

חלוקת הוגנת של עוגות ונהלות

**אראל סגל-הלי
מדעי המחשב, בר אילן**

יצירות של שחר, י"ג בסין ה'תשע"ג

נהלה ו חופש

**וַיַּקְרָא כָה יְהוָה
וְקָרָאתֶם דָרֹר בָּאָרֶץ לְכָל יִשְׂבֵּיתָה
יָזְבֵל הַוָא תִּהְיָה לְכָם
וְשָׁבַתְתֶם אִישׁ אֶל אֲחִיךָתוֹ
אִישׁ אֶל מְשֻׁפְךָתוֹ תִּשְׁבַּבּוּ**

המצווה לבצע חלוקה הוגנת

במדבר כו: **א** ... וַיֹּאמֶר ה' אֶל מֹשֶׁה וְאֶל אלעָזֶר בָּן
אַבְרָהָם הַכְּהוּ לִאמֶר. **ב** שֶׁאוּ אֶת רֹאשׁ כָּל עֵדָת בְּנֵי
יִשְׂרָאֵל מִבּוֹן עֲשָׂרִים שָׁנָה וּמֵעָלָה לְבֵית אַבְתָּם כָּל
וְצִא צָבָא בְּיִשְׂרָאֵל...

ג לְאֵלָה תִּתְחַלֵּק הָאָרֶץ בְּנִנְחָלָה בִּמְסֻפֶּר שָׁמוֹת. **ה**
לִרְבּוֹת תִּרְבֹּה נִנְחָלָתוֹ וְלִמְעֵט תִּמְעִיט נִנְחָלָתוֹ אִישׁ לִפְיֵי
פְּקָדָיו יִתְּחַלֵּת. **וּבָה** אָרֶבֶגֶתֶל יִתְחַלֵּק אֶת הָאָרֶץ
לְשָׁמוֹת מִטוֹת אַבְתָּם יִנְחָלוּ. **וּבָה** עַל פִּי הַגּוֹרֵל יִתְחַלֵּק
נִנְחָלָתוֹ בֵּין רַב לִמְעֵט.

הבקשה החריגתית

במדבר לב: **א** וְמִקְנָה רַב קֵיה לְבָנֵי רֱאוּבֵן וְלְבָנֵי גָּד עַצּוֹם
מִאֶד ... **ב** וַיֹּאמֶר אָמָרָה אָמָרָה מִצְאָנוֹ חַנּוּ בְּעִינֵיכֶם, יִתְנוּ אֶת הָאָרֶץ
בָּזָאת לְעַבְדֵיכֶם לְאֲחֵיכֶם; אֲלֹת פְּעַבְרָנוּ אֶת פִּירְדֵן.

ג וַיֹּאמֶר מֹשֶׁה לְבָנֵי גָּד וְלְבָנֵי רֱאוּבֵן: **הָאֲחִיכֶם יִבָּאוּ**
לִמְלחָמָה וְאַתֶּם תִּשְׁבֹו פְּהִ?! ... **ט** וַיֹּאמֶר אֱלֹהִים וַיֹּאמֶר אֱלֹהִים...
וְאַנְחָנוּ נִנְחַלֵץ חָשִׁים לִפְנֵי בָנֵי יִשְׂרָאֵל עד אֲשֶׁר אָמַת בְּבִיאָנוּ
אֶל מָקוּםם... **כ** וַיֹּאמֶר אֱלֹהִים מֹשֶׁה: אָמַת תִּعְשׂוּ אֶת
פְּذַבְרָךְ הָזֶה, ... וְיִתְהַגֵּד אֶת הָאָרֶץ בָּזָאת לְכֶם לְאֲחֵיכֶם לִפְנֵי הָ

