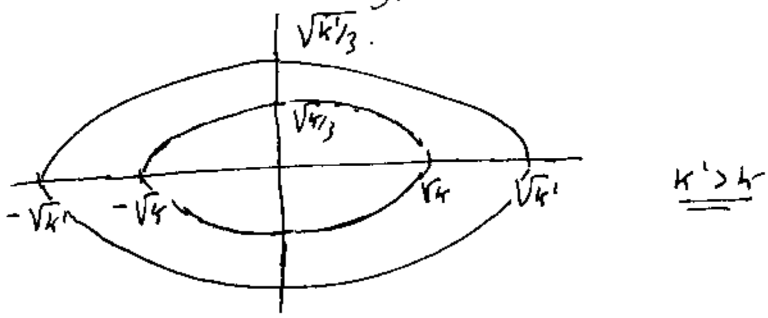
HOJA 6ª

PROBLEMA 2º

a) $x^2+3y^2=k$ SI $k<0$ NO TIENE SENTIDO LA ECUACIÓN YA QUE $x^2+3y^2\geq 0$.

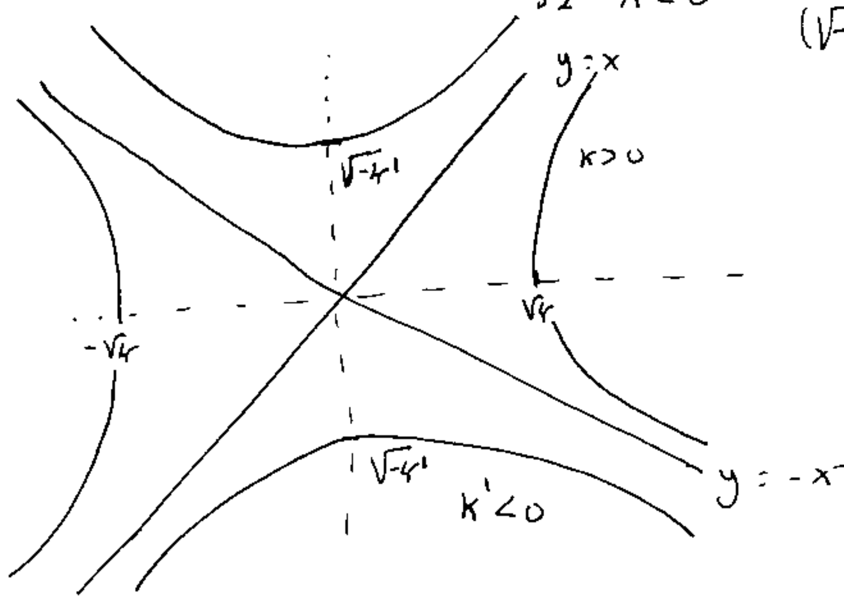
SI $k>0$, $\dfrac{x^2}{(\sqrt{k})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{k/3})^2}=1$ ECUACIÓN DE UNA ELIPSE



c) $x^2-y^2=k$ SI $k>0$ $\dfrac{x^2}{(\sqrt{k})^2}-\dfrac{y^2}{(\sqrt{k})^2}=1$ SON HIPÉRBOLAS

SI $k=0$ $(x-y)(x+y)=0$ SON DOS RECTAS

SI $k<0$ $\dfrac{y^2}{(\sqrt{-k})^2}-\dfrac{x^2}{(\sqrt{-k})^2}=1$ SON HIPÉRBOLAS.



HOJA 6ª

PROBLEMA 2º]

d) $xy(y-x)-2x^2+y^2=0$

REPRESENTAR CURVAS DADAS POR UN POLINOMIO EN DOS VARIABLES NO ES EN GENERAL UN PROBLEMA FÁCIL. HAY ALGUNOS PASOS ESTÁNDAR QUE HAY QUE CONSIDERAR, ALGUNOS TIENEN QUE VER CON EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA.

