותמכור אותן במחירי עלות לכל יהודי שמילא את חובותיו למדינה, כך שכל אחד יקבל נחלה בשווי כלכלי זהה. בניגוד להצעתו של הרצל: "הקרן הקיימת שלנו אינה בעלים של הקרקע... אדמות העם היהודי שמורות אצל הקרן בנאמנות... אף אחד לא יכול לרכוש מהקרן יותר אדמה מאשר כל יהודי אחר"; רכישת קרקע תהיה מותנית בהתחייבות "שלא ימכרו אותן לעולם. בעלי הקרקעות יהיו רשאים להשכיר את נכסיהם לתקופות קצרות או להחכיר אותם לארבעים ותשע שנים לכל היותר. הם לא יהיו רשאים להשכיר או להחכיר נכסים למי שאינו יהודי, ואלה שלא ירצו להחזיק באדמתם לחלוטין, יתחייבו למכור אותה רק לקרן הקיימת החדשה".

הצעתו של טוקטלי אכן מאפשרת להתקרב בהדרגה למצב שבו לכל אדם יש נחלה: ככל שהקק"ח תקנה קרקעות רבות יותר, כך היא תוכל למכור נחלות לאזרחים רבים יותר. הצעה זו גם מאפשרת בחירה חופשית מסוימת - הקרקעות נקנות רק מבעלים המוכרים אותן מרצונם החופשי, וכל אזרח יכול לבחור איזו נחלה הוא מעוניין לקנות, מי שמתחרט, יכול למכור את הנחלה שלו בחזרה לקק"ח, ולקנות נחלה אחרת.

הבעיה בהצעה זו היא, שהיא עדיין דורשת גוף אחד מרכזי, שיאסוף כמויות עצומות של כסף, ויקנה כמויות עצומות של קרקעות, עד לכל הקרקעות בארץ ישראל. אמנם הקרקעות יימכרו בסופו של דבר לאנשים פרטיים, אולם בתקופת הביניים, שעשויה להיות ארוכה, הקרקעות יהיו בבעלות מרכזית.

4. ברצוני להציע הצעה חדשה, שאינה דורשת בעלות מרכזית על קרקעות, גם לא באופן זמני. לפי הפתרון המוצע, יש לבצע כבר היום רישום של הבעלות על כל הנחלות, ולהתחיל כבר ממחר לספור את השנים לקראת היובל הבא - כמו בפתרון 1. אולם, כעבור 50 שנה, רק האנשים שאין בבעלותם נחלה יוכלו להחזיר לעצמם נחלה אחת. התהליך יתנהל ע"פ האלגוריתם הבא :

<sup>14</sup> אהוד טוקטלי, נוי אלט נוי לנד, ה'תשס"ב-2002; ברשת: <http://et.hopeways.org/nanl-04.htm> ; חלק רביעי, פרק ו, ד"ה 'אלה גם קיבוצים וגם מושבים'. רעיונות דומים נזכרו בספרו שבע, ה'תשס"ט-2009, ברשת: <http://www.hopeways.org/docs/sheva-ehud-tokatly.pdf>, עמ' 166 והלאה.

### אלגוריתם היובל

1. בחר אזרח כלשהו, שהייתה לו נחלה בתחילת הספירה, ושאינו לו נחלה כעת;<sup>15</sup>
2. אם אין אזרח כזה - סיים;
3. אם יש אזרח כזה - בקש ממנו לבחור את אחת הנחלות שהייתה בבעלותו בתחילת הספירה, והחזר את הנחלה לבעלותו;
4. חזור על התהליך עד לסיום.

לאחר סיום התהליך, מבצעים רישום מחודש של הבעלות, ומתחילים לספור מחדש לקראת היובל הבא.

קל לראות, שכל אזרח שהייתה לו נחלה בתחילת הספירה, יהיה בעל נחלה גם בסוף תהליך היובל. כך, התהליך מבטיח, שמספר בעלי הנחלות לא יקטן מיובל אחד ליובל הבא. מצד שני, התהליך מאפשר חופש בחירה מוחלט וחופש מסחר מוחלט בין יובל ליובל.

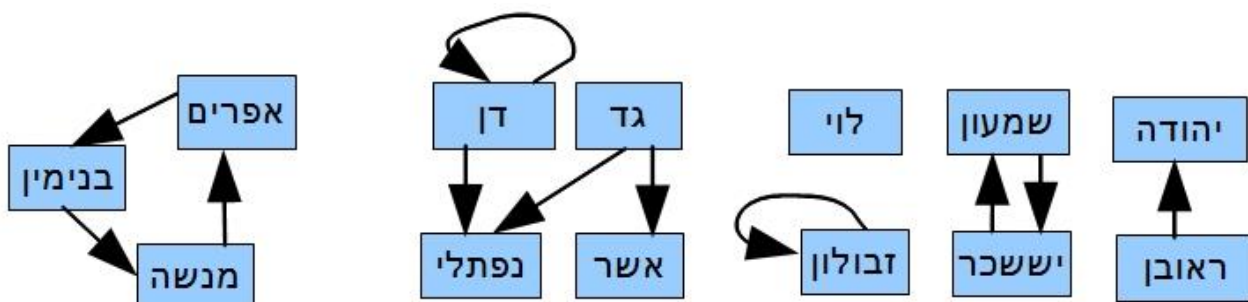
אמנם התהליך אינו מבטיח שמספר בעלי הנחלות יגדל מיובל אחד ליובל הבא, שהרי ייתכן שאף נחלה לא תימכר, וכך הבעלות לא תשתנה כלל. כדי לברר מה הסיכוי שמספר בעלי הנחלות אכן יגדל, נבדוק את התכונות הסטטיסטיות של התהליך, ולשם כך ננסח אותו בצורה פורמאלית כתהליך על גרף אקראי.

### ג. גרף הנחלות

**גרף הנחלות** הוא גרף המתאר את שינוי הבעלות בין שתי תקופות - תחילת הספירה (= מוצאי שנת היובל הקודמת), וסוף הספירה (= ערב שנת היובל הנוכחית).

- כל אזרח הוא צומת בגרף;
- כל נחלה היא קשת בגרף;
- נקודת היציאה של קשת היא האזרח שהיה בעל הנחלה במוצאי שנת היובל הקודמת;
- נקודת היעד של קשת היא האזרח המחזיק בנחלה בערב שנת היובל הנוכחית.

נתבונן לדוגמה בגרף הנחלות הבא:



<sup>15</sup> למיטב הבנתי, סדר הבחירה של האזרחים לא ישפיע באופן משמעותי על התוצאות. למרות זאת, כדי למנוע טענות על קיפוח מכוון, אפשר לקבוע שהסדר יהיה אקראי.

הגרף מלמד ש :

• הנחלה שהייתה של ראובן במוצאי היובל הקודם, נמצאת עכשיו בבעלות יהודה. ייתכן שראובן מכר את נחלתו ישירות ליהודה, או באופן עקיף דרך קונים ומוכרים נוספים. הגרף אינו מתייחס לכל העסקאות שנעשו בין שני היובלים, אלא רק למצב ההתחלתי ולמצב הסופי.

• שמעון ויששכר החליפו ביניהם את הנחלות. כל אחד מחזיק בנחלה שהייתה בידי השני.

• ללוי לא הייתה כלל נחלה במוצאי היובל הקודם, ואין לו כל נחלה כעת.

• לזבולון הייתה נחלה במוצאי היובל הקודם, והיא עדיין בבעלותו.

• לגד היו שתי נחלות, והוא מכר את שתיהן - אחת לאשר ואחת לנפתלי.

• לדן היו שתי נחלות, אחת מהן עדיין בבעלותו ואת השנייה הוא מכר לנפתלי.

• אפרים, בנימין ומנשה החליפו את נחלותיהם במעגל.

ובאופן כללי :

• דרגת היציאה של צומת שווה למספר הנחלות שהיו בבעלות האזרח במוצאי היובל הקודם.

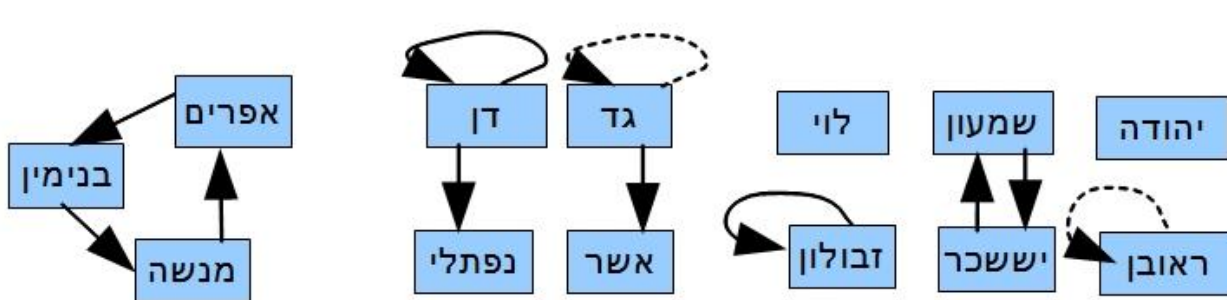
• דרגת הכניסה של צומת שווה למספר הנחלות שהאזרח מחזיק בבעלותו כעת.

כעת ננסח את אלגוריתם היובל, שהוצג בסעיף הקודם, כאלגוריתם על גרף הנחלות :

#### אלגוריתם היובל - ניסוח גרפי

1. בחר צומת כלשהו, שדרגת הכניסה שלו 0, ודרגת היציאה שלו גדולה מ-0;
2. אם אין צומת כזה - סיים;
3. אם יש צומת כזה - בחר את אחת הקשתות היוצאות ממנו, והפוך אותה לקשת עצמית;
4. חזור על התהליך עד לסיום.

