HOJA 2:

PROBLEMA 1: SI P ES UN POLINOMIO DE GRADO N.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{k)}(0)}{k!} x^k$$

SI $P(0)=1$, $P'(0)=P''(0)=0$ y $P'''(0)=2$

$$P(x) = 1 + \frac{1}{3}x^3 + x^4\left(\sum_{k=4}^{N} \frac{P^{k)}(0)}{k!} x^{k-4}\right) =$$

$$= 1 + 1/3\, x^3 + x^4 Q(x)$$ DONDE $Q(x)$ ES UN POLINOMIO DE GRADO $N-4$.

LUEGO DE TODOS ESTOS POLINOMIOS EL DE GRADO MÍNIMO ES $P(x) = 1+1/3\, x^3$, DE GRADO 3.

PROBLEMA 2:

a) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\qquad f(0)=0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ $\qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x[2(1+x^2)2x]}{(1+x^2)^4}$ $\qquad f'''(0) = -2$

LUEGO $P_{3,0}(x) = x - \frac{2}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{3}$

OTRA FORMA DE PROCEDER ES LA SIGUIENTE

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{x^2+x^4}{1+x^2} + \frac{x^4}{1+x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1+x^2}$$

INTEGRANDO

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctg} x$$

$$\int 1 - x^2 + \frac{x^4}{1+x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$$

NO ES DIFICIL CONVENCERSE DE QUE $P_{3,0}(x) = x - \frac{x^3}{3}$

Y QUE $R_{3,0}(x) = \int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$.

HOJA 2:

PROBLEMA 2: 8) USANDO LO VISTO EN EL CASO ANTERIOR

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1+x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4+x^6}{1+x^2} - \frac{x^6}{1+x^2} =$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - \frac{x^8}{1+x^2} = \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Y $P_{2n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1) x^{2k}$.

YA QUE SI $|x| < 1$ $\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

7) $\frac{1}{x+1} = \frac{1+x}{x+1} - \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{x+x^2}{x+1} + \frac{x^2}{x+1} =$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{x+1} = 1 - x + \frac{x^2+x^3}{x+1} - \frac{x^3}{x+1} \text{ etc.}$$

OBSERVACIÓN: $Lg(1+x)$ VERIFICA QUE $\frac{1}{1+x}$ ES SU DERIVADA, PROCEDIENDO COMO EN 2) SE PUEDE CALCULAR FÁCILMENTE LOS POLINOMIOS DE TAYLOR DE $Lg(1+x)$ CENTRADOS EN $x=0$

PROBLEMA 4: LA DERIVADA DE $\operatorname{Arctg} x$ ES $\frac{1}{1+x^2}$

SI $f(x) = \operatorname{Arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$

$\downarrow$

INTEGRANDO LA EXPRESIÓN $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

ACOTANDO EL RESTO

$$\left| \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \underset{t>0}{\leq} \int_0^x t^{2n+2} dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \quad \text{SI } x = \frac{1}{10}$$

$\frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{10^{2n+3}} < 10^{-5}$ SIEMPRE QUE $n \geq 1$ ASÍ

$$\operatorname{Arctg} 1/10 \simeq \frac{1}{10} - \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{3}.$$

HOJA 2ª

PROBLEMA 5:

SI $f(x) = Lg(x+1)$. $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{x}{1+x} =$

$= 1 - \frac{x+x^2}{1+x} + \frac{x^2}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2+x^3}{1+x} - \frac{x^3}{1+x} =$

$= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$

INTEGRANDO $Lg(x+1) = \int \frac{1}{1+x}\,dx = \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k\,dx + \int_0^x (-1)^n \frac{x^n}{1+x}\,dx$

LUEGO $\left| Lg(x+1) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| =$

$= \left| Lg(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \right) \right| = \left| \int_0^x (-1)^n \frac{x^n}{1+x}\,dx \right| \leq$

$\leq \int_0^x x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$x \in [0,1]$

ASI $\frac{1}{1+x} < 1$

PROBLEMA 6: $f(x) = \sqrt{1+x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ y $f''(x) = \frac{-\frac{2}{2\sqrt{1+x}}}{4(1+x)} =$

$= \frac{-1}{4\sqrt{1+x}}$

$f(0) = 1$

$f'(0) = \frac{1}{2}$ ASI $P_{1,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x$

POR OTRO LADO $R_{1,0}(x) = \int_0^x \frac{-\frac{1}{4\sqrt{1+t}}}{1}(x-t)\,dt < 0$

YA QUE $t \in [0,x]$

Y $-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1+t}} < 0$.

COMO $f(x) = P_{1,0}(x) + R_{1,0}(x) \leq$

$\leq P_{1,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ POR SER $R_{1,0}(x) \leq 0$.

POR OTRO LADO $\left| \int_0^x \frac{1}{4\sqrt{1+t}}(x-t)\,dt \right| \leq \int_0^x \frac{(x-t)}{4}\,dt = \frac{x^2}{8}$

$t > 0$

LUEGO $f(x) = \sqrt{1+x} \geq P_{1,0}(x) - \frac{x^2}{8} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8}$

SI $x = 1$ $\quad 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} < \sqrt{1+1} = \sqrt{2} < 1 + \frac{1}{2}$

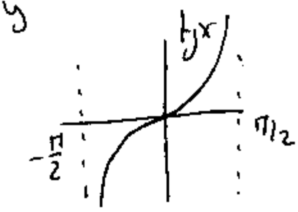
SI $x = 0{,}2$ $\quad 1 + \frac{0{,}2}{2} - \frac{0{,}04}{8} < \sqrt{1+0{,}2} = \sqrt{1{,}2} < 1 + \frac{0{,}2}{2}$.