SEA $f(x,y)=xy(y-x)-2x^2+y^2$

NO HAY SIMETRÍAS

ES DECIR $f(x,y)\neq f(-x,-y)$, $f(x,-y)\neq f(x,y)$, $f(-x,y)\neq f(x,y)$ Y $f(x,y)\neq -f(-x,-y)$, $f(x,-y)\neq -f(x,y)$, $f(-x,y)\neq -f(x,y)$

ESTUDIO DE REGIONES:

$0=f(x,y)\iff xy(y-x)=2x^2-y^2$

CONSIDEREMOS

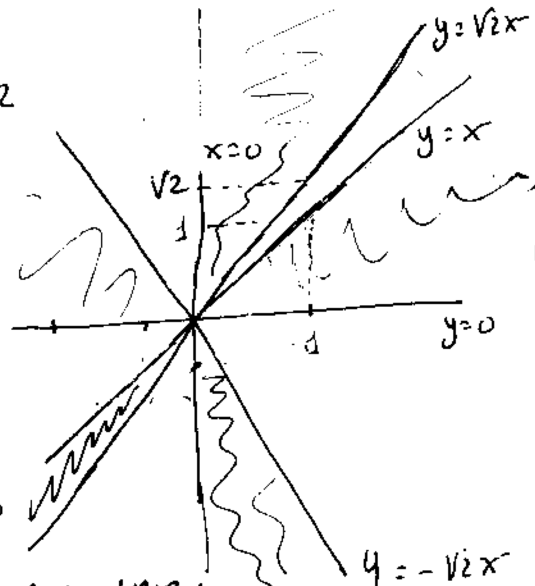
$x=0$

$y=0$

$y-x=0$

$2x^2-y^2=$

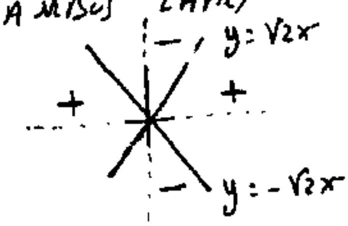
$=(\sqrt{2}x-y)(\sqrt{2}x+y)=0$



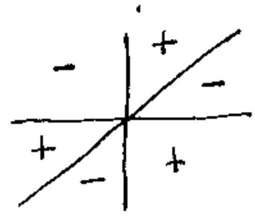
(*)

OBSERVANDO LOS SIGNOS DE AMBOS LADOS DE LA IGUALDAD

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\quad 2x^2-y^2 \begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$



$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\quad xy(y-x) \begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$



EN LAS ZONAS RALLADAS DE (*) NO PUEDE HABER CURVA.

OTRAS REGIONES: $xy(y-x)-2x^2+y^2=-(y+2)x^2+(x+1)y^2=0$

$\iff (y+2)x^2=(x+1)y^2$ ASÍ EN $\{(x,y): y>-2 \text{ y } x<-1\}\cup\{(x,y): y<-2 \text{ y } x>-1\}$

NO HAY CURVA

HOJA 6ª

PROBLEMA 2:

d) CONTINUACIÓN:

ASINTOTAS HORIZONTALES.

