



כתב־עת לענייני תורה ומדע

חוב׳ 28 - כסלו תשע״ד

עורך עלי מרצבך



הוצאת אוניברסיטת בר־אילן, רמת־גן

עורך: עלי מרצבך, המחלקה למתמטיקה, אוניברסיטת בר־אילן

עורכי משנה: דניאל שפרבר, המחלקה לתלמוד, אוניברסיטת בר־אילן

יהודה פרידלנדר, המחלקה לספרות עם־ישראל, אוניברסיטת בר־אילן

עורך קודם (גליונות 16-1): יחיאל דומב ז"ל

מערכת:

ישראל אומן המרכז הבין־תחומי לחקר הרציונליות, האוניברסיטה העברית בירושלים

אהרן אנקר הפקולטה למשפטים, אוניברסיטת בר־אילן

יוסף בודנהיימר בית־ספר גבוה לטכנולוגיה (מכון לב), ירושלים

דניאל הרשקוביץ הפקולטה למתמטיקה, הטכניון, חיפה

ארי זיבוטפסקי המרכז הרב תחומי לחקר המוח על שם לסלי וסוזן גונדה (גולדשמיט),

אוניברסיטת בר־אילן

יהושע ליברמן בית־הספר למינהל עסקים, המכללה האקדמית נתניה

המחלקה לפסיכולוגיה, אוניברסיטת בן־גוריון בנגב

שוברט ספירו היחידה ללימודי יסוד, אוניברסיטת בר־אילן

המחלקה לחומרים ופני שטח, מכון ויצמן, רחובות

שמואל ספרן

המחלקה ללימודי ארץ־ישראל, אוניברסיטת בר־אילן

זהר עמר

דוד לייזר

המחלקה למתמטיקה, אוניברסיטת בר־אילן

הלל פורסטנברג המחלקה לנ דרור פיקסלר הפקולטה ל

הפקולטה להנדסה, אוניברסיטת בר־אילן המחלקה לכימיה, אוניברסיטת בר־אילן

אריה פרימר

. המחלקה למדעי המחשב, אוניברסיטת בר־אילן

משה קופל

היחידה לסטטיסטיקה, אוניברסיטת בר־אילן

אלכסנדר קליין

המחלקה למדעי היהדות, אוניברסיטת חיפה

מנחם קלנר שבתי אברהם

הכהן רפפורט המכון הגבוה לתורה, אוניברסיטת בר־אילן

אגודת אנשי מדע שומרי תורה

מאיר שוורץ

מכון הרב יוסף סולובייצייק, בוסטון המחלקה לכימיה, אוניברסיטת בר־אילן יעקב שכטר שמואל שפרכר

ISSN 0793-3894

(C)

כל הזכויות שמורות לאוניברסיטת בר־אילן, רמת־גן

אין להעתיק חוברת זו או קטעים ממנה בשום צורה ובשום אמצעי אלקטרוני, מגנטי או מכאני (לרבות צילום, מיזעור והקלטה) ללא אישור בכתב מהמו״ל

> נדפס בישראל תשע״ד דפוס לביא, ת״א

תוכן העניינים

- שלמה זאב פיק: על פרופי שאול ליברמן והמכון הגבוה לתורה שעל יד אוניברסיטת בר-אילן פרק מהשקפתו
 - 15 אראל סגל-הלוי: אלגוריתם היובל תהליך הדרגתי לחלוקת נחלות בימינו
- 45 אורי צור ויהודה אשכנזי: מגילה עפה מידת העולם לפי תפיסת ר' אליעזר הקליר
 - 57 **אברהם קרסנטי:** מקור האסתטיקה וסדרת פיבונאציי באגדות התלמוד
 - זהר עמר: יין חי ויין מזוג: על יינות שלהם ועל יינות שלנו 75
 - 97 מרדכי א' כסלו: לזיהוי עצי השיטים של המשכן וכליו
 - 113 **ערן רביב:** המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים וחישובי שכיחויות
 - 129 **גבריאל יצחק רוונה:** דור הפלגה ובעיית עמימותה של השפה
- 137 יהודה סטופניקר וחגי זילברברג: תורה וטריז: עיון בחשיבת חז"ל בראי שיטת "טריז"

פרפראות

. 16. **אלחנן י' מאיר:** סטטיסטיקה ודקדוק כמסייעים בהבנת התנ״ך: על השורש ק.ט.ר.

ריקורת ספרים

163 **ישראל רוזנסון:** על הספר "צמחי המקרא", מאת זהר עמר

תגובות

- 169 **חיים אפפלדורפר:** הערה למאמרו של אריאל כהן, ״כיצד בחר הרמב״ם את נקודת ׳העיקר׳ ביאורים לחישובים האסטרונומיים בהלכות קידוש החודש״
 - 170 **אריאל כהן:** תגובה להערתו של חיים אפפלדורפר
 - 171 תקצירים בעברית
 - חלק אנגלי
- **יוסף יצחק איידלר:** התקופה הגדולה של 689472 שנה בלוח העברי ושימושה בבעיות של שכיחות והסתברות
 - 45 תקצירים באנגלית

רשימת המשתתפים

141/3 chaussé de Charleroi, 1060 Brussels, Belgium (מהנדס אזרחי) איידלר, (מהנדס איידלר, מהנדס איידלר)

חיים אפפלדורפר, מחלקת סטנדרטים פיסיקליים, מעבדה לאומית לפיסיקה

יהודה אשכנזי, המחלקה למדעי המחשב ומתמטיקה, אוניברסיטת אריאל בשומרון

חגי זילברברג, דקנט הסטודנטים, אוניברסיטת אריאל בשומרון

אריאל כהן, המכון למדעי כדור הארץ, האוניברסיטה העברית, ירושלים

מרדכי אי כסלו, הפקולטה למדעי החיים, אוניברסיטת בר-אילן

אלחנן יי מאיר, ישיבת עתניאל

אראל סגל-הלוי, המחלקה למדעי המחשב, אוניברסיטת בר-אילן

יהודה סטופניקר, מחלקת תעשייה וניהול, אוניברסיטת אריאל בשומרון

זהר עמר, המחלקה ללימודי ארץ ישראל וארכיאולוגיה, אוניברסיטת בר-אילן

שלמה זאב פיק, מכון הגבוה לתורה ע"ש לודביג ואריקה יסלזון (ע"ר), אוניברסיטת בר-אילן

אורי צור, המחלקה למורשת ישראל, אוניברסיטת אריאל בשומרון

אברהם קרסנטי, הפקולטה להנדסה, בית הספר הגבוה לטכנולוגיה, ירושלים

ערן רביב, המחלקה למתמטיקה, אוניברסיטת בר-אילן

גבריאל יצחק רוונה, הספרייה המרכזית ע"ש זלמן ארן, אוניברסיטת בן-גוריון בנגב, באר שבע

ישראל רוזנסון, מכללת אפרתה, ירושלים

תקצירים בעברית

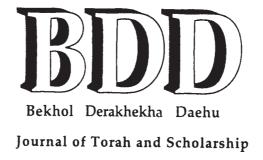
התקופה הגדולה של 689472 שנה בלוח העברי ושימושה בבעיות של שכיחות והסתברות

יוסף יצחק איידלר

הנושא המרכזי של המאמר הזה הוא בדיקתה של התקופה הגדולה של הלוח העברי. אחרי תקופה של 36288 שנה, המולד הראשי של בהר"ד מוזר שנית להיות מולדה של שנה ראשונה של מחזור של 19 שנה. זה יתרחש ביום ב', א' תשרי שנת להיות מולדה של שנה ראשונה של מחזור של 19 שנה. זה יתרחש ביום ב', א' תשרי שנת 689473 המתאים ליום ב', ד' נובמבר שנת 685720 של הלוח הגריגוריאני. בסוף התקופה הגדולה או הסיבוב הגדול חוזר מולד בהר"ד לראש המחזור של 19 שנה וממילא מתחילה תקופה חדשה של 36288 מחזורים בני 19 שנה הדומה בסדר המולדות שלה וממילא גם בסדר קביעות שנותיה דמיון גמור לתקופה הקודמת. הלוח העברי הוא לפיכך מחזורי, אבל המחזור הוא בן 689472 שנה והחלק ההיסטורי של הלוח העברי הוא רק חלק קטן של המחזור הזה. בפרק הראשון אנחנו מתארים שיטה קלה לחישובו של הלוח העברי ולחילופו של תאריך עברי לתאריך אזרחי (יוליאני או גריגוריאני) תוך שימוש במושג היום היוליאני. בפרק השני אנחנו בודקים את התקופה של הלוח העברי. אנחנו מראים שיש קשר הדדי בין סדר השנה במחזור של 19 שנה לבין הספרה הימנית של מולדה של השנה הזו.

אחר כך אנחנו מראים שאם בודקים את המולד של השנים השונות, ההסתברות של הופעת המספרים 0, 1, 2 עד 9 בספרה האחרונה, הימנית של המולדות של השנים השונות, איננה שווה. ההסתברות של הופעת המספרים 3 או 8 בספרה האחרונה היא 7.89% בעוד שההסתברות של הופעת המספרים 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7 או 9 בספרה האחרונה היא 10.53% בניגוד לממצא זה, למולדות השונים יש הסתברות שווה וממילא יש יחס בין שכיחות הניצול בדחייה מסוימת או בין שכיחות קביעה מסוימת לבין רוחב תחומם של המולדות המקבילים. העיקרון הזה הוא מקורב ובלתי מדויק לגמרי, אולם הקירוב משביע רצון עד כדי כך שאפילו המומחים קבלו את העיקרון הזה בלי הרהור.

אנחנו מראים, שהחישוב המדויק של שכיחות הניצול בדחייה מסוימת או שכיחות של קביעה מסוימת, דורש חישוב מפורט במשך כל התקופה הגדולה של הלוח העברי. בפרק החמישי אנחנו מסבירים איך אפשר לחשב בדרך קלה מתי מתרחש בפעם הראשונה מולד כלשהו. אנחנו מראים שדרך החישוב הזאת היתה כבר ידועה לתוכן רבי רפאל הלוי מהאנובר במאה ה-18. בפרק הששי אנחנו מסבירים איך אפשר לחשב את ארבע או שלוש ההזדמנויות מתי מולד כלשהו יהפך למולדה של שנה.



No. 28 – December 2013

Editor

Ely Merzbach



BAR-ILAN UNIVERSITY PRESS, RAMAT GAN

Editor: Ely Merzbach, Mathematics Dept., Bar-Ilan University

Sub-Editors: Yehuda Friedlander, Dept. of Literature of the Jewish People,

Bar-Ilan University

Daniel Sperber, Talmud Dept., Bar-Ilan University

Founding Editor: Cyril Domb, z"l

Editorial Board:

Zohar Amar Dept. of Land of Israel Studies, Bar-Ilan University

Yisrael Aumann The Center for the Study of Rationality, The Hebrew University of

Jerusalem

Joseph S. Bodenheimer Jerusalem College of Technology (Machon Lev)

Aharon Enker Faculty of Law, Bar-Ilan University
Dror Fixler Faculty of Engineering, Bar-Ilan University
Aryeh Frimer Chemistry Dept., Bar-Ilan University
Hillel Furstenberg Mathematics Dept., Bar-Ilan University
Daniel Hershkowitz Mathematics Dept., Technion, Haifa

Menachem Kellner Dept. of Jewish History and Thought, Haifa University

Alexander Klein Statistics Unit, Bar-Ilan University

Moshe Koppel Computer Science Dept., Bar-Ilan University

David Leiser Dept. of Behavioral Sciences, Ben Gurion University of the Negev Yehoshua Liebermann School of Business Administration, Netanya Academic College

Shabtai Avraham

Hacohen Rapaport Institute for Advanced Torah Studies, Bar-Ilan University

Samuel Safran Dept. of Materials and Interfaces, Weizmann Institute of Science,

Rehovot

Jacob SchacterRabbi Joseph Soloveitchik Institute, BostonMeir SchwartzIsrael Association of Orthodox Jewish ScientistsShubert SperoBasic Jewish Studies Dept., Bar-Ilan University

Milon Sprecher Chemistry Dept., Bar-Ilan University

Ari Z. Zivotofsky The Leslie and Susan Gonda (Goldschmied) Multidisciplinary Brain

Research Center, Bar-Ilan University

ISSN 0793-3894

©

Copyright Bar-Ilan University, Ramat Gan

All rights reserved, including those of translation.

No part of this journal may be reproduced or utilized in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying and recording, or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the publisher.

Printed in Israel, 2013 Lavi Ltd., Tel Aviv

CONTENTS

- 5 **J. Jean Ajdler:** The Period of 689,472 Years in the Jewish Calendar and Its Applications in Frequency and Probability Problems
- 45 English Abstracts

Hebrew Section

- 5 Shlomo H. Pick: Prof. Saul Lieberman and the Institute for Advanced Torah Studies at Bar-Ilan University: A Chapter Illuminating His Weltanschauung
- 15 **Erel Segal-haLevi:** Algorithm for Land Division and the Jubilee in Modern Times
- 45 **Uri Zur and Yehuda Ashkenazi:** *Megillah Afah*: The Measurement of the World According to R. Eliezer Hakalir's Perception
- 57 **Avraham Karsenty:** The Source of Aesthetics and Fibonacci Numbers in Talmud's Tales
- 75 **Zohar Amar:** Undiluted and Diluted Wine: Their Wine and Our Wine
- 97 Mordechai E. Kislev: Identifying the Acacia Trees of the Tabernacle
- 113 **Eran Raviv:** The Mathematical Structure of the "4-Gate Table" and the Prevalence Calculation in the Hebrew Calendar
- 129 **Gaby Ravenna:** The Generation of Secession and the Problem of Linguistic Ambiguity
- 137 **Yehuda Stupniker and Haggai Zilberberg:** Torah and TRIZ: Analysis of Ideas of Jewish Sages Using the TRIZ Approach

Tidbits

161 **Elchanan I. Meir:** Statistics and Grammar as Contributions in Understanding Bible: The Root K.T.R.

