EJEMPLOS DE MODELOS

Diferentes áreas

- SISTEMA ECOLÓGICO
- SISTEMA DE FLUJO
- SISTEMA ECONÓMICO

UN SISTEMA ECOLÓGICO

- DOS ESPECIES ANIMALES N_1, N_2
  - CASO 1: compiten por el mismo alimento
  - CASO 2: situación depredador-presa
- OBJETIVO: variaciones en el número de individuos de cada especie
  - *Evolución de la población*

UN SISTEMA ECOLÓGICO

Nº individuos de cada especie en un instante t: $N_1(t)$, $N_2(t)$

DATOS DE PARTIDA:

➢Tasa de nacimientos: λ_1, λ_2 (constantes)

$\lambda_i . N_i$ individuos de la especie *i* nacen por unidad de tiempo

➢Tasa de mortalidad: $\mu_i(N1,N2)$

$\mu_i(N1,N2).N_i$ individuos de la especie *i* mueren por unidad de tiempo

MODELO DEL SISTEMA ECOLÓGICO

Balance

$$\frac{d}{dt} N_1(t) = \lambda_1 N_1(t) - \mu_1(N_1, N_2).N_1(t)$$

$$\frac{d}{dt} N_2(t) = \lambda_2 N_2(t) - \mu_2(N_1, N_2).N_2(t)$$

*Nota: siempre $N_1(t)$ y $N_2(t)$

CASO 1: Las especies compiten

La mortalidad depende de la cantidad de comida y, por lo tanto, del número de individuos

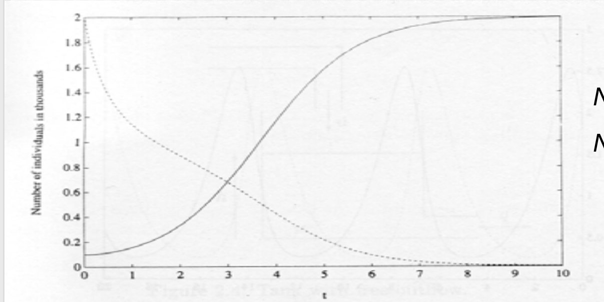
$$\mu_i(N_1, N_2) = \gamma_i + \delta_i(N_1 + N_2) \quad \delta_i > 0,\ i = 1,2$$

$$\frac{d}{dt} N_1(t) = (\lambda_1 - \gamma_1) N_1(t) - \delta_1(N_1 + N_2).N_1(t)$$

$$\frac{d}{dt} N_2(t) = (\lambda_2 - \gamma_2) N_2(t) - \delta_2(N_1 + N_2).N_2(t)$$

CASO 1: Resultados y conclusiones

$\lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = 2;\ \gamma_1 = \gamma_2 = \delta_1 = \delta_2 = 1$



N_1 (línea continua)

N_2 (línea de puntos)

Si $(\lambda_1 - \gamma_1)/\delta_1 > (\lambda_2 - \gamma_2)/\delta_2$

la segunda especie desaparecerá y la primera llegará

a $(\lambda_1 - \gamma_1)/\delta_1$

independientemente del número inicial de individuos

CASO 2: Depredadores (N1) y presas (N2)

$$\mu_1(N_1, N_2) = \gamma_1 - \alpha_1 N_2, \qquad \alpha_1 > 0$$

$$\mu_2(N_1, N_2) = \gamma_2 + \alpha_2 N_1, \qquad \alpha_2 > 0$$

La mortalidad de N1 disminuye cuando N2 aumenta (su alimento)

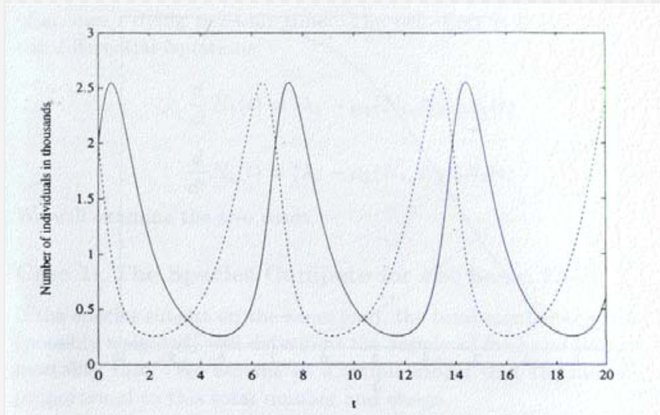
La mortalidad de N2 (presa) aumenta cuando N1 aumenta

$$\frac{d}{dt} N_1(t) = (\lambda_1 - \gamma_1) N_1(t) + \alpha_1 N_2(t).N_1(t)$$

$$\frac{d}{dt} N_2(t) = (\lambda_2 - \gamma_2) N_2(t) - \alpha_2 N_1(t).N_2(t)$$

CASO 2: Resultados y conclusiones

$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 2;\ \gamma_1 = 2;\ \gamma_2 = 1;\ \alpha_1 = \alpha_2 = 1$

