AMPLIACIÓN DE CÁLCULO Hoja 5
Análisis de Fourier

1.- Sea $f \in L_1(\mathbb{R})$, f par y $f(t) \in \mathbb{R}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Prueba que la transformada de Fourier de la función f, $F[f](\lambda)$, es real. Si si f es impar, comprueba que $F[f](\lambda)$ es imaginario (e.d. $\mathrm{Re}F[f](\lambda) = 0$).

2.- Calcular las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:

a) $\chi_{[-\delta,\delta]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\delta,\delta] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ b) $f(x) = \cos(\alpha x)\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$

c) $f(x) = \cos(2\pi\alpha x)\chi_{[-\delta,\delta]}(x)$ d) $f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{si } x \in [-\pi,0] \\ \pi - x & \text{si } x \in (0,\pi] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

3.- Sea f_n la función del problema anterior, apartado c), con $\delta_n = n/\alpha$. Dibuja la gráfica de $F[f_n]$ y después calcula el límite puntual de la sucesión de funciones (f_n).

4.- Sea $h(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ donde A y α son parámetros positivos. Prueba que $F[h](\lambda) = \frac{A}{\alpha + i\lambda}$ (Filtro de Butterworth). Diseña un circuito RC de modo que su función de transferencia sea precisamente $\frac{3}{4 + i\lambda}$.

5.- Prueba en cada caso que las funciones f y g son las mismas, aunque se escriban de forma distinta:

a) $f(x) = \mathrm{sen}(x)\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$ y $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\, s\pi}{1-s^2}\,\mathrm{sen}\, sx\, ds$

b) $g(x) = \mathrm{sen}(x)\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(x)$ y $g(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{s\cos(s\pi/2)}{1-s^2}\,\mathrm{sen}\, sx\, ds$

6.- Sean $f,g \in L_1(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{C}$. Prueba las siguientes propiedades de la transformada de Fourier y de su inversa.

a) $F[f + g](\lambda) = F[f](\lambda) + F[g](\lambda)$ b) $F[bf](\lambda) = bF[f](\lambda)$
c) $F[f(x-b)](\lambda) = e^{-ib\lambda}F[f](\lambda)$ d) $F[f](\lambda) = \overline{F[f](-\lambda)}$
e) Si $b > 0$, $F[f(bx)](\lambda) = \frac{1}{b}F[f](\lambda/b)$.

Y de su inversa:

a') $F^{-1}[f + g](x) = F^{-1}[f](x) + F^{-1}[g](x)$ b') $F^{-1}[bf](x) = bF^{-1}[f](x)$

c') $F^{-1}[f(\lambda\text{-}b)](x) = e^{ibx}F^{-1}[f](x)$

d') Si $f' \in L_1(\mathbb{R})$ y $\lim_{x\to\pm\infty} f(\lambda) = 0$, entonces $F^{-1}[f'](x) = -ixF^{-1}[f](x)$

7.- Prueba las siguientes propiedades de F y F^{-1}.

a) $F^{-1}[f](x) = \frac{1}{2\pi}F[f](-x)$ b) $F^{-1}[f*g](x) = 2\pi F^{-1}[f](x)F^{-1}[g](x)$

c) $F[fg](\lambda) = \frac{1}{2\pi} F[f]*F[g](\lambda)$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)F[g](ti)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F[f](ti)g(t)dt$

8.- Si $f,g,h \in L_1(\mathbb{R})$, comprobar que:

a) $f*(g + h)(x) = f*g(x) + f*h(x)$ b) $f*g(x) = g*f(x)$

c) Si $g_n \longrightarrow g$ en la norma de $L_1(\mathbb{R})$, entonces $f*g_n$ converge en $L_1(\mathbb{R})$ a $f*g$.

9.- Sean $\delta_n(x) = 2n\chi_{[-1/n,1/n]}(x)$ y $h_n(x) = f*\delta_n(x)$, con $n \in \mathbb{N}$. Calcula los límites puntuales de las sucesiones de funciones: (δ_n) y (h_n). Comprueba que la sucesión (δ_n) no es una sucesión de Cauchy en $L_1(\mathbb{R})$.

10.- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una señal, la cuál filtramos con el filtro ideal paso bajo $\chi_{[-\delta,\delta]}(x)$ ¿Quién es la componente en frecuencia f_δ de f acotada en la banda $[-\delta,\delta]$. (**Indicación:** $f_\delta(t) = (f*g)(t)$ donde g es el filtro en el dominio del tiempo).

11.- Sea $f(t) = e^{-t}\chi_{[0,\infty)}(t)$.

a) Comprueba que $f(at)*f(bt) = \frac{f(at) - f(bt)}{b-a}$, $a,b \in \mathbb{R}$.

b) Deduce que $f(at)*f(at) = tf(at)$

12.- Si $F[f](\lambda) = 0$ si $\lambda \notin [310^2,310^4]$ ¿a que tasa hay que muestrear f para discretizarla sin perder información? ¿Y si pensamos aplicar el algoritmo FFT?

13.- (Algoritmo F.F.T.) Sea $P(x) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n$ un polinomio con k par y sea w una raíz k-ésima de la unidad. Probar que $P(w) = P_1(w^2) + wP_2(w^2)$ donde P_1 y P_2 son polinomios de grado (k/2)-1. ¿Es w^2 una k/2-ésima raíz de la unidad?