ביצוע האלגוריתם על גרף הנחלות שהוצג למעלה עשוי לתת את התוצאה הבאה (קשתות שהשתנו מקווקוות) :



רק ראובן וגד היו בעלי נחלה במוצאי היובל הקודם (=דרגת יציאה גדולה מ-0), ואינם בעלי נחלה בערב היובל הנוכחי (=דרגת כניסה 0) ; לכן, כל אחד מהם בחר נחלה אחת והחזיר אותה לעצמו (=בחר קשת יוצאת אחת והפך אותה לקשת עצמית), וכך דרגת הכניסה שלו חזרה להיות גדולה מ-0. כך, כל אזרח שהיה בעלנחלה ביוכל הקודם הוא

בעל נחלה גם עכשיו.

מצד שני, ישנם שני אזרחים שהיו חסרי נחלה במוצאי היובל הקודם (=דרגת יציאה 0), והם בעלי נחלה ביובל הנוכחי - והם אשר נפתלי: נפתלי קנה את אחת הנחלות של דן, ואשר קנה את אחת הנחלות של גד. כיוון שדן וגד עדיין בעלי נחלות (=דרגת כניסה גדולה מ-0), הם אינם רשאים להחזיר לעצמם נחלות נוספות, ולכן אשר נפתלי יכולים לשמור בבעלותם את הנחלות החדשות שלהם. כך, האלגוריתם מאפשר לאזרחים חדשים לזכות בנחלה, ובמקביל שומר על זכויותיהם של בעלי הנחלה הוותיקים. מרגע שהגענו למצב שבו, בתחילת הספירה, לכל אזרח יש נחלה - מצב זה יישמר לתמיד.

מהו קצב הירידה במספר חסרי הנחלות מיובל ליובל? התשובה לשאלה זו תלויה, כמובן, במספר הנחלות שיימכרו במהלך היובל. כאשר שוק הנחלות הוא חופשי, הכל יכול לקרות, ולכן נבדוק את שני התרחישים הקיצוניים:

התרחיש הגרוע ביותר (מבחינת חסרי הנחלות) הוא, שאף אחד מבעלי הנחלות (או, לפחות, אף אחד מבעלי שתי נחלות או יותר) אינו מוכר אף נחלה. במקרה זה, מספר חסרי הנחלות יישאר קבוע.

התרחיש הטוב ביותר הוא, שכל בעלי הנחלות מוכרים את כל הנחלות שלהם בשלב כלשהו במהלך היובל, כלומר מתבצע ערבול מלא של הנחלות בין יובל ליובל. במקרה זה, ניתן לקבל קירוב לקצב הירידה בעזרת מודל הסתברותי. הפיתוח הוא ארוך ולכן הועבר לנספח א. השורה התחתונה היא, שאם ישנם  $N$  אזרחים ו- $N$  נחלות, ואם כל נחלה נמכרת בשלב כלשהו, במהלך 50 השנים שבין יובל ליובל, לקונה הנבחר באקראי, אז מספר חסרי הנחלות,  $M$ , משתנה בקירוב כך:

$$M_t \approx \frac{M}{1 + \left( \frac{1}{e} + \frac{\sqrt{NM}}{\sqrt{2}} \right)^t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = 0$$

כאשר  $t$  הוא הזמן הנמדד ביובלים (זמן 0 הוא המצב ההתחלתי, זמן 1 - לאחר סיום היובל הראשון, וכו'). ובעברית:

מספר חסרי הנחלה	מספר היובל
999	0
368	1
188	2
113	3
75	4
53	5
40	6
31	7

● קצב הירידה במספר חסרי הנחלות אטי יותר, ככל שמספר חסרי הנחלות קטן יותר. זה הגיוני: ככל שיש יותר בעלי נחלות, ישנם יותר אנשים שירצו לקבל את הנחלה שלהם בשנת היובל, ולכן יהיה קשה יותר לחסרי הנחלות שנשארו להשיג נחלה משלהם.

● אולם בטווח הארוך, המערכת מתכנסת למצב בו אין בכלל חסרי נחלות - כלומר לכל אזרח ישנה נחלה אחת בדיוק.

ניתן להשתמש בנוסחת הקירוב על-מנת להעריך, מתי יגיע מספר חסרי הנחלה מתחת לסף מסוים. לדוגמה, הטבלה בצד שמאל מציגה את מספר חסרי הנחלה לפי זמן, כאשר מספר האזרחים ומספר הנחלות הכולל הוא 1000. הטבלה מתחילה מהמקרה הגרוע ביותר, שבו, בזמן 0, כל הנחלות מרוכזות בידי אדם אחד, כך שיש 999 חסרי



נחלה. ניתן לראות, שתוך ארבעה יובלים, מספר חסרי הנחלה מגיע לכ-7.5%. זהו מספר מעניין, כי בזמן המקרא, שבט לוי (שמחבר מאמר זה משתייך אליו) לא קיבל נחלה. שבט לוי היה אחד מתוך 13 שבטי ישראל - בערך 7.7%. אם כך, תוך ארבעה יובלים, מספר חסרי הנחלה במודל שלנו נמוך משהיה בזמן המקרא.

לעומת זאת, ללא דין היובל, מספר חסרי הנחלה יהיה תמיד כ-36.8% - זהו שיעור האנשים שנשארים ללא נחלה, כאשר כל הנחלות נמכרות ומחולקות באקראי.

תוצאה זו תקפה, כאמור, רק כאשר כל הנחלות נמכרות בשלב כלשהו במהלך היובל. תרחיש סביר יותר הוא, שכל נחלה נמכרת בהסתברות מסוימת,  $q$ , הנמצאת בין 0 ל-1. במקרה זה, החישוב התיאורטי של קצב ההתכנסות נעשה הרבה יותר מסובך, ולכן לא נבצע אותו במאמר זה. אולם בהמשך המאמר (חלק ד) נשתמש בהדמיות ממוחשבות כדי לבדוק את ההשפעה של הסתברות המכירה על מספר חסרי הנחלה.

## שימור מעגלים

תכונה מעניינת של האלגוריתם היא, שהוא **משמר מעגלים**, כלומר: כל קשת שהיא חלק ממעגל, לא תשתנה ע"י האלגוריתם. ניתן לראות תכונה זו בגרף למעלה, ניתן גם להוכיח שהתכונה נכונה תמיד:

• נניח שבגרף הנחלות ישנו מעגל כלשהו בעל  $k$  צמתים. נסמן את הצמתים במעגל במספרים:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow (k-1) \rightarrow 0$$

• נניח, על דרך השלילה, שהאלגוריתם משנה קשת כלשהי במעגל; נניח, שהקשת ה**ראשונה** שהאלגוריתם משנה, במעגל זה, היא הקשת היוצאת מצומת  $i$ .

• ע"פ הגדרתו, האלגוריתם נוגע בקשת, רק אם צומת היציאה של הקשת הוא בעל דרגת כניסה 0.

• אולם במעגל המקורי קיימת הקשת היוצאת מצומת  $(i-1)$  ונכנסת לצומת  $i$ . האלגוריתם עדיין לא שינה אותה, כי הנחנו שהקשת היוצאת מ- $i$  היא הראשונה שהאלגוריתם נוגע בה.

• מכאן, דרגת הכניסה של צומת  $i$  גדולה מ-0 - וזו סתירה.

המשמעות של תכונה זו היא, שהאלגוריתם מאפשר לאזרחים להחליף נחלות, ובלבד שההחלפות יוצרות מעגל בגרף הנחלות. האם זו תכונה טובה או רעה? מצד אחד, אפשר לטעון שזו תכונה רעה, שהרי לפי פשוטו של החוק המקראי, כל אדם צריך לחזור לנחלתו המקורית, ואין אפשרות להחליף, גם אם שני הצדדים מסכימים. ניתן גם להבין מה החשיבות של חוק זה:

1. הנחלות המקוריות חולקו בגורל, שבוצע על פי ה', ברוח הקודש. החלוקה משקפת את הרצון האלוהי, ולכן יש לשמר אותה.

2. הנחלות המקוריות חולקו בהתאם לשבטים ולמשפחות, והתורה הקפידה על כך שהמבנה המשפחתי והשבטי יישמר, ולכן ציוותה שהאדם יחזור דווקא "**אל משפחתו**" (ויקרא כה, י).

אולם בימינו, שתי הסיבות אינן תקפות: אין לנו אפשרות להפיל גורל ברוח הקודש, ולקבוע מהי הנחלה הראויה לכל אחד, והחלוקה הנוכחית ממילא אינה משמרת מבנה משפחתי או שבטי כלשהו, ולכן גם אין כל סיבה להנציח את החלוקה הנוכחית ולמנוע

החלפות.

אם כך, התכונה של שימור מעגלים היא תכונה טובה, שכן היא מאפשרת חופש בחירה: אדם שקנה נחלה, ואינו מרוצה ממנה, יכול למכור אותה ולקנות נחלה אחרת, ואם בשנת היובל יתברר שהעסקאות שלו הן חלק ממעגל - הוא יוכל לשמור בבעלותו את הנחלה החדשה. כמובן, אפשרות זו אינה מובטחת: לדוגמה, בתרשים למעלה, אילו בנימין לא היה מוכר את נחלתו לאפרים, היה נוצר מצב שבו לאפרים אין נחלה, אפרים היה מקבל בחזרה את הנחלה שמכר למנשה, ומנשה היה מקבל בחזרה את הנחלה שמכר לבנימין, וכך אף אחד מהם לא היה מצליח להחליף נחלה, כל אחד מהם היה חוזר לנחלתו המקורית.

כל עוד ישנם אנשים, שביובל הקודם הייתה להם יותר מנחלה אחת, ייתכן שתהיה קשת שלא תשתנה באלגוריתם היובל, למרות שאינה חלק ממעגל (כמו, בגרף למעלה, הקשת בין גד לאשר). אולם, מרגע שהגענו למצב שבו לכל אזרח יש נחלה אחת בדיוק - רק קשתות שהן חלק ממעגל יישמרו. נוכיח על-דרך השלילה:

• נניח שקשת כלשהי, בין שני צמתים שונים, נשארה בגרף הנחלות לאחר ביצוע אלגוריתם היובל. נסמן את שני קצות הקשת במספרים:  $0 < 1$ .