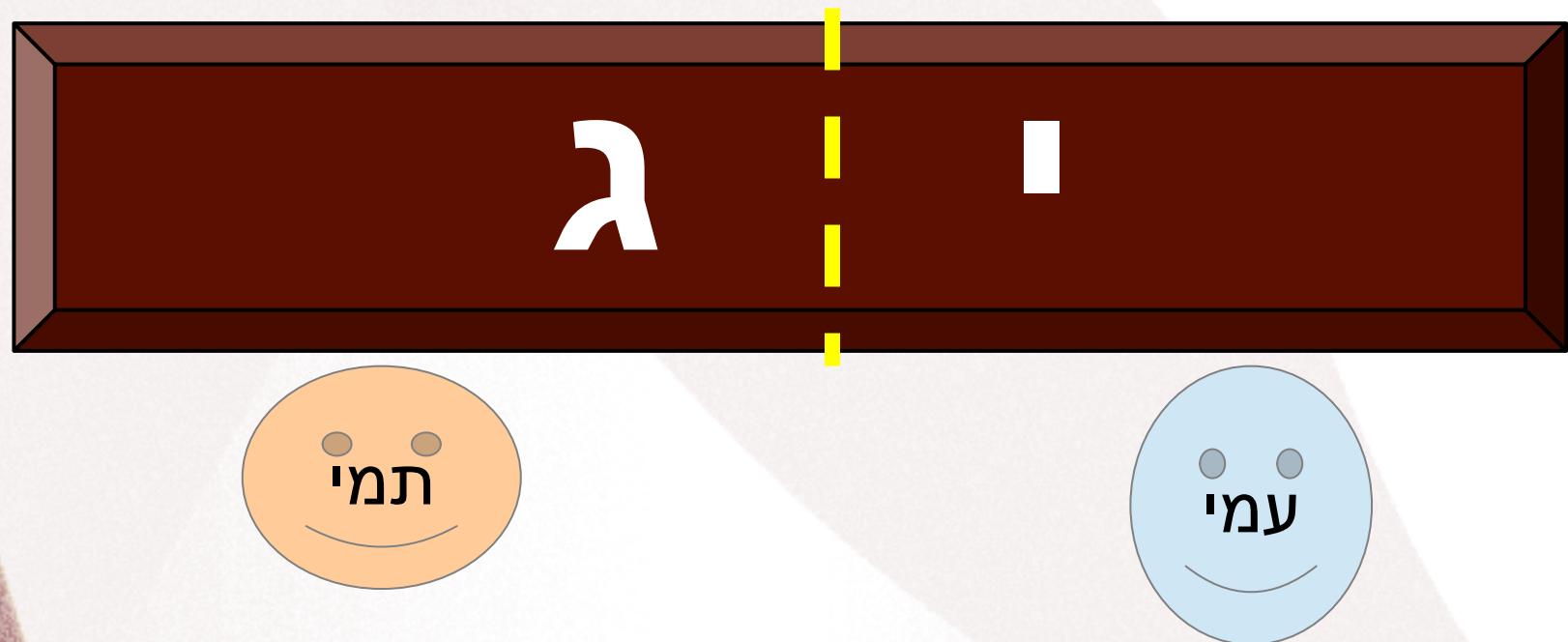
הביצוע בפועל

יושע יח: **ב וַיּَוֹתֶרֶת בְּנֵי יִשְׂרָאֵל אֲשֶׁר לَا חָלַקְוּ אֶת נְחַלְתָּם שְׁבֻעָה שָׁבָטִים.**

ג וַיֹּאמֶר יְהוָה שׁוּא אֶל בְּנֵי יִשְׂרָאֵל: עַד אֲנָה אַתֶּם מִתְּרָפִים לְבוֹא לְרֹשֶׁת אֶת הָאָרֶץ אֲשֶׁר נָתַן לְכֶם ה' אֱלֹהִי אֲבֹתֵיכֶם? בָּבוֹ לְכֶם שֶׁלֶשׁ אֲנָשִׁים לְשָׁבֵט וְאֲשֶׁלֶחֶם וַיָּקְמוּ וַיַּתְהַלְכוּ בָּאָרֶץ וַיַּכְתְּבוּ אֹתָה לִפְיֵי נְחַלְתָּם וַיָּבָאוּ אֶלְיִ. בָּ וַיַּתְחַלְקֻ אֹתָה לְשְׁבֻעָה חָלֻקִים, יְהוּדָה יַעֲמֹד עַל גְּבוּלוֹ מִנְגָב וּבֵית יוֹסֵף יַעֲמֹד עַל גְּבוּלוֹ מִצְפָּן. וְאַתֶּם תַּכְתְּבוּ אֶת הָאָרֶץ שְׁבֻעָה חָלֻקִים וְבָאַתֶּם אֶלְיִ הִנֵּה, וַיָּרִיתִי לְכֶם גּוֹרֵל פָּה לִפְנֵי ה' אֱלֹהֵינוּ.

