Ampliación de Cálculo Hoja 6

1.- Resuelve las E.D.O. que se plantearon en los problemas de la Hoja 1.

2.- Dibuja las gráficas de las siguientes familias de curvas en implícitas:
a) $x^2 + 3y^2 = k$, $k>0$. b) $ye^{-2x} = k$ c) $x^2 - y^2 = k$
d) Representa la curva $xy(y-x) -2x^2 + y^2 = 0$ (**Indicación:** tener en cuenta el teorema de la función implicita).

3.- Dibuja las líneas isoclinas de las siguientes ecuaciones diferenciales y aproxima geométricamente las soluciones :

a) $y' = (y-1)^2$ b) $y' = x^2-y^2$ c) $y' = (x+y)(x-y)^{-1}$

4.- VARIABLES SEPARADAS. Integra:
a) $(1+e^t)x(t)x'(t) = e^t$ b) $x'(t) = x^2(t)\mathrm{sen}t$ c) $y' = 2y^2 - 2y$

d) Halla la solución de los siguientes problemas de Cauchy**:**

d_1) $y'x^3\mathrm{sen}y=2$ con $y \xrightarrow[x\to\infty]{} \pi/3$; d_2) $y' = y^2\mathrm{sen}x$ con $y(0) = 1/2$

5.- Halla las soluciones de los siguientes problemas de valor inicial, indicando su intervalo de definición:
a) $x' + 5x = t^2$, $x(0) = 3$ b) $x' = (\mathrm{tg}t)x + \cos t$, $x(0) = 1$

c) $x' + 2tx = t^3$, $x(0) = 1$ d) $tx' + \dfrac{t}{\sqrt{1 + t^3}} = x$, $x(1) = 2$

e) $y' - 3y = -2e^{-2x}$, $y(0) = 5$.

6.- Se sabe que la población de una ciudad crece a tasa constante.Si la población se ha doblado en 3 años, y en 5 años ha alcanzado la cifra de 40.000 habitantes, ¿cuántas personas vivían en la ciudad al comienzo de ese período de cinco años?

7.- a) Si f_1 y f_2 son dos soluciones de la ecuación $y' + p(x)y = 0$, prueba que $c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$ también es solución para todo par $c_1,c_2 \in \mathbb{R}$.
b) Si f es una solución de la ecuación $y' + p(x)y = g(x)$, prueba que $f(x) + c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$ también es solución para todo par $c_1,c_2 \in \mathbb{R}$.

8.- El carbono 14 (C_{14}) tiene una vida media de 5700 años y se encuentra uniformemente repartido en la atmósfera en forma de CO_2. Las plantas vivas absorben C_{14} y mantienen una proporción constante de C_{14} y C_{12}. Al morir las plantas, la desintegración del C_{14} altera la proporción. Compara la proporción de C_{14} en dos trozos del mismo árbol, uno vivo y otro cortado hace 2000 años.

9.- La ecuación $y' + p(x)y = q(x)y^n$ se conoce como ecuación de Bernouilli. Comprueba que si $n \neq 0$, entonces el cambio de variable $z(x) = y(x)^{1-n}$ reduce la ecuación de Bernoulli a una ecuación líneal. Usa lo anterior para resolver:

a) $x^2y'+2x^3y = y^2(1+2x^2)$ b) $t\dfrac{x'(t)}{x^3(t)} + \dfrac{1}{x^2(t)} = t$

c) $y' + \dfrac{y}{x + 1} = -1/2(x+1)^3 y^2$

10.- Resuelve las ecuaciones:

a) $y'' = e^t$ b) $y''- 2y'- 8y = 2e^t-8\cos 2t$

c) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t} + \frac{t}{2}$ d) $y'' - 2y' + 2y = e^{ex} + x^2$

e) $2y'' - 4y' - 8y = -40\cos 3x + 50\,\text{sen}\,3x$

f) $2y'' - y' + 2y = e^{4x}$, $y(0)=3$ e $y'(0)=2$.

g) $y'' - y' - 5y = 1$, $y \longrightarrow -\frac{1}{5}$ cuando $x \longrightarrow \infty$.

h) $y''- 5y'+ 6y = 2e^{-2t}(9\,\text{sen}\,2t+4\cos 2t)$, $y \longrightarrow 0$ para $t\to\infty$.