• מכיוון שבתחילת הספירה לכל אזרח הייתה נחלה אחת בדיוק, הרי שבגרף הנחלות, לכל צומת ישנה קשת יוצאת אחת בדיוק. נסמן את היעד של הקשת היוצאת מ-1 ב-2:  $1 < 2$ .

• מכיוון שמספר הצמתים סופי, אם נמשיך למספר כך את הצמתים, נגיע בהכרח לצומת שכבר ביקרנו בו; נניח שהצומת הראשון שכבר ביקרנו בו הוא צומת מספר  $k$ , כך ש:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow (k-1) \rightarrow k$$

• ישנן שתי אפשרויות:

▪ אפשרות א: הצומת  $k$  זהה לצומת 0: במקרה זה, הקשת המקורית שבדקנו - הקשת  $0 \rightarrow 1$  - היא חלק ממעגל, כמו שרצינו להוכיח.

▪ אפשרות ב: הצומת  $k$  זהה לצומת  $i$  כלשהו, המקיים  $0 < i < k$ : במקרה זה, ישנן שתי קשתות הנכנסות לצומת  $k$ : הקשת היוצאת מצומת  $(k-1)$ , והקשת היוצאת מצומת  $(i-1)$ , ולפי הנחתנו, אלו צמתים שונים. אולם, מספר הקשתות הנכנסות זהה למספר הצמתים בגרף (מספר הנחלות זהה למספר האזרחים); אם לצומת אחד ישנן שתי קשתות נכנסות, בהכרח ישנו צומת אחד לפחות שאין לו קשתות נכנסות כלל, נסמן אותו ב- $a$ ; אולם, לכל צומת ישנה קשת יוצאת אחת בדיוק. לצומת  $a$  ישנה קשת יוצאת ואין לו קשתות נכנסות - ולפיכך לא ייתכן שביצוע אלגוריתם היובל הסתיים - וזו סתירה.

לסיכום: אם במצב ההתחלתי לכל אזרח יש נחלה, אז גם במצב הסופי לכל אזרח יש נחלה, ונחלה שעוברת מיד ליד תישאר בידי בעליה החדשים אם ורק אם העסקה היא חלק ממעגל.

מה הסיכוי, שאדם הקונה נחלה יצליח להחזיק בה? לשם כך יש לחשב את ההסתברות שקשת כלשהי בגרף הנחלות תהיה חלק ממעגל. ניתן להראות, <sup>16</sup> שאם בתחילת הספירה לכל אזרח ישנה נחלה אחת בדיוק, וכל נחלה נמכרת במהלך היובל לקונה

<sup>16</sup> ראו:

Henning Makhholm, Math Stack Exchange, 26.4.2012,

<http://math.stackexchange.com/questions/136932/probability-of-cycle-in-random-graph/136974>

הנבחר באקראי - אז ההסתברות שקשת כלשהי תהיה חלק ממעגל בסוף היובל היא :

$$P_{ok}(N) = \sqrt{\frac{\pi}{2N}} \frac{1}{N}$$

כאשר  $N$  הוא מספר האזרחים והנחלות. זהו חסם עליון - אם לא כל הקרקעות נמכרות, ההסתברות קטנה יותר. בסעיף הבא נבדוק גם נוסחה זו בעזרת הדמיה ממוחשבת.

ככל שמספר האזרחים והנחלות גדול יותר, ההסתברות להחלפה קטנה יותר, ולמעשה שואפת לאפס. כאמור, ניתן להסתכל על התופעה משני צדדים : מהצד השלילי - היא מקטינה את חופש הבחירה של האזרחים, ומהצד החיובי - היא מעודדת את האזרחים להיצמד לנחלות המקוריות, "והארץ לא תימכר לצמיתות".

#### ד. הדמיה ממוחשבת

כדי לחקור את תכונות המודל, השתמשתי בשיטת הדמיה מבוססת סוכנים.<sup>17</sup> בשיטה זו, מפעילים מספר רב של סוכנים ממוחשבים, מגדירים לכל אחד מהם את כללי הפעולה שלו (בדרך-כלל מדובר בכללים פשוטים יחסית), ובוחנים את התפתחות המערכת לאורך זמן. הכלי שהשתמשתי בו היה שפת NetLogo,<sup>18</sup> שפה ייעודית לביצוע הדמיות מסוג זה. תוכנית ההדמיה זמינה ברשת,<sup>19</sup> כך שהניסויים המתוארים ניתנים לשחזור.

בתחילת ההדמיה, כל הנחלות שייכות לאזרח אחד (אפשר לחשוב עליו כמייצג את מינהל מקרקעי ישראלי). ההדמיה מחולקת לתקופות, כל תקופה מייצגת שנה. בכל תקופה, לכל אחת מהנחלות ישנה הסתברות כלשהי  $p$  - להימכר. ההסתברות  $p$  ניתנת לשינוי ע"י החוקר. בכל פעם שחולפות 50 תקופות, מתבצע אלגוריתם היובל שתואר בסעיף הקודם, וחלק מהנחלות חוזרות לבעליהן. אם אזרח כלשהו זכאי להחזיר לעצמו יותר מנחלה אחת, תוכנת ההדמיה בוחרת באקראי את הנחלה שיקבל בחזרה.

המדד המעניין אותנו הוא שיעורם היחסי של חסרי הנחלה - אנו רוצים ששיעור זה יהיה קטן ככל האפשר. להלן גרף אופייני של שיעור חסרי הנחלה, באחוזים, עבור 1000 אזרחים ו-1000 נחלות, ושני ערכים שונים של הסתברות המכירה  $p$  :

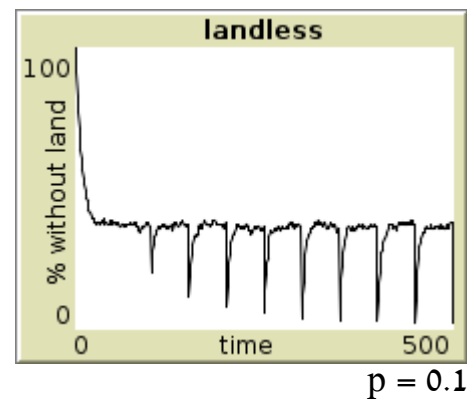
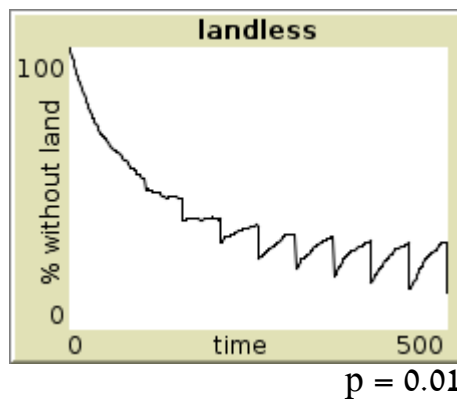
<sup>17</sup> ראו למשל :

Leigh Tesfatsion, "Agent-Based computational economics: Growing economies from the bottom up", *Artif. Life*, vol. 8, no. 1, pp. 55-82, Mar. 2002.

Robert Axelrod, "Advancing the art of simulation in the social sciences", *Complexity*, vol. 3, pp. 16-22, Nov. 1997.

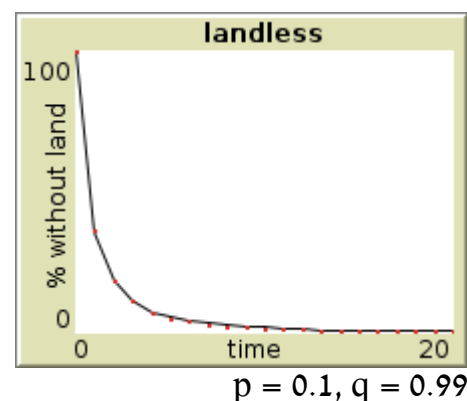
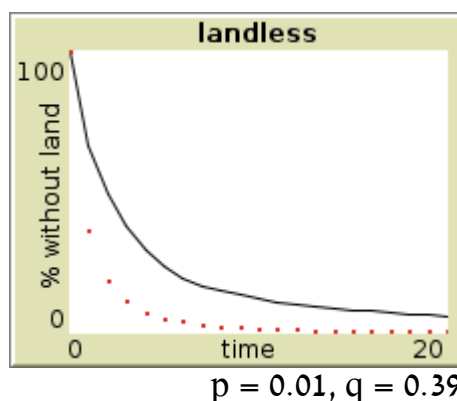
<sup>18</sup> ראו :

Uri Wilensky, "NetLogo", <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL, 1999-2012.  
<sup>19</sup> בכתובת : <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/community/land-random>



לגרף ישנה צורה אופיינית של מסרק. השיניים התחתונות של המסרק מתאימות לשנות היובל, שבהן מספר חסרי הנחלה יורד בחזות כי חלק גדול מחסרי הנחלה מקבלים בחזרה את הנחלה שהייתה להם ביובל הקודם. בין יובל ליובל מתבצע מסחר אקראי, וכתוצאה מכך מספר חסרי הנחלה עולה. אולם ניתן לראות, שבנקודות המתאימות לשנות היובל, מספר חסרי הנחלה תמיד יורד.