Book Review

163 **Israel Rozenson:** Review of *Flora of the Bible* by Zohar Amar (Hebrew)

Comments

- 169 **Haim Apfeldorfer:** A Comment on Ariel Cohen's "How Maimonides Chose his Epoch Clarifications Regarding the Astronomical Calculations in his Sanctification of the New Moon" (*B.D.D.* 26, pp. 69-80)
- 170 Ariel Cohen: A Response to Haim Apfeldorfer's Comment
- 171 Hebrew Abstracts

List of Contributors

- J. Jean Ajdler (civil engineer), 141/3 chaussé de Charleroi, 1060 Brussels, Belgium
- Zohar Amar, Department of Land of Israel Studies and Archaeology, Bar-Ilan University
- Haim Apfeldorfer, Department of Physical Standards, The National Physical Laboratory of Israel
- Yehuda Ashkenazi, Department of Computer Sciences and Mathematics, Ariel University
- Ariel Cohen, Institute of Earth Sciences, The Hebrew University of Jerusalem Avraham Karsenty, Faculty of Engineering, Jerusalem College of Technology
- Mordechai E. Kislev, Faculty of Life Sciences, Bar-Ilan University
- Elhanan I. Meir, Otniel Yeshiva
- Shlomo H. Pick, The Ludwig and Erica Jesselson Institute for Advanced Torah Studies (RA), Bar-Ilan University
- Gaby Ravenna, Aran Library, Ben-Gurion University of the Negev
- Eran Raviv, Department of Mathematics, Bar-Ilan University
- Israel Rozenson, Efrata College, Jerusalem
- Erel Segal-haLevi, Computer Science Department, Bar-Ilan University
- Yehuda Stupniker, Ariel University
- Haggai Zilberberg, Ariel University
- Uri Zur, Israel Heritage Department, Ariel University

ENGLISH ABSTRACTS

PROF. SAUL LIEBERMAN AND THE INSTITUTE FOR ADVANCED TORAH STUDIES AT BAR-ILAN UNIVERSITY: A CHAPTER ILLUMINATING HIS WELTANSCHAUUNG

Shlomo H. Pick

The article discusses Prof. Saul Lieberman and his relationship to the Torah world. Part I enhances some of the material found in Marc Shapira's *Saul Lieberman and the Orthodox*. Part II discusses Lieberman's relationship with Israeli rabbis and Bar-Ilan University, especially its Department of Talmud. Part III provides new information concerning Prof. Lieberman and his relationship with and support of the Institute for Advanced Torah Studies at Bar-Ilan University, which is basically a yeshiva and a kollel in its classic form. His support reveals his allegiance to Halakhah as the only criterion for all activities.

ALGORITHM FOR LAND DIVISION AND THE JUBILEE IN MODERN TIMES

Erel Segal-haLevi

When the Israelites entered the land of Israel during the days of Joshua ben Nun, they were instructed to divide the land equally among them. They were also instructed to return the lands to their original owners once in 50 years. In our times, the lands are not divided equally, so it does not make sense to start counting towards the Jubilee, since this will only serve to keep the unequal division. On the other hand, in today's reality, it is not practical to actually take all lands and divide them equally. This paper presents a graph-based algorithm for gradual implementation of the Jubilee idea, thus ensuring that the number of land-owners will increase monotonically with minimal intervention in the land market. Agent-based simulations show that this algorithm converges to a state where every citizen has a land plot.

MEGILLAH AFAH: THE MEASUREMENT OF THE WORLD ACCORDING TO R. ELIEZER HAKALIR'S PERCEPTION

Uri Zur and Yehudah Ashkenazi

The present article deals with R. Eliezer HaKalir's understanding of the meaning of *zeret* (the "little finger" or "pinky") as a term denoting a unit of length, and the measurements of the universe as compared with those of the Torah.

The Tosafists cite HaKalir in connection with the following Talmudic passage (Eruvin 28a): "A folded [lit., flying] scroll, its length is twenty cubits, and its width is ten cubits, and when you unfold it, it would be [its extent] twenty by twenty [cubits], and since it is written, 'It was written within or without,' and if you peel it, how large would it be? Forty by twenty cubits. And it is written, 'Who has measured the waters in the hollow of his hand, and the heavens with a span He gauged'. Consequently, the entire universe is [equal to] one [part] in a three thousand and two hundred of the Torah."

In Eruvin 28a, s.v: "echad," the Tosafists quote HaKalir as follows: "Two thousand and four hundred in the world extended." R. HaKalir maintains that the size of the Torah is the same as that of the scroll (megillah), or 20 cubits (amah) by 40 cubits, thus totaling 800 square cubits.

Commentaries abound and debates are rife concerning the meaning of R. HaKalir's words. It is difficult to uphold any one definitive conclusion as to whether his opinion is that the size of the universe is equal to that of *zeret* (as did the Tosafists). Also, it appears that R. HaKalir distinguished between units of area and volume, unlike the text of the *sugya* in Eruvin and the Tosafot, a point which has confused some of the commentators.

The aim of the present article is to interpret R. HaKalir's view and to address the difficulties raised by the Tosafists in this connection. To do this, a series of different commentaries on R. HaKalir's words and the Tosafists' gloss will be taken into consideration.

THE SOURCE OF AESTHETICS AND FIBONACCI NUMBERS IN TALMUD'S TALES

Avraham Karsenty

The Talmud uses "axioms" describing man in his environment. One of them is brought in the Berakhot tractate: "Three things increase a man's self-esteem: a beautiful dwelling, a beautiful wife, and beautiful clothes." Beyond the spiritual approach, this axiom can be explained using the mathematical Golden Ratio (Phi) value. This assumed divine proportion appears in nature and the human body like a divine stamp, suggesting that the world is a planned creation. It exists not only in global architecture and art, but also in Noah's Ark, the Tabernacle, and the Temple. In this article, we demonstrate three novelties: 1) Even Talmudic axioms can be explained with mathematics; 2) the Golden Ratio, primarily cited in non-Jewish references, also appears in the Torah; and 3) the difficulty to identify the Golden Ratio in Torah texts is related not only to its different historical names, but also to the fundamentally different approach between Torah and other cultures.

UNDILUTED AND DILUTED WINE: THEIR WINE AND OUR WINE

Zohar Amar

In the hot Mediterranean climate of the Land of Israel and Babylon, wine may be produced by a natural manufacturing process similar to the techniques that were used in the past, delivering a product with a high percentage of alcohol and residual sugar. This allows for the production of a strong, sweet wine with a maximum alcohol content of 15.5% that may be preserved for a relatively extended period. Because of the high alcoholic content, it was accepted practice in many places in Mediterranean society during the Talmudic and Mishnaic periods to mix the wine with water, at various levels of dilution. It seems that the most common proportion was a ratio of 1:3, and this standard was ultimately accepted as a definition in Talmudic Jewish law and by Maimonides.

However, among the first religious decisors in Ashkenaz we find for the first time a distinction between "our" wine and "their" wine (and this later influenced the religious decisors of Sepharad). The explanation for this difference is related to climatic circumstances; indeed, the wine manufactured in Ashkenaz was weaker

than that generally found in the Middle East. It seems that as the parallel of latitude is more northern, the level of alcoholic content in the grapes decreases due to insufficient exposure to the sun. This explains why the rabbis ruled that there is no need to dilute the wine with water, and it is better to drink it unmixed. In fact, regions above the 50th parallel north are not suited to grape-growing and wine production, and therefore in the past, it was difficult in those regions to obtain wine, which was consequently very expensive. This is the source of the Ashkenazic custom of making *kiddush* on bread and allowing other high-status beverages to also be permitted for this purpose. The article discusses the various schools of halakhic thought for defining which beverages are appropriate for the blessing of *borei pri hagefen*, as well as determining the currently accepted standard in the Israeli wine industry.

The strength of wine is measurable today in absolute values using a vinometer, and if our interpretation is correct, one can precisely measure the halakhic "standard" for wine and determine the degree of dilution relative to the quantity of grapes in the wine or to the alcohol content in various wines – at a ratio of 1:3. In other words, one can propose determining a standard of at least 25% grapes in grape juice or wine.

In the strong wines of the Land of Israel, the undiluted wine can be mixed so as to ensure that its alcohol content is not less than 4%. Accepting this standard (for those who are not bound by the later Sephardic rabbinical rulings) may make it easier for those who are not accustomed to drinking strong wine, and who wish to perform the commandments in the strictest way by drinking the four cups on Passover using red wine rather than grape juice.

IDENTIFYING THE ACACIA TREES OF THE TABERNACLE

Mordechai E. Kislev

Two species of acacia were used for construction of the Tabernacle and its appurtenances: the white thorn (*Acacia albida*) was used for the poles and frames, and the Egyptian thorn (*Acacia nilotica* spp. *nilotica*) for the appurtenances, including the Holy Ark and the table. Here we assume that the Tabernacle was built from the best wood that was available to the ancient Hebrews, and these two acacias have clear advantages over their related species. In ancient Egyptian, the various acacia trees are called snd.t, which made its way directly into Biblical Hebrew as *shitta* (שיטה). In our region, only the white thorn has a large enough

trunk to form the frame boards, which were 5 m high and 0.75 m wide. The Children of Israel would not have been able to cut and dry the boards in the short time period between their receiving the commandment to build the Tabernacle on Tishrei 11 and its completion on Adar 23 in the same year. They therefore must have brought lumber with them from Egypt. The crossbars were most probably made from the horizontal roots of the white thorn brought from Eretz Yisra'el and replanted in Egypt. The Holy Ark and the table which were used in the Tabernacle and the Temple for 850 and 480 years respectively (unlike the frame boards and crossbars that were in use for only 53 years) had to be made of an extremely stable wood, namely Egyptian thorn.

THE MATHEMATICAL STRUCTURE OF THE "4-GATE TABLE" AND THE PREVALENCE CALCULATION IN THE HEBREW CALENDAR

Eran Raviv

In previous papers (BDD 22 and BDD 26) we demonstrated that if we wish to calculate the prevalence of *simanei hashana* we must consider that the *molad* of the *rosh machzor* cannot occur continuously in all parts of the week (181440 parts).

In this paper we analyze the "4-gate table," an ancient table from the period of the Geonim. In order to understand the internal structure of the table, we explain the mathematical function of the *rosh machzor*. In the second part we divide the 4-gate table into its basic building blocks, regarding the internal structure of 19 years as *machzor katan*.

In the second part of this paper, we present a new method describing how to change these building blocks, after which we can rebuild the "new 4-gate table." From this new table we can calculate the prevalence of *simanei hashana* correctly and accurately.

THE GENERATION OF SECESSION AND THE PROBLEM OF LINGUISTIC AMBIGUITY

Gaby Ravenna

The linguistic schism that formed in the wake of the story of the Tower of Babel expressed itself not only in the formation of new languages, but also in the indistinctness of identical words. In this context there are four approaches:

The descriptive approach, formulated in *midrash* and *piyut*, focusing on a graphic description of the occurrences.

The social approach of Rabbi Samson Raphael Hirsch, who perceives linguistic ambiguity as an expression of social processes.

The imminent approach of Abraham Korman, according to which the change that occurred in the nature of language and its indistinctness is an inner and fundamental transformation.

The philological approach, represented by Samuel David Luzzatto and Isaac Samuel Reggio, who view the indistinctness of language as a result of various philological phenomena, and which is limited only to the instances where these phenomena occur.

From these approaches arise several principles that have applications in the field of information and knowledge – the awareness of language's indistinctness is necessary for coping with it, and ignoring it may lead to unbearable consequences.

Social homogeneity simplifies the exchange of information and its organization and retrieval. The narrower a field of knowledge is, the more uniform its language, and consequently, the exchange, organization and retrieval of that knowledge is more straightforward.

Expressions having different meanings from their literal meanings may reduce the efficiency of information systems. Even within a single language, many dialects exist and this should be taken into consideration when organizing information.

TORAH AND TRIZ: ANALYSIS OF IDEAS OF JEWISH SAGES USING THE TRIZ APPROACH

Yehuda Stupniker and Haggai Zilberberg

In this research, we performed a ground-breaking step analysis of Jewish sages' ideas using the Theory of Inventive Problem Solving (TRIZ), that was formulated by the Russian-Jewish thinker, Geinrich Altshuller. Dealing with problem solving is the main component of the thinking process, and theoretical and applied research regarding this topic has intensified in recent years. This research investigated the existence and meaning of the connection between the ideas of Jewish sages and TRIZ

For the purpose of this study, fundamental TRIZ ideas, such as deciphering, contradiction defining, ideal solution, and screen thinking concept were described. Some ideas from mainstream Jewish sages were analyzed with examples from the Talmud and Jewish sages. The TRIZ system was used as a tool for the analysis of these examples. This initial step is based on the analysis of more than one hundred examples from Jewish sages throughout the generations. Our conclusion shows a clear connection between Jewish sages' thought and TRIZ with various applications. In addition, this is the first time the TRIZ approach has been used for the analysis of ideas from Jewish Talmudic thought.

0

הוצאת אוניברסיטת בר-אילן 2013. כל הזכויות שמורות. קובץ זה מיועד למחבר בלבד ורק הוא רשאי להעבירו או להפיצו

15

אלגוריתם היובל – תהליך הדרגתי לחלוקת נחלות בימינו

התורה מצווה על בני ישראל לחלק את ארץ ישראל בין השבטים לפי גודלם, כך שלכל בית אב תהיה נחלה שווה. כמו כן התורה מצווה להחזיר את הקרקעות לבעליהן הראשונים בכל שנת יובל, ובכך נשמרת החלוקה הראשונית. כיום, הקרקעות אינן מחולקות בצורה שוויונית, ולכן קיום מצוות היובל כפשוטה לא יביא לחלוקה שוויונית של הקרקעות. יתר על כן, חלוקה שוויונית של קרקעות נראית קשה ולא מעשית במציאות של ימינו. מאמר זה מציע אלגוריתם, המבוסס על גרף, שמאפשר לקיים את מצוות היובל בהדרגה, באופן שיגדיל באופן תמידי את מספרם של בעלי הנחלות, תוך התערבות מזערית בחלוקת הקרקעות הנוכחית, ותוך התחשבות מרבית בהעדפות האישיות של האזרחים. חישובים הסתברותיים והדמיות ממוחשבות מראים, שהאלגוריתם מתכנס למצב שבו לכל אזרח יש נחלה.

א. מצוות היובל בהלכה ובהגות הציונית

ְּהָאֶרֶץ לֹא תִמְּכֵר לִצְמִתֶת כִּי לִי הָאָרֶץ כִּי גִּירִים וְתוֹשָׁבִים אַתֶּם עִמְּדִי. וּבְכֹל אֶרֶץ אֲחֻזַּתְכֶּם נְּהָאֶרֶץ לֹא תִמְּכֵר לִצְמָתֶת כִּי לִי הָאָרֶץ כִּי גִּאָלוֹ וּבָא גֹאֲלוֹ הַקָּרבׁ אֵלָיו וְגָאַל אֵת מִמְכֵּרוֹ אָלָה תִּתְנוּ לָאָרֶץ. כִּי יָמוּךְ אָחִיךְ וֹהְשִׁיגָה יָדוֹ וּמְצָא כְּדֵי גְאֻלֶּתוֹ. וְחִשֵּׁב אֶת שְׁנֵי מִמְכְּרוֹ אָחִיוּ. וְאִישׁ כִּי לֹא יִהְיָה לוֹ גֹאֵל וְהִשִּׁיגְה יָדוֹ וּמְצָא כְּדִי גְאֻלֶּתוֹ. וְאִם לֹא מְצְאָה יָדוֹ דֵּי הָשִׁיב לוֹ וְהָיָה וְהָשִׁיב אָת הָעֹדֵף לָאִישׁ אֲשֶׁר מְכַר לוֹ וְשָׁב לַאֲחֻזָּתוֹ. וְאִם לֹא מְצְאָה יָדוֹ דֵּי הָשְׁיב לוֹ וְהָיָה מִמְכְּרוֹ בִּיִר הַקְּנֶה אֹתוֹ עַד שְׁנַת הַיּוֹבֹל וְיָצָא בַּיבֹל וְשָׁב לַאֲחָזָתוֹ (ויקרא כה, כג-כח).

