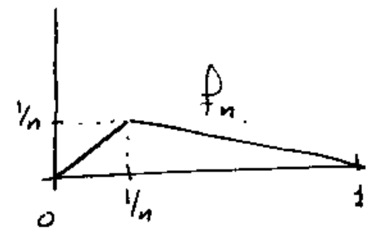
HOJA 3ª

PROBLEMA 1:

a) $f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ \frac{-x}{n-1} + \frac{1}{n-1} & x \in [1/n, 1] \end{cases}$



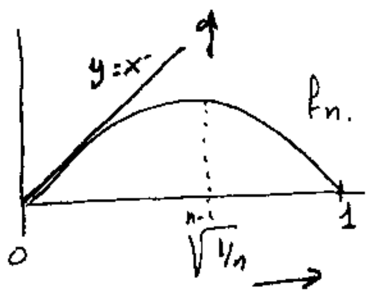
$|f_n(x)| < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, luego

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \ (\text{con } \frac{1}{n_0} < \varepsilon)$ tal que $\forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ y

así $|0 - f_n(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon$

luego $f_n \to 0$ uniformemente en cero y por tanto puntualmente

c) $f_n(x) = x - x^n$ si $x \in [0, 1]$



$f_n'(x) = 1 - nx^{n-1} = 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}$

$f_n\left(\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

DIBUJO DE LAS f_n

$\left(\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \right)$

$\frac{n}{n-1} \to 1$

y $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

① Así $\lim_{n \to \infty} x - x^n = x \quad \forall x \neq 1$

si $x = 1 \quad \lim_{n \to \infty} f_n(1) = 0$

luego $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ LÍMITE PUNTUAL.

② Cada $f_n(x) = x - x^n$ es continua en $[0,1]$ y f no es continua en $[0,1]$, por tanto f no puede ser el límite uniforme de f_n sobre $[0,1]$.

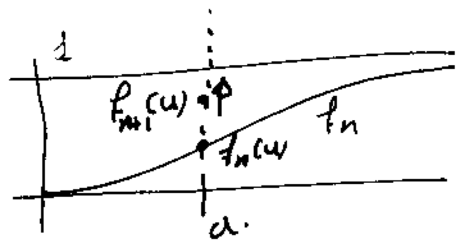
HOJA 3:

PROBLEMA 2:

c) SEA $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ $\quad x \geq 0$

PINTEMOS LAS FUNCIONES f_n.

$f_n(0) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 1$; ADEMÁS $nx < 1+nx$ SI $x > 0$ y f_n ES CONTINUA



① LÍMITE PUNTUAL

$f_n(0) = 0$

SI $x \neq 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx} = 1$ $\quad \Big\}$ ASÍ $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{SI } x = 0 \\ 1 & \text{SI } x \neq 1 \end{cases}$

ES EL LÍMITE PUNTUAL DE LA SUCESIÓN.

COMO $f_n(x)$ ES CONTINUA $\forall x \geq 0$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, f NO

y f ES DISCONTINUA EN CERO,

PUEDE SER EL LÍMITE UNIFORME EN $[0,a]$.

② POR OTRO LADO EN $[a,\infty)$, $a > 0$, TENEMOS QUE:

$$f_n'(x) = \frac{n(1+nx) - n^2x}{(1+nx)^2} = \frac{n}{(1+nx)^2} > 0$$

f_n ES CRECIENTE EN $[0,\infty)$.

ASÍ $\quad f_n(a) \leq f_n(x) \leq 1 \quad \forall x \in [a,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an}{1+an} = 1$$

LUEGO $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$: $n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{an}{1+an} \leq \varepsilon$.

LUEGO $\quad 0 \leq 1 - f_n(x) \leq 1 - \frac{an}{1+an} \leq \varepsilon \quad \forall x \geq a$.