נוח יותר לראות זאת כאשר מתייחסים לכל היובל כאל תקופה אחת, שבה ההסתברות של כל נחלה להימכר היא  $q$ , כאשר מתקיים הקשר:  $q = 1 - (1 - p)^{50}$ . כך נראים גרפים אופייניים; הקו מציין את מספר חסרי הנחלה בהדמיה, והנקודות מציינות את מספר חסרי הנחלה התיאורטי, לפי נוסחת הקירוב מסעיף ג:



ניתן לראות, שעבור  $q=0.99$ , נוסחת הקירוב אכן נותנת תוצאות קרובות מאוד להדמיה הממוחשבת (זכרו שנוסחה זו חושבה תחת ההנחה שכל הקרקעות נמכרות, כלומר  $q=1$ ). עבור  $q=0.39$ , קצב הירידה במספר חסרי הנחלה הוא, כצפוי, אטי יותר: ככל שפחות נחלות נמכרות, יש פחות סיכוי לחסר-נחלה לקנות נחלה.

הטבלה הבאה מתארת את הירידה במספר חסרי הנחלה עבור ערכים שונים של ההסתברות  $q$ :<sup>20</sup>

<sup>20</sup> כל תא חושב ע"י ממוצע של 10 הרצות. סטיית התקן ברוב התאים הייתה קטנה מ-10%, והיא הושמטה מהטבלה לשם קיצור.

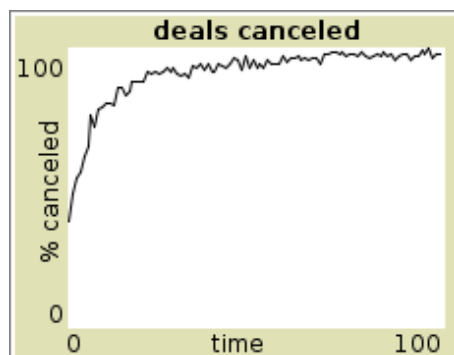
# מספר חסרי הנחלות

מספר  
היובל

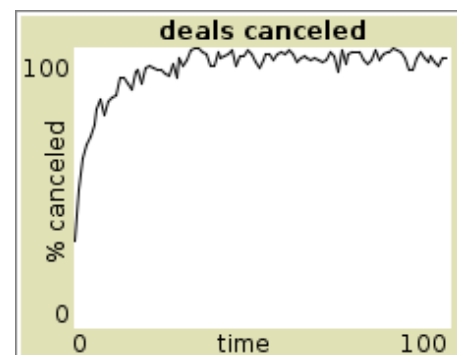
	q=1	q=0.8	q=0.6	q=0.4	q=0.2
0	999	999	999	999	999
4	73	113	180	300	512
8	23	49	82	156	318
12	12	29	50	96	228
16	7	20	36	71	171

דרך אפשרית להאיץ את ההתכנסות היא להבטיח שההסתברות למכירת נחלה תהיה גבוהה. ניתן לעשות זאת, למשל, ע"י הטלת מסים על נחלות עודפות, שיקטינו את הכדאיות בהחזקת נחלות עודפות ויעודדו את בעליהן למכור אותן.<sup>21</sup>

שאלה מעניינת נוספת, שאפשר לבדוק באמצעות ההדמיה, היא מה שיעור האנשים שיצטרכו להחזיר את הנחלה בשנת היובל. כצפוי, שיעור זה קטן יחסית בהתחלה, כאשר להרבה אנשים ישנן כמה נחלות. לפי אלגוריתם היובל, המוכר יכול לקבל בחזרה רק נחלה אחת לכל היותר, ולכן, כל מי שיקנה ממנו נחלה, פרט לאחד, יוכל לשמור על הנחלה. אולם בהמשך, כשלכל אדם ישנה נחלה אחת, הדרך היחידה שבה אדם יכול לקנות נחלה חדשה היא, כשהעסקה תהיה חלק ממעגל. על-פי הנוסחה בסוף סעיף ג, הסתברות זו שואפת לאפס כאשר מספר הנחלות גדול, ולכן אחוז החזרת הנחלות מתקרב ל-100%:



$p = 0.01, q = 0.39, N = 1000$



$p = 0.1, q = 0.99, N = 1000$

לשם המחשה, נחשב את ההסתברות להחזיק בנחלה, עבור ערכים שונים של  $p$  (הסתברות המכירה) ו- $N$  (מספר האזרחים והנחלות), כאשר מתחילים מחלוקה שוויונית שבה לכל אזרח יש נחלה:<sup>22</sup>

$N = 100$

$N = 1000$

<sup>21</sup> מיסוי על קרקע נחשב יעיל (כלכלית) וצודק (חברתית) יותר ממסים אחרים. ראו ויקיפדיה האנגלית, ערך Land\_value\_tax.

<sup>22</sup> המספרים התקבלו ע"י הרצת  $A=1000$  ניסויים וחישוב הממוצע. השגיאה err מייצגת את רדיוס רווח הסמך ברמת בטחון 0.9:

$$err = z * \sqrt{q * (1-q) / A}$$

$z = 1.645$  - מתוך טבלת התפלגות נורמלית - המספר שעבורו השטח מתחת לגרף ההתפלגות הנורמלית,

בין  $z$  לבין  $-z$ , הוא 0.9.

$p = 0.01, q = 0.39$	0.57% (err=0.39%)	0.06% (err=0.13%)
$p = 0.1, q = 0.99$	10.9% (err=1.61%)	2.96% (err=0.88%)
$q = 1.00$	11.1% (err=1.63%)	3.81% (err=0.99%)
$q = 1.00$ קירוב תיאורטי -	11.5%	3.86%

המספרים בשורה האחרונה חושבו ע"פ נוסחת הקירוב שהוצגה בסוף הסעיף הקודם.

בסעיפים הבאים נבחן מספר שינויים שאפשר לבצע באלגוריתם היובל:

## ה. הקטנת אי הוודאות

אחד החסרונות באלגוריתם שהצענו הוא, שהקונה אינו יכול לדעת בוודאות, אם הנחלה שהוא קונה תישאר בידו לאחר שנת היובל; הדבר תלוי במצבו של המוכר בשנת היובל - אם למוכר תהיה נחלה אחרת, אז הקונה יוכל לשמור את הנחלה שקנה בבעלותו, אך אם למוכר לא תהיה נחלה אחרת, ייתכן שיבחר להחזיר לעצמו את הנחלה שמכר. אי-הוודאות עלול לגרום לכך, שהקונה לא ירצה לפתח את הנחלה ולבנות עליה, מחשש שמא יצטרך להחזיר אותה.

פתרון אפשרי הוא, שבכל עסקה, אם למוכר ישנן נחלות נוספות מעבר לנחלה שהוא מוכר, הוא יוכל להעביר את הנחלה שהוא מוכר כעת לבעלות מוחלטת של הקונה, כך שהקונה יהיה בטוח שלא יצטרך להחזיר אותה ביובל. האלגוריתם עדיין ישמור על התכונה העיקרית שלו, שכל מי שיש לו נחלה ביובל מסוים, תהיה לו נחלה גם ביובל הבא.

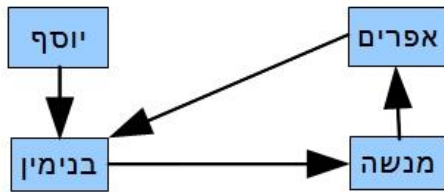
הדמיות ממוחשבות שביצעתי הראו, שהתכונות הגלובליות של המודל (קצב הירידה במספר חסרי הנחלה כפונקציה של הזמן, ושיעור ההחזרות של נחלות) אינן משתנות כלל כאשר מבצעים תיקון זה.

## ו. עדיפות לבעלים הנוכחי

האלגוריתם שהצענו נותן עדיפות לבעל הנחלה הקודם, על פני בעל הנחלה הנוכחי. כך למשל, אם לראובן הייתה נחלה אחת, וליהודה לא הייתה כל נחלה, וראובן מכר את נחלתו ליהודה (כמו בתרשים בסעיף ג) - אז בשנת היובל הנחלה תחזור לראובן, ויהודה יישאר בלי נחלה. אפשר להציע אלגוריתם שבו סדר העדיפויות יהיה הפוך: במקום להחזיר נחלות **לכל** אזרח **שאינו** לו נחלה בערב היובל, אפשר להחזיר נחלות **מכל** אזרח **שיש** לו יותר מנחלה אחת בערב היובל, כך, אם ליהודה יש עכשיו רק נחלה אחת, הוא לא יצטרך להחזיר אותה לראובן.

ישנה סימטריה בין האלגוריתמים: האלגוריתם המקורי מבטיח, שלכל אזרח שהייתה לו נחלה בתחילת הספירה, תהיה **לפחות** נחלה אחת גם בסוף תהליך היובל. האלגוריתם ההפוך מבטיח, שלכל אזרח שהייתה לו נחלה בתחילת הספירה, **לא** יהיה מספר גדול יותר של נחלות בסוף תהליך היובל, ולפיכך, מספר הנחלות הכולל שמחזיקים בעלי הנחלות אינו גדל מיובל אחד ליובל הבא. ולכן, בשני האלגוריתמים, מספר חסרי הנחלות אינו גדל. הדמיות ממוחשבות שביצעתי הראו, שקצב הירידה במספר חסרי הנחלה הוא מעט אטי יותר באלגוריתם ההפוך, אולם ההבדל אינו מובהק סטטיסטית.

אולם, בניגוד לאלגוריתם המקורי, האלגוריתם ההפוך אינו משמר מעגלים. לדוגמה, בגרף הנחלות הבא:

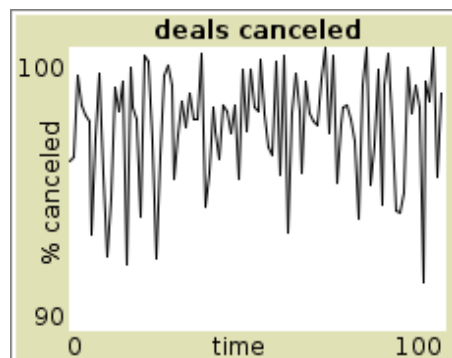


באלגוריתם המקורי, החזרת הנחלות תתחיל מיוסף, שכן הוא היחיד שאין לו נחלה. הוא יחזיר לעצמו את הנחלה שמכר לבנימין, ואז לכל אחד תהיה נחלה, והתהליך יסתיים - העסקאות במעגל אפרים-מנשה-בנימין לא יתבטלו.