וַיִּדַבֵּר ה׳ אֶל מֹשֶׁה לֵּאמֹר. לָאֵלֶּה תַּחָלֵק הָאָרֵץ בְּנַחֲלֶה בְּמִסְפַּר שֵׁמוֹת. לְרֵב תַּרְבֶּה נַחֲלָתוֹ וְלַמְעֵט תַּמְעִיט נַחֲלָתוֹ אִיש לְפִּי פְּקָדִיו יֻתַּן נַחֲלָתוֹ. אַךְ בְּגוֹרָל יֵחָלֵק אֶת הָאָרֶץ לִשְׁמוֹת מַטוֹת אֲבֹתָם יִנְחָלוּ. עַל פִי הַגוֹרֶל תִּחָלֵק נַחֲלָתוֹ בֵּין רֵב לִמְעָט (במדבר כו, נב-נו).

על פי פסוקים אלו, יש לחלק את קרקעות הארץ בשווה בין בני ישראל . החלוקה הזאת חשובה כל-כך, עד שהתורה קבעה חוק מיוחד שמטרתו לחדש את החלוקה המקורית פעם בחמישים שנה — חוק היובל.

על פי מסורת ההלכה, מצווה זו נוהגת רק כאשר כל שבטי ישראל נמצאים בארץ ישראל, וכל שבט יושב בנחלתו:

משגלה שבט ראובן ושבט גד וחצי שבט מנשה, בטלו היובלות, שנאמר "וקראתם דרור בארץ לכל יושביה" — בזמן שכל יושביה עליה: והוא שלא יהיו מעורבין שבט בשבט, אלא כולן יושבים כתקנן.¹

לפי הרמב"ם מצווה זו תתקיים במלואה רק בימות המשיח:

המלך המשיח עתיד לעמוד ולהחזיר מלכות בית דוד ליושנה לממשלה הראשונה, ובונה מקדש, ומקבץ נדחי ישראל. וחוזרין כל המשפטים בימיו כשהיו מקודם: מקריבין קרבנות, **ועושין שמיטין ויובלות**, ככל מצוותן האמורה בתורה.²

עם זה החל מראשית הציונות, טענו הוגי דעות ציוניים רבים, שהכלכלה במדינה היהודית העתידית צריכה להתבסס על עקרונות היובל, גם אם לא תהיה אפשרות לקיים את מצוות היובל לפי כל פרטיה ודקדוקיה.³

דרכים רבות ומגוונות הוצעו ליישום עקרונות אלו. ⁴ לשם המחשה אביא כאן כמה דוגמאות ברכים רבות ומגוונות הוצעו ליישום אלו.

בקונגרס הציוני הראשון בשנת ה'תרנ"ז (1897) הציע צבי הרמן שפירא להקים קרן ציבורית שתקנה קרקעות בא"י ותמכור אותם ליהודים, תוך הדגשה שהמכירה לא תהיה לצמיתות. הצעה זו זכתה לתמיכתו של בנימין זאב הרצל,⁵ ובקונגרס הציוני של שנת ה'תרס"א (1901) היא התגשמה בהקמת הקרן הקיימת לישראל. נהלי הקק"ל קבעו, שכל קרקע תימכר לתקופה של 49 שנים לכל היותר, ולאחר מכן יחזרו לבעלות הקרן. נהלים אלה אומצו מאוחר יותר ע"י מינהל מקרקעי ישראל.⁶

לענ״ד, רעיון זה אינו אינו עולה בקנה אחד עם מצוות חלוקת הנחלות שבתורה, שהרי לפי מצוות התורה שצוטטו בראש המאמר, הקרקעות צריכות להיות בבעלות פרטית של האזרחים, ולא בבעלות של גוף אחד ציבורי.

- רמב"ם, משנה תורה, הלכות שמיטה ויובל, י, ח.
- רמב"ם, **משנה תורה**, הלכות מלכים ומלחמות, יא, א.
- מסתבר שהגישה הציונית למצוות היובל משקפת את הגישה הציונית לחזון הגאולה בכלל שיש להשתדל לקיימו בכלים אנושיים, ולא להסתפק בציפייה סבילה למשיח. דוגמה נוספת לגישה זו: על פי הרמב"ם הנ"ל, גם קיבוץ גלויות הוא מתפקידיו של המשיח ("המשיח.... מקבץ נדחי ישראל") וגם בתחום זה, טענה התנועה הציונית שיש לפעול כמיטב יכולתנו בדרך הטבע. להרחבה ראו: הרב יואל בן נון, **נס קיבוץ גלויות**, ה"תשע"א.
- ראו: אראל סגל הלוי, ׳התחילו במשחק מראשיתו מצוות חלוקת הנחלות והיובל מראשית הציונות ועד ימינו׳, ״**אקדמת**״ אדר ה׳תשע״ג
- 5 ההצעה קיבלה ביטוי גם ברומן העתידני שלו: הרצל, **אלטנוילנד**, ה'תרס"ב-1902 ספר שלישי, חלק 1; ברשת: http://benyehuda.org/herzl/tel_aviv.html
- החלטה מספר 1 של מועצת מינהל מקרקעי ישראל, ה'תשכ"ה-17.5.1965. אמנם, בחזונו של הרצל באלטנוילנד,
 כל הקרקעות חוזרות לחברה הציבורית באותה שנה שנת היובל; ובהחלטת מינהל מקרקעי ישראל, כל קרקע מוחכרת בנפרד לתקופה של 49 שנה, כך שכל קרקע חוזרת בשנה אחרת.
- 7 בעלות פרטית על קרקעות נזכרת במקומות רבים בתורה, לדוגמה: ״בְּשֻׁנֵת הַיּוֹבֵל הַזֹּאת תְּשֻׁבוּ אִּישׁ אֶל אֲ**חְתְּתו**״ (ויקרא כה יג). כמו כן ישנם סיפורים רבים המלמדים שהבעלות הפרטית היתה חלק בלתי נפרד מהחיים בזמן

17

אלגוריתם היובל – תהליך הדרגתי לחלוקת נחלות בימינו

זאב ז'בוטינסקי טען, שמטרתה של המצווה היא להבטיח שוויון הזדמנויות, ולפיכך טען שבימינו יש לחלק באופן שוויוני את כל הרכוש, ולא רק את הקרקעות, פעם ביובל: "אדם שנתרושש מחזירים לו את רכושו, המשועבד נעשה בן-חורין; שוב מתכונן שיווי-משקל; התחילו במשחק מראשיתו".

לענ״ד, גם רעיון זה אינו נכון לפי התורה, שהרי דיני החלוקה והיובל שבתורה חלים בפירוש רק על קרקעות, לא על כסף וזהב, לא על צאן ובקר, ואפילו לא על בתים בעיר מוקפת חומה (פרט לערי הלויים).

3. גם שבתי בן דב הציע, בדומה לז'בוטינסקי, חלוקה של כל ההון במדינה, פעם ביובל. לטענתו, "הקרקע הייתה ההון היחיד בימי ראשית התנחלותנו בארץ, ולפיכך לא דובר בתורה אלא על הקרקע בלבד; אבל בימינו, להגביל את עקרון שנת היובל לקרקע בלבד פירושו הוא לרוקן את העניין מתוכנו"."

לענ״ד, בניגוד לדבריו, גם בחברה מודרנית ישנה חשיבות כלכלית עצומה לקרקע. הקרקע היא השטח לכל פעילות אנושית — דיור, הקמת מפעל, ואפילו קידוחי נפט. מחיר הקרקע מהווה חלק גדול ממחיר הדירה: אדם שיש לו קרקע, יכול להקים עליה דירה, או לפחות קרוון, תוך פחות משנה, אדם שאין לו קרקע, צריך לעבוד 20 שנה כדי לשלם את המשכנתה לבנק.

מעבר לכך, התורה מסבירה בפירוש, מדוע דין קרקע שונה מדין כל סוג אחר של רכוש: "כָּי לְּי הָאָרֶץ" (ויקרא כה, כג). הארץ שייכת לה' כי ה' יצר אותה לבדו. מוצרים אחרים נוצרו בשיתוף פעולה של האדם והטבע, אולם הקרקע היא כולה יצירה אלוהית, ולפיכך חוקי הבעלות הרגילים אינם חלים עליה.

מעבר לכך, לקרקע יש ערך מהותי, הרבה מעבר לערך הכלכלי שלה. בעלות על קרקע עדיין קשורה באופן הדוק לחירות. מכיוון שכל אדם צריך מקום כלשהו להימצא בו, הרי שאדם שאין לו קרקע הוא בהכרח עבד, כי הוא חייב למלא את כל הוראותיו של בעל הקרקע שהוא נמצא בה. במקרה הטוב, הוראות אלה מסתפקות בתשלום דמי-שכירות (שגם הוא סוג של שיעבוד); במקרה הגרוע, בעל הקרקע יכול לדרוש מהדייר לעזוב, כמו שעשה יוסף לאחר שקנה את הקרקעות במצרים (בראשית מז). לכן התורה מדגישה, שחוק היובל נועד לשמור על החופש:

- המקרא, כגון: ״וַיְשַלַּח יָהוֹשָׁעַ אֶת הָעֶם **אִישׁ לְנַחֻלָּתו**״ (יהושע כד כח), ״וַיִּצְאוּ מִשְּם **אִישׁ לְנַחַלְּתו**״ (שופטים כא כד), סיפור מגילת רות, ועוד.
- ברשת: 1930 ברשת: ה'תר"צ-1930 ברשת: המקראית לצדק הברתי', ה'תר"צ-1930 ברשת: http://www.global-report.com/thehope
- שבתי בן-דב (ה'תרפ"ד-ה'תשל"ח, חבר לח"י שהפך להוגה-דעות לאחר קום המדינה), 'משטר היובל', **גאולת**ישראל במשבר המדינה, ה'תש"ך-1960; התפרסם מחדש ככרך ב' בכתביו אשר יצאו לאור ע"י יהודה עציון,
 סולם למלכות ישראל היעודה, ה'תשס"ז, 314-335; ברשת:

http://www.daat.ac.il/daat/vl/tohen.asp?id=496

״וְקַבַּשְׁתֶּם אֵת שְׁנַת הַחֲמִשִּׁים שָׁנָה, **וּקְרָאתֶם דְּרוֹר בָּאָרֶץ לְכָל ישְׁכֵיה**ָ; יוֹבֵל הִוֹא תִּהְיֶה לַכֵם, וִשַּׁבִתּם אִישׁ אֵל אֲחַזָּתוֹ וִאִישׁ אֵל מִשְׁפַּחִתּוֹ תַּשְׁבוּ״ (ויקרא כה, י).

- דרור הוא חופש הדיור, בהקשר של קרקעות, דרור הוא חופש הדיור החור בחור החור בימינו יש הדיור החופש לבנות דירה, חופש שזוכה בו רק מי שיש לו אדמה פרטית. אם כך, גם בימינו יש היגיון ליישם את דין החלוקה דווקא על קרקעות, על-מנת להבטיח חופש לכל אזרח.

בימינו, רוב הקרקעות בארץ ישראל אינן חופשיות — הן שייכות למדינה. גם מי שקונה קרקע, אינו חופשי לבנות בה את ביתו כרצונו, אלא הוא תלוי בוועדות התכנון והבניה הקובעות את ייעוד הקרקע. על פי התורה, יש למצוא דרך לחלק את הקרקעות בצורה שווה, כך שלכל אזרח תהיה קרקע פרטית, חופשית לחלוטין ממגבלות ואיסורים; קרקע שתישאר בבעלותו ובבעלות משפחתו לתמיד.

כאמור, היישום המלא של מצווה זו יהיה רק בימות המשיח, אולם, במאמר זה אני נוקט בגישה הציונית, שלפיה יש להשתדל ליישם את חזון הגאולה כמיטב יכולתנו בדרך הטבע. בהתאם לכך, אנסה בהמשך המאמר לברר, איך אפשר לקיים את עקרון חלוקת הקרקעות והיובל במדינת ישראל של ימינו, ולהתקרב למצב שבו לכל אזרח יש קרקע פרטית.

ב. איך מחלקים קרקעות בימינו

כדי לממש את עקרון חלוקת הקרקעות בימינו, יש להתייחס לכמה שאלות:

- א. למי לחלק? מי הם הזכאים? בזמן התורה חולקו קרקעות לכל אלה שנספרו במפקד שנערך לפני הכניסה לארץ: "שְׂאוּ אֶת רֹאשׁ כֶּל עֲדַת בְּנֵי יִשְׂרָאֵל מִבֶּן עֶשְׂרִים שַׁנָה וְמַעְלָה לְבִר לְפֵני הכניסה לארץ: "שְׂאוּ אֶת רֹאשׁ כָּל עֲדַת בְּנֵי יִשְׂרָאֵל מִבֶּן עָשְׂרִים שׁנָה וֹמַלְה" (במדבר כו, ב-נג). לְבֵית אֲבֹתְם, כָּל יצֵא צָבָא בְּיִשְׂרָאֵל ... לְאֵלֶה תַּחְלֵק הְאָרֶץ בְּנַחֲלָה" (במדבר כו, ב-נג). האם הגיל מקנה זכות לקבל קרקע "מבן עשרים שנה ומעלה", או השירות הצבאי "כל יוצא צבא"? האם בימינו יש לחלק נחלות לכל אדם מעל גיל 20, או לכל אדם ששירת בצה"ל בלי קשר לגילו?
- ב. כמה לחלק לכל אחד? איך לבצע חלוקה שווה והוגנת של הקרקעות? בתורה נאמר:
 "לְרֵב תַּרְבֶּה נַחֲלֶתוֹ וְלַמְעֵט תַּמְעִט נַחֲלֶתוֹ, אִישׁ לְפִי פְּקְדָיו יְתַּן נַחֲלֶתוֹ" (שם, נד),
 והמשמעות הפשוטה היא שיש לחלק לפי גודל למשפחה גדולה יש לתת נחלה גדולה,
 ולמשפחה קטנה יש לתת נחלה קטנה, כך שבסופו של דבר כל אזרח יקבל נחלה באותו
 גודל. אולם, בתלמוד ישנה דעה שלפיה החלוקה צריכה להיות "בכסף", כלומר לפי
 הערך הכלכלי. מכמי התלמוד מתייחסים לשני גורמים שלפיהם יש לחשב את ערך
 הקרקע האיכות החקלאית שלה, והקרבה שלה לירושלים, בימינו יש כמובן גורמים
 - 10 אונקלוס שם.
 - 11 רכי יהודה, בכלי ראש השנה ט, ב.
 - 12 בבלי בבא בתרא קכב, א.

