

PARTE III

■ OBTENCIÓN DE MODELOS

OBTENCIÓN DE MODELOS

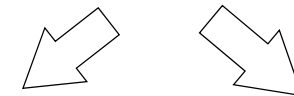
1. INFORMACIÓN SOBRE EL SISTEMA
 - EL PROPIO SISTEMA (OBSERVACIÓN, TEST)
 - CONOCIMIENTO TEÓRICO (LEYES DE LA NATURALEZA, EXPERTOS, LITERATURA, ETC.)
2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO
 - ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA
3. VALIDACIÓN

ASPECTOS A TENER EN CUENTA

- ✓ un modelo se basa siempre en aproximaciones e hipótesis
- ✓ un modelo se construye para un fin específico (debe formularse de modo que sea útil para tal fin)
- ✓ un modelo es siempre un compromiso entre la sencillez y la necesidad de recoger todos los aspectos esenciales del sistema

MODELADO E IDENTIFICACIÓN

OBTENCIÓN DE MODELOS



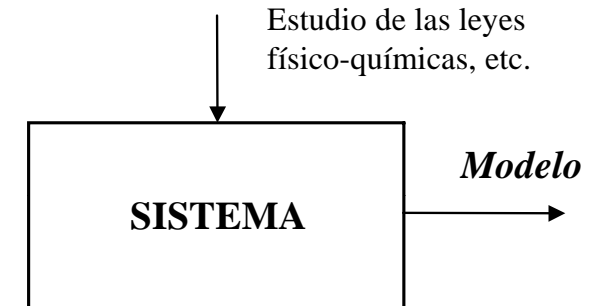
MODELADO

IDENTIFICACIÓN

MODELADO

- unas hipótesis sobre el mismo, ó
- el uso de las leyes de comportamiento físico-químicas, u otras particulares para el tipo de sistema, o bien expresiones deducidas de datos experimentales
- Los métodos de modelado generan conjuntos de ecuaciones diferenciales y algebraicas, normalmente no lineales

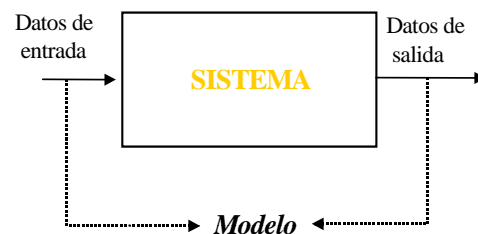
MODELADO



- ✓ amplio rango de validez
- ✓ tarea larga: requiere experiencia y conocimiento del sistema

IDENTIFICACIÓN

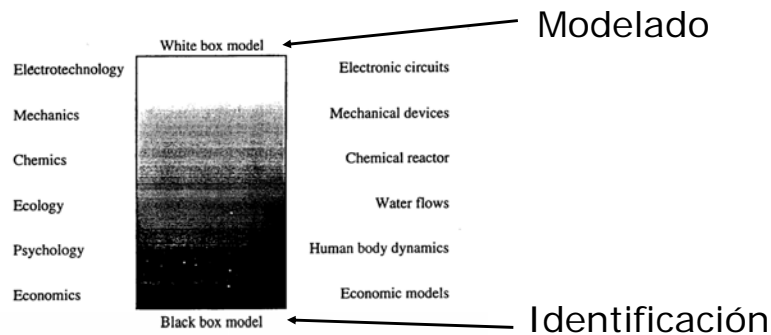
Los métodos de identificación generan ecuaciones lineales basándose exclusivamente en datos experimentales de entrada y salida exclusivamente, considerando al sistema como una caja negra



IDENTIFICACIÓN

- ✓ modelos lineales orientados a control
- ✓ entorno de validez más restringido
- ✓ suelen ser más sencillos de deducir

GRADO DE DETALLE



La complejidad va a depender del sistema que intentemos modelar y simular

MODELO SIMPLE

- MODELOS LINEALES
- ORDEN DEL MODELO NO MUY ALTO
- RELACIONES FÁCILMENTE COMPUTABLES

- ✓ Modelos manejables
- ✓ Compromiso entre complejidad y precisión

SIMPLIFICACIONES

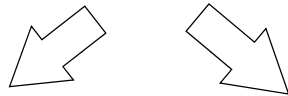
- Despreciar efectos pequeños (se usan relaciones aproximadas)
 - ⇒ depende de la precisión deseada
- Agregación de variables de estado en una que tiene un valor *medio*

SIMPLIFICACIONES

- Separación de las constantes de tiempo
 - ⇒ reducir el orden del sistema (ignorar dinámicas muy rápidas o muy lentas)
 - ⇒ No ecuaciones *stiff*: $T_{\text{máx}} / T_{\text{mín}} \leq 10-100$
 - Modelar fenómenos cuyas constantes de tiempo son de interés
 - Aproximar las dinámicas muy rápidas por relaciones estáticas
 - Aproximar como constantes las variables con dinámicas muy lentas