חלוקת הוגנת של עוגות

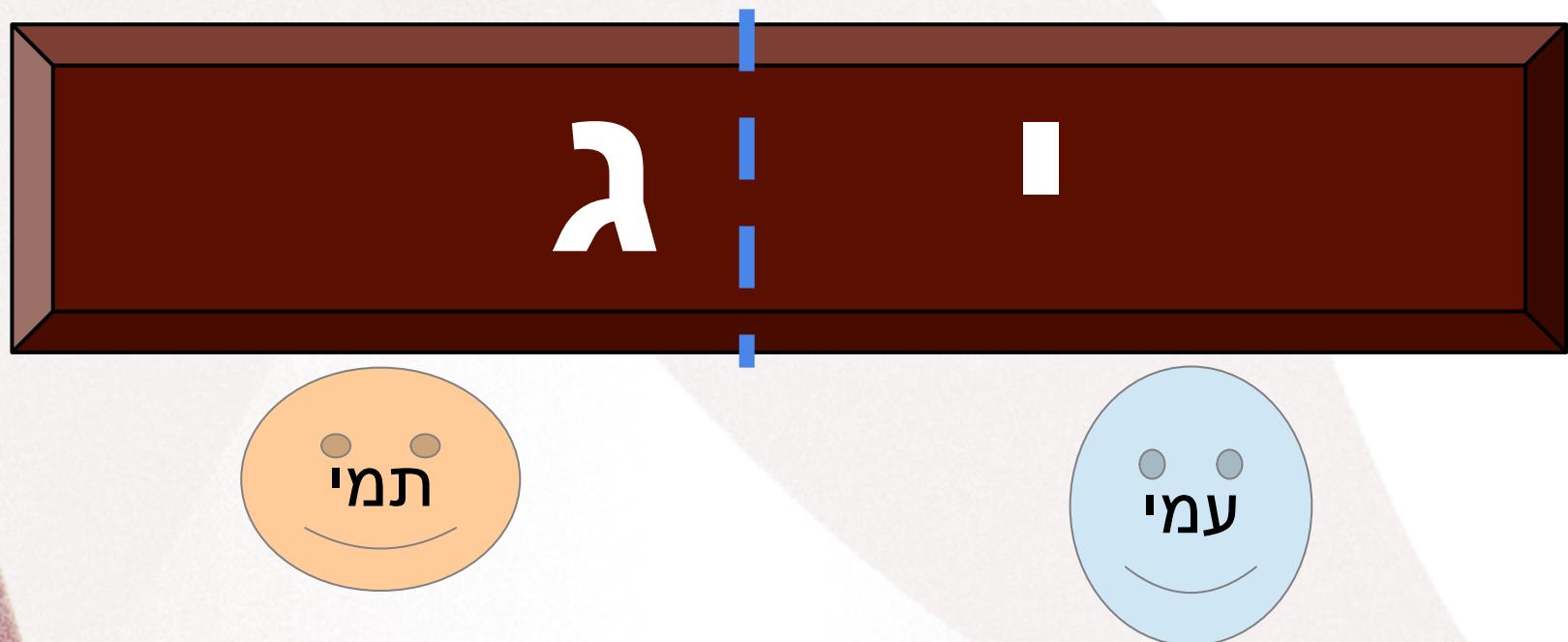
אםא הכינה עוגת שוקולד עם קצפת לכבוד י"ג
בסיון. האם תצליח לחתור את העוגה לשני
חzáים שווים?



היא יכולה לחתור בדיק באמצע, אבל מה אם יתרור
ששניהם רוצים את החלק עם ה"ג"?

תהליך "אחד חותר, שני בוחר"

כדי למנוע מריבות, אמא מבקשת
מעמי לחלק את העוגה, ומתמי
לבחור את אחד משני החלקים:



לכל ילד יש **אפשרות** להבטיח לעצמו לפחות חצי
מהעוגה, בלי תלות במה שיעשה הילד השני!

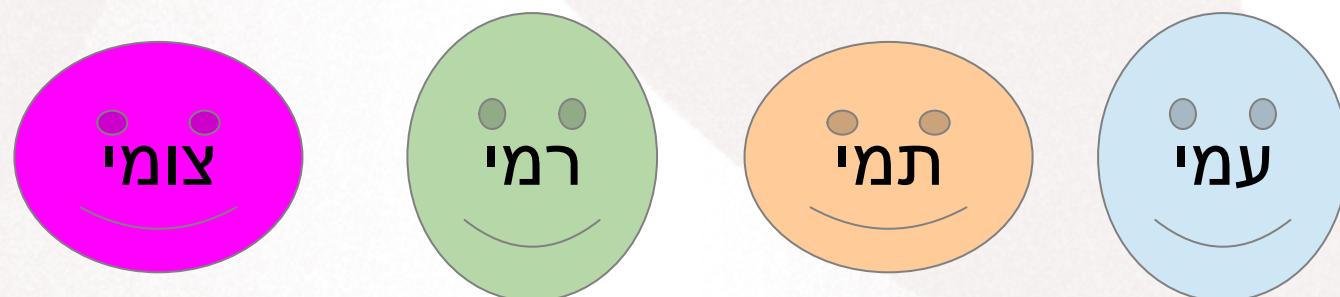
תהליך "אחד חותר, שני בוחר" בתנ"ר

בראשית יד: וַיֹּאמֶר אֶבְרָם אֶל לֹוט: אֶל נֵא תָּהִי
מִרְיָבָה בֵּין וּבֵין רָעִי וּבֵין רָעִיךְ כִּי אֲנָשִׁים אֲחִים
אֲנוּחָנוּ. ט הַלֹּא כִּל הָאָרֶץ לִפְנֵיכֶךָ, הַפְּרֹד נֵא מַעַלְיוֹ אֶם
הַשְׂמָאל וְאַימָּנה, וְאֶם הַיְמָן וְאַשְׁמָאִילָה.