רבים נוספים המשפיעים על ערך הקרקע, ואין זה ברור אם אפשר לחשב ערך של קרקע באופן אובייקטיבי. ועוד: בימינו ערך הקרקע עשוי להשתנות באופן ניכר תוך שנים ספורות, ולפיכך, גם אם בחלוקה הראשונית כל אזרח יקבל קרקע באותו ערך, מסתבר שביובל הבא, כאשר כל אחד יקבל בחזרה את נחלתו הראשונה, הערך כבר יהיה שונה. אם כך, האם בכלל יש טעם לבצע את התהליך המסובך של חישוב ערך הקרקע מלכתחילה, או שעדיף להסתפק בחלוקה הפשוטה לפי גודל?

ג. **איך** לחלק? איך להגיע מהמצב הנוכחי, שבו לרוב האזרחים אין קרקע פרטית, למצב שבו לכל אזרח יש קרקע פרטית?

מאמר זה ינסה לפתור רק את השאלה השלישית, ולשם כך נניח ששתי השאלות הראשונות כבר נפתרו. בפרט:

- א. נניח שישנה קבוצה של אנשים הזכאים לקבל קרקעות נקרא להם "האזרחים".
- ב. נניח שנעשתה חלוקה של ארץ ישראל לחלקות "שוות", שמספרן בדיוק כמספר האזרחים — נקרא להן "הנחלות". אם החלטנו להתעלם מהערך הכלכלי, אז הנחלות יהיו שוות בערכן. אם מישהו בגודלן, ואם החלטנו להתחשב בערך הכלכלי, אז הנחלות יהיו שוות בערכן. אם מישהו מחזיק בשטח גדול יותר או בעל ערך כלכלי רב יותר, נאמר שהוא מחזיק במספר נחלות; לדוגמה, אם נחלה אחת שווה רבע דונם, אז אדם המחזיק בבעלותו 2 דונם למעשה מחזיק 8 נחלות שונות.

בנוסף, במאמר זה לא נתייחס לסוגיות של הורשת נחלות וחלוקתן בין צאצאים, אלא נניח שלכל אזרח ישנו יורש אחד בדיוק, המקבל אזרחות בדיוק ברגע שבו המוריש שלו נפטר, כך שמספר האזרחים הוא קבוע.

מטרתנו העיקרית היא למצוא אלגוריתם, שיביא אותנו מהמצב הנוכחי למצב האידיאלי על פי התורה, שבו, בכל שנת יובל, **לכל אזרח ישנה נחלה אחת**.¹³

בכפוף למטרה העיקרית, ננסה למצוא אלגוריתם שיאפשר כמה שיותר **חופש-בחירה** לאזרחים. בזמן התנ"ך, הנחלות חולקו על פי גורל א-לוהי, וכל אזרח קיבל בדיוק את הנחלה שה' ייעד עבורו, אולם בימינו אין לנו גורל אלוהי, ואין לנו דרך לקבוע מהי הנחלה המיועדת לכל אזרח, ולכן נעדיף לאפשר לכל אזרח לבחור את הנחלה שהוא מעדיף, במידת האפשר.

לרעיון זה של חופש הבחירה ישנו תקדים בתורה: בני גד ובני ראובן בקשו ממשה לקבל את לרעיון זה של חופש הבחירה ישנו תקדים — בתנאי שישרתו בצבא וישתתפו בכיבוש הארץ כמו

13 ויש לעיין, אם מחר יתקיימו כל התנאים ההלכתיים להחזרת מצוות היובל, איך תתקיים מצווה זו בפועל, הרי אף אחד לא יודע מהי הנחלה שלו? הרמב"ם (מלכים יב,ג) כתב שהמשיח עתיד לייחס את האנשים לשבטיהם ואז כל אחד יוכל לחזור לנחלתו, אולם מה נעשה אם התנאים ההלכתיים להחזרת מצוות היובל יתקיימו לפני ביאת המשיח? אינני יודע אם דנו בשאלה זו.

כל שאר השבטים.¹¹ בהתאם לכך, נחפש גם אנחנו פתרון שיאפשר לאזרחים את מרב חופש הבחירה לגבי נחלותיהם.

לשם המחשה, נציג תחילה שני פתרונות שבוודאי אינם טובים:

- ניתן לבצע כבר היום רישום של הבעלות על כל הנחלות, ולהתחיל כבר ממחר לספור את השנים לקראת היובל הבא. כעבור 50 שנה, תוחזר כל נחלה לבעליה הרשומים. פתרון זה ינציח את חלוקת הקרקעות הנוכחית, שהיא מאד לא שיוויונית " לאנשים מסויימים יש קרקעות רבות, ולאנשים רבים אחרים אין קרקעות כלל. לדעתי פתרון זה אינו ראוי, מכמה סיבות:
- התורה ציוותה על חלוקת נחלות שיוויונית ״לְרֵב תְּרְבֶּה נַחֲלָתוֹ וְלַמְעֵט תַּמְעִיט נַחֲלָתוֹ״ (ראו בתחילת הסעיף, סימן ב). רק לאחר החלוקה השיוויונית, התחילו לספור לקראת שנת היובל. אין טעם לקיים את מצוות היובל באופן שיגרום להפרת המצוה הקודמת לה מצוות חלוקת הנחלות.
- ◆ מצוות היובל עצמה מנוסחת באופן המדגיש את החשיבות של קרקע לכל אזרח: ״בּשְׁנַת הַיּוֹבֵל הַזֹּאֹת תְּשֻׁבוּ אִישׁ אֶל אֲחֻזָּתוֹ״ (ויקרא כה יג), אולם ביצוע היובל במצב הנוכחי ינציח את המצב שבו לאנשים רבים אין אחוזה.
- 2. ניתן להכריח כל אזרח, המחזיק יותר מנחלה אחת, למכור את כל הנחלות פרט לאחת, לאזרחים שאין להם נחלה. פתרון זה יבטיח נחלה לכל אזרח, אולם הוא יפגע באופן משמעותי בבחירה החופשית של בעלי הקרקע הנוכחיים.
- 15. למיטב ידיעתי, היחיד שהציע תוכנית מעשית לחלוקת נחלות בימינו הוא אהוד טוקטלי. 15 הוא מציע להקים "קרן קיימת חדשה" (קק"ח), שתרכוש קרקעות בארץ ישראל, ותמכור אותן במחירי עלות לכל יהודי שמילא את חובותיו למדינה, כך שכל אחד יקבל נחלה בשווי כלכלי זהה. בניגוד להצעתו של הרצל: "הקרן הקיימת שלנו אינה בעלים של הקרקע... אדמות העם היהודי שמורות אצל הקרן בנאמנות... אף אחד לא יכול לרכוש מהקרן יותר אדמה מאשר כל יהודי אחר"; רכישת קרקע תהיה מותנית בהתחייבות "שלא ימכרו אותן לעולם. בעלי הקרקעות יהיו רשאים להשכיר את נכסיהם לתקופות קצרות או להחכיר אותם לארבעים ותשע שנים לכל היותר. הם לא יהיו רשאים להשכיר או להחכיר נכסים למי שאינו יהודי, ואלה שלא ירצו להחזיק באדמתם לחלוטין, יתחייבו למכור אותה רק לקרן הקיימת החדשה".

הצעתו של טוקטלי אכן מאפשרת להתקרב בהדרגה למצב שבו לכל אדם יש נחלה: ככל שהקק״ח תקנה קרקעות רבות יותר, כך היא תוכל למכור נחלות לאזרחים רבים יותר. הצעה זו

- 14 במדבר לב.
- 1 אהוד טוקטלי, **נוי אלט נוי לנד**, ה'תשס"ב-2002; ברשת: http://et.hopeways.org/nanl-04.htm; חלק הוד טוקטלי, **נוי אלט נוי לנד**, ה'תשס"ב-2009, ברשת: ברשת: מרשבים'. רעיונות דומים נזכרו בספרו שבע, ה'תשס"ט-2009, ברשת: http://www.hopeways.org/docs/sheva-ehud-tokatly.pdf,

גם מאפשרת בחירה חופשית מסוימת — הקרקעות נקנות רק מבעלים המוכרים אותן מרצונם החופשי, וכל אזרח יכול לבחור איזו נחלה הוא מעוניין לקנות, מי שמתחרט, יכול למכור את הנחלה שלו בחזרה לקק"ח, ולקנות נחלה אחרת.

הבעיה בהצעה זו היא, שהיא עדיין דורשת גוף אחד מרכזי, שיאסוף כמות עצומה של כסף, ויקנה כמות עצומה של קרקעות, כמות שעשויה להגיע עד כל הקרקעות בארץ ישראל. אמנם הקרקעות יימכרו בסופו של דבר לאנשים פרטיים, אולם בתקופת הביניים, שעשויה להיות ארוכה, הקרקעות יהיו בבעלות מרכזית.

4. ברצוני להציע הצעה חדשה, שאינה דורשת בעלות מרכזית על קרקעות, גם לא באופן זמני. לפי הפתרון המוצע, יש לבצע כבר היום רישום של הבעלות על כל הנחלות, ולהתחיל כבר ממחר לספור את השנים לקראת היובל הבא — כמו בפתרון 1. אולם, כעבור 50 שנה, רק האנשים שאין בבעלותם נחלה יוכלו להחזיר לעצמם נחלה אחת. התהליך יתנהל ע"פ האלגוריתם הבא:

אלגוריתם היובל

© Copyright Bar-Ilan University Press 2013. All rights reserved. This PDF is for the author's use and distribution only.

- 1. בחר אזרח כלשהו, שהייתה לו נחלה בתחילת הספירה, ושאין לו נחלה כעת;16
 - 2. אם אין אזרח כזה סיים;
- 3. אם יש אזרח כזה בקש ממנו לבחור את אחת הנחלות שהייתה בבעלותו בתחילת הספירה, והחזר את הנחלה לבעלותו;
 - .4 חזור על התהליך עד לסיום.

לאחר סיום התהליך, מבצעים רישום מחודש של הבעלות, ומתחילים לספור מחדש לקראת היובל הבא.

קל לראות, שכל אזרח שהייתה לו נחלה בתחילת הספירה, יהיה בעל נחלה גם בסוף תהליך היובל. כך, התהליך מבטיח, שמספר בעלי הנחלות לא יקטן מיובל אחד ליובל הבא. מצד שני, התהליך מאפשר חופש בחירה מוחלט וחופש מסחר מוחלט בין יובל ליובל.

אמנם התהליך אינו מבטיח שמספר בעלי הנחלות יגדל מיובל אחד ליובל הבא, שהרי ייתכן שאף נחלה לא תימכר, וכך הבעלות לא תשתנה כלל. כדי לברר מה הסיכוי שמספר בעלי הנחלות אכן יגדל, נבדוק את התכונות הסטטיסטיות של התהליך, ולשם כך ננסח אותו בצורה פורמאלית כתהליך על גרף אקראי.

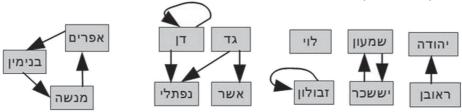
16 למיטב הבנתי, סדר הבחירה של האזרחים לא ישפיע באופן משמעותי על התוצאות. למרות זאת, כדי למנוע טענות על קיפוח מכוון, אפשר לקבוע שהסדר יהיה אקראי.

ג. גרף הנחלות

גרף הנחלות הוא גרף המתאר את שינוי הבעלות בין שתי תקופות — תחילת הספירה (= מוצאי שנת היובל הקודמת), וסוף הספירה (=ערב שנת היובל הנוכחית).

- + כל אזרח הוא צומת בגרף;
- כל נחלה היא קשת בגרף;
- נקודת היציאה של קשת היא האזרח שהיה בעל הנחלה במוצאי שנת היובל הקודמת;
 - . נקורת היעד של קשת היא האזרח המחזיק בנחלה בערב שנת היובל הנוכחית.

נתבונן לדוגמה בגרף הנחלות הבא:



:הגרף מלמד ש

© Copyright Bar-llan University Press 2013. All rights reserved. This PDF is for the author's use and distribution only.

- הנחלה שהייתה של ראובן במוצאי היובל הקודם, נמצאת עכשיו בבעלות יהודה. ייתכן שראובן מכר את נחלתו ישירות ליהודה, או באופן עקיף דרך קונים ומוכרים נוספים. הגרף אינו מתייחס לכל העסקאות שנעשו בין שני היובלים, אלא רק למצב ההתחלתי ולמצב הסופי.
- שמעון ויששכר החליפו ביניהם את הנחלות. כל אחר מחזיק בנחלה שהייתה בידי השני.
 - . ללוי לא הייתה כלל נחלה במוצאי היובל הקודם, ואין לו כל נחלה כעת.
 - לזבולון הייתה נחלה במוצאי היובל הקודם, והיא עדיין בבעלותו.
 - לגד היו שתי נחלות, והוא מכר את שתיהן − אחת לאשר ואחת לנפתלי.
 - לדן היו שתי נחלות, אחת מהן עדיין בבעלותו ואת השנייה הוא מכר לנפתלי.
 - אפרים, בנימין ומנשה החליפו את נחלותיהם במעגל.

ובאופן כללי:

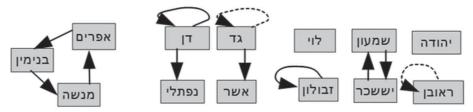
- → דרגת היציאה של צומת שווה למספר הנחלות שהיו בבעלות האזרח במוצאי היובל הקודם.
 - דרגת הכניסה של צומת שווה למספר הנחלות שהאזרח מחזיק בבעלותו כעת.

כעת ננסח את אלגוריתם היובל, שהוצג בסעיף הקודם, כאלגוריתם על גרף הנחלות:

אלגוריתם היובל – ניסוח גרפי

- 1. בחר צומת כלשהו, שדרגת הכניסה שלו 0, ודרגת היציאה שלו גדולה מ-0;
 - :. אם אין צומת כזה סיים;
- 3. אם יש צומת כזה בחר את אחת הקשתות היוצאות ממנו, והפוך אותה לקשת עצמית;
 - .4 חזור על התהליך עד לסיום.

ביצוע האלגוריתם על גרף הנחלות שהוצג למעלה עשוי לתת את התוצאה הבאה (קשתות שהשתנו מקווקוות):



רק ראובן וגד היו בעלי נחלה במוצאי היובל הקודם (=דרגת יציאה גדולה מ-0), ואינם בעלי נחלה בערב היובל הנוכחי (=דרגת כניסה 0); לכן, כל אחד מהם בחר נחלה אחת והחזיר אותה לעצמו (=בחר קשת יוצאת אחת והפך אותה לקשת עצמית), וכך דרגת הכניסה שלו חזרה להיות גדולה מ-0. כך, כל אזרח שהיה בעל נחלה ביובל הקודם הוא בעל נחלה גם עכשיו.

