Series de Potencias. Polinomios de Taylor

Ejercicio 1. Hallar el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencia. ¿Convergen en los extremos de dichos intervalos?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

Ejercicio 2. Probar que la función

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{para} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3. Calcular la derivada de

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad x \in \mathrm{R}$$

Probar que $f'(x) = f(x)$. Concluir que $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Ejercicio 4. Calcular el desarrollo es serie de potencias de $\cos(x)$ sabiendo que

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(k+1)!} \qquad x \in \mathrm{R}$$

Ejercicio 5. Calcular el desarrollo en serie de Taylor de las siguientes funciones

a) $f(x) = \mathrm{e}^x$ b) $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ c) $h(x) = \cos(x)$ d) $k(x) = \ln(1+x)$

Ejercicio 6. Calcular el valor de cada una de las siguientes funciones en $x = 0.1$ con un error menor que 0.01 sabiendo que

a) $f(0) = 0;\ f'(0) = 0.1; |f''(x)| \leq 1$ para $x \in [0, 1]$.

b) $g(0) = 2;\ g'(0) = 0; g''(0) = 1; |g^{3)}(x)| \leq 50$ para $x \in [0, 0.5]$.

c) $h(0) = 1;\ h'(0) = 1; h'(0) = 1; h''(0) = 0; h^{3)}(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ para $x \in [0, 1]$.

d) $k(0) = 1;\ k'(0) = 1; |k''(x)| \leq 100$ para $x \in [0, 1]$.

Ejercicio 7. Calcular los una aproximación a los siguientes números con una aproximación menor que 10^{-5}

a) e b) sen(1) c) arctg(0.1)

Ejercicio 8. Calcular el desarrollo en serie de Taylor de las siguiente funciones

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ b) $g(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$ c) $h(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

d) $k(x) = \cos(2x)$ e) $l(x) = \dfrac{5-2x}{3+2x}$ f) $m(x) = \cos^2(x)$

Ejercicio 9. Definimos la siguiente sucesión por recurrencia

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 1 \\ a_{n+2} & = & a_{n+1} + a_n, \quad n \geq 2 \end{array}\right.$$

Calcular el término general a_n en función de n.