ומה עם משפחות ברוכות ילדים?

שני ילדים חדשים הצטרפו למשפחה,
ושוב הגיע י"ג בסיכון:



איך נחלק את העוגה עכשו?

המתמטיקאים נכנסים לתמונה

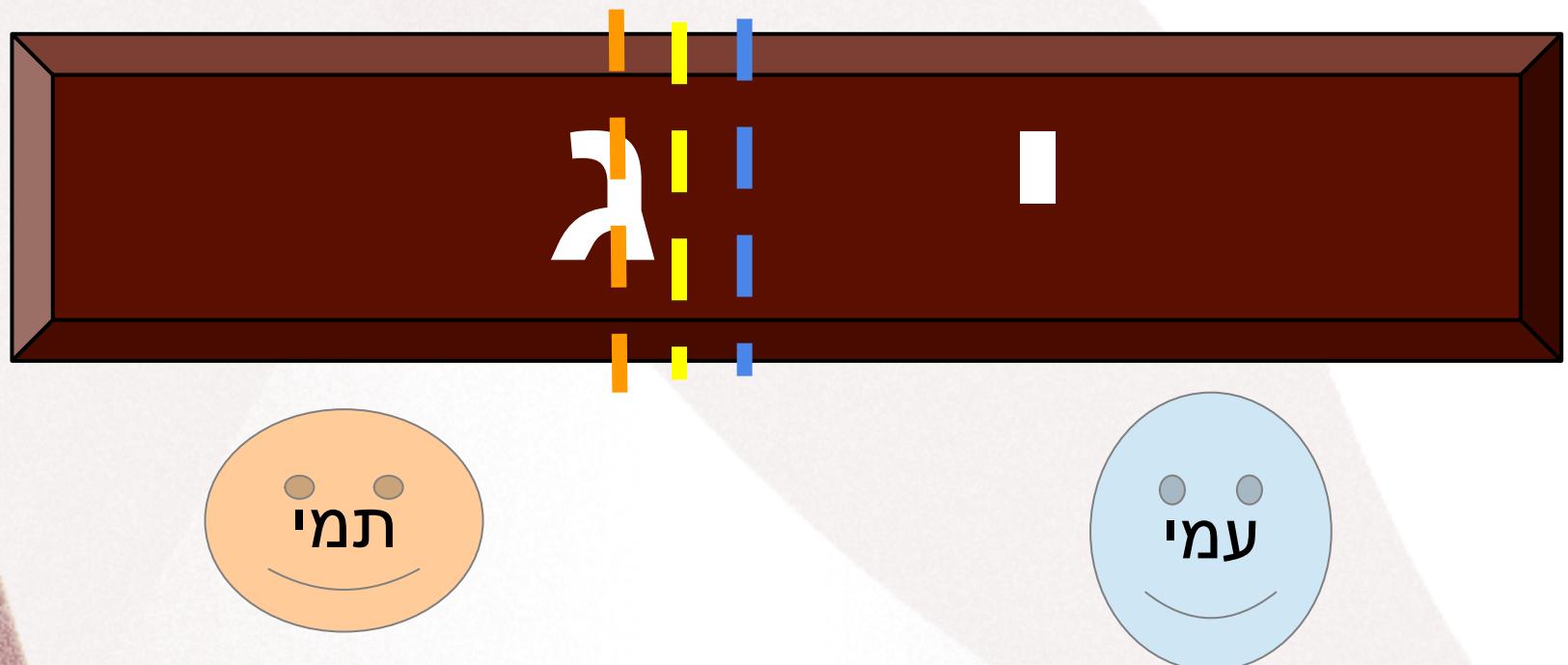


- העיסוק המודרני בנושא חלוקה הוגנת התחיל מהמתמטיקאי היהודי-פולני הוגו שטיינהואס.
- שטיינהואס שאל את תלמידיו, איך אפשר לחלק עוגה בצורה הוגנת למספר ילדים של ילדים?
- פתרון אחד מתואר במאמר של שטיינהואס משנת ה'תש"ח (1948). בהרצאה זו נתאר פתרון יעל יותר.
- אבל קודם נחזור לשני הילדים הראשונים -

תהליך החציה

מה קורה אם ילדים רבים על השאלה "מי יחתור"?