MODELIZACIÓN

OBTENCIÓN DE MODELOS



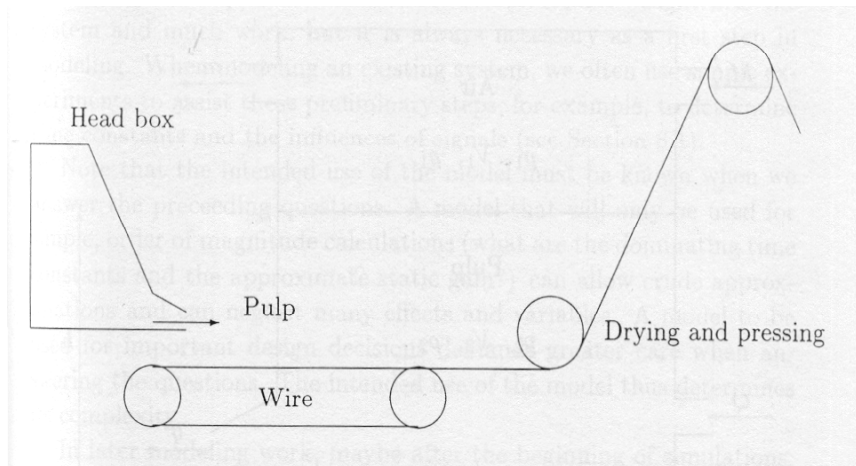
MODELADO

IDENTIFICACIÓN

FASES DE LA MODELIZACIÓN

- 1) ESTRUCTURAR EL SISTEMA: dividirlo en subsistemas y determinar causas-efectos
⇒ Diagrama de bloques
- 1) FORMULAR LAS ECUACIONES
BÁSICAS: relacionar variables y constantes en cada bloque
- 2) REPRESENTAR EL MODELO EN EL ESPACIO DE ESTADOS: formulación adecuada para análisis y simulación

EJEMPLO DE MODELIZACIÓN: MÁQUINA DE PRENSAR PAPEL



FASE 1: ESTRUCTURAR EL PROBLEMA

- OBJETIVO: nivel de precisión
- IDENTIFICAR LAS SEÑALES
 - ¿Qué señales son de interés? (salidas)
 - ¿Qué cantidades son importantes?
 - ¿Cuáles son constantes?
 - ¿Cuáles varían con el tiempo?
 - ¿Cuáles son variables internas?
 - ¿Qué variables afectan a otras variables y cómo?
 - ¿Qué relaciones son estáticas y cuáles dinámicas?
- DIAGRAMA DE BLOQUES

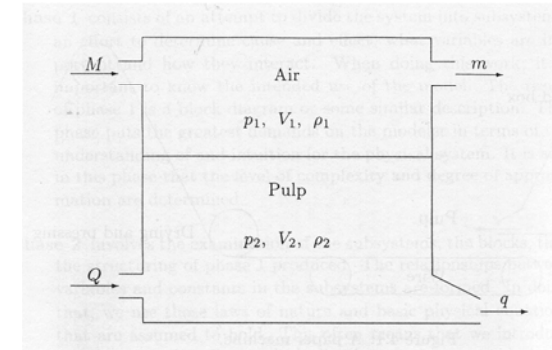
FASE 1: IDENTIFICAR EL OBJETIVO

■ OBJETIVO

ANÁLISIS DE LAS VARIACIONES
DEL FLUJO DE LA PULPA

FASE 1: IDENTIFICAR LOS BLOQUES

- Subsistema de Aire
- Subsistema de Pulpa



FASE 1: IDENTIFICAR SEÑALES

■ Entradas:

- M : velocidad del flujo del aire (flujo de masa)
- Q : velocidad del flujo de la pulpa (flujo de volumen)

■ Salidas:

- q : velocidad del flujo de salida de pulpa
- h : nivel de pulpa
- p_e : exceso de presión del aire

FASE 1: IDENTIFICAR SEÑALES

Subsistema de pulpa

Inputs:

Q : input flow rate (m^3/s)
 p_e : excess pressure in air pad (N/m^2)

Outputs:

q : output flow rate (m^3/s)
 h : pulp level (m)

Internal variables:

h_{eff} : the effective pulp level (m) (see Section 4.4)
 V_2 : pulp volume (m^3)

Constants:

A : cross sectional area of head box (m^2)
 a_2 : cross sectional area of slit (m^2)
 C : coefficient of slit area (see Section 4.4)
 V : total volume of head box (m^3)
 ρ_0 : density of pulp (kg/m^3) (assumed to be incompressible)
 g : gravitational acceleration (m/s^2)

FASE 1: IDENTIFICAR SEÑALES

Subsistema de aire

Inputs:

M : inflow of air (kg/s)

V_1 : volume of air (m³)

Output:

p_e : excess pressure of the air (N/m²)

Internal variables:

ρ_1 : density of air (kg/m³)

m : mass outflow of air (kg/s)

p_1 : pressure in air pad (N/m²)

N : mass of air in air pad (kg)

Constants:

T : absolute temperature of air (K)

(We regard the physical processes in the air pad as isothermal.)

a_1 : cross-sectional area of air outflow (m²)

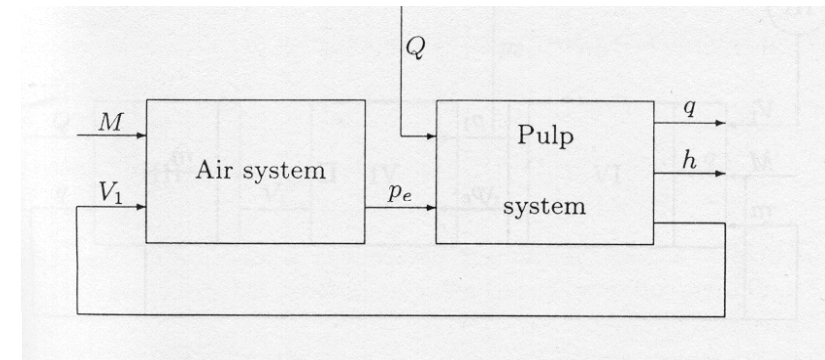
R : gas constant for air (m²/K/s²)

p_0 : atmospheric pressure (N/m²)

M. Santos

21

FASE 1: DIAGRAMA DE BLOQUES



M. Santos, UCM

22

FASE 2: RELACIONES ENTRE VARIABLES

- Leyes de conservación (energía, masa, electrones, movimiento,...) entre cantidades del mismo tipo
- Relaciones constitutivas relevantes entre cantidades de diferentes tipos (flujo en función del área, corriente en función del voltaje, etc.)

Para cada bloque

M. Santos, UCM

23

FASE 2: ECUACIONES

Subsistema de aire

Conservation law (conservation of mass)

$$\dot{N} = M - m$$

Constitutive relationships

$$N = \rho_1 \cdot V_1 \quad (\text{mass} = \text{density} \cdot \text{volume})$$

$$p_1 = R \cdot T \cdot \rho_1 \quad (\text{pressure})$$

The mass flow m is determined by Bernoulli's law for gases:

$$m = a_1 \sqrt{2p_e \rho_1}$$

The total pressure is the sum of the atmospheric and excess pressure

$$p_1 = p_e + p_0$$

M. Santos, UCM

24

FASE 2: ECUACIONES

Subsistema de pulpa

Conservation law (conservation of volume)

$$\dot{V}_2 = Q - q$$

Constitutive relationships

$$V_2 = Ah \quad (\text{volume} = \text{area} \cdot \text{height})$$

$$V_1 = V - V_2$$

The flow q is determined by Bernoulli's law, as in Se complication is the excess pressure above the pulp. Co pressure into an effective pulp level, we get

$$h_{eff} = h + \frac{p_e}{\rho_2 g}$$

The flow out of the head box now becomes

$$q = a_2 \cdot C \cdot \sqrt{2h_{eff}g}$$

FASE 3: MODELO EN EL ESPACIO DE ESTADOS

- ELEGIR UN CONJUNTO DE VARIABLES DE ESTADO
- EXPRESAR LAS DERIVADAS EN EL TIEMPO DE CADA VARIABLE SÓLO EN FUNCIÓN DE LAS VARIABLES DE ESTADO Y LAS ENTRADAS
- EXPRESAR LAS SALIDAS COMO FUNCIONES DEL ESTADO Y DE LAS ENTRADAS

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = h(x(t), u(t))$$

FASE 3: CONSIDERACIONES

- Número de variables de estado
 - Necesarias y suficientes
 - Redundantes
- Las variables de estado representan la memoria de lo que ha ocurrido antes (variables internas)
- Las variables cuya derivada aparece en alguna de las ecuaciones de la fase 2 son candidatas

FASE 3: VARIABLES DE ESTADO

Variables internas:

$$x_1 = V_2$$

(volumen de la pulpa)

$$x_2 = N$$

(masa de aire)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = \dot{V}_2 &= Q - q = Q - a_2 C \sqrt{2hg + \frac{2p_e}{\rho_2}} \\ &= Q - a_2 C \left[\frac{2gV_2}{A} + \frac{2(RT\rho_1 - p_0)}{\rho_2} \right]^{1/2} \\ &= Q - a_2 C \left[\frac{2g}{A} x_1 + \frac{2}{\rho_2} \left(\frac{RTx_2}{V - x_1} - p_0 \right) \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = \dot{N} &= M - m = M - a_1 \sqrt{2(p_1 - p_0)\rho_1} = \\ &= M - a_1 \left[2 \left(RT \frac{N}{V_1} - p_0 \right) \frac{N}{V_1} \right]^{1/2} = \\ &= M - a_1 \left[2 \left(RT \frac{x_2}{V - x_1} - p_0 \right) \frac{x_2}{V - x_1} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