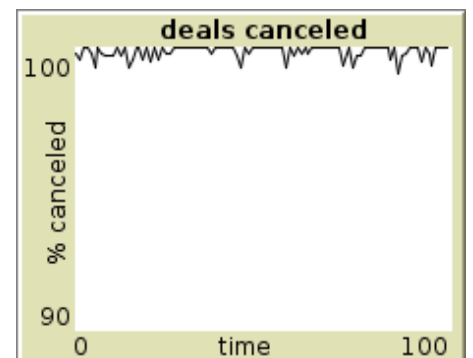
אולם באלגוריתם ההפוך, החזרת הנחלות תתחיל מבנימין, שכן הוא מחזיק כעת בשתי נחלות. ייתכן שהוא יבחר להחזיר את הנחלה שקנה מאפרים. לאחר מכן, לאפרים יהיו שתי נחלות, והוא יצטרך להחזיר את הנחלה שקנה ממנשה, ואז למנשה יהיו שתי נחלות, והוא יצטרך להחזיר את הנחלה שקנה מבנימין. ואז שוב לבנימין יהיו שתי נחלות, והוא יצטרך להחזיר את הנחלה שקנה מיוסף. כך כל העסקאות יתבטלו.

ואכן, הדמיות שביצעתי מראות, שבאלגוריתם ההפוך, ההסתברות להחזיק בנחלה היא קטנה יותר: במקום 3.81% (עבור 1000 נחלות, כאשר הסתברות מכירה ביובל היא 1.00) מקבלים 0.1%<sup>23</sup>.

ניתן בבירור לראות את ההבדל בגרפים, כאשר מסתכלים מקרוב על התחום בין 90%-ל-100%:



החזרת נחלות מכל מי שיש לו יותר מנחלה אחת החזרת נחלות לכל מי שאין לו נחלה  
 $p = 0.1$   $p = 0.1$



אם כן, באלגוריתם המקורי קל יותר לאזרחים להחליף נחלות.

ניתן להציע גרסה משולבת, שבה הנחלה חוזרת לבעליה, רק אם לבעלים המקורי אין נחלות, וגם לבעלים הנוכחי יש יותר מנחלה אחת. גרסה זו משמרת מעגלים, אולם בגרסה זו ייתכן שמספר חסרי הנחלה יגדל. לדוגמה, בגרף הנחלות הבא:

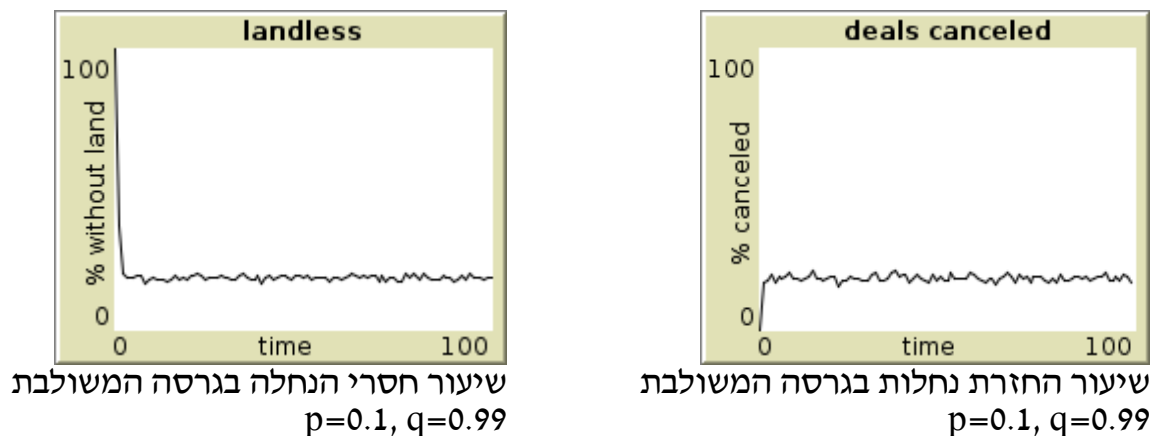


לאֲשֶׁר אין נחלות, אולם הוא לא יוכל לקבל בחזרה את הנחלה שמכר לגד, כי גד מחזיק כעת רק נחלה אחת. דן מחזיק שתי נחלות, אולם הוא לא יצטרך להחזיר לגד את

23 ממוצע של 1000 ניסויים. רדיוס רווח סמך ברמת בטחון 0.9: 0.17%.

הנחלה שקנה ממנו, כי לגד יש נחלה אחת. לכן, אף עסקה לא תתבטל, ומספר חסרי הנחלה יגדל מ-0 ל-1 – אשר יישאר בלי נחלה.

הגרפים הבאים מראים את התנהגות הכלכלה תחת הגרסה המשולבת, לאורך זמן. כל יובל הוא יחידת-זמן אחת:



כצפוי, ביובלים הראשונים מספר חסרי הנחלה קטן, אולם הוא אינו שואף ל-0 אלא מתייצב על כ-18%. גם מספר ביטול העסקאות הוא נמוך יחסית – כ-18% בממוצע.

מכל הגרסאות שבדקתי, רק האלגוריתם המקורי מקיים את שתי התכונות יחד – חסם עליון על מספר חסרי הנחלה, ושימור מעגלים.

## ז. הגדלת מספר הנחלות

עד עתה הנחנו, שמספר הנחלות שווה למספר האזרחים. זוהי הנחה הגיונית, והראינו שבטווח הארוך היא מאפשרת להגיע למצב שוויוני, שבו לכל אזרח ישנה נחלה אחת בדיוק.

אולם אלגוריתם היובל יכול לעבוד בדיוק באותה מידה, גם כאשר מספר הנחלות גדול ממספר האזרחים. למעשה, מבחינות מסוימות, הביצועים הרבה יותר טובים כאשר מספר הנחלות גדול יותר!

ראשית נבדוק את הירידה במספר חסרי הנחלות לאורך זמן. כפי שהראינו בנספח א, אם מספר הנחלות הוא  $L$  ומספר האזרחים הוא  $N$ , וכל נחלה נמכרת בין יובל ליובל לקונה אקראי, אז מספר חסרי הנחלה יורד כך:

$$N \left( 1 - \frac{1}{e} \right)^{\frac{L}{N}}$$



מספר היובל	מספר חסרי הנחלות				מכל הנוסחה הזאת, הנקודה החשובה ביותר היא ש: $M_H \leq e^{HN} M$
	L=1000	L=1100	L=1500	L=2000	
0	999	999	999	999	כאשר $L > N$ , היחס $e^{1-L/N}$ קטן מ-1,
1	368	333	223	135	ומכאן שמספר חסרי-הנחלה קטן בקצב מעריכי – שהוא, אסימפטוטית, הרבה יותר מהיר מקצב
2	188	150	62	21	הירידה כאשר מספר הנחלות שווה למספר האזרחים.
3	113	78	18	3	
4	75	44	5	0	

הטבלה בצד שמאל מראה את מספר חסרי הנחלה עבור ערכים שונים של  $L$ , על-פי הנוסחה התיאורטית. כאשר מספר הנחלות גדול כפליים ממספר האזרחים, מספר חסרי הנחלה בכל יובל קטן בערך פי 7 מביובל הקודם, והמשק מגיע תוך 4 יובלים למצב שבו פחות מחצי אלפית מהאזרחים הם חסרי נחלה.

שנית, נבדוק את השפעת ההסתברות למכירת נחלה בין יובל ליובל ( $q$ ) על הירידה במספר חסרי הנחלה. בחלק ד הצגנו ירידה זו כאשר מספר הנחלות שווה למספר האזרחים (1000); להלן טבלה מקבילה כאשר מספר הנחלות הוא 2000: <sup>24</sup>

מספר היובל	מספר חסרי הנחלות				
	q=1	q=0.8	q=0.6	q=0.4	q=0.2
0	999	999	999	999	999
4	0	3	12	54	243
8	0	0	0	3	64
12	0	0	0	0	17
16	0	0	0	0	4

כאשר יש 2000 נחלות, גם כאשר ההסתברות שנחלה תימכר ב-50 שנה היא רק 40%, עדיין מגיעים תוך 4 יובלים למצב שבו רק ל-5.4% מהאזרחים אין נחלה. אם כך, הגדלת מספר הנחלות מהווה דרך חלופית להאיץ את ההתכנסות - במקום לגבות מסים מבעלי נחלות על-מנת לעודד אותם למכור, כפי שהצענו בחלק ד.

שלישית, נבדוק את מספר הנחלות שנשארות ביד בעליהן החדשים. כאשר מספר הנחלות גדול ממספר האזרחים, נחלה שעוברת מיד ליד עשויה להישאר בידי בעליה החדשים, גם אם העסקה אינה חלק ממעגל בגרף הנחלות - אם למוכר ישנן עוד

<sup>24</sup> המספרים חושבו ע"י הדמיה ממוחשבת. כל תא הוא ממוצע של 10 הרצות, מעוגל לשלם הקרוב ביותר. סטיית התקן ברוב התאים קטנה מ-10%.

