Ampliación de Cálculo (414 - ii)
Grupos A, B y C
Examen de febrero. 29/01/09

Ejercicio 1. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones

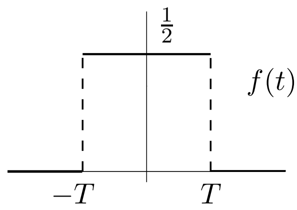
$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx + \sqrt{n}}, \qquad x \in [0, +\infty)\,.$$

Ejercicio 2. Encuentra una expresión en serie de senos y cosenos (Serie de Fourier) de la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

siendo f 2-periódica.

Ejercicio 3. Halllar la transformada de Fourier de la función



$$f(t) = \frac{1}{2}\chi_{[-T,T]}(t)$$

Ejercicio 4. Sea considera la ecuación $y''(t) + y'(t) + \pi y(t) = 0$. Se pide:

1. Calcular la solución general del problema homogéneo.
2. Deducir que la diferencia de dos soluciones cualesquiera de la ecuación

$$y''(t) + y'(t) + \pi y(t) = \frac{\sin(t)}{1 + t^2}$$

tiende a 0 cuando $t \to \infty$.

Ejercicio 5. Sea un circuito RC alimentado por una batería de 1 voltio y sin carga inicial en el condensador. Sea $R = 1$ y $C = \frac{1}{3}$. Supongamos que la corriente fluye entre los tiempos $1 < t < 2$. La ecuación resultante para la carga $y(t)$ resulta ser

$$y' + 3y = H_1(t) - H_2(t).$$

donde

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t < a \\ 1 & \text{si} \quad a \leq t < \infty \end{cases}$$

Hallar la expresión de la carga $y(t)$.

REVISIÓN: La revisión tendrá lugar el lunes 16 de febrero de 2008 en el aula 6 de la Facultad de Informática a las 11:00.

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$t^n,\ n \in \mathbb{N}^+$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$
$\mathrm{sen}(at)$	$\dfrac{a}{s^2 + a^2},\ s > 0$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2 + a^2},\ s > 0$
$\mathrm{senh}(at)$	$\dfrac{a}{s^2 - a^2},\ s > \lvert a \rvert$
$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2 - a^2},\ s > \lvert a \rvert$
$\mathrm{e}^{at}\mathrm{sen}(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2 + a^2},\ s > a$
$\mathrm{e}^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + a^2},\ s > a$
$t^n \mathrm{e}^{at},\ n \in \mathbb{N}^+$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s > 0$
$H_c(t)$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-cs}}{s},\ s > 0$
$\delta(t-c)$	$e^{-cs},\ s > 0$

EJERCICIO 1º)

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in [0,\infty)$$

LUEGO $f(x)=0$, $x\in[0,\infty)$, ES EL LÍMITE PUNTUAL DE LA SUCESIÓN DE FUNCIONES.

GRÁFICA DE f_n (NOTA SI n ES PAR $f_n > 0$
SI n ES IMPAR $f_n < 0$)

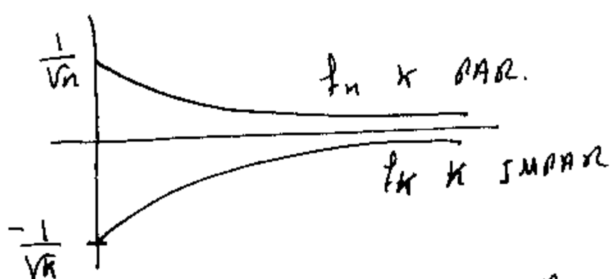
$$f_n(x) = \frac{1}{nx+\sqrt{n}}.$$

$\mathrm{Dom}\, f_n = [0,\infty)$

f_n CONTINUA

$f_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ Y $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{nx+\sqrt{n}} = 0$

$$f_n'(x) = \frac{-n}{(nx+\sqrt{n})^2} < 0$$ LUEGO f_n ES DECRECIENTE



SEA $\varepsilon > 0$ Y SEA n_0 : $\forall n \geq n_0$ $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$

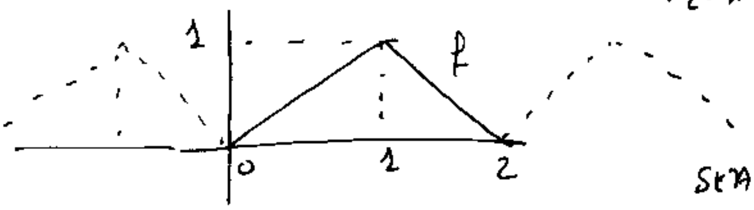
(ESTE n_0 EXISTE YA QUE $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$).