FASE 3: SALIDA

Salida:

$$q = a_2 C \left[\frac{2g}{A} x_1 + \frac{2}{\rho_2} \left(\frac{RTx_2}{V - x_1} - p_0 \right) \right]^{1/2}$$

$$p_e = RT \frac{x_2}{V - x_1} - p_0$$

$$h = \frac{x_1}{A}$$

En función de x_1 , x_2 , de las entradas y constantes

RESUMEN FASES

FASE 1: ESTRUCTURAR EL PROBLEMA

- OBJETIVO DEL MODELO
- IDENTIFICAR LAS SEÑALES
 - ENTRADAS, SALIDAS, VARIABLES, CONSTANTES
- CÓMO INTERACTUAN LAS VARIABLES

DIAGRAMA DE BLOQUES

FASE 2: RELACIONES ENTRE VARIABLES

- LEYES DE CONSERVACIÓN
- RELACIONES CONSTITUTIVAS RELEVANTES

PARA CADA BLOQUE

RESUMEN FASES

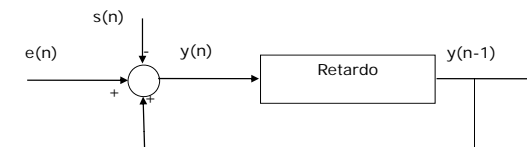
FASE 3: FORMULAR EL MODELO EN EL ESPACIO DE ESTADOS

- ELEGIR LAS VARIABLES DE ESTADO
- EXPRESAR SUS DERIVADAS EN FUNCIÓN DE LAS VARIABLES DE ESTADO Y LAS ENTRADAS
- EXPRESAR LAS SALIDAS EN FUNCIÓN DE LAS VARIABLES DE ESTADO Y LAS ENTRADAS

EJEMPLO SISTEMAS DISCRETOS

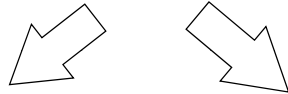
■ NÚMERO DE PERSONAS O VEHÍCULOS EN UNA COLA

- $y(n) = y(n-1) + e(n) - s(n)$
 - $y(n)$: n° personas en la cola en $t=nT$, T = unidad de tiempo (minuto, hora, ...)
 - $e(n)$: n° personas que han llegado desde la unidad de tiempo anterior al actual
 - $s(n)$: n° personas que han salido desde el minuto anterior al actual



IDENTIFICACIÓN

OBTENCIÓN DE MODELOS



MODELADO

IDENTIFICACIÓN

FASES DE LA IDENTIFICACIÓN

- ◆ Postular una clase de modelos para el sistema (por ejemplo, funciones de transferencia)
- ◆ Realizar los experimentos adecuados y tomar un conjunto de datos de entrada y salida del sistema
- ◆ Escoger un tipo de modelo y estimar sus parámetros por algún método numérico, para que las respuestas del modelo se ajusten lo mejor posible a los datos experimentales

TÉCNICAS DE IDENTIFICACIÓN

MÉTODOS RECURSIVOS

Se aplican algoritmos recursivos a los datos de entrada-salida para obtener el modelo del sistema

- ✓ suelen dar modelos lineales discretos
- ✓ la entrada puede ser cualquier valor, normalmente señales aleatorias
- ✓ dominio del tiempo y de la frecuencia

TÉCNICAS DE IDENTIFICACIÓN

MÉTODOS BASADOS EN ENTRADAS ESPECIALES

Se aplica al sistema un estímulo conocido (salto, rampa, ...), y de la respuesta se deduce el modelo

- ✓ modelos lineales
- ✓ generan funciones de transferencia
- ✓ se aplican en ambientes no estocásticos
- ✓ dominio del tiempo y de la frecuencia

EJEMPLO: IDENTIFICACIÓN EN EL DOMINIO TEMPORAL

RESPUESTA DE UN SISTEMA A UNA SEÑAL DETERMINÍSTICA

La mayoría de los procesos industriales producen una respuesta estable monótona creciente a una entrada escalón, similar a la de un sistema de primer orden con retardo

EJEMPLO DE IDENTIFICACIÓN: RESULTADOS

Modelo de primer orden con retardo (CLASE):

$$G_m(s) = \frac{K}{1 + s.T_p} e^{-sT_o}$$

- Características en el dominio temporal:

- la ganancia estática K
- la constante de tiempo dominante T_p
- el retardo aparente T_o