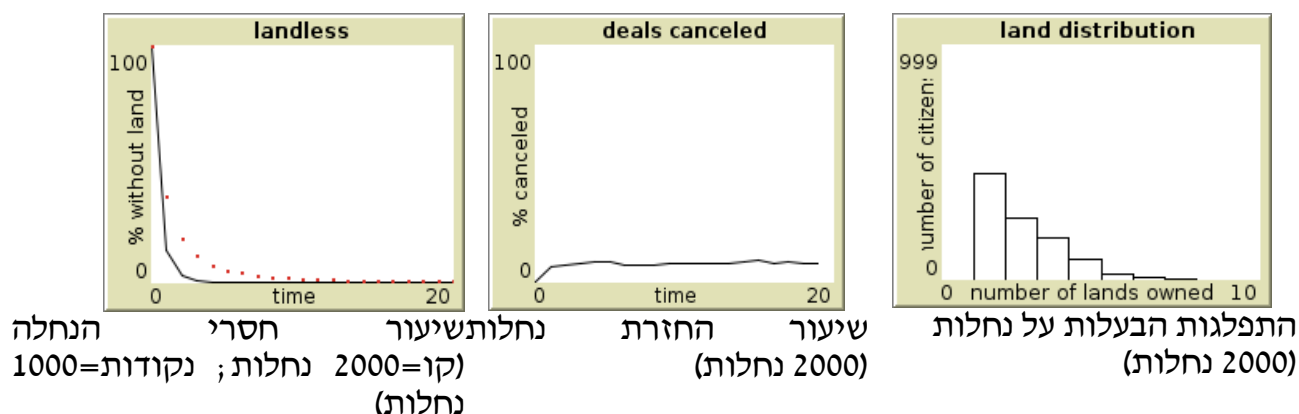
נחלות. לפי נספח א, מספר הנחלות שנמכרות ואינן מוחזרות הוא :



מכאן, גם כאשר לכל אזרח ישנה נחלה אחת לפחות, מספר העסקאות שמתקיימות לאחר היובל אינו שואף לאפס אלא מתכנס למספר קבוע גדול מאפס – ומכאן, שבמצב כזה יהיה לאזרחים הרבה יותר קל להחליף נחלות.

אם כך, כשמגדילים את מספר הנחלות, המשק מגיע מהר יותר למצב שבו לכל אזרח יש נחלה, וכן חופש הבחירה של האזרחים גדול יותר. אולם לחופש יש מחיר – חלוקת הנחלות הסופית כבר אינה שוויונית! לכל אזרח תהיה נחלה אחת לפחות – אבל יהיו אזרחים שיהיו להם הרבה נחלות.

הגרפים הבאים מראים את שיעור חסרי הנחלה, שיעור החזרת הנחלות, והתפלגות הנחלות, כאשר יש  $N=1000$  אזרחים ו  $L=2000$  נחלות, וההסתברות למכירת נחלה ביובל היא  $q=0.99$ :



הנתונים מציבים בפנינו התלבטות בין שני ערכים :

- האם להדגיש את השאיפה לשוויון - לכל אזרח יש נחלה אחת **בדיוק** - גם אם ייקח זמן רב להגיע למצב זה?
- האם להדגיש את ערך החופש – "הדרור" - לכל אזרח יש נחלה אחת **לפחות** - גם אם כתוצאה מכך חלוקת הנחלות הסופית לא תהיה שוויונית?
- ואולי ישנה דרך שלישית, המאפשרת לקיים את שני הערכים יחד?

## ח. עושר ועוני

עד עתה, הנחנו שכאשר נחלה נמכרת, הקונה נבחר באקראי, כלומר שלכל אזרח ישנו סיכוי שווה לרכוש נחלה. הנחה זו כמובן אינה מציאותית, שכן במציאות ישנם פערים כלכליים, ולעשירים קל יותר לרכוש נחלה מאשר לעניים. מסתבר שבמצב זה, קצב הירידה במספר חסרי הנחלות יהיה אטי יותר. האם לאלגוריתם היובל תהיה השפעה חיובית גם במצב זה? האם אלגוריתם היובל יסייע להקטין את הפערים הכלכליים?

כדי לבדוק את ההשפעה של הפערים הכלכליים על חלוקת הנחלות, נשתמש במודל

פשוט של חלוקת הכנסות.<sup>25</sup>

המודל מניח, שכל אדם מקבל הכנסות מארבעה גורמים:

1. **עבודה:** אנו מניחים ששכר העבודה הוא משתנה אקראי עם התפלגות לוג-נורמאלית.<sup>26</sup> ניתן לאפיין התפלגות זו ע"י שני ערכים - השכר הממוצע והשכר החציוני: היחס בין השכר החציוני לשכר הממוצע מבטא את רמת השוויון בהכנסות - ככל שהשכר החציוני גבוה יותר, וקרוב יותר לשכר הממוצע, כך השוויון גדול יותר. כמו כן, אנו מניחים ששכר העבודה של אזרח עשוי להשתנות מתקופה לתקופה, בהסתברות מסוימת המבטאת את מידת הניידות הכלכלית.<sup>27</sup>
2. **חקלאות:** אנו מניחים שכל נחלה נותנת לבעליה הכנסה קבועה בכל תקופה.
3. **השכרה:** אנו מניחים שכל נחלה נותנת לבעליה, בנוסף להכנסה מחקלאות, עוד הכנסה התלויה במיקום שלה - נחלות במרכז המפה נותנות הכנסה גבוהה יותר מהכנסות בצדדי המפה ("פריפריה"). בסעיף זה ניתן להכליל גם את פערי השכר בין שכירים במרכז לשכירים בפריפריה.
4. **רווחה:** הממשלה עשויה להחליט לתת קצבה קבועה לכל אזרח, על-מנת לצמצם פערים.<sup>28</sup>

אנו מניחים כי ההסתברות לקניית נחלה עומדת ביחס ישר לכמות הכסף הכוללת של האזרח: אם לאזרח א יש פי 2 כסף מלאזרח ב, אז ההסתברות שאזרח א יקנה נחלה כלשהי העומדת למכירה תהיה גדולה פי 2 מההסתברות שאזרח ב יקנה אותה.

במסגרת זו לא נבצע מחקר מקיף על ההשפעה של כל פרמטר, אלא נביא מספר דוגמאות לצירופי פרמטרים, ונבדוק, לגבי כל אחד מהם, עד כמה משפיע אלגוריתם היובל על מספר חסרי הנחלה. הטבלה הבאה מתארת את מספר חסרי הנחלה, מתוך 1000 אזרחים, לאחר 6 יובלים, עבור צירופים שונים של פרמטרים:<sup>29</sup>

<sup>25</sup> נמצא ברשת: <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/community/land-income>

<sup>26</sup> מחקרים שנעשו לאחרונה מראים, שהתפלגות זו מאפיינת את הכנסותם של 97%-99% מהאזרחים במדינות מערביות. ההכנסות של המאיונים העליונים מתפלגות באופן שונה, כי הרכב ההכנסות הוא שונה, וכולל מרכיב גדול יותר של רווחי הון. ראו:

F. Clementi and M. Gallegati, "Pareto's law of income distribution: Evidence for Germany, the United Kingdom, and the United States," EconWPA, 2005.

<sup>27</sup> כלומר, בכל תקופה, עבור כל אזרח, מטילים מטבע בהסתברות p. אם ההטלה מוצלחת, מגרילים עבורו הכנסה חדשה, מתוך ההתפלגות הלוג-נורמאלית. תהליך זה ממדל את התלות בין ההכנסות בשתי תקופות עוקבות באופן גס למדי: או שההכנסה בתקופה הנוכחית שווה להכנסה בתקופה הקודמת, או שהיא נבחרת באופן בלתי-תלוי בה. היה אפשר למדל את התלות באופן מדויק יותר, אולי כתהליך מרקובי, אולם זה חורג מהיקפו של המאמר הנוכחי.

<sup>28</sup> היה אפשר לקבוע שתשלומי הרווחה יינתנו רק למי שאין לו נחלה, אולם זה היה עלול להשיג תוצאה הפוכה, ולעודד אנשים להישאר חסרי נחלה על-מנת ליהנות מהקצבה. קצבה קבועה לכל אזרח היא דרך פשוטה לצמצם פערים, מבלי לייצר תופעות לוואי בלתי-רצויות מסוג זה. בספרות הכלכלית, קצבה כזאת נקראת Citizen's

Dividend (ראו ערך זה בויקיפדיה האנגלית), Social Dividend, או Demogrant. ניתן לממן קצבה כזו ע"י הטלת מס על קרקע – ראו למעלה הערה 20. במקרה זה, יש להבין את ערכי ההכנסה מחקלאות ומהשכרה כערכים נטו.

<sup>29</sup> כל אחד מהתאים של מספר חסרי-הנחלה הוא ממוצע של 10 הרצות.

מספר נחלות	הסתב' מכירה ביובל	שכר: <sup>30</sup>	הכנסה: <sup>31</sup>	חסרי נחלה (סטית תקן)					
				הערה	עם יובל	ללא יובל	רווחה	השכרה	חקלאות
1000	1	10	1	בשלוש השורות הראשונות,	38 (5)	366 (13)	0	0	0
1000	0.4	10	1	לכל האזרחים יש הכנסה שווה,	209 (10)	381 (11)	0	0	0
2000	0.4	10	1	והדבר שקול למודל ללא הכנסה.	16 (3)	153 (8)	0	0	0
1000	1	10	0.7	השפעת אי-השוויון בשכר	136 (6)	478 (15)	0	0	0
1000	1	10	0.7	השפעת הניידות בשכר	128 (9)	459 (13)	0	0	0.1
1000	1	10	0.7	ניידות שכר מרבית	70 (5)	397 (9)	0	0	1
1000	1	10	0.7	השפעת הכנסה מהשכרה בלבד	185 (6)	500 (12)	0	5	0
1000	1	10	0.7	השפעת הכנסה מחקלאות בלבד	181 (10)	491 (15)	0	0	5
1000	1	10	0.7	השפעת הכנסה מחקלאות והשכרה	245 (8)	536 (10)	0	5	5
1000	1	10	0.7	הכנסה מחקלאות והשכרה, וניידות שכר מרבית	179 (9)	494 (13)	0	5	5
2000	1	10	0.7	הכפלת מספר הנחלות ל-2000	138 (8)	417 (13)	0	5	5
1000	1	10	0.7	1000 נחלות; הוספת קצבה קבועה לכל אזרח	192 (6)	500 (9)	2	5	5
2000	1	10	0.7	הכפלת מספר הנחלות וגם קצבה קבועה לכל אזרח	78 (7)	365 (14)	2	5	5
2000	0.8	10	0.7	הסתברות מכירה קטנה מ-1	115 (11)	388 (13)	2	5	5
2000	0.4	10	0.7	הסתברות מכירה נמוכה יותר	289 (15)	486 (20)	2	5	5
2000	0.4	10	0.7	הגדלת הקצבה לכל אזרח	204 (8)	399 (12)	6	5	5

ישנם הבדלים גדולים במספר חסרי הנחלה עבור כל צירוף של פרמטרים, אבל בכל המקרים, אלגוריתם היובל מקטין באופן משמעותי את מספר חסרי הנחלה.