LUEGO $f_n \to 1$ UNIFORMEMENTE EN $[a,\infty)$

HOJA 3:

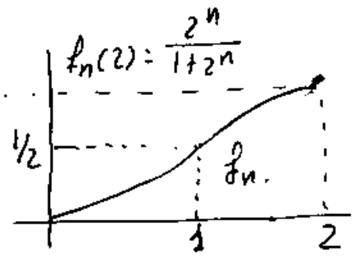
PROBLEMA 3:- SEA $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ $\quad x \in [0,2]$

PINTEMOS $f_n(x)$

$f_n(0)=0$, $\quad 0 \le f_n(x) \le 1$ $\quad$ Y $\quad f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^n) - x^n n x^{n-1}}{(1+x^n)^2} =$

$0 \le x^n \le 1+x^n$

$= \frac{n x^{n-1}}{(1+x^n)^2} \geq 0 \quad x \geq 0$

ASI 

① LÍMITE PUNTUAL

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 0 & \text{SI } x = 0 \\ 0 & \text{SI } x \in (0,1) \\ 1/2 & \text{SI } x = 1 \\ 1 & \text{SI } x \in (1,2]. \end{cases}$$

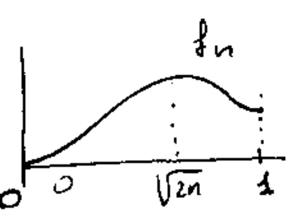
$$\left(\frac{1}{\frac{1}{x^n}+1} \right)$$

COMO CADA $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ ES CONTINUA EN $[0,2]$ Y EL LÍMITE PUNTUAL ES DISCONTINUO, SE SIGUE QUE f NO PUEDE SER EL LÍMITE UNIFORME DE f_n SOBRE $[0,2]$.

PROBLEMA 4:- LÍMITE PUNTUAL $\lim_{n\to\infty} n^2 x e^{-nx^2} = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

$f_n(0)=0$, $f_n'(x) = n^2 e^{-nx^2} + n^2 x(-2nx e^{-nx^2}) =$

$= n^2 e^{-nx^2}[1 - 2nx^2]$



a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) : \lim_{n\to\infty} \left. \frac{-ne^{-nx^2}}{2} \right|_0^1 = \lim_{n\to\infty} -\frac{e^{-n}}{2} + \frac{n}{2} = \infty$

COMO $\int_0^1 0\,dx = 0$ NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME

b) $\lim_{n\to\infty} (\lim_{x\to 1} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty} n^2 e^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$

f_n CONTINUA

$\lim_{x\to 1} 0 = 0$ $\quad$ EN ESTE CASO LA IGUALDAD ES CIERTA

c) $f'(1/2) = 0$ Y $\lim_{n\to\infty} f_n'(1/2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{-n/4}} [1 - \frac{n}{2}] = 0$

HOJA 3ª

PROBLEMA 5º] SEA $f(x) = \frac{1}{x}$ $x \in (0,1]$

SEA $f_n(x) = \begin{cases} n & \text{SI } x \in [0, 1/n] \\ 1/x & \text{SI } x \in [1/n, 1] \end{cases}$

CLARAMENTE f ES EL LÍMITE PUNTUAL DE (f_n), PERO NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME

— o —

SI $f \; A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NO ESTÁ ACOTADA (ed. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists a_n \in A$ con $|f(a_n)| > n$) y $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE SOBRE A.

SUPONGAMOS QUE $f_n \to f$ CON CADA f_n ACOTADA:

DADO $\varepsilon = 1$ $\exists n_0 : k \geq n_0$

$$|f(x) - f_k(x)| \leq 1 \quad \forall x \in A$$

ASÍ $\big|\, |f_k(a_n)| - |f(a_n)| \,\big| \leq |f_k(a_n) - f(a_n)| < 1$

$$|f_k(a_n)| > n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ES DECIR f_k NO ESTÁ ACOTADA $\forall k \geq n_0$. LUEGO

LUEGO NO ES POSIBLE LA SITUACIÓN QUE PRESENTA EL ENUNCIADO

PROBLEMA 6: $\operatorname{sen} t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ASÍ $\frac{\operatorname{sen} t}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!}$

ESTA ES UNA SERIE DE POTENCIAS QUE CONVERGE UNIFORMEMENTE EN TODO INTERVALO $[-M, M]$ (RADIO DE CONVERGENCIA ∞ ¡COMPROBAR!)