- ניתן להציג תהליך סימטרי:
 - * כל ילד יסמן קווים באמצע לפ' דעתו;
 - * אמא תחתור בין שני הקווים, ותיתן לכל ילד יותר מחצי.



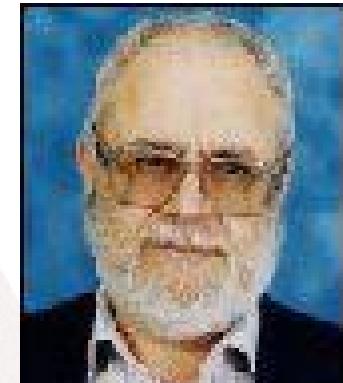
שאלה: מדוע כדאי לכל ילד לסמך את נקודת
האמצע לפ' דעתו?

תהליך החציה ל-ח' ילדים

הומצא בשנת ה'תשמ"ד (1984)
ע"י שני פרופסורים מהטכניון:



עזריה פז
יבדל"א

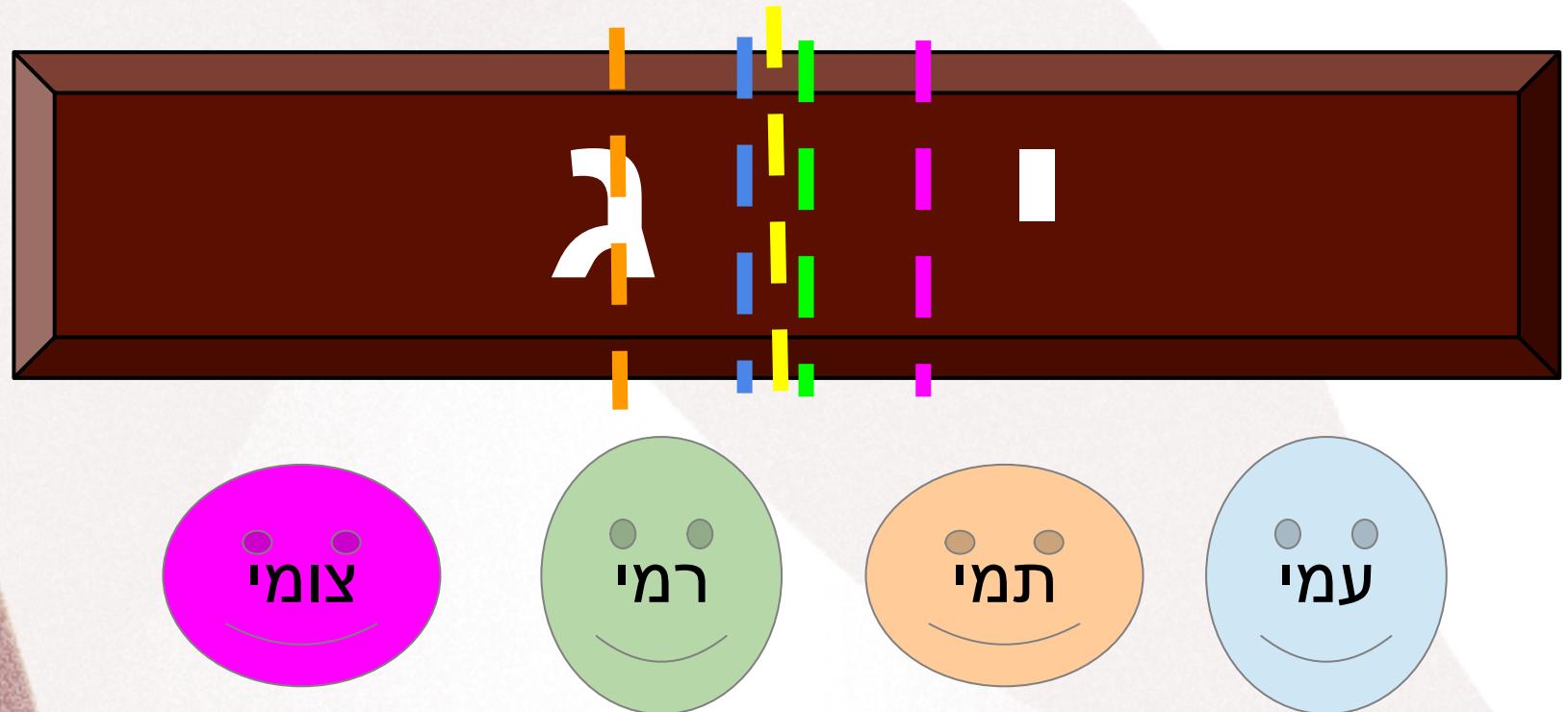


שמעון אבון
ז"ל

1. כל ילד מסמן קוו באמצע העוגה לפי דעתו;
2. אמא חותכת את העוגה **בחציון** הקווים;
3. הילדים מתחלקים לשתי קבוצות שוות;
4. כל קבוצה מחלוקת יתר-מחצית העוגה;