### ט. סיכום ומחקר עתידי

התרומה של מאמר זה היא בשלושה נושאים:

1. אלגוריתם היובל, המאפשר ליישם את מצוות חלוקת הנחלות והיובל במציאות של ימינו, בהדרגה, ללא שינויים מהפכניים בבעלות על הקרקעות, וללא גוף מרכזי שכל הקרקעות יהיו בבעלותו.

<sup>30</sup> ה"שוויון" במודל שלנו מוגדר כיחס בין השכר החציוני לבין השכר הממוצע. בישראל, לפי נתוני הלמ"ס לשנת 2010, יחס זה הוא כ-0.72. ה"ניידות" היא ההסתברות שהכנסתו של אזרח ביובל הבא תהיה שונה מביובל הנוכחי.  
<sup>31</sup> הערך של "הכנסה מהשכרה" בטבלה הוא הממוצע ע"פ כל הנחלות. ההכנסה מהשכרה לכל נחלה חושבה ע"י הנוסחה:

$$A M (1 - 0.5 (x / x_{\max})^2 - 0.5 (y / y_{\max})^2)$$

כאשר M הוא הממוצע; A הוא קבוע נירמול; x ו-y הן הקואורדינטות של הנחלה, השוות ל-0 במרכז; x<sub>max</sub> ו-y<sub>max</sub> הם הערכים המוחלטים של ערכי הקואורדינטות בשולי המפה (ההכנסה מהשכרה בפינות היא בדיוק 0).

2. גרף הנחלות, המאפשר לנתח בצורה פורמאלית את האלגוריתם המוצע ואלגוריתמים נוספים בתחום זה.

3. מודל להדמיית מסחר בנחלות, המאפשר לנתח בצורה סטטיסטית את האלגוריתם המוצע ואלגוריתמים נוספים.

בכל אחד מהשלושה, ניתן להציע נושאים רבים למחקר עתידי:

1. אלגוריתם היובל: ראינו שקצב ההתכנסות של האלגוריתם תלוי משמעותית בהסתברות המכירה של נחלות בין יובל ליובל. האם ניתן להציע אלגוריתם, שיעודד אנשים למכור נחלות? האם ניתן להציע אלגוריתם, שהתלות שלו בהסתברות המכירה תהיה קטנה יותר?

2. גרף הנחלות: התיאור של המסחר בנחלות כגרף מאפשר לחקור אותו בכלים מתורת הגרפים האקראיים. מחקר אופייני בתחום זה כולל שני שלבים: בשלב הראשון בודקים את התכונות הסטטיסטיות (כגון: דרגה ממוצעת, מרחק ממוצע בין צמתים, ועוד) של גרפים שונים שמתגלים במציאות; בשלב השני מנסים להציג תהליך פשוט של יצירת גרף אקראי (כגון: יצירת קשתות באקראי על-פי התפלגות אקראית מסוימת), היוצר גרפים בעלי תכונות סטטיסטיות דומות. תהליך זה עשוי ללמד אותנו על האופן שבו נוצרת התופעה במציאות.<sup>32</sup>

במקרה שלנו, אפשר לחקור גרפים המתארים עסקאות של מכירת קרקעות, ולבדוק עד כמה התכונות הסטטיסטיות של גרפים אלה דומות לתכונות של הגרפים האקראיים הנוצרים ע"י המודלים שתוארו במאמר זה. מחקר זה יאפשר לנו לבנות מודלים מדויקים יותר, וכן לכייל את הפרמטרים במודל, כגון, ההסתברות למכירת נחלה.

במאמר פיתחנו נוסחה לקצב הירידה במספר חסרי הנחלות, וכן להסתברות שאזרח יצליח להחליף נחלה, רק עבור המקרה הפשוט ביותר - כאשר כל הנחלות נמכרות בשלב כלשהו במהלך היובל, לאזרח כלשהו שנבחר באקראי. האם ניתן לפתח נוסחה סגורה גם למקרים מורכבים יותר, כגון: הסתברות מכירה קטנה מ-1, או הסתברות קניה שאינה אחידה?

3. מודל המסחר בקרקעות: המודל שתואר כאן הוא פשטני מאוד, וישנם גורמים רבים שראוי להתייחס אליהם במחקרים עתידיים:

- העדפות אישיות. במודל שלנו, כל הנחלות שוות וכל האזרחים שווים, אולם במציאות לכל אזרח ישנה העדפה שונה לגבי הנחלה שהוא מעוניין בה. יהיה מעניין לבחון, עד כמה האלגוריתם המוצע מאפשר לכל אזרח לממש את ההעדפות האישיות שלו ולהגיע לנחלה שהוא מעוניין בה.
- בהקשר זה, מעניין לבחון, האם ישנה אסטרטגיה שכדאי לאזרח לנקוט בה, על-מנת להשיג את הנחלה הטובה ביותר לפי העדפותיו. האם האסטרטגיה הפשוטה, לקנות את הנחלה הטובה ביותר המוצעת למכירה בכל שלב, אכן נותנת את התוצאה הטובה ביותר? במילים אחרות: האם ייתכן שאזרח יפסיד מכך שיקנה נחלה, כי בכך הוא יחסום לעצמו את האפשרות להשיג נחלה אחרת?
- ירושה. כאמור, המודל מניח שלכל אזרח ישנו יורש אחד בדיוק, כך שמספר האזרחים הוא קבוע ושווה בדיוק למספר הנחלות. אולם במציאות ישנם אזרחים שנפטרים ללא יורשים, וישנם אזרחים המורשים את נחלתם לכמה יורשים, וכך נחלות עשויות להתחלק לכמה חלקים. ראוי לבחון, איך

<sup>32</sup> סקירה על תהליכי יצירה של גרפים אקראיים ניתן למצוא אצל:

Chris Biemann, "Unsupervised and knowledge-free natural language processing in the structure discovery paradigm," Ph.D. dissertation, 2007; chapter 2.

ישפיע האלגוריתם המוצע על חלוקת הנחלות במצב זה.

- לויים. במודל שלנו, כל אזרח שיכול לסחור בנחלות, זכאי גם לשמור בבעלותו נחלה אחת בשנת היובל. אולם בזמן המקרא, היו אנשים שלא היו זכאים לנחלה, ועדיין יכלו להשתתף במסחר. לדוגמה, בני שבט לוי, שלא שירתו בצבא, לא קיבלו נחלה (פרט לבתי-מגורים בערי הלויים). מכאן, שבשנת היובל, היה עליהם להחזיר את כל הנחלות שקנו. איך יושפע המודל מנוכחותם של אנשים כאלה, שיכולים להשתתף במסחר אך אינם רשאים להחזיק בנחלות?

#### י. חתימה

ע"פ חז"ל, שנת היובל הראשונה הייתה השנה ה-64 לכניסתם של בני ישראל לארץ ישראל:

שבע שנים היו מכבשין, ושבע שנים היו מחלקין... נמצאו שעושין שמיטה לעשרים ואחד שנים, ויובל לששים וארבע שנים.<sup>33</sup>

מאמר זה נשלח לראשונה ביום העצמאות ה-64 למדינת ישראל. אני מקווה שהוא יקדם אותנו צעד נוסף לקראת יישומה של מצווה יקרה זו.

## נספח א - פיתוח נוסחת הקירוב למספר חסרי הנחלה

אנו מניחים שיש  $N$  אזרחים, ושהארץ מחולקת ל- $L$  נחלות, כאשר  $L \geq N$ . כמו כן, נניח שבתחילת הספירה ישנם  $M$  אזרחים שאין להם נחלה, ו- $N-M$  אזרחים שיש להם נחלה אחת או יותר. כעת, במשך 50 שנה מתנהל מסחר חופשי בנחלות, שבמהלכו כל נחלה נמכרת בשלב כלשהו, והקונה הוא אזרח הנבחר באקראי. לאחר 50 שנה, מבצעים את אלגוריתם היובל שתואר בסעיפים ב-ג. חלק מהנחלות חוזרות לבעליהן המקורי, וחלק נשארות ביד הקונה. נניח גם, שאם לאזרח כלשהו היו כמה נחלות בתחילת הספירה, והוא מכר את כולן, הנחלה שהוא יחזיר לעצמו בשנת היובל תיבחר באקראי. מה יהיה מספר חסרי הנחלה לאחר סיום האלגוריתם? מסתבר שמספר זה יהיה קטן מ- $M$ , אבל בכמה בדיוק?

לצורך החישוב, נגדיר מספר משתנים אקראיים:

•  $Y$  = מספר הנחלות שנשארו בידי הקונה (כלומר, שנמכרו ולא הוחזרו ע"י אלגוריתם היובל);

• לכל אזרח  $c$ , נגדיר  $Y_c$  = משתנה בינארי, שערכו 1 אם ורק אם האזרח  $c$  הצליח לקנות את אחת מתוך  $Y$  הנחלות שלא הוחזרו, ו-0 אחרת.

התוחלת של המשתנה המקרי  $Y_c$  שווה להסתברות שערכו 1, וניתן לחשב אותה בקירוב אם יודעים את  $Y$ , שהרי ההסתברות שהאזרח  $c$  לא יקבל נחלה כלשהי היא ההסתברות שמישהו אחר יקבל אותה:

$$Y_c = \frac{Y}{N} \quad (1)$$

זהו קירוב בלבד – התלות של ההסתברות ב- $Y$  עשויה להיות מורכבת יותר.<sup>34</sup> אולם בהמשך נראה שהקירוב הזה מוביל אותנו לתוצאות טובות.