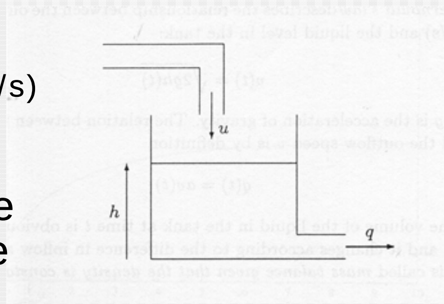


N_1: depredadores (línea continua); N_2: presas (línea punteada)

UN SISTEMA DE FLUJO

DATOS DE PARTIDA

- Sección del depósito A (m^2)
- Sección de la abertura de salida *a* (m^2)
- Nivel de líquido en el depósito h (m)
- Flujo de entrada u (m^3/s)
- Flujo libre de salida q (m^3/s)



- OBJETIVO: variación del flujo de salida con el flujo de entrada (altura)

MODELO DE FLUJO

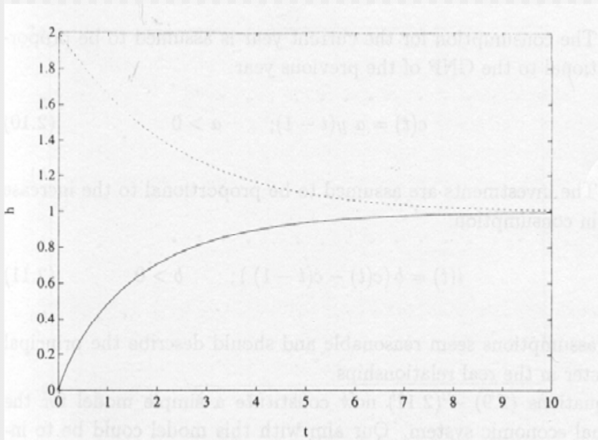
Balance de masas $\frac{d}{dt}Ah(t)=u(t)-q(t)$

L. Bernoulli $q(t)=a.v(t) \quad v(t)=\sqrt{2gh(t)}$

$$q(t)=a\sqrt{2g}.\sqrt{h(t)}$$

$$\frac{d}{dt}h(t)=-\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)}+\frac{1}{A}u(t)$$

Resultados y conclusiones



Variación de h(t) cuando u(t) = 1; A = 1; $a\sqrt{2g}=1$

Condiciones iniciales: h(0) = 0 y h(0) = 2

UN SISTEMA ECONÓMICO

y(n): producto nacional bruto (PNB), año n

c(n): consumo total, año n

i(n): inversión total, año n

g(n): gastos del gobierno, año n

y(n) = c(n) + i(n) + g(n)

- OBJETIVO: cómo influyen g(n) y c(n) en la economía del país y(n)

MODELO ECONÓMICO

Modelo Keynesiano (Samuelsson):

c(n) = ay(n-1); a>0

$\Rightarrow$ c(n+1) = ay(n)

i(n) = b(c(n)-c(n-1)); b>0

y(n)=ay(n-1)+b(ay(n-1)-ay(n-2)) + g(n)

y(n)-(a+ab)y(n-1)+aby(n-2))=g(n)

MODELO ECONÓMICO

Predicción económica: y(n+1)

= c(n+1)+i(n+1)+g(n+1)

= c(n+1)+b(c(n+1)-c(n))+g(n+1)

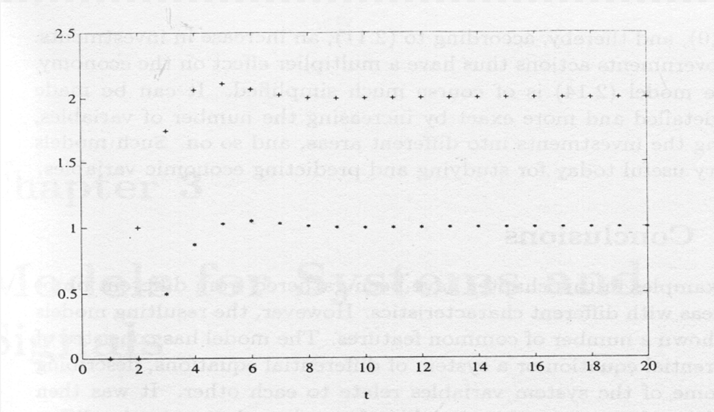
= (1+b)ay(n)-bc(n)+g(n+1)

Gasto: c(n+1) = ay(n)

Notación matricial

$$\begin{pmatrix} c(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & (1+b)a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(n) \\ y(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} g(n+1)$$

Resultados y conclusiones



Variación del PNB (cruces) y del consumo c(n) (asteriscos) con el incremento de gastos g(n); n=2, a=b=0.5