תהליך ח齐ה ל-4 ילדים

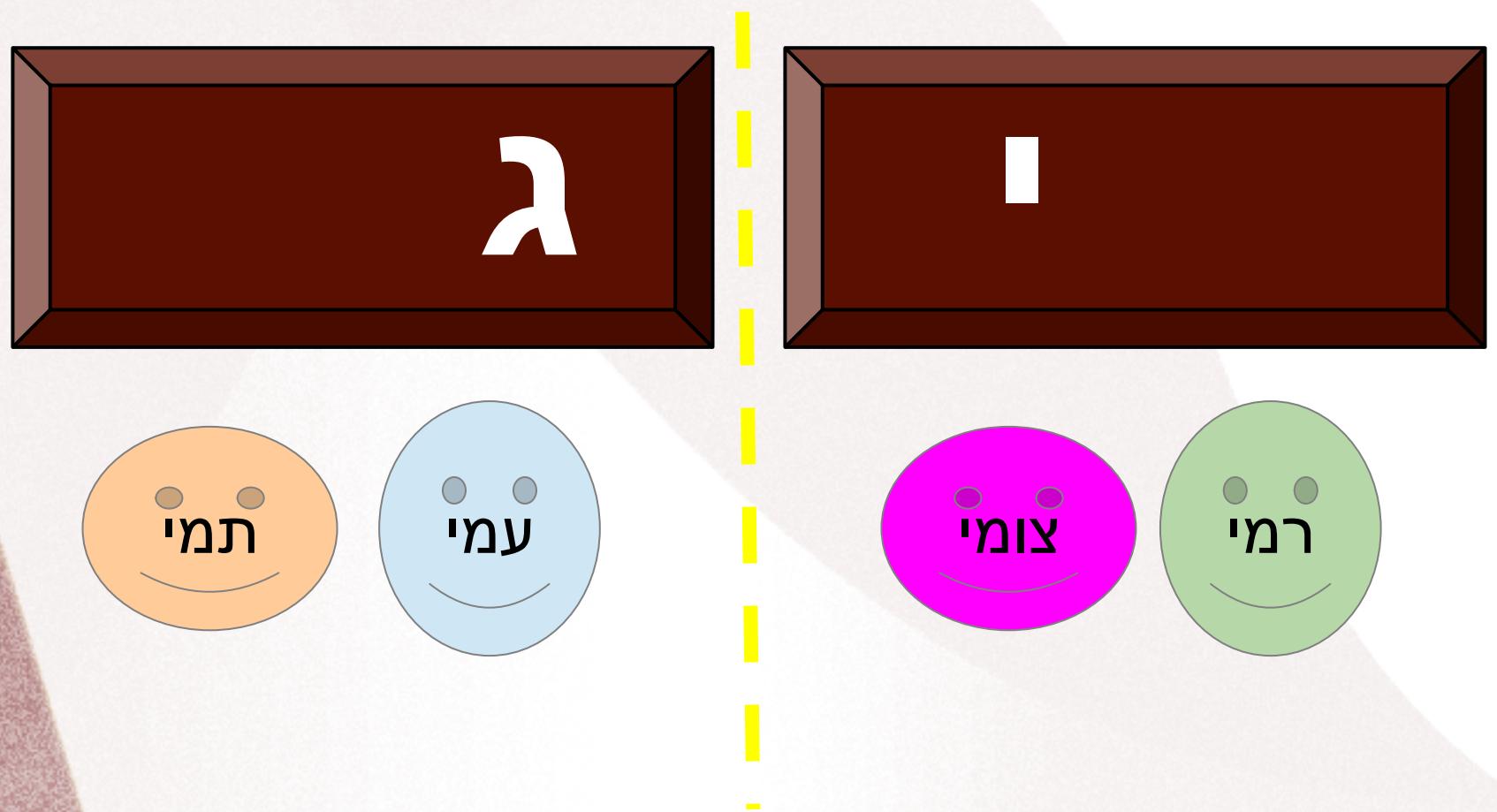
1. כל ילד מסמן קו באמצע העוגה לפי דעתו:
2. אמא חותכת את העוגה ביחסין הקווים;