11.- Las raíces de una ecuación característica asociada a una E.D.O. de segundo orden son 1 y -1. Encuentra la ecuación diferencial y su solución general.

12.- Supongamos que las raíces de la ecuación $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ tienen parte real negativa. Prueba que toda solución de la ecuación diferencial $x''+ ax' + bx = 0$ satisface que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

13.- Sean a,b,c tres constantes positivas. Prueba que la diferencia de dos soluciones cualesquiera de la ecuación: $ax'' + bx' + cx = g(t)$
donde g(t) es una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, converge a cero cuando $t \longrightarrow \infty$.

14.- Resuelve el "problema de contorno":

$$x'' + x' - 6x = 0, \quad x(0) = 1 \text{ y } x(\infty) = 0.$$

15.- Sea q(t) un polinomio de grado 2. Prueba que toda ecuación:

$$x'' + a_1x' + a_2x = q(t)$$

tiene una solución particular que es un polinomio de grado menor o igual a 2.

16.- Se considera la ecuación:

$$x'' + ax' + bx = b(t)$$

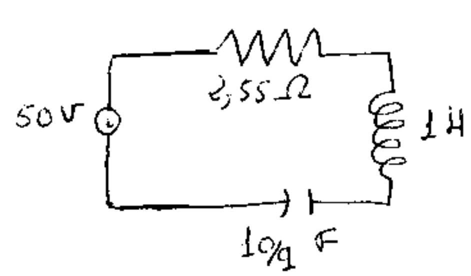
a) Si $b(t) = e^{\lambda t}$, prueba que la ecuación admite una solución particular del tipo $Ae^{\lambda t}$ o bien $Ate^{\lambda t}$, en el caso de ser λ solución de la ecuación característica.

b) Si $b(t) = \cos bt$, prueba que la ecuación admite una solución particular del tipo $A\cos bt + B\,\text{sen}\,bt$ o bien $t(A\cos bt + B\,\text{sen}\,bt)$ si $\mp bi$ es solución de la ecuación característica.

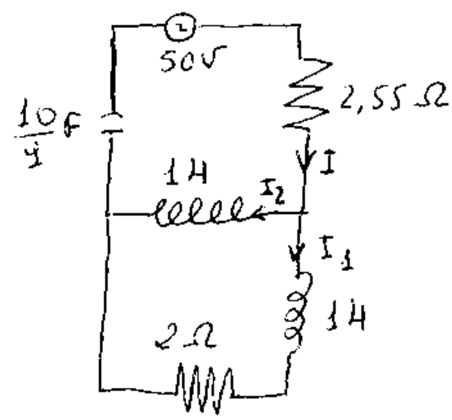
17.- a) Calcula el voltage de salida del circuito **1)**:

b) Plantea un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes para cuatro incognitas de modo que dicho sistema describa las intensidades del circuito **2)**:

1)



2)



He aquí un cuadro sinóptico de las formas de soluciones particulares para distintas formas de segundos miembros.

№ de orden	Segundo miembro de la ecuación diferencial	Raíces de la ecuación característica	Forma de la solución particular, donde $k = \max(m, n)$
I	$P_m(x)$	1. El número 0 no es raíz de la ecuación característica	$\tilde{P}_m(x)$
		2. El número 0 es raíz de la ecuación característica de orden s	$x^s \tilde{P}_m(x)$
II	$P_m(x)\, e^{\alpha x}$ (α es real)	1. El número α no es raíz de la ecuación característica	$\tilde{P}_m(x)\, e^{\alpha x}$
		2. El número α es raíz de la ecuación característica de orden s	$x^s \tilde{P}_m(x) e^{\alpha x}$
III	$P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \operatorname{sen} \beta x$	1. Los números $\pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica	$\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \operatorname{sen} \beta x$
		2. Los números $\pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica de orden s	$x^s (\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \operatorname{sen} \beta x)$
IV	$e^{\alpha x}[P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \operatorname{sen} \beta x]$	1. Los números $\alpha \pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica	$(\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \operatorname{sen} \beta x)\, e^{\alpha x}$
		2. Los números $\alpha \pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica de orden s	$x^s (\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \operatorname{sen} \beta x)\, e^{\alpha x}$