ASÍ $\int_1^a \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_1^a \frac{t^{2k}}{(2k+1)!}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}\Big|_1^a = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^{2k+1} - 1}{(2k+1)(2k+1)!}$

b) $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \underset{\text{por a)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k+1}} \frac{1}{(2k+1)(2k+1)!}$

OBSERVEMOS QUE $\left| \sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k+1}} \frac{1}{(2k+1)(2k+1)!} \right| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} \cdot \frac{1}{2^{2k+1}} = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{4^{2k+1}} =$

$= \frac{1}{4} \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \underset{\text{SERIE GEOMÉTRICA}}{=} \overset{k_0 \neq 0}{} \frac{1}{4} \left(\frac{\frac{1}{16^{k_0}}}{1 - \frac{1}{16}} \right) = \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{16^{k_0}} \underset{(*)}{<} \frac{1}{10000}$

$k_0 = 4$

HOJA 3ª

PROBLEMA 7:) a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ SERIE DE POTENCIAS

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}^2 nx}{n^2}$ COMO $\left| \frac{\text{sen}^2 nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Y COMO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, POR LA PRUEBA M-WEIERSTRASS SE SIGUE QUE LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE EN TODO $\mathbb{R}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^n \underset{\downarrow}{=}$ SERIE GEOMETRICA CON $\frac{1}{x^2+1} < 1$, $x \neq 0$

$$= x^2 \frac{\frac{1}{x^2+1}}{1-\frac{1}{x^2+1}} = \frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{\frac{x^2}{x^2+1}} = 1 \quad \text{LÍMITE PUNTUAL}$$

PARA $x=0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{(0+1)^n} = 0$ Y POR TANTO EL LÍMITE PUNTUAL ES DISCONTINUO Y POR TANTO NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN $[-M, M]$ $\forall M > 0$

e) $x > 0$ ASÍ $\sum_{n=1}^{N} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} = x \sum_{n=1}^{N} \frac{A}{(n-1)x+1} + \frac{B}{nx+1} =$

$=$ DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES SALE $B=n$ Y $A = 1-n$ $= x \sum_{n=1}^{N} \frac{-(n-1)}{(n-1)x+1} + \frac{n}{nx+1} =$

$$= x \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{2x+1} + \quad + \frac{N}{Nx+1} \right\} = \frac{xN}{Nx+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$$

COMO PARA $x=0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} = 0$, NO HAY QUE ESPERAR CONVERGENCIA UNIFORME EN $[0, M)$

EN CAMBIO, SI $x \geq M$ $\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} \leq \frac{x}{((n-1)M+1)(nM+1)} \leq$

SI $M \leq x \leq a$

$$\leq \frac{a}{((n-1)M+1)(nM+1)} \quad \text{Y COMO} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{((n-1)M+1)(nM+1)} < \infty$$

LA PRUEBA M-WEIERSTRASS NOS DICE QUE HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN $[M, a]$ $\forall M > 0$ Y $\forall a > M$.

HOJA 3:

PROBLEMA 8: $\left|\dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^3}\right| \le \dfrac{1}{n^3}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, LUEGO $\sum \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^3} = f(x)$

CON CONVERGENCIA UNIFORME A f EN TODO $\mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos nx}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

Y COMO $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ Y $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} < \infty$, ASÍ

SEGÚN LA PRUEBA DE M-WEIERSTRASS NOS DICE

QUE $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE EN TODO $\mathbb{R}$

POR TANTO (VER TEORÍA) EXISTE $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$

COMO CADA $\dfrac{\cos nx}{n^2}$ ES CONTINUA EN TODO $\mathbb{R}$ Y

LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A f',

f' ES CONTINUA EN TODO $\mathbb{R}$ (VER TEORÍA)