תהליך ח齐ה ל-4 ילדים - המשך

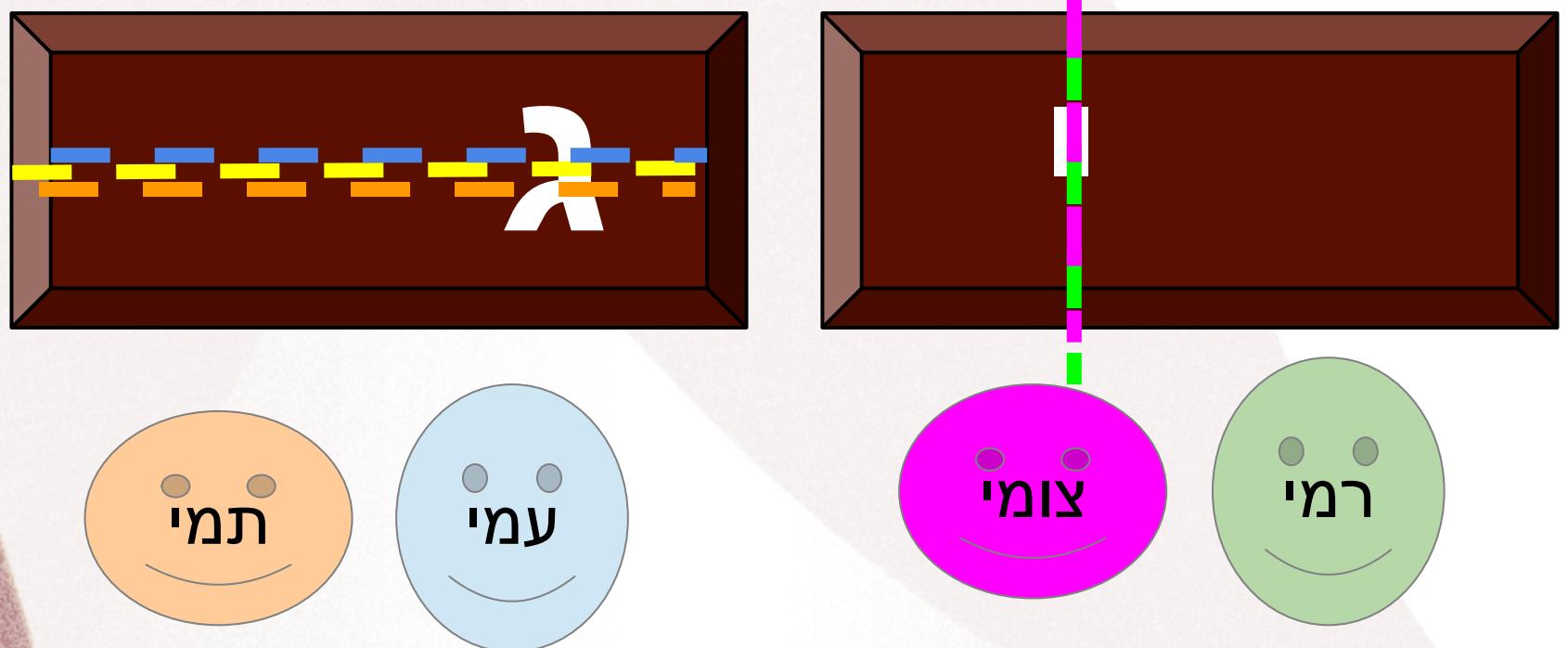
3. הילדים מתחלקים לשתי קבוצות;

4. כל קבוצה מקבלת יותר-מחצית מהעוגה:



תהליך ח齐ה ל-4 ילדים - המשך

1. כל ילד מסמן קו באמצע העוגה לפי דעתו:
2. אמא חותכת את העוגה ביחסוין הקויים;