HOJA 2:

PROBLEMA 7:

a) $tg(x+y) = \dfrac{sen(x+y)}{cos(x+y)} = \dfrac{sen\,x\cos y + sen\,y \cos x}{\cos x \cos y - sen\,x\, sen\,y} =$

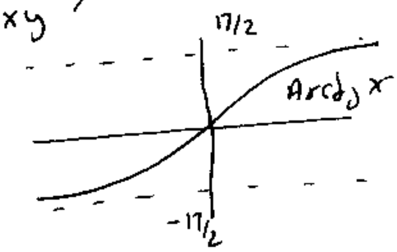
$$= \frac{\cos x \cos y\,(tg\,x + tg\,y)}{\cos x\cos y - sen\,x\,sen\,y} = \frac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x\,tg\,y} \quad (*)$$



ASI $\quad tg(Arctg\,x + Arctg\,y) = \dfrac{x+y}{1-xy}$

APLICANDO (*)

LUEGO $\quad Arctg\,x + Arctg\,y = Arctg\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$



b) EN PARTICULAR PARA $x = 1/2$ y $y = 1/3$

$$\frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/2\,1/3} = \frac{5/6}{1 - 1/6} = 1 \quad y \quad Arctg\,1 = Arctg\,\frac{1/2+1/3}{1-1/2\,1/3} = \pi/4$$

LUEGO DE a) $\quad \pi/4 = Arctg\,1/2 + Arctg\,1/3 \quad (**)$

COMO $\quad Arctg\,x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$

VER EJERCICIO 2:) 8)

CON $\quad \left|(-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right| \leq \dfrac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \underset{|x|\leq 1/2}{\leq} \dfrac{1}{2n+3}\cdot\dfrac{1}{2^{2n+3}}$

$1/3 < 1/2$

SI $n=4 \quad \dfrac{1}{(2\times4+3)}\;\dfrac{1}{2^{2\times4+3}} = \dfrac{1}{11\times 2^{11}} = \dfrac{1}{22.448} < \dfrac{1}{10^{-4}}$

ASI DE (**) $\quad \pi = 4\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{(1/2)^3}{3} + \frac{(1/2)^5}{5} - \frac{(1/2)^7}{7} + \frac{(1/2)^9}{9}\right) + \right.$
$\left. + \left(1/3 - \frac{(1/3)^3}{3} + \frac{(1/3)^5}{5} - \frac{(1/3)^7}{7} + \frac{(1/3)^9}{9}\right)\right]$

CON UN ERROR $\quad \left|4\left(\pm\dfrac{1}{10^{-4}} \pm \dfrac{1}{10^{-4}}\right)\right| \leq \dfrac{8}{10^{-4}} < \dfrac{1}{10^{-3}}$

HOJA 2:

PROBLEMA 8:

1) VER PROBLEMA 6

2) SI $f(x) = (Lg\,x)^2$ $\quad f(1) = 0$

$$f'(x) = 2\,lg\,x \cdot \frac{1}{x} \qquad f'(1) = 0$$

$$f''(x) = 2\frac{1}{x^2} - 2\,lg\,x\,\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = 2$$

$$f'''(x) = -\frac{4}{x^3} - 2\frac{1}{x^3} + 4\,lg\,x\,\frac{1}{x^3} \qquad f'''(1) = -6$$

ASÍ $P_{3,0}(x) = \frac{2}{2!}(x-1)^2 - \frac{6}{3!}(x-1)^3 = (x-1)^2 - (x-1)^3$ EL POLINOMIO DE TAYLOR CERCA DEL $x=1$, $(x-1)^2 - (x-1)^3$ APROXIMA A LA FUNCIÓN $(lg\,x)^2$.

PROBLEMA 9: $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} = P_{2,0}(x) + R_{2,0}(x) =$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{\cos^{3)}(t)}{2!}(x-t)^2\,dt$$

LUEGO $\left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right| = \left|\int_0^x \frac{\cos^{3)}(t)}{2!}(x-t)^2\,dt\right| \leq \frac{|x|^3}{3!}$

SI QUEREMOS APROXIMAR $\cos x$ CON $P_{1,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ CON UN ERROR MENOR QUE $0{,}0004 = 10^{-4}$ ENTONCES $\frac{|x|^3}{3!} \leq \frac{1}{10^4} \iff |x| \leq \sqrt[3]{\frac{3!}{10^4}}$.

PROBLEMA 10: SI f ES DESARROLLABLE EN SERIE DE TAYLOR CENTRADA EN CERO $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(0)}{k!} x^k$

AHORA $f(0) = f'(0) = 0$ DERIVANDO $0 = f'(x) + f'''(x)$

COMO $0 = f(x) + f''(0)$ $\Rightarrow f'''(0) = 0$. DEL MISMO

Y ASÍ $0 = f'(0) + f'''(0)$ VEMOS QUE $f^{(IV)}(0) = 0$ Y

MODO DERIVANDO $f' + f''' = 0$

POR INDUCCIÓN $f^{k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\text{LUEGO } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!} x^k \equiv 0.$$