PROBLEMA 9:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n!}$ $\quad \lim_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}|x|^{(n+1)!}}{2^n|x|^{n!}} = \lim_{n\to\infty} 2|x|^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{SI } |x|<1 \\ 2 & \text{SI } |x|=1 \\ \infty & \text{SI } |x|>1 \end{cases}$

ESTA SERIE NO ES DE POTENCIAS, PERO EL CRITERIO

DEL LÍMITE NOS DICE QUE CONVERGE SI $x \in (-1,1)$

POR OTRO LADO SI $x \in [-M, M]$, $M < 1$ SE TIENE QUE

$$|2^n x^{n!}| \le 2^n M^{n!} \quad \text{Y} \quad \sum 2^n M^{n!} < \infty \quad \text{SI } M<1,$$

ASÍ POR LA PRUEBA M-WEIERSTRASS, LA

SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n!}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE EN

$[-M, M]$.

HOJA 3:

PROBLEMA 11: SEA $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n (n!)^2}$

APLIQUEMOS EL CRITERIO DEL COCIENTE PARA CALCULAR EL RADIO DE CONVERGENCIA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{2n+2}}{4^{n+1}((n+1)!)^2}}{\frac{|x|^{2n}}{4^n (n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} |x|^2 \frac{1}{4} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$$

ASI EL RADIO DE CONVERGENCIA ES INFINITO Y LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $[-M, M]$, Y COMO ES UNA SERIE DE POTENCIAS SE PUEDE DERIVAR TERMINO A TERMINO Y (UNA, DOS, TRES.. VECES) TERMINO A TERMINO CONVERGENTES SE TIENEN SERIES UNIFORMEMENTE CONVERGENTES EN TODO $\mathbb{R}$ (VER TEORIA) ASI

$$x f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4^n (n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{4^{n-1} ((n-1)!)^2}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{4^n (n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{4^{n-1} 2\, n!\, (n-1)!}$$

$$x f''(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1) x^{2n-2}}{4^n (n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1) x^{2n-1}}{4^n (n!)^2}$$

SUMANDO ESTAS TRES SERIES TERMINO A TERMINO

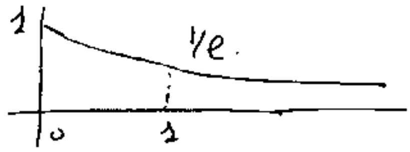
$$x f(x) + f'(x) + x f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1} ((n-1)!)^2} + \frac{(-1)^n}{4^{n-1} 2\, n! (n-1)!} + \frac{(-1)^n (2n-1)}{4^{n-1} 2 (n!) (n-1)!} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} \left[(-1) \frac{2n - 1 - (2n-1)}{4^{n-1} 2 (n!) (n-1)!} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} \times 0 = 0.$$

HOJA 3:

PROBLEMA 12:

d) $f(x) = e^{-x}$



$I = [0,1]$, $\| e^{-x} \|_\infty = 1$

$I = [0,\infty)$ $\| e^{-x} \|_\infty = 1$

$I = [0,1]$ $\| e^{-x} \|_2^2 = \int_0^1 (e^{-x})^2 dx = \int_0^1 e^{-2x} dx =$

$= \dfrac{e^{-2x}}{-2} \Big|_0^1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2e^2}$

ASI $\| e^{-x} \|_2 = \sqrt{1/2 - 1/2e^2}$

$I = [0,\infty)$ $\| e^{-x} \|_2^2 = \int_0^\infty (e^{-x})^2 = \dfrac{e^{-2x}}{2} \Big|_0^\infty =$

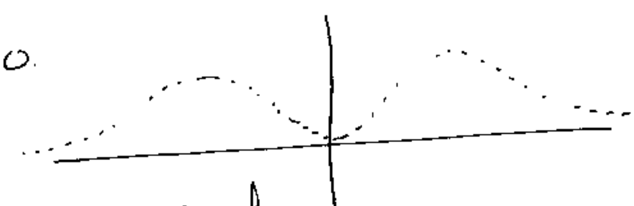
$= \dfrac{1}{2}$ y ASI $\| e^{-x} \|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