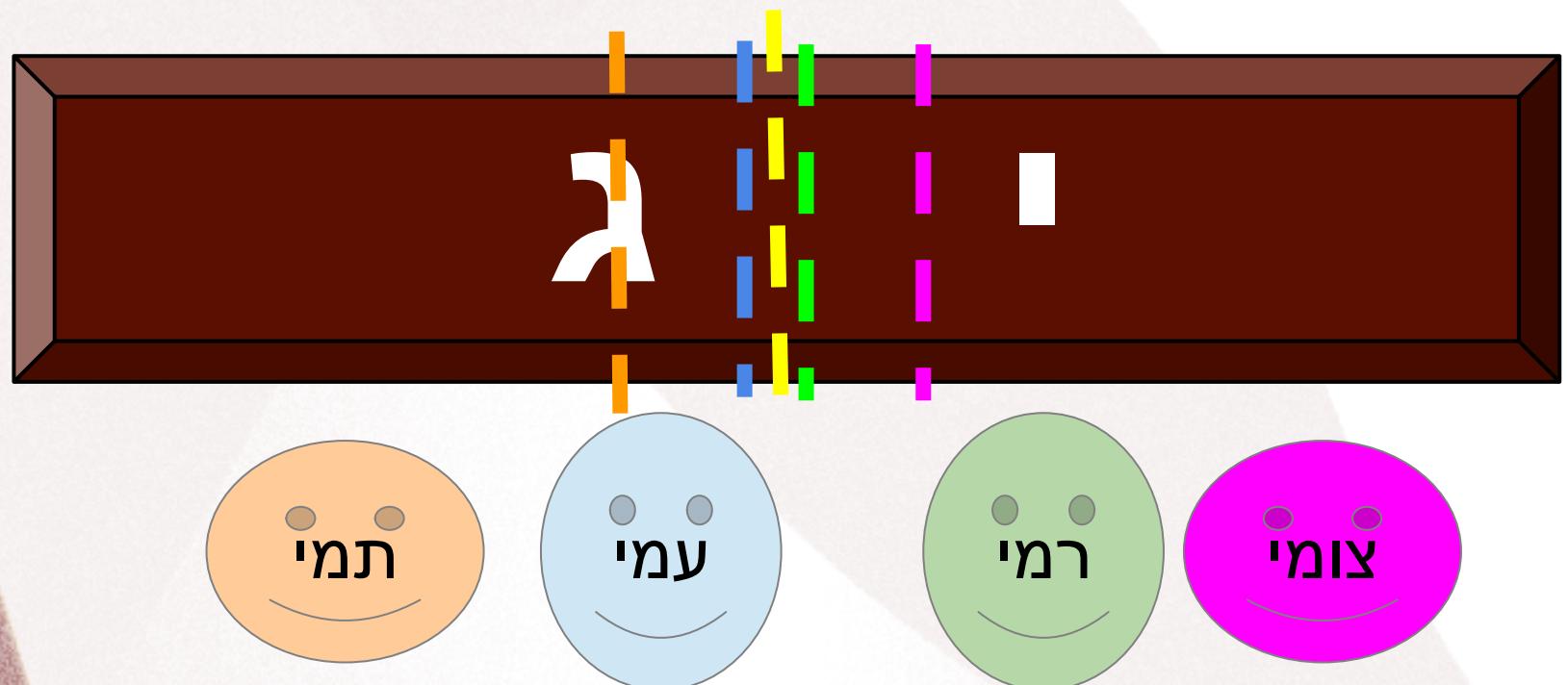


רמי וצומי סימנו קו באותו מקום - מה עושים?
- הגרלה! כל ילד מקבל חצי באקרה.

תהליך חציה ל-4 ילדים

גם הפעם כדאי לצלם קו באמצע העוגה.

בדוגמה שלנו, כל ילד מקבל יותר מרבע מהעוגה!



ניצול אי-הסכמה

**משפט: אם לא כל הילדים מסכימים -
תמיד קיימת חלוקה שבה כל ילד מקבל יותר מחלוקת
היחסן!**

(Dubins & Spanier 1961, Rebman 1979,
Woodall 1986).

מסקנה: אי-הסכמה היא דבר טוב!

**אולי זה מה שעד מארחי עסקת גדי ראובן, יהודה ויסוף
- ניצול אי-הסכמה.**

המחקר שלי (א) - נחלה עם צורה

- התהליכיים הקיימים לא מתייחסים כלל לצורה של הפרוסה שכל ילד מקבל.
- במרקם רבים אף מניחים שהעוגה היא חד-מידית, אך שכל אחד מקבל רצואה צרה וארוכה.
- אבל כשמדבר בקרקע, חשובה גם הצורה - נחלה ריבועית טובת יותר מנהלה צרה וארוכה.
- שאלת מחקר: איך אפשר לחלק אرض לצורה הוגנת, אך שכל אזרח יוכל לקבל נחלה עם צורה קבועה מראש, נחלה ריבועית?

המחקר שלי (ב) - ניסויי חלוקה

- רק מעט ניסויים בדקו, האם התוצאה של תהליך לחלוקת הוגנת היא אכן הוגנת בעיני המקבלים.
- כל הניסויים התייחסו לחלוקת הוגנת של חפצים - אף ניסוי לא התייחס לחלוקת הוגנת של עוגה!
- **שאלת מחקר:** האם אנשים, שקיבלו נחלה בהתאם לתחילה כלשהו שלחלוקת הוגנת, אכן ירגישו שקיבלו נחלה הוגנת?