מצד שני, ישנם שני אזרחים שהיו חסרי נחלה במוצאי היובל הקודם (=דרגת יציאה 0), והם בעלי נחלה ביובל הנוכחי — והם אשר ונפתלי: נפתלי קנה את אחת הנחלות של דן, ואשר קנה את אחת הנחלות של גד. כיוון שדן וגד עדיין בעלי נחלות (=דרגת כניסה גדולה מ-0), הם אינם רשאים להחזיר לעצמם נחלות נוספות, ולכן אשר ונפתלי יכולים לשמור בבעלותם את הנחלות החדשות שלהם. כך, האלגוריתם מאפשר לאזרחים חדשים לזכות בנחלה, ובמקביל שומר על זכויותיהם של בעלי הנחלה הוותיקים. מרגע שהגענו למצב שבו, בתחילת הספירה, לכל אזרח יש נחלה — מצב זה יישמר לתמיד.

מהו קצב הירידה במספר חסרי הנחלות מיובל ליובל? התשובה לשאלה זו תלויה, כמובן, במספר הנחלות שיימכרו במהלך היובל. כאשר שוק הנחלות הוא חופשי, הכל יכול לקרות, ולכן נבדוק את שני התרחישים הקיצוניים:

התרחיש הגרוע ביותר (מבחינת חסרי הנחלות) הוא, שאף אחד מבעלי הנחלות (או, לפחות, אף אחד מבעלי שתי נחלות או יותר) אינו מוכר אף נחלה. במקרה זה, מספר חסרי הנחלות יישאר קבוע.

התרחיש הטוב ביותר הוא, שכל בעלי הנחלות מוכרים את כל הנחלות שלהם בשלב כלשהו

במהלך היובל, כלומר מתבצע ערבול מלא של הנחלות בין יובל ליובל. במקרה זה, ניתן לקבל קירוב לקצב הירידה בעזרת מודל הסתברותי. הפיתוח הוא ארוך ולכן הועבר לנספח א. השורה התחתונה היא, שאם ישנם N אזרחים ו-N נחלות, ואם כל נחלה נמכרת בשלב כלשהו, במהלך 50 השנים שבין יובל ליובל, לקונה הנבחר באקראי, אז מספר חסרי הנחלות, M, משתנה בקירוב כך:

$$\begin{split} \boldsymbol{M}_{t+1} &\approx \frac{\boldsymbol{M}_{t}}{1 + \left(\frac{1}{e-1} + \frac{\sqrt{N \ / \boldsymbol{M}_{t}} - 1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}} \\ &\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{M}_{t} = \boldsymbol{0} \end{split}$$

כאשר לאחר הזמן הנמדד ביובלים (זמן 0 הוא המצב ההתחלתי, זמן 1 – לאחר סיום היובל הראשון, וכו'). ובעברית:

- ◆ קצב הירידה במספר חסרי הנחלות אטי יותר, ככל שמספר חסרי הנחלות קטן יותר. זה הגיוני: ככל שיש יותר בעלי נחלות, ישנם יותר אנשים שירצו לקבל את הנחלה שלהם בשנת היובל, ולכן יהיה קשה יותר לחסרי הנחלות שנשארו להשיג נחלה משלהם.
- ◆ אולם בטווח הארוך, המערכת מתכנסת למצב בו אין בכלל חסרי נחלות — כלומר לכל אזרח ישנה נחלה אחת רדיוה

מספר	מספר
היובל	חסרי הנחלה
0	999
1	368
2	188
3	113
4	75
5	53
6	40
7	31

ניתן להשתמש בנוסחת הקירוב על-מנת להעריך, מתי יגיע מספר חסרי הנחלה מתחת לסף מסוים. לדוגמה, הטבלה בצד שמאל מציגה את מספר חסרי הנחלה לפי זמן, כאשר מספר האזרחים ומספר הנחלות הכולל הוא 1000. הטבלה מתחילה מהמקרה הגרוע ביותר, שבו, בזמן 0, כל הנחלות מרוכזות בידי אדם אחד, כך שיש 999 חסרי נחלה. ניתן לראות, שתוך ארבעה יובלים, מספר חסרי הנחלה מגיע לכ-7.5%. זהו מספר מעניין, כי בזמן המקרא, שבט לוי (שמחבר מאמר זה משתייך אליו) לא קיבל נחלה. שבט לוי היה אחד מתוך 13 שבטי ישראל — בערך 7.7%, אם כך, תוך ארבעה יובלים, מספר חסרי הנחלה במודל שלנו נמוך משהיה בזמן המקרא.

לעומת זאת, ללא דין היובל, מספר חסרי הנחלה יהיה תמיד כ-36.8% — זהו שיעור האנשים שנשארים ללא נחלה, כאשר כל הנחלות נמכרות ומחולקות באקראי.

תוצאה זו תקפה, כאמור, רק כאשר כל הנחלות נמכרות בשלב כלשהו במהלך היובל. תרחיש סביר יותר הוא, שכל נחלה נמכרת בהסתברות מסוימת, q, הנמצאת בין 0 ל-1. במקרה זה, החישוב התיאורטי של קצב ההתכנסות נעשה הרבה יותר מסובך, ולכן לא נבצע אותו במאמר זה. אולם בהמשך המאמר (חלק ד) נשתמש בהדמיות ממוחשבות כדי לבדוק את ההשפעה של

הסתברות המכירה על מספר חסרי הנחלה.

שימור מעגלים

© Copyright Bar-Ilan University Press 2013. All rights reserved. This PDF is for the author's use and distribution only.

תכונה מעניינת של האלגוריתם היא, שהוא **משמר מעגלים**, כלומר: כל קשת שהיא חלק ממעגל, לא תשתנה ע"י האלגוריתם. ניתן להיווכח שתכונה זו מתקיימת בגרף הנחלות שהובא כדוגמה בעמודים הקודמים. נוכיח שהתכונה נכונה תמיד.

- נניח שבגרף הנחלות ישנו מעגל כלשהו בעל k צמתים. נסמן את הצמתים במעגל במספרים:
 - $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow ... \rightarrow (k-1) \rightarrow 0$
- ◆ נניח, על דרך השלילה, שהאלגוריתם משנה קשת כלשהי במעגל; נניח, שהקשת הראשונה◆ שהאלגוריתם משנה, במעגל זה, היא הקשת היוצאת מצומת i.
- ע״פ הגדרתו, האלגוריתם נוגע בקשת, רק אם צומת היציאה של הקשת הוא בעל דרגת ע״פ הגדרתו. כניסה 0.
- ◆ אולם במעגל המקורי קיימת הקשת היוצאת מצומת (i-1) ונכנסת לצומת i. האלגוריתם נוגע עדיין לא שינה אותה, כי הנחנו שהקשת היוצאת מ-i היא הראשונה שהאלגוריתם נוגע בה.
 - + מכאז. דרגת הכניסה של צומת i גדולה מ-0 − וזו סתירה.

המשמעות של תכונה זו היא, שהאלגוריתם מאפשר לאזרחים להחליף נחלות, ובלבד שההחלפות יוצרות מעגל בגרף הנחלות. האם זו תכונה טובה או רעה? מצד אחר, אפשר לטעון שזו תכונה רעה, שהרי לפי פשוטו של החוק המקראי, כל אדם צריך לחזור לנחלתו המקורית, ואין אפשרות להחליף, גם אם שני הצדדים מסכימים. ניתן גם להבין מה החשיבות של חוק זה:

- 1. הנחלות המקוריות חולקו בגורל, שבוצע על פי ה', ברוח הקורש. החלוקה משקפת את הרצון האלוהי, ולכן יש לשמר אותה.
- 2. הנחלות המקוריות חולקו בהתאם לשבטים ולמשפחות, והתורה הקפידה על כך שהמבנה הנחלות המשפחתי וישמר, ולכן ציוותה שהאדם יחזור דווקא "אל משפחתו" (ויקרא כה, י).

אולם בימינו, שתי הסיבות אינן תקפות: אין לנו אפשרות להפיל גורל ברוח הקודש, ולקבוע מהי הנחלה הראויה לכל אחד, והחלוקה הנוכחית ממילא אינה משמרת מבנה משפחתי או שבטי כלשהו, ולכן גם אין כל סיבה להנציח את החלוקה הנוכחית ולמנוע החלפות.

אם כך, התכונה של שימור מעגלים היא תכונה טובה, שכן היא מאפשרת חופש בחירה: אדם שקנה נחלה, ואינו מרוצה ממנה, יכול למכור אותה ולקנות נחלה אחרת, ואם בשנת היובל יתברר שהעסקאות שלו הן חלק ממעגל — הוא יוכל לשמור בבעלותו את הנחלה החדשה.

כמובן, אפשרות זו אינה מובטחת: לדוגמה, בתרשים למעלה, אילו בנימין לא היה מוכר את נחלתו לאפרים, היה נוצר מצב שבו לאפרים אין נחלה, אפרים היה מקבל בחזרה את הנחלה שמכר למנשה, ומנשה היה מקבל בחזרה את הנחלה שמכר לבנימין, וכך אף אחד מהם לא היה מצליח להחליף נחלה, כל אחד מהם היה חוזר לנחלתו המקורית.

כל עוד ישנם אנשים, שביובל הקודם הייתה להם יותר מנחלה אחת, ייתכן שתהיה קשת שלא תשתנה באלגוריתם היובל, למרות שאינה חלק ממעגל (כמו, בגרף למעלה, הקשת בין גד לאשר). אולם, מרגע שהגענו למצב שבו לכל אזרח יש נחלה אחת בדיוק – רק קשתות שהן חלק ממעגל יישמרו. נוכיח על-דרך השלילה:

- ◆ נניח שקשת כלשהי, בין שני צמתים שונים, נשארה בגרף הנחלות לאחר ביצוע אלגוריתם היובל. נסמן את שני קצות הקשת במספרים: 0 → 2.
- מכיוון שבתחילת הספירה לכל אזרח הייתה נחלה אחת בדיוק, הרי שבגרף הנחלות, לכל
 צומת ישנה קשת יוצאת אחת בדיוק. נסמן את היעד של הקשת היוצאת מ-1 ב-2:2 .
- אמתים למספר הצמתים, נגיע בהכרח לצומת מכיוון שמספר הצמתים סופי, אם נמשיך למספר כך את הצמתים, נגיע בהכרח לצומת שכבר ביקרנו בו הוא צומת מספר k, כך ש: k -> 1 -> 2 -> ... (k-1) -> k
 - :ישנן שתי אפשרויות
- אפשרות א: הצומת א זהה לצומת 0: במקרה זה, הקשת המקורית שבדקנו הקשת אפשרות א: הא זה לצומת לצומת 0: במקרה היא חלק ממעגל, כמו שרצינו להוכיח.
- ◆ אפשרות ב: הצומת k זהה לצומת i כלשהו, המקיים b : במקרה זה, ישנן שתי קשתות הנכנסות לצומת k : הקשת היוצאת מצומת (k-1), והקשת היוצאת מצומת (i-1), ולפי הנחתנו, אלו צמתים שונים. אולם, מספר הקשתות הנכנסות זהה למספר הצמתים בגרף (מספר הנחלות זהה למספר האזרחים); אם לצומת אחד ישנן שתי קשתות נכנסות, בהכרח ישנו צומת אחד לפחות שאין לו קשתות נכנסות כלל, נסמן אותו ב-a; אולם, לכל צומת ישנה קשת יוצאת אחת בדיוק. לצומת a ישנה קשת יוצאת ואין לו קשתות נכנסות ולפיכך לא ייתכן שביצוע אלגוריתם היובל הסתיים וזו סתירה.

לסיכום: אם במצב ההתחלתי לכל אזרח יש נחלה, אז גם במצב הסופי לכל אזרח יש נחלה, ונחלה שעוברת מיד ליד תישאר בידי בעליה החדשים **אם ורק אם** העסקה היא חלק ממעגל.

מה הסיכוי, שאדם הקונה נחלה יצליח להחזיק בה? לשם כך יש לחשב את ההסתברות שקשת כלשהי בגרף הנחלות תהיה חלק ממעגל. ניתן להראות,¹⁷ שאם בתחילת הספירה לכל

Henning Makholm, Math Stack Exchange, 26.4.2012, http://math.stackexchange.com/ נאו: /math.stackexchange.com/ מוני /questions/136932/probability-of-cycle-in-random-graph/136974

אזרח ישנה נחלה אחת בדיוק, וכל נחלה נמכרת במהלך היובל לקונה הנבחר באקראי – אז ההסתברות שקשת כלשהי תהיה חלק ממעגל בסוף היובל היא:

$$P_{cycle}(N) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2N}} - \frac{1}{N}$$

כאשר N הוא מספר האזרחים והנחלות. זהו חסם עליון — אם לא כל הקרקעות נמכרות, ההסתברות N הוא מספר הצורחים והנחלות. בסעיף הבא נבדוק גם נוסחה זו בעזרת הדמיה ממוחשבת.

ככל שמספר האזרחים והנחלות גדול יותר, ההסתברות להחלפה קטנה יותר, ולמעשה שואפת לאפס. כאמור, ניתן להסתכל על התופעה משני צדדים: מהצד השלילי — היא מקטינה את חופש הבחירה של האזרחים, ומהצד החיובי — היא מעודדת את האזרחים להיצמד לנחלות המקוריות, "והארץ לא תימכר לצמיתות".

ד. הדמיה ממוחשבת

כדי לחקור את תכונות המודל, השתמשתי בשיטת **הדמיה מבוססת סוכנים.**¹⁸ בשיטה זו, מפעילים מספר רב של סוכנים ממוחשבים, מגדירים לכל אחד מהם את כללי הפעולה שלו (בדרך-כלל מדובר בכללים פשוטים יחסית), ובוחנים את התפתחות המערכת לאורך זמן. הכלי שהשתמשתי בו היה שפת ¹⁹,NetLogo שפה ייעודית לביצוע הדמיות מסוג זה. תוכנית ההדמיה זמינה ברשת,²⁰ כך שהניסויים המתוארים ניתנים לשחזור.

© Copyright Bar-llan University Press 2013. All rights reserved. This PDF is for the author's use and distribution only.

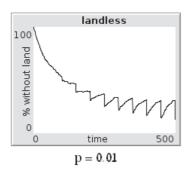
בתחילת ההדמיה, כל הנחלות שייכות לאזרח אחד (אפשר לחשוב עליו כמייצג את מינהל מקרקעי ישראל). ההדמיה מחולקת לתקופות, כל תקופה מייצגת שנה. בכל תקופה, לכל אחת מהנחלות ישנה הסתברות כלשהי p-1 להימכר. ההסתברות p-1 ניתנת לשינוי ע"י החוקר. בכל פעם שחולפות 50 תקופות, מתבצע אלגוריתם היובל שתואר בסעיף הקודם, וחלק מהנחלות חוזרות לבעליהן. אם אזרח כלשהו זכאי להחזיר לעצמו יותר מנחלה אחת, תוכנת ההדמיה בוחרת באקראי את הנחלה שיקבל בחזרה.