AHORA $\forall n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{nx+\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{nx+\sqrt{n}} \underset{x\geq 0}{\leq} \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

LUEGO $f_n \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE SOBRE $[0,\infty)$

PROBLEMA 2:) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$



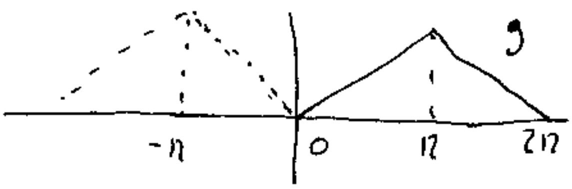
2-periódica

Sea $g(x) = f\left(\frac{2x}{2\pi}\right) = f\left(\frac{x}{\pi}\right)$

g es 2π-periódica, ya que $g(x+2k\pi) = f\left(\frac{2(x+2k\pi)}{2\pi}\right) =$

$= f\left(\frac{x}{\pi} + 2k\right) = f\left(\frac{x}{\pi}\right)$ $k \in \mathbb{Z}$ y f 2-periódica

$g(0) = 0$, $g(\pi) = 1$ y $g(2\pi) = 0$



Así $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} & x \in [0,\pi] \\ 2 - \frac{x}{\pi} & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$

La serie de Fourier de g es $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$

con $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx$ (podemos integrar entre $[-\pi,\pi]$ o entre $[0,2\pi]$, problema 8 hoja 4:)

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x) \operatorname{sen} nx\,dx = 0$ por ser g par (problema 6: hoja 3:)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x) \cos nx\,dx$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{\pi}\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2 - \frac{x}{\pi}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2\pi}\Big|_0^{\pi}\right] + \frac{1}{2\pi}\left[2x - \frac{x^2}{2\pi}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi^2}{2\pi}\right] + \frac{1}{2\pi}\left[4\pi - \frac{4\pi^2}{2\pi} - \left[2\pi - \frac{\pi^2}{2\pi}\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\left[\cancel{4\pi} - \cancel{2\pi} - \cancel{2\pi} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1/2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{\pi}\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\left(2 - \frac{x}{\pi}\right)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{\pi}\cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x}{\pi}\cos nx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 2\cos nx\,dx$$

CALCULEMOS INTEGRALES

- $\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} = 0$

- $\int x\cos nx\,dx = \frac{x\sin nx}{n} - \frac{1}{n}\int \sin nx\,dx = \frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}$

LUEGO $\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} =$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{1}{\pi^2 n^2}\left[\cos n\pi - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 n^2}\begin{cases} 0 & n \text{ PAR} \\ -2 & n \text{ IMPAR}\end{cases}$$

LUEGO $-\frac{1}{\pi^2}\int_{\pi}^{2\pi} x\cos nx\,dx = -\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{\pi}^{2\pi} =$

$$= -\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{\cos n\pi}{n^2}\right] = \frac{1}{\pi^2 n^2}\left[\cos n\pi - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 n^2}\begin{cases} 0 & n \text{ PAR} \\ -2 & n \text{ IMPAR}\end{cases}$$

ASÍ $a_n = \frac{1}{\pi^2 n^2}\begin{cases} 0 & n \text{ PAR} \\ -4 & n \text{ IMPAR}\end{cases}$

Y LA SERIE DE FOURIER DE g ES

$$\frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}\cos(2k+1)x$$

COMO g ES 2π-PERIÓDICA, CONTINUA Y EXISTEN LAS DERIVADAS LATERALES DE g EN CADA PUNTO

$$g(x) = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}\cos(2k+1)x \quad \forall x \in [0, 2\pi]$$

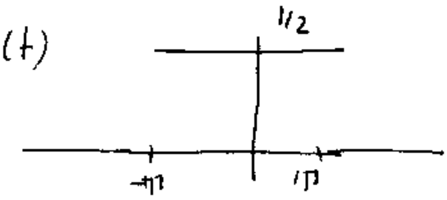
Y $f(y) = g(\pi y)$

$g(x) = f\left(\frac{x}{\pi}\right)$ SI $y = \frac{x}{\pi} \Rightarrow x = \pi y$

Y ASÍ $\boxed{f(y) = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi y \quad \forall y \in [0, 2]}$

PROBLEMA 3:

$f(t) = \frac{1}{2}\chi_{[-\pi,\pi]}(t)$



$\hat{f}(s) \underset{\text{DEF}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist}\, dt =$

$f(t)=0 \quad \forall t \notin [-\pi,\pi]$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\, e^{-ist}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos st\, dt + i \operatorname{sen}(-st)\, dt =$

$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos st\, dt - i \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(st)\, dt =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen} st}{s}\Big|_{-\pi}^{\pi} - i\left(-\frac{\cos st}{s}\Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \right.=$

$= \frac{1}{2s}\left[\operatorname{sen} s\pi - \operatorname{sen} s(-\pi) + i\left(\cos s\pi - \cos s(-\pi) \right)\right] =$

$= \frac{1}{2s}\, 2 \operatorname{sen} s\pi + \frac{i}{2s}\left(\cos s\pi - \cos s\pi \right) = \frac{\operatorname{sen} s\pi}{s}$

PROBLEMA 4: 1) $y''(t) + y'(t) + n\, y(t) = 0$

$\lambda^2 + \lambda + n = 0$ EC. CARACTERÍSTICA. $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4n}}{2} =$

$= \begin{cases} \lambda_1 = -1/2 + \frac{1}{2}\sqrt{4n-1}\; i \\ \lambda_2 = -1/2 - 1/2\sqrt{4n-1}\; i \end{cases}$

LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN ES POR TANTO DEL TIPO $y(t) = A\, e^{-1/2 t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4n-1}\right)t + B\, e^{-1/2 t}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\sqrt{4n-1}\right)t$

OBSERVEMOS QUE $y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

2) SI $g(t)$ ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE $y'' + y' + ny = \frac{\operatorname{sen} t}{1+t^2}$

Y $Y_1 = g(t) + A_1\, e^{-1/2 t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4n-1}\right)t + B_1\, e^{-1/2}\operatorname{sen}\left(1/2\sqrt{4n-1}\right)t$

$Y_2 = y(t) + A_2\, e^{-1/2 t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4n-1}\right)t + B_2\, e^{-1/2}\operatorname{sen}\left(1/2\sqrt{4n-1}\right)t$

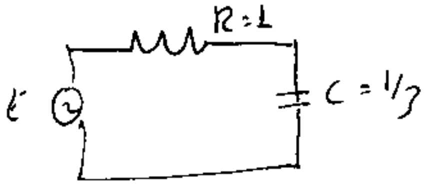
DOS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL NO HOMOGÉNEA

ENTONCES $Y_1(t) - Y_2(t) = (A_1 - A_2)\, e^{-1/2 t}\cos\left(1/2\sqrt{4n-1}\, t\right) + (B_1 - B_2)\, e^{-1/2 t}\operatorname{sen}\left(1/2\sqrt{4n-1}\, t\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

PROBLEMA 5º

$H_1(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq 1 \\ 0 & si\ t < 1 \end{cases}$, $H_2(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq 2 \\ 0 & si\ t < 2 \end{cases}$

ASÍ $H_1 - H_2(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in [1,2] \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$



CIRCUITO RC

$$\left\{ \begin{array}{l} E(t) = R y'(t) + \frac{1}{C} y(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \quad y \quad E(t) = (H_1 - H_2)(t) \end{array} \right.$$

ES DECIR $y' + 3y = H_1 - H_2(t)$

1º) SOLUCIÓN DE LA EC. HOMOGÉNEA $y' + 3y = 0$

EC CARACTERÍSTICA $\lambda + 3 = 0$, ASÍ $\lambda = -3$

LUEGO LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA ES $y(t) = k e^{-3t}$

2º) PARA CALCULAR UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA ECUACIÓN NO HOMOGÉNEA, USAREMOS EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES; SEA

$g(t) = k(t) e^{-3t}$

$g'(t) = k'(t) e^{-3t} - 3k(t) e^{-3t}$

ASÍ $g'(t) + 1/3\, g(t) = k'(t) e^{-3t} \cancel{- 3k(t) e^{-3t}} + \cancel{3k(t) e^{-3t}} =$

$= k'(t) e^{-3t} = H_1 - H_2(t)$

Y ASÍ $k(t) = \int_0^t e^{3s} (H_1 - H_2)(s)\, ds =$

$= \int_0^t e^{3s} H_1(s)\, ds - \int_0^t e^{3s} H_2(s)\, ds$

CALCULEMOS ESTAS INTEGRALES

a) $\int_0^t e^{3s} H_1(s)\, ds = \begin{cases} 0 & si\ t < 1 \\ \int_1^t e^{3s}\, ds = \frac{e^{3s}}{3} \Big|_1^t = \frac{e^{3t}}{3} - \frac{e^3}{3} & si\ t \geq 1 \end{cases} =$

$= 1/3\, (e^{3t} - e^3)\, H_1(t)$

b) $\int_0^t e^{3s} H_2(s)\,ds = \begin{cases} 0 & t<2 \\ \int_2^t e^{3s}\,ds = \frac{e^{3s}}{3}\Big|_2^t = \frac{1}{3}(e^{3t}-e^{3\times 2}) & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$

$= 1/3(e^{3t}-e^{3\times 2})H_2(t)$

ASI $c(t) = \frac{1}{3}(e^{3t}-e^{3})H_1(t) - \frac{1}{3}(e^{3t}-e^{6})H_2(t) =$

$= 1/3(e^{3t}-e^{3})H_1(t) - 1/3(e^{3t}-e^{6})H_2(t)$

Y UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL PROBLEMA SERÁ

$y(t) = c(t)e^{-3t} =$

$= 1/3(1-e^{-3(t-1)})H_1(t) + 1/3(1-e^{-3(t-2)})H_2(t)$

3:) LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN NO HOMOGÉNEA, SERÁ

$y(t) = k e^{-3t} + 1/3(1-e^{-3(t-1)})H_1(t) - 1/3(1-e^{-3(t-2)})H_2(t)$

COMO $y(0)=0$ Y $H_1(0)=H_2(0)=0$

SE SIGUE QUE $0 = y(0) = k e^{0} \Rightarrow k=0$

Y LA SOLUCIÓN BUSCADA ES

$$\boxed{y(t) = 1/3(1-e^{-3(t-1)})H_1(t) - 1/3(1-e^{-3(t-2)})H_2(t)}$$