PROBLEMA 13: a) $f_n(x) = \dfrac{2nx^2}{n^2x^4+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{SI } x=0 \\ 0 & \text{SI } x\neq 0 \end{cases}$

LUEGO EL LÍMITE PUNTUAL ES $f \equiv 0$

b) f_n ES PAR YA QUE $f_n(-x) = f(x)$, $f(0) = 0$ y

$\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{2nx^2}{n^2x^4+1} = 0.$



$f_n \geq 0$

ASI $\| f_n \|_\infty$ ESTARÁ EN LOS MÁXIMOS DE f_n.

$f_n'(x) = \dfrac{4nx[n^2x^4+1] - 2nx^2[4n^2x^3]}{(n^2x^4+1)^2} = \dfrac{-4n^3x^5 + 4nx}{(n^2x^4+1)^2} = \dfrac{4nx[1-n^2x^4]}{n^2x^4+1}$

$f_n'(x) = 0 \iff x = 0$ ó $x = \sqrt[4]{\dfrac{1}{n^2}} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{n}}$

Y ASI $\| f_n \|_\infty = f_n(\pm\sqrt{1/n}) = \dfrac{2n\,1/n}{n^2\frac{1}{n^2}+1} = \dfrac{2}{2} = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME

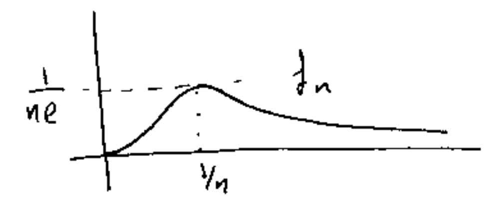
HOJA 3ª

PROBLEMA 14:

b) $f_n(x) = x\, e^{-nx}$ SI $x \geq 0$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$ LÍMITE PUNTUAL.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n(0) = 0 \quad y \quad \lim_{x\to\infty} x e^{-nx} = 0 \\ f_n'(x) = e^{-nx} - nx\, e^{-nx} = \end{array} \right.$$



$$= e^{-nx}\{1 - nx\} = 0 \iff x = \frac{1}{n}.$$

$$y \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\, e^{-n\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\, e^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

POR TANTO $f_n \longrightarrow 0$ UNIFORMEMENTE EN $\mathbb{R}$

COMO LA CONVERGENCIA UNIFORME IMPLICA LA CONVERGENCIA EN MEDIA CUADRÁTICA SE TIENE QUE $f_n \xrightarrow{\|\ \|_2} 0$ EN $I = [0, M]$ $\forall M > 0$

PROBLEMA 15: VIMOS EN EL PROBLEMA 13: QUE

$$\frac{2nx^2}{n^2x^4+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{PUNTUALMENTE}$$

- PERO NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME
- POR TEORÍA SI $f_n(x) \xrightarrow{\|\ \|_2}$, LO HACE A SU LÍMITE PUNTUAL, SI ESTE EXISTE. ASÍ

$$\|f_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2nx^2}{n^2x^4+1}\right)^2 dx \underset{\text{FUNCIÓN PAR}}{=} 2\int_0^{\infty} \frac{4n^2x^4}{(n^2x^4+1)^2}\, dx \leq$$

$$\leq 2\left[\int_0^1 \frac{2nx^2}{n^2x^4+1}\, dx + \int_1^{\infty} \frac{4n^2x^4}{(n^2x^4)^2}\, dx\right] \leq \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \leq 1$$

$0 \leq f_n(x) \leq 1$

$$\leq 2\left[\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \times 1 + f_n\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\left[1 - \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right] + \frac{1}{n^2}\int_1^{\infty} \frac{4}{x^6}\, dx\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

VER GRÁFICA DE f_n EN EL PROBLEMA 13

LUEGO HAY CONVERGENCIA EN MEDIA CUADRÁTICA