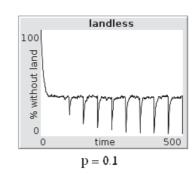
המדד המעניין אותנו הוא שיעורם היחסי של חסרי הנחלה — אנו רוצים ששיעור זה יהיה קטן ככל האפשר. להלן גרף אופייני של שיעור חסרי הנחלה, באחוזים, עבור 1000 אזרחים ו-1000 נחלות, ושני ערכים שונים של הסתברות המכירה p:

- 18 Leigh Tesfatsion, "Agent-Based computational economics: Growing economics (או למשל: from the bottom up", Artif. Life, vol. 8, no. 1, pp. 55-82, Mar. 2002

 Robert Axelrod, "Advancing the art of simulation in the social sciences", Complexity, vol. 3, pp. 16-22, Nov. 1997
- Uri Wilensky, "NetLogo", http://ccl.northwestern.edu/netlogo/. Center for Connected 19 Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL, 1999-2012
 - http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/community/land-random בכתובת:

אראל סגל-הלוי

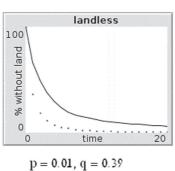


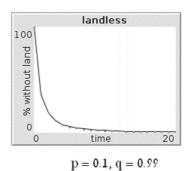


לגרף ישנה צורה אופיינית של מסרק. השיניים התחתונות של המסרק מתאימות לשנות היובל, שבהן מספר חסרי הנחלה יורד בחדות כי חלק גדול מחסרי הנחלה מקבלים בחזרה את הנחלה שהייתה להם ביובל הקודם. בין יובל ליובל מתבצע מסחר אקראי, וכתוצאה מכך מספר חסרי הנחלה עולה. אולם ניתן לראות, שבנקודות המתאימות לשנות היובל, מספר חסרי הנחלה תמיד יורד.

נוח יותר לראות אחת, שבה כאל היובל לכל מתייחסים מתייחסים אחת, שבה נוח יותר לראות נוח יותר לתאות מתייחסים לכל היובל קבו יותר מתקיים הקשר: $q=1-(1-p)^{50}$

כך נראים גרפים אופייניים; הקו מציין את מספר חסרי הנחלה בהדמיה, והנקודות מציינות את מספר חסרי הנחלה התיאורטי, לפי נוסחת הקירוב מסעיף ג:





ניתן לראות, שעבור q=0.99, נוסחת הקירוב אכן נותנת תוצאות קרובות מאוד להדמיה הממוחשבת (זכרו שנוסחה זו חושבה תחת ההנחה שכל הקרקעות נמכרות, כלומר q=1). עבור קצב הירידה במספר חסרי הנחלה הוא, כצפוי, אטי יותר: ככל שפחות נחלות נמכרות, יש פחות סיכוי לחסר-נחלה לקנות נחלה.

הסתברות שונים שונים עבור ערכים חסרי הנחלה במספר את הירידה מתארת את הכלה הכאה הטבלה ביו:q

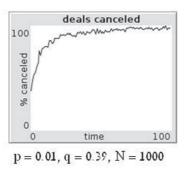
הושמטה הייתה קטנה הייתה סטיית התקן ברוב סטיית הרצות. 10 הרצות של 10, והיא הושמטה כל תא מהטבלה לשם קיצור. 2

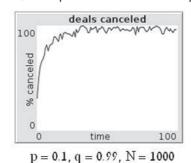
מספר היובל	מספר חסרי הנחלות							
	q=1	q=0.8	q=0.6	q=0.4	q=0.2			
0	999	999	999	999	999			
4	73	113	180	300	512			
8	23	49	82	156	318			
12	12	29	50	96	228			
16	7	20	36	71	171			

אלגוריתם היובל – תהליך הדרגתי לחלוקת נחלות בימינו

דרך אפשרית להאיץ את ההתכנסות היא להבטיח שההסתברות למכירת נחלה תהיה גבוהה. ניתן לעשות זאת, למשל, ע"י הטלת מסים על נחלות עודפות, שיקטינו את הכדאיות בהחזקת נחלות עודפות ויעודדו את בעליהן למכור אותן.²²

שאלה מעניינת נוספת, שאפשר לבדוק באמצעות ההדמיה, היא מה שיעור האנשים שיצטרכו להחזיר את הנחלה בשנת היובל. כצפוי, שיעור זה קטן יחסית בהתחלה, כאשר להרבה אנשים ישנן כמה נחלות. לפי אלגוריתם היובל, המוכר יכול לקבל בחזרה רק נחלה אחת לכל היותר, ולכן, כל מי שיקנה ממנו נחלה, פרט לאחד, יוכל לשמור על הנחלה. אולם בהמשך, כשלכל אדם ישנה נחלה אחת, הדרך היחידה שבה אדם יכול לקנות נחלה חדשה היא, כשהעסקה תהיה חלק ממעגל. על פי הנוסחה בסוף סעיף ג, הסתברות זו שואפת לאפס כאשר מספר הנחלות גדול, ולכן אחוז החזרת הנחלות מתקרב ל-100%:





© Copyright Bar-Ilan University Press 2013. All rights reserved. This PDF is for the author's use and distribution only.

לשם המחשה, נחשב את ההסתברות להחזיק בנחלה, עבור ערכים שונים של (הסתברות המכירה) לשם המחשה, נחשב את ההסתברות להחזיק מתחילים מחלוקה שוויונית שבה לכל אזרח יש נחלה: 23

- 22 מיסוי על קרקע נחשב יעיל (כלכלית) וצודק (חברתית) יותר ממסים אחרים. ראו ויקיפדיה האנגלית, ערך Land_value_tax.
- הסמך הרווח הייט פרר מייצגת פרר ניסויים וחישוב ביסויים ביסויים את מייצגת ע"י הרצת ביסווח ביסווח ביסווח ביסווח ביסווף ברמת ביסוון פון פון ביסווף ביסו

err = z * sqrt [q * (1-q) / A]

התפלגות הנורמלית שעבורו השטח מתחת לגרף ההתפלגות נורמלית הנורמלית – המספר השטח מתחת לגרף ההתפלגות הנורמלית, בין z בין z

אראל סגל-הלוי

	N = 100	N = 1000
p = 0.01, q = 0.39	0.57% (err=0.39%)	0.06% (err=0.13%)
p = 0.1, q = 0.99	10.9% (err=1.61%)	2.96% (err=0.88%)
q = 1.00	11.1% (err=1.63%)	3.81% (err=0.99%)
q = 1.00 - קירוב תיאורטי	11.5%	3.86%

המספרים בשורה האחרונה חושבו ע"פ נוסחת הקירוב שהוצגה בסוף הסעיף הקודם.

בסעיפים הבאים נבחן מספר שינויים שאפשר לבצע באלגוריתם היובל:

ה. הקטנת אי-הוודאות

אחד החסרונות באלגוריתם שהצענו הוא, שהקונה אינו יכול לדעת בוודאות, אם הנחלה שהוא קונה תישאר בידו לאחר שנת היובל; הדבר תלוי במצבו של המוכר בשנת היובל — אם למוכר תהיה נחלה אחרת, אז הקונה יוכל לשמור את הנחלה שקנה בבעלותו, אך אם למוכר לא תהיה נחלה אחרת, ייתכן שיבחר להחזיר לעצמו את הנחלה שמכר. אי-הוודאות עלול לגרום לכך, שהקונה לא ירצה לפתח את הנחלה ולבנות עליה, מחשש שמא יצטרך להחזיר אותה.

פתרון אפשרי הוא, שבכל עסקה, אם למוכר ישנן נחלות נוספות מעבר לנחלה שהוא מוכר, הוא יוכל להעביר את הנחלה שהוא מוכר כעת לבעלות מוחלטת של הקונה, כך שהקונה יהיה בטוח שלא יצטרך להחזיר אותה ביובל. האלגוריתם עדיין ישמור על התכונה העיקרית שלו, שכל מי שיש לו נחלה ביובל מסוים, תהיה לו נחלה גם ביובל הבא.

הדמיות ממוחשבות שביצעתי הראו, שהתכונות הגלובליות של המודל (קצב הירידה במספר חסרי הנחלה כפונקציה של הזמן, ושיעור ההחזרות של נחלות) אינן משתנות כלל כאשר מבצעים תיקון זה.

ו. עדיפות לבעלים הנוכחי

האלגוריתם שהצענו נותן עדיפות לבעל הנחלה הקודם, על פני בעל הנחלה הנוכחי. כך למשל, אם לראובן הייתה נחלה אחת, וליהודה לא הייתה כל נחלה, וראובן מכר את נחלתו ליהודה (כמו בתרשים בסעיף ג) — אז בשנת היובל הנחלה תחזור לראובן, ויהודה יישאר בלי נחלה. אפשר להציע אלגוריתם שבו סדר העדיפויות יהיה הפוך: במקום להחזיר נחלות לכל אזרח שאין לו נחלה בערב היובל, אפשר להחזיר נחלות מכל אזרח שיש לו יותר מנחלה אחת בערב היובל, כך, אם ליהודה יש עכשיו רק נחלה אחת, הוא לא יצטרך להחזיר אותה לראובן.

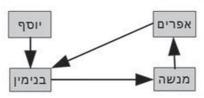
ישנה סימטריה בין האלגוריתמים: האלגוריתם המקורי מבטיח, שלכל אזרח שהייתה לו נחלה בתחילת הספירה, תהיה **לפחות** נחלה אחת גם בסוף תהליך היובל. האלגוריתם ההפוך מבטיח, שלכל אזרח שהייתה לו נחלה בתחילת הספירה, לא יהיה מספר גדול יותר של נחלות בסוף תהליך היובל, ולפיכך, מספר הנחלות הכולל שמחזיקים בעלי הנחלות אינו גדל מיובל

31

אלגוריתם היובל – תהליך הדרגתי לחלוקת נחלות בימינו

אחד ליובל הבא. ולכן, בשני האלגוריתמים, מספר חסרי הנחלות אינו גדל. הדמיות ממוחשבות שביצעתי הראו, שקצב הירידה במספר חסרי הנחלה הוא מעט אטי יותר באלגוריתם ההפוך, אולם ההבדל אינו מובהק סטטיסטית.

אולם, בניגוד לאלגוריתם המקורי, האלגוריתם ההפוך אינו משמר מעגלים. לדוגמה, בגרף הנחלות הבא:

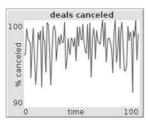


באלגוריתם המקורי, החזרת הנחלות תתחיל מיוסף, שכן הוא היחיד שאין לו נחלה. הוא יחזיר לעצמו את הנחלה שמכר לבנימין, ואז לכל אחד תהיה נחלה, והתהליך יסתיים — העסקאות במעגל אפרים-מנשה-בנימין לא יתבטלו.

אולם באלגוריתם ההפוך, החזרת הנחלות תתחיל מבנימין, שכן הוא מחזיק כעת בשתי נחלות. ייתכן שהוא יבחר להחזיר את הנחלה שקנה מאפרים. לאחר מכן, לאפרים יהיו שתי נחלות, והוא יצטרך להחזיר את הנחלה שקנה ממנשה, ואז למנשה יהיו שתי נחלות, והוא יצטרך להחזיר את הנחלה שקנה מבנימין. ואז שוב לבנימין יהיו שתי נחלות, והוא יצטרך להחזיר את הנחלה שקנה מיוסף. כך כל העסקאות יתבטלו.

ואכן, הדמיות שביצעתי מראות, שבאלגוריתם ההפוך, ההסתברות להחזיק בנחלה היא קטנה וותר: במקום 3.81% (עבור 1000 נחלות, כאשר הסתברות מכירה ביובל היא 3.81%) מקבלים $^{24}.0.1\%$

90% ניתן בבירור לראות את ההבדל בגרפים, כאשר מסתכלים מקרוב על התחום בין 90% ל-100%:





deals canceled

© Copyright Bar-Ilan University Press 2013. All rights reserved. This PDF is for the author's use and distribution only.

החזרת החזרת מכל מי שאין לו יותר מנחלה אחת החזרת לכל מי שאין לו נחלה החזרת מכל מי שיש לו יותר p=0.1

אם כן, באלגוריתם המקורי קל יותר לאזרחים להחליף נחלות.

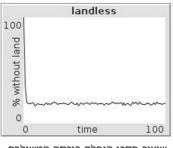
.0.17%: 0.9 ממוצע של 1000 ניסויים. רדיוס רווח סמך ברמת בטחון 1000 24

ניתן להציע גרסה משולבת, שבה הנחלה חוזרת לבעליה, רק אם לבעלים המקורי אין נחלות, וגם לבעלים הנוכחי יש יותר מנחלה אחת. גרסה זו משמרת מעגלים, אולם בגרסה זו ייתכן שמספר חסרי הנחלה יגדל. לדוגמה, בגרף הנחלות הבא:

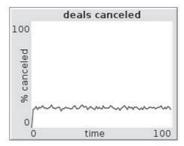


לאשר אין נחלות, אולם הוא לא יוכל לקבל בחזרה את הנחלה שמכר לגד, כי גד מחזיק כעת רק נחלה אחת. דן מחזיק שתי נחלות, אולם הוא לא יצטרך להחזיר לגד את הנחלה שקנה ממנו, כי לגד יש נחלה אחת. לכן, אף עסקה לא תתבטל, ומספר חסרי הנחלה יגדל מ-0 ל-1 – אשר יישאר בלי נחלה.

הגרפים הבאים מראים את התנהגות הכלכלה תחת הגרסה המשולבת, לאורך זמן. כל יובל הוא יחידת-זמן אחת:



שיעור חסרי הנחלה בגרסה שיעור $p=0.1,\,q=0.99$



שיעור החזרת נחלות בגרסה המשולבת $p = 0.1, \, q = 0.99$

כצפוי, ביובלים הראשונים מספר חסרי הנחלה קטן, אולם הוא אינו שואף ל-0 אלא מתייצב על כ-18%. גם מספר ביטול העסקאות הוא נמוך יחסית - כ-18%. גם מספר ביטול העסקאות הוא נמוך יחסית

מכל הגרסאות שבדקתי, רק האלגוריתם המקורי מקיים את שתי התכונות יחד — חסם עליון על מספר חסרי הנחלה, ושימור מעגלים.

ז. הגדלת מספר הנחלות

עד עתה הנחנו, שמספר הנחלות שווה למספר האזרחים. זוהי הנחה הגיונית, והראינו שבטווח הארוך היא מאפשרת להגיע למצב שוויוני, שבו לכל אזרח ישנה נחלה אחת בדיוק.

אולם אלגוריתם היובל יכול לעבוד בדיוק באותה מידה, גם כאשר מספר הנחלות גדול ממספר האזרחים. למעשה, מבחינות מסוימות, הביצועים הרבה יותר טובים כאשר מספר הנחלות גדול יותר!

