AMPLIACIÓN DE CÁLCULO HOJA 2
POLINOMIOS DE TAYLOR

1.- Escribe todos los polinomios P tales que $P(0) = 1$, $P'(0) = P''(0) = 0$ y $P'''(0) = 2$ ¿Cual es el de grado mínimo?

2.- Halla los polinomios de Taylor, del grado indicado y en el punto indicado, de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \cos x$, grado 3 en 0 2) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, grado 3 en 0 3) $f(x) = \operatorname{sen} x$, grado 2n en $\frac{\pi}{2}$ 4) $f(x) = e^x$, grado n en 1 5) $f(x) = x^5 + x^3 + x$, grado 4 en 0 6) $f(x) = \lg x$, grado 4 en 2.

7) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, grado n en 0. 8) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, grado 2n en 0.

3.- Pruébese la siguiente desigualdad

a) $\left|\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right| < \frac{1}{5040}$ para todo $|x| \leq 1$.

b) Encontra n_0 tal que $\left|\cos x - \sum_{k=o}^{n_0} \frac{x^{2n}}{2n!}(-1)^k\right| < 1/10^{-4}$ para todo $x \in [0,\pi/2]$.

4.- Calcula los siguientes números con un error menor de 10^{-5}:

1) $\cos 1$ 2) e 3) $\operatorname{arctg} \frac{1}{10}$

5.- Si $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, pruébese que

$$\left|\lg(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

6.- Pruébese que si $x > 0$, entonces

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} .$$

Utilícese la desigualdad anterior para aproximar $\sqrt{1,2}$ y $\sqrt{2}$; y hágase una estimación del error cometido. Utilícese el polinomio de Taylor para n = 2 para obtener una aproximación más precisa de $\sqrt{1,2}$ y $\sqrt{2}$.

7.- a) Demostrar que si arctg x, arctg y, arctg x + arctg y son distintos de $k\pi + \frac{\pi}{2}$, se tiene que $\text{arctg } x + \text{arctg } y = \text{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + c$, donde $c = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Demostrar que $\frac{\pi}{4} = \text{arctg } \frac{1}{2} + \text{arctg } \frac{1}{3}$. A partir de esta igualdad, comprobar que $\pi = 3,14159.....$.

8.- Determinar el origen de las siguientes expresiones:

1) $\sqrt{1 + x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ si $|x| \simeq 0$

2) $(\log x)^2 \simeq (x - 1)^2 - (x - 1)^3$ si $|x| \simeq 1$

9.- Para que valores de x la fórmula $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$ da un error no mayor de 0,01; 0,001 y 0,0001 .

10.- Sea f una función desarrollable en serie de Taylor en un entorno de cero. Si $f'' + f = 0$ y $f(0) = f'(0) = 0$, prueba que $f = 0$.