כעת נתבונן על  $Y$  מזווית אחרת. אם  $Y$  נחלות לא הוחזרו ע"י אלגוריתם היובל, אז  $L-Y$  נחלות הוחזרו. מכיוון שכל אזרח רשאי להחזיר לעצמו רק נחלה אחת, המשמעות היא ש- $L-Y$  אזרחים ביקשו לקבל נחלה בחזרה. אלה הם בדיוק האזרחים אשר הייתה להם נחלה בהתחלה, ושלא הצליחו לקנות אף נחלה מתוך ה- $Y$  נחלות שלא הוחזרו:

$$L - Y = \sum_{c \in \text{אזרחים}} (1 - Y_c) \quad (2)$$

כעת נשתמש בתחבולה מתימטית - ניקח את התוחלת המותנית של שני הצדדים, כתלות במשתנה  $Y$ :

$$L - Y = \sum_{c \in \text{אזרחים}} (1 - Y_c) \quad (3)$$

צד שמאל שווה באופן טריביאלי ל- $L-Y$ , ובצד ימין אפשר להציב את נוסחה (1). מספר האיברים בסכום הוא נתון – מספר בעלי הקרקע –  $N-M$ . מכאן:

<sup>34</sup> לדוגמה, במקרה שבו  $M=N-1$  (כלומר, במצב הראשוני כל הנחלות שייכות לאזרח אחד,  $c$ ), יש רק שתי אפשרויות: או שהוא מוכר את כל הנחלות שלו לאזרחים אחרים, ומקבל בחזרה נחלה אחת (ובמקרה זה  $Y=N-1$ ), או שהוא מוכר כמה מהנחלות לעצמו (ובמקרה זה  $Y=N$  ו- $Y_c=1$ ). כלומר, מידיעת  $Y$  ניתן לדעת בוודאות את  $Y_c$ .

$$Y(N) \approx e^{L/N} \quad (4)$$

זוהי משוואה בנעלם אחד –  $Y$ . לאחר שמוצאים את  $Y$ , ניתן לחשב בעזרתו את התוחלת של מספר חסרי הנחלה לאחר תהליך היובל, שהרי אלה הם בדיוק האזרחים שלא הייתה להם נחלה בהתחלה, ושלא הצליחו לקנות אף אחת מאותן  $Y$  נחלות שנמכרו ולא הוחזרו:

$$Y(N) = \frac{R(N)}{R(N) - 1} \quad (5)$$

כדי להקל על הרישום, נסמן ב- $R$  את היחס בין תוחלת מספר חסרי הנחלה לאחר היובל, לבין מספר חסרי הנחלה בתחילת הספירה:

$$R(N) = \frac{Y(N)}{Y(N) - 1} \quad (6)$$

ניתן להיפטר מ- $Y$  ולקבל משוואה שבה רק  $R$  נעלם:

$$R(N) = e^{L/N} \quad (7)$$

כדי לפתור משוואה זו נשתמש בפונקציה  $W$  של למברט.<sup>35</sup> זוהי הפונקציה המקיימת:

$$y = we^w \quad \text{אם ורק אם} \quad w = W(y)$$

בעזרת פונקציה זו, ניתן לפתור משוואות מהצורה:  $x = A^{(Bx+C)}$  באופן הבא:

$$x = A e^{(Bx+C)} \\ \ln(x) = \ln(A) + Bx + C \\ \ln(x) - Bx = \ln(A) + C \\ \ln(x) - Bx = \ln(A) + C \\ x = \frac{e^{(\ln(A) + C)}}{-B}$$

נציב את הערכים מתוך (7):

$$R(N) = \frac{Y(N)}{Y(N) - 1} \quad (8)$$

המספרים  $N, L$  הם גדולים, ולכן ניתן להשתמש בקירובים  $(1 - 1/N) \approx e^{-1/N}$ ,  $1 - (1 - 1/N) \approx 1/N$ :

<sup>35</sup> Lambert W-function. אני מודה למשתמשים שכינוייהם J.M., nbubis, מאתר Math Stack Exchange על שהציעו להשתמש בפונקציה זו: <http://math.stackexchange.com/questions/138496/approximate-solution-for-an-exponential-equation>



$$R = \frac{N(N-M)}{M} \quad (9)$$

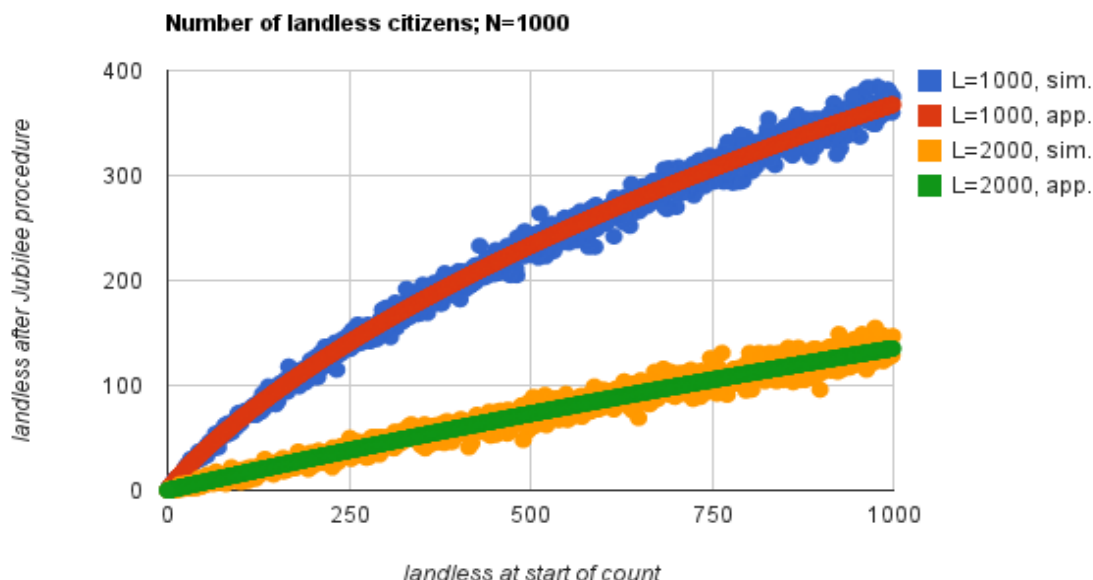
כדי לחשב בקלות את פונקצית W של למברט, ניתן להשתמש בקירוב של סרג' ויניצקי:<sup>36</sup>

$$W(x) \approx \frac{\alpha}{1 + \left( \frac{1}{e} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\alpha} \right)}$$

נציב ב-(9) ונצמצם חלק מהגורמים (N, (N-M), e), ונקבל:

$$R = \frac{N(N-M)}{M} \approx \frac{N(N-M)}{M \left( 1 + \left( \frac{1}{e} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\alpha} \right) \right)} \quad (10)$$

הדמיות עבור N=1000 אזרחים מראות שזהו קירוב טוב למדי. בגרף הבא, הציר האופקי הוא מספר חסרי הנחלה בתחילת הספירה, והציר האנכי הוא מספר חסרי הנחלה לאחר יובל אחד. הקווים העליונים מתייחסים למשק עם L=1000 נחלות, והקווים התחתונים – למשק עם L=2000 נחלות (כצפוי, כאשר מספר הנחלות גדול, מספר חסרי-הנחלה אחרי היובל הרבה יותר קטן, כאשר תנאי ההתחלה זהים). הנקודות המפוזרות מייצגות תוצאות של הדמיה ממוחשבת (sim), והנקודות הרציפות מייצגות את החישוב התיאורטי על-פי נוסחה (10) (app):



מה אומרת לנו נוסחה (10) על השינוי במספר חסרי הנחלה כתלות בזמן? אם נניח שמספר חסרי הנחלה לאחר כל יובל שווה בקירוב לתוחלת שלו, נוכל לבטא את מספר

חסרי הנחלה בעזרת הנוסחה:

$$M_t \approx \frac{M}{1 + \left( \frac{1}{e} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2^{\frac{L}{N}} (M/N)}} \right)}$$

כאשר  $t$  הוא הזמן הנמדד ביובלים. כאשר מציבים  $L=N$  (מספר הנחלות כמספר האזרחים), מקבלים את הנוסחה שהצגנו בסעיף ג:

$$M_t \approx \frac{M}{1 + \left( \frac{1}{e} + \frac{\sqrt{M/N}}{\sqrt{2}} \right)}$$

ניתן גם לחשב את מספר הנחלות שנמכרות ואינן מוחזרות, בעזרת נוסחה (5):

$$M_t \approx \frac{M}{1 + \left( \frac{1}{e} + \frac{\sqrt{M/N}}{\sqrt{2}} \right)}$$

מכיוון ש:  $L/N > 1$ :

$$M_t \geq M_{t+1} > C$$

מכאן, שהסדרה מתכנסת לערך כלשהו שנסמן ב:

$$M_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$$

הפונקציה רציפה, ולכן ערך הגבול מקיים:<sup>37</sup>

$$M_t \approx \frac{M}{1 + \left( \frac{1}{e} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2^{\frac{L}{N}} (M/N)}} \right)}$$

שוויון זה מתקיים רק כאשר:  $M_\infty = 0$ , ומכאן שמספר חסרי הנחלה שואף לאפס:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = 0$$

והמערכת מתכנסת למצב שבו לכל אזרח יש נחלה.

-----

<sup>37</sup> אני מודה שוב לפרופ' Julian Aguirre מאתר Math Stack Exchange על עזרתו בפתרון בעיה זו:  
<http://math.stackexchange.com/questions/143011/convergence-of-a-sequence-given-by-a-recursion-formula>