ראשית נבדוק את הירידה במספר חסרי הנחלות לאורך זמן. כפי שהראינו בנספח א, אם מספר הנחלות הוא ומספר האזרחים הוא N, וכל נחלה נמכרת בין יובל ליובל לקונה אקראי, אז מספר חסרי הנחלה יורד כד:

$$M_{t+1} \approx \frac{e^{1-L/N}M_t}{1 + \left(\frac{1}{e-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2 - 2e^{1-L/N}(N - M_t)/N}}\right)^{-1}}$$

כאשר L>N היחס $e^{-L/N}$ קטן מ-1, ומכאן שמספר חסרי-הנחלה קטן בקצב **מעריכי** , L>N שהוא, אסימפטוטית, הרבה יותר מהיר מקצב הירידה כאשר מספר הנחלות שווה למספר האזרחים. הטבלה להלן מראה את מספר חסרי הנחלה עבור מספר קבוע של אזרחים (n=1000) ועבור ערכים שונים של מספר הנחלות L, על פי הנוסחה התיאורטית. כאשר מספר הנחלות גדול כפליים ממספר האזרחים, מספר חסרי הנחלה בכל יובל קטן בערך פי 7 מביובל הקודם, והמשק מגיע תוך 4 יובלים למצב שבו פחות מחצי אלפית מהאזרחים הם חסרי נחלה.

מספר היובל	מספר חסרי הנחלות						
	L=1000	L=1100	L=1500	L=2000			
0	999	999	999	999			
1	368	333	223	135			
2	188	150	62	21			
3	113	78	18	3			
4	75	44	5	0			

שנית, נבדוק את השפעת ההסתברות למכירת נחלה בין יובל ליובל (q) על הירידה במספר חסרי הנחלה. בחלק ד הצגנו ירידה זו כאשר מספר הנחלות שווה למספר האזרחים (1000); להלן טבלה מקבילה כאשר מספר הנחלות הוא 25:2000

מספר היובל					
	q=1	q=0.8	q=0.6	q=0.4	q=0.2
0	999	999	999	999	999
4	0	3	12	54	243
8	0	0	0	3	64
12	0	0	0	0	17
16	0	0	0	0	4

25 – המספרים חושבו ע"י הדמיה ממוחשבת. כל תא הוא ממוצע של 10 הרצות, מעוגל לשלם הקרוב ביותר. סטיית התקן ברוב התאים קטנה מ-10%.

כאשר יש 2000 נחלות, גם כאשר ההסתברות שנחלה תימכר ב-50 שנה היא רק 40%, עדיין מגיעים תוך 4 יובלים למצב שבו רק ל-5.4% מהאזרחים אין נחלה. אם כך, הגדלת מספר מגיעים תוך 4 יובלים למצב שבו רק ל-האיץ את ההתכנסות — במקום לגבות מסים מבעלי נחלות על-מנת לעודר אותם למכור, כפי שהצענו בחלק ד.

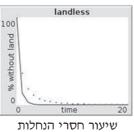
שלישית, נבדוק את מספר הנחלות שנשארות ביד בעליהן החדשים. כאשר מספר הנחלות גדול ממספר האזרחים, נחלה שעוברת מיד ליד עשויה להישאר בידי בעליה החדשים, גם אם העסקה אינה חלק ממעגל בגרף הנחלות – אם למוכר ישנן עוד נחלות. לפי נספח א, מספר הנחלות שנמכרות ואינן מוחזרות הוא:

$$Y_{t} \approx L\left(\frac{M_{t+1}}{M_{t}}\right)(N-M_{t}) \geq L-e^{1-L/N}N$$

מכאן, גם כאשר לכל אזרח ישנה נחלה אחת לפחות, מספר העסקאות שמתקיימות לאחר היובל אינו שואף לאפס אלא מתכנס למספר קבוע גדול מאפס — ומכאן, שבמצב כזה יהיה לאזרחים הרבה יותר קל להחליף נחלות.

אם כך, כשמגדילים את מספר הנחלות, המשק מגיע מהר יותר למצב שבו לכל אזרח יש נחלה, וכן חופש הבחירה של האזרחים גדול יותר. אולם לחופש יש מחיר — חלוקת הנחלות הסופית כבר אינה שוויונית! לכל אזרח תהיה נחלה אחת לפחות — אבל יהיו אזרחים שיהיו להם הרבה נחלות.

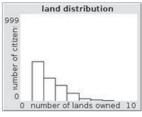
, הנחלות, והתפלגות הנחלות, שיעור החזרת שיעור חסרי את שיעור מראים הגרפים הגרפים הגרפים הגרפים את שיעור חסרי אדרחים ו- L=2000 נחלות, וההסתברות למכירת אזרחים ו- L=2000 בישר יש



שיעור חטרי הנחלות; (קו=2000 נחלות; נקודות=1000 נחלות)



שיעור החזרת נחלות (2000 נחלות)



התפלגות הבעלות על נחלות (2000 נחלות)

הנתונים מציבים בפנינו התלבטות בין שני ערכים:

- → האם להדגיש את השאיפה לשוויון לכל אזרח יש נחלה אחת בדיוק גם אם ייקח
 זמן רב להגיע למצב זה?
- ◆ האם להדגיש את ערך החופש "הדרור" לכל אזרח יש נחלה אחת לפחות גם אם כתוצאה מכך חלוקת הנחלות הסופית לא תהיה שוויונית?
 - ואולי ישנה דרך שלישית, המאפשרת לקיים את שני הערכים יחד?

ח. עושר ועוני

עד עתה, הנחנו שכאשר נחלה נמכרת, הקונה נבחר באקראי, כלומר שלכל אזרח ישנו סיכוי שווה לרכוש נחלה. הנחה זו כמובן אינה מציאותית, שכן במציאות ישנם פערים כלכליים, ולעשירים קל יותר לרכוש נחלה מאשר לעניים. מסתבר שבמצב זה, קצב הירידה במספר חסרי הנחלות יהיה אטי יותר. האם לאלגוריתם היובל תהיה השפעה חיובית גם במצב זה? האם אלגוריתם היובל יסייע להקטין את הפערים הכלכליים?

כדי לבדוק את ההשפעה של הפערים הכלכליים על חלוקת הנחלות, נשתמש במודל פשוט של חלוקת הכנסות.²⁶

המודל מניח, שכל אדם מקבל הכנסות מארבעה גורמים:

© Copyright Bar-Ilan University Press 2013. All rights reserved. This PDF is for the author's use and distribution only.

- עבודה: אנו מניחים ששכר העבודה הוא משתנה אקראי עם התפלגות לוג-נורמאלית. "ב ניתן לאפיין התפלגות זו ע"י שני ערכים השכר הממוצע והשכר החציוני: היחס בין השכר החציוני לשכר הממוצע מבטא את רמת השוויון בהכנסות ככל שהשכר החציוני גבוה יותר, וקרוב יותר לשכר הממוצע, כך השוויון גדול יותר.
- כמו כן, אנו מניחים ששכר העבודה של אזרח עשוי להשתנות מתקופה לתקופה, בהסתברות מסוימת המבטאת את מידת הניידות הכלכלית.²⁸
 - 2. חקלאות: אנו מניחים שכל נחלה נותנת לבעליה הכנסה קבועה בכל תקופה.
- 3. השכרה: אנו מניחים שכל נחלה נותנת לבעליה, בנוסף להכנסה מחקלאות, עוד הכנסה התלויה במיקום שלה נחלות במרכז המפה נותנות הכנסה גבוהה יותר מהכנסות בצדדי המפה ("פריפריה"). בסעיף זה ניתן להכליל גם את פערי השכר בין שכירים במרכז לשכירים בפריפריה.
- 4. **רווחה**: הממשלה עשויה להחליט לתת קצבה קבועה לכל אזרח, על-מנת לצמצם פערים.²⁹
 - http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/community/land-income :נמצא ברשת: 26
- 2 מחקרים שנעשו לאחרונה מראים, שהתפלגות זו מאפיינת את הכנסתם של 97%–99% מהאזרחים במדינות מערביות. ההכנסות של המאיונים העליונים מתפלגות באופן שונה, כי הרכב ההכנסות הוא שונה, וכולל מרכיב גדול יותר של רווחי הון. ראו:
- F. Clementi and M. Gallegati, "Pareto's law of income distribution: Evidence for Germany, the United Kingdom, and the United States," EconWPA, 2005.
- 28 כלומר, בכל תקופה, עבור כל אזרח, מטילים מטבע בהסתברות p. אם ההטלה מוצלחת, מגרילים עבורו הכנסה חדשה, מתוך ההתפלגות הלוג-נורמאלית. תהליך זה ממדל את התלות בין ההכנסות בשתי תקופות עוקבות באופן גס למדי: או שההכנסה בתקופה הנוכחית שווה להכנסה בתקופה הקודמת, או שהיא נבחרת באופן בלתי-תלוי בה. היה אפשר למדל את התלות באופן מדויק יותר, אולי כתהליך מרקובי, אולם זה חורג מהיקפו של המאמר הנוכחי.

ניתן לממן קצבה כזו ע"י הטלת מס על קרקע — ראו למעלה הערה 20. במקרה זה, יש להבין את ערכי ההכנסה מחקלאות ומהשכרה כערכים נטו.

אנו מניחים כי ההסתברות לקניית נחלה עומדת ביחס ישר לכמות הכסף הכוללת של האזרח: אם לאזרח א יש פי 2 כסף מלאזרח ב, אז ההסתברות שאזרח א יקנה נחלה כלשהי העומדת למכירה תהיה גדולה פי 2 מההסתברות שאזרח ב יקנה אותה.

במסגרת זו לא נבצע מחקר מקיף על ההשפעה של כל פרמטר, אלא נביא מספר דוגמאות לצירופי פרמטרים, ונבדוק, לגבי כל אחד מהם, עד כמה משפיע אלגוריתם היובל על מספר חסרי הנחלה. הטבלה הבאה מתארת את מספר חסרי הנחלה, מתוך 1000 אזרחים, לאחר 6 יובלים, עבור צירופים שונים של פרמטרים:00

הערה	סטית תקן) עם יובל	חסרי נחלה (ללא יובל	רווחה	30:זכנסה השכרה	ו חקלאות	ניידות	שכר: ²⁹ שוויון	ממוצע	הסתב' מכירה ביובל	מספר נחלות
בשלוש השורות הראשונות,	(5) 38	(13) 366	0	0	0	0	1	10	1	1000
לכל האזרחים יש הכנסה שווה,	(10) 209	(11) 381	0	0	0	0	1	10	0.4	1000
והדבר שקול למודל ללא הכנסה.	(3) 16	(8) 153	0	0	0	0	1	10	0.4	2000
השפעת אי-השוויון בשכר	(6) 136	(15) 478	0	0	0	0	0.7	10	1	1000
השפעת הניידות בשכר	(9) 128	(13) 459	0	0	0	0.1	0.7	10	1	1000
ניידות שכר מרבית	(5) 70	(9) 397	0	0	0	1	0.7	10	1	1000
השפעת הכנסה מהשכרה בלבד	(6) 185	(12) 500	0	0	0	0.1	0.7	10	1	1000
השפעת הכנסה מחקלאות בלבד	(10) 181	(15) 491	0	0	5	0.1	0.7	10	1	1000
השפעת הכנסה מחקלאות	(8) 245	(10) 536	0	5	5	0.1	0.7	10	1	1000
והשכרה										
הכנסה מחקלאות והשכרה,	(9) 179	(13) 494	0	5	5	1	0.7	10	1	1000
וניידות שכר מרבית										
הכפלת מספר הנחלות ל-2000	(8) 138	(13) 417	0	5	5	0.1	0.7	10	1	2000
1000 נחלות; הוספת קצבה	(6) 192	(9) 500	2	5	5	0.1	0.7	10	1	1000
קבועה לכל אזרח										
הכפלת מספר הנחלות וגם קצבה	(7) 78	(14) 365	2	5	5	0.1	0.7	10	1	2000
קבועה לכל אזרח										
הסתברות מכירה קטנה מ-1	(11) 115	(13) 388	2	5	5	0.1	0.7	10	0.8	2000
הסתברות מכירה נמוכה יותר	(15) 289	(20) 486	2	5	5	0.1	0.7	10	0.4	2000
הגדלת הקצבה לכל אזרח	(8) 204	(12) 399	6	5	5	0.1	0.7	10	0.4	2000

ישנם הבדלים גדולים במספר חסרי הנחלה עבור כל צירוף של פרמטרים, אבל בכל המקרים, אלגוריתם היובל מקטין באופן משמעותי את מספר חסרי הנחלה.

- . מספר של 10 אחד מהתאים של מספר חסרי-הנחלה הוא ממוצע של 10 הרצות.
- 31 ה״שוויון״ במודל שלנו מוגדר כיחס בין השכר החציוני לבין השכר הממוצע. בישראל, לפי נתוני הלמ״ס לשנת 2010, יחס זה הוא כ-0.72. ה״ניידות״ היא ההסתברות שהכנסתו של אזרח ביובל הבא תהיה שונה מביובל הנוכחי.
- 12 הערך של ״הכנסה מהשכרה״ בטבלה הוא הממוצע ע״פ כל הנחלות. ההכנסה מהשכרה לכל נחלה חושבה ע״י הנוסחה:
 - A M $(1-0.5 (x / xmax)^2 0.5 (y / ymax)^2)$
- xmax הוא הממוצע; A הוא קבוע נירמול; x ו-y הן א y-ו א קבוע בירמולה, השוות ל-0 במרכז; y-ו-y-ו-y-ו-y-ו-שלטים המוחלטים של ערכי הקואורדינטות בשולי המפה (ההכנסה מהשכרה בפינות היא בדיוק y-10.

ט. סיכום ומחקר עתידי

התרומה של מאמר זה היא בשלושה נושאים:

© Copyright Bar-Ilan University Press 2013. All rights reserved. This PDF is for the author's use and distribution only.

- אלגוריתם היובל, המאפשר ליישם את מצוות חלוקת הנחלות והיובל במציאות של ימינו, בהדרגה, ללא שינויים מהפכניים בבעלות על הקרקעות, וללא גוף מרכזי שכל הקרקעות יהיו בבעלותו.
- 2. גרף הנחלות, המאפשר לנתח בצורה פורמאלית את האלגוריתם המוצע ואלגוריתמים נוספים בתחום זה.
- 3. מודל להדמיית מסחר בנחלות, המאפשר לנתח בצורה סטטיסטית את האלגוריתם המוצע ואלגוריתמים נוספים.

בכל אחד מהשלושה, ניתן להציע נושאים רבים למחקר עתידי:

- אלגוריתם היובל: ראינו שקצב ההתכנסות של האלגוריתם תלוי משמעותית בהסתברות המכירה של נחלות בין יובל ליובל. האם ניתן להציע אלגוריתם, שיעודר אנשים למכור נחלות? האם ניתן להציע אלגוריתם, שהתלות שלו בהסתברות המכירה תהיה קטנה יותר?
- גרף הנחלות: התיאור של המסחר בנחלות כגרף מאפשר לחקור אותו בכלים מתורת הגרפים האקראיים. מחקר אופייני בתחום זה כולל שני שלבים: בשלב הראשון בודקים את התכונות הסטטיסטיות (כגון: דרגה ממוצעת, מרחק ממוצע בין צמתים, ועוד) של גרפים שונים שמתגלים במציאות; בשלב השני מנסים להציג תהליך פשוט של יצירת גרף אקראי (כגון: יצירת קשתות באקראי על פי התפלגות אקראית מסוימת), היוצר גרפים בעלי תכונות סטטיסטיות דומות. תהליך זה עשוי ללמד אותנו על האופן שבו נוצרת התופעה במציאות. במקרה שלנו, אפשר לחקור גרפים המתארים עסקאות של מכירת קרקעות, ולבדוק עד כמה התכונות הסטטיסטיות של גרפים אלה דומות לתכונות של הגרפים האקראיים הנוצרים ע"י המודלים שתוארו במאמר זה. מחקר זה יאפשר לנו לבנות מודלים מדויקים יותר, וכן לכייל את הפרמטרים במודל, כגון, ההסתברות למכירת נחלה.
- במאמר פיתחנו נוסחה לקצב הירידה במספר חסרי הנחלות, וכן להסתברות שאזרח יצליח להחליף נחלה, רק עבור המקרה הפשוט ביותר כאשר כל הנחלות נמכרות בשלב כלשהו במהלך היובל, לאזרח כלשהו שנבחר באקראי. האם ניתן לפתח נוסחה סגורה גם למקרים מורכבים יותר, כגון: הסתברות מכירה קטנה מ-1, או הסתברות קניה שאינה אחידה?
- 3. מודל המסחר בקרקעות: המודל שתואר כאן הוא פשטני מאוד, וישנם גורמים רבים שראוי להתייחס אליהם במחקרים עתידיים:
- העדפות אישיות. במודל שלנו, כל הנחלות שוות וכל האזרחים שווים, אולם במציאות
- 33 סקירה על תהליכי יצירה של גרפים אקראיים ניתן למצוא אצל: Chris Biemann, "Unsupervised and knowledge-free natural language processing in the structure discovery paradigm," Ph.D. dissertation, 2007; chapter 2

בד"ד 28, כסלו תשע"ד

לכל אזרח ישנה העדפה שונה לגבי הנחלה שהוא מעוניין בה. יהיה מעניין לבחון, עד כמה האלגוריתם המוצע מאפשר לכל אזרח לממש את ההעדפות האישיות שלו ולהגיע לנחלה שהוא מעוניין בה.

- ◆ בהקשר זה, מעניין לבחון, האם ישנה אסטרטגיה שכדאי לאזרח לנקוט בה, על-מנת להשיג את הנחלה הטובה ביותר לפי העדפותיו. האם האסטרטגיה הפשוטה, לקנות את הנחלה הטובה ביותר המוצעת למכירה בכל שלב, אכן נותנת את התוצאה הטובה ביותר? במילים אחרות: האם ייתכן שאזרח יפסיד מכך שיקנה נחלה, כי בכך הוא יחסום לעצמו את האפשרות להשיג נחלה אחרת?
- ירושה. כאמור, המודל מניח שלכל אזרח ישנו יורש אחד בדיוק, כך שמספר האזרחים הוא קבוע ושווה בדיוק למספר הנחלות. אולם במציאות ישנם אזרחים שנפטרים ללא יורשים, וישנם אזרחים המורישים את נחלתם לכמה יורשים, וכך נחלות עשויות להתחלק לכמה חלקים. ראוי לבחון, איך ישפיע האלגוריתם המוצע על חלוקת הנחלות במצב זה.
- לויים. במודל שלנו, כל אזרח שיכול לסחור בנחלות, זכאי גם לשמור בבעלותו נחלה אחת בשנת היובל. אולם בזמן המקרא, היו אנשים שלא היו זכאים לנחלה, ועדיין יכלו להשתתף במסחר. לדוגמה, בני שבט לוי, שלא שירתו בצבא, לא קיבלו נחלה (פרט לבתי-מגורים בערי הלויים). מכאן, שבשנת היובל, היה עליהם להחזיר את כל הנחלות שקנו. איך יושפע המודל מנוכחותם של אנשים כאלה, שיכולים להשתתף במסחר אך אינם רשאים להחזיק בנחלות?

י. חתימה

ע"פ חז"ל, שנת היובל הראשונה הייתה השנה ה-64 לכניסתם של בני ישראל לארץ ישראל: שבע שנים היו מכבשין, ושבע שנים היו מחלקין... נמצאו שעושין שמיטה לעשרים ואחד שנים, ויובל לששים וארבע שנים.³⁴

מאמר זה נשלח לראשונה ביום העצמאות ה-64 למדינת ישראל. אני מקווה שהוא יקדם אותנו צעד נוסף לקראת יישומה של מצווה יקרה זו.

.א. סדר עולם, פרק יא.

נספח א – פיתוח נוסחת הקירוב למספר חסרי הנחלה

אנו מניחים שיש N אזרחים, ושהארץ מחולקת ל-L נחלות, כאשר $N \geq L$. כמו כן, נניח שבתחילת הספירה ישנם M אזרחים שאין להם נחלה, ו- N-M אזרחים שיש להם נחלה אחת או יותר. כעת, במשך 50 שנה מתנהל מסחר חופשי בנחלות, שבמהלכו כל נחלה נמכרת בשלב כלשהו, והקונה הוא אזרח הנבחר באקראי. לאחר 50 שנה, מבצעים את אלגוריתם היובל שתואר בסעיפים ב-ג. חלק מהנחלות חוזרות לבעליהן המקורי, וחלק נשארות ביד הקונה. נניח גם, שאם לאזרח כלשהו היו כמה נחלות בתחילת הספירה, והוא מכר את כולן, הנחלה שהוא יחזיר לעצמו בשנת היובל תיבחר באקראי. מה יהיה מספר חסרי הנחלה לאחר סיום האלגוריתם? מסתבר שמספר זה יהיה קטן מ-M, אבל בכמה בדיוק?

לצורך החישוב, נגדיר מספר משתנים אקראיים:

- ע"י אלגוריתם שנספר בידי הקונה (כלומר, שנמכרו ולא הוחזרו ע"י אלגוריתם Y → היובל);
- לקנות האזרח האזרח האזרח בינארי, שערכו 1 אם בינארי משתנה בינארי לכל בינארי לכל משתנה בינארי בינארי לכל אזרח בינארי ו-0 אחרת. את אחת מתוך Y

התוחלת של המשתנה המקרי Yc שווה להסתברות שערכו 1, וניתן לחשב אותה בקירוב אם יודעים את Y, שהרי ההסתברות שהאזרח c לא יקבל נחלה כלשהי היא ההסתברות שמישהו אחר יקבל אותה:

$$E[Y_c | Y] = Pr[Y_c = 1 | Y] \approx 1 - (1 - 1 / N)^Y$$
 (1)

זהו קירוב בלבד - התלות של ההסתברות ב-Y עשויה להיות מורכבת יותר. התלות של בהמשך נראה שהקירוב הזה מוביל אותנו לתוצאות טובות.

כעת נתבונן על Y מזווית אחרת. אם Y נחלות לא הוחזרו ע"י אלגוריתם היובל, אז L-Y נחלות הוחזרו. מכיוון שכל אזרח רשאי להחזיר לעצמו רק נחלה אחת, המשמעות היא ש-L-Y אזרחים ביקשו לקבל נחלה בחזרה. אלה הם בדיוק האזרחים אשר הייתה להם נחלה בהתחלה, ושלא הצליחו לקנות אף נחלה מתוך ה-Y נחלות שלא הוחזרו:

$$L - Y = \sum_{c-had-land-at-beginning} \left(1 - Y_c\right) \tag{2}$$

כעת נשתמש בתחבולה מתימטית — ניקח את התוחלת המותנית של שני הצדדים, כתלות רמשחוה Y

3 לדוגמה, במקרה שבו M=N-1 (כלומר, במצב הראשוני כל הנחלות שייכות לאזרח אחר, (c), יש רק שתי אפשרויות או שהוא מוכר את כל הנחלות שלו לאזרחים אחרים, ומקבל בחזרה נחלה אחת (ובמקרה זה אפשרויות או שהוא מוכר כמה מהנחלות לעצמו (ובמקרה זה Y=N-1 בלומר, מידיעת Y ניתן לדעת בוודאות את $Y_c=1$.

$$E[L-Y \mid Y] = \sum_{c-had-land-at-beginning} (1 - E[Y_c \mid Y])$$
(3)

בד שמאל שווה באופן טריביאלי ל-L-Y, ובצד ימין אפשר להציב את נוסחה (1). מספר האיברים צד שמאל שווה באופן טריביאלי ל-N-M הקרקע שספר בעלי הקרקע.

$$L - Y \approx (N - M)(1 - 1/N)^{\Upsilon}$$
(4)

זוהי משוואה בנעלם אחד Y. לאחר שמוצאים את Y, ניתן לחשב בעזרתו את התוחלת של מספר חסרי הנחלה לאחר תהליך היובל, שהרי אלה הם בדיוק האזרחים שלא הייתה להם נחלה בהתחלה, ושלא הצליחו לקנות אף אחת מאותן Y נחלות שנמכרו ולא הוחזרו:

$$E[M'] = E[M'|Y] = E\left[\sum_{c-had-no-land-at-beginning} (1 - Y_c)|Y\right] = M(1 - 1/N)^Y \approx (L - Y)\frac{M}{(N - M)}$$
 (5)

כדי להקל על הרישום, נסמן ב-R את היחס בין תוחלת מספר חסרי הנחלה לאחר היובל, לבין מספר חסרי הנחלה בתחילת הספירה:

$$R = \frac{E[M']}{M} = \frac{L - Y}{N - M} = (1 - 1/N)^{Y}$$
 (6)

ניתן להיפטר מ-Y ולקבל משוואה שבה רק R נעלם:

$$R = (1 - 1/N)^{(L - R(N - M))}$$
(7)

כדי לפתור משוואה זו נשתמש בפונקצית W של בפונקציה הפונקציה הפונקציה לפתור משוואה זו ל

$$y = we^w$$
 אם ורק אם $w = W(y)$

באופן באופן באופן באופן באוכה: בעזרת משוואות לפתור באופן ניתן בעזרת בעזרת בעזרת בעזרת בעזרת באופן בא

$$x = A^{C} e^{((\ln A)Bx)}$$

$$(-(\ln A)B) x e^{(-(\ln A)Bx)} = (-(\ln A)B) A^{C}$$

$$-(\ln A)Bx = W(-(\ln A)BA^{C})$$

$$x = \frac{W(-(\ln A)BA^{C})}{-(\ln A)B}$$

Math Stack Exchange אני מודה למשתמשים שכינוייהם, J.M. ,nbubis, אני מודה למשתמשים אני Lambert W-function אני אורד://math.stackexchange.com/questions/138496/ על שהציעו להשתמש בפונקציה זו: /approximate-solution-for-an-exponential-equation

נציב את הערכים מתוך (7):

$$R = \frac{W[(N-M)(1-1/N)^{L}\ln(1-1/N)]}{(N-M)\ln(1-1/N)}$$
(8)

 $\left(1-1\left/N\right)^{L}pprox e^{-L/N}$ המספרים להשתמש ניתן ולכן ולכן הרולים, אברולים המספרים אולכן ויתן המספרים אולכן האלים, ולכן האלים, וולכן האלים $\ln (1-1/N) \approx -1/N$

$$R \approx \frac{-NW\left[-(N-M)/e^{LIN}N\right]}{N-M}$$
(9)

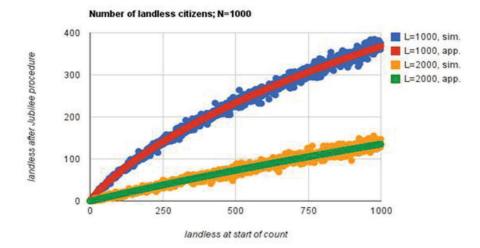
כדי לחשב בקלות את פונקצית W של למברט, ניתן להשתמש בקירוב של סרג' ויניצקי:³⁷

$$W(x) \approx \frac{ex}{1 + \left(\frac{1}{e - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2 + 2ex}}\right)^{-1}}$$

נציב ב-(9) ונצמצם חלק מהגורמים (N, (N-M), e), ונקבל:

$$R \approx \frac{e^{1-L/N}}{1 + \left(\frac{1}{e-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2 - 2e^{1-L/N} (N-M)/N}}\right)^{-1}}$$
 (10)

הדמיות עבור N=1000 אזרחים מראות שזהו קירוב טוב למדי. בגרף הבא, הציר האופקי הוא מספר חסרי הנחלה בתחילת הספירה, והציר האנכי הוא מספר חסרי הנחלה לאחר יובל אחד. ב-2000 עם למשק עם – למשק ב-L=1000 נחלות, והקווים התחתונים – למשק עם L=2000 הקווים העליונים נחלות (כצפוי, כאשר מספר הנחלות גדול, מספר חסרי-הנחלה אחרי היובל הרבה יותר קטן, כאשר תנאי ההתחלה זהים). הנקודות המפוזרות מייצגות תוצאות של הדמיה ממוחשבת (sim), והנקודות הרציפות מייצגות את החישוב התיאורטי על פי נוסחה (10) (app):



מה אומרת לנו נוסחה (10) על השינוי במספר חסרי הנחלה כתלות בזמן? אם נניח שמספר חסרי הנחלה בעזרת הנחלה לאחר כל יובל שווה בקירוב לתוחלת שלו, נוכל לבטא את מספר חסרי הנחלה בעזרת הנוסחה:

$$M_{\rm t+l} \approx \frac{e^{\rm l-}LIN} M_{\rm t}}{1 + \left(\frac{1}{e - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2 - 2e^{\rm l-}LIN}(N - M_{\rm t})/N}}\right)^{-1}}$$

כאשר t הוא הזמן הנמדד ביובלים. כאשר מציבים L=N (מספר הנחלות כמספר האזרחים), מקבלים את הנוסחה שהצגנו בסעיף ג:

$$M_{\text{t+1}} \approx \frac{M_{\text{t}}}{1 + \left(\frac{1}{e - 1} + \frac{\sqrt{N / M_{1} - 1}}{\sqrt{2}}\right)^{-1}}$$

ניתן גם לחשב את מספר הנחלות שנמכרות ואינן מוחזרות, בעזרת נוסחה (5):

$$Y_t \approx L - R_t (N - M_t) = L - \left(\frac{M_{t+1}}{M_t}\right) (N - M_t)$$

 $M_{_t}\!\geq\! M_{_{t+1}}\!>\! 0$: L/N>=1:מכיוון מכיוון

 $M_{_{\infty}} = \lim_{t
ightarrow \infty} M_{_{t}}$ ב: מכאן, שהסדרה מתכנסת לערך כלשהו מכאן

הפונקציה רציפה, ולכן ערך הגבול מקיים:38

$$M_{\infty} \approx \frac{e^{1-L/N} M_{\infty}}{1 + \left(\frac{1}{e-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2 - 2e^{1-L/N} (N - M_{\infty})/N}}\right)^{-1}}$$

. שואף לאפס: חסרי חסרי ומכאן ומכאן אים: $M_{\scriptscriptstyle \infty}=0$ באשר: רק מתקיים הנחלה שואף לאפס:

$$\lim_{t\to\infty} M_t = 0$$

והמערכת מתכנסת למצב שבו לכל אזרח יש נחלה.