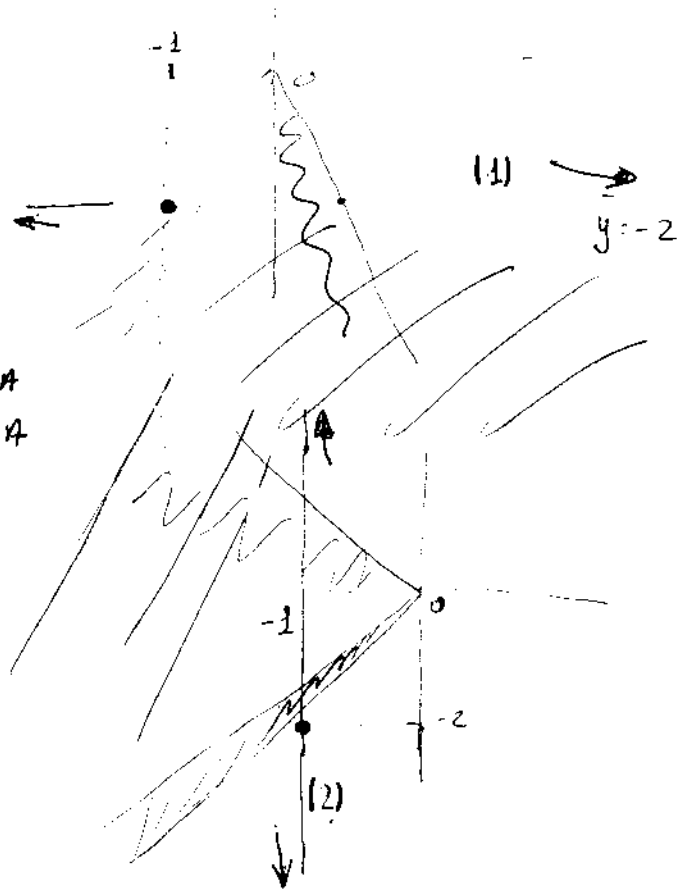
COEFICIENTE DE LA POTENCIA MAS ALTA DE X IGUALADO A CERO

EN NUESTRO CASO

$-yx^2-2x^2+y^2x+y^2=$

$=(-y-2)x^2+(1+x)y^2=0$

ASÍ $y+2=0$ ASINTOTA $\boxed{\text{HORIZONTAL } y=-2}$ (1)



ASINTOTAS VERTICALES

COEFICIENTE DE LA POTENCIA MAS ALTA DE Y IGUALADO A CERO

EN NUESTRO CASO $x+1=0$, $x=-1$ (2)

TANGENTES

SEGÚN EL T. DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA, LA PENDIENTE DE LAS RECTAS TANGENTE VIENE DADO POR $m=\dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$

HORIZONTALES: SI $\nabla f(x,y)\neq 0$ $\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ f(x,y)=0\end{array}\right.$

EN NUESTRO CASO $\left\{\begin{array}{l}y^2(x+1)=x^2(y+2)\\ y^2-2x(y+2)=0\end{array}\right.$

HACIENDO CUENTAS $y=0$ NO HAY

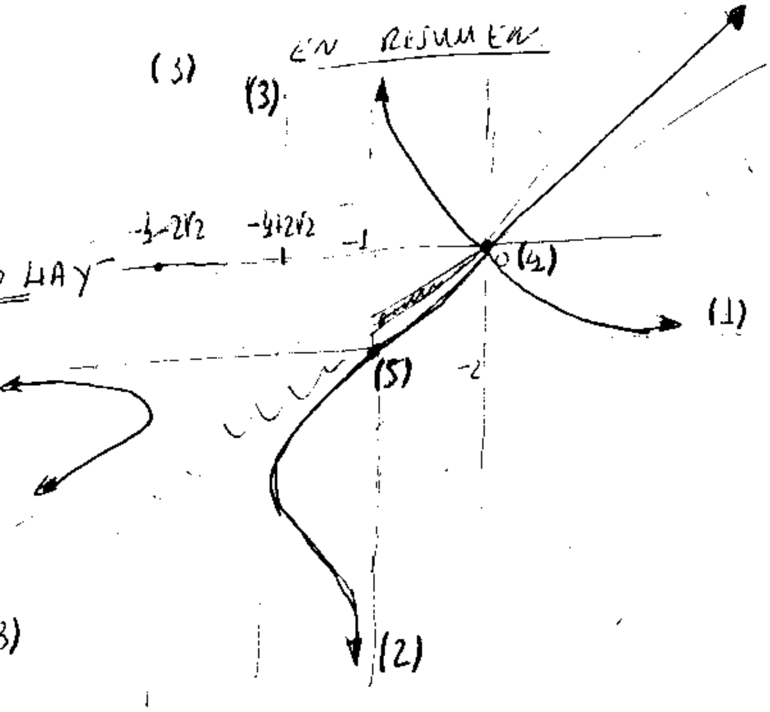
VERTICALES SI $\nabla f(x,y)\neq 0$ $\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial y}=0\\ f(x,y)=0\end{array}\right.$

EN NUESTRO CASO $\left\{\begin{array}{l}y^2(x+1)=x^2(y+2)\\ 2y^2(x+1)-x^2=0\end{array}\right.$

HACIENDO CUENTAS $x=-4\pm 2\sqrt{2}$ (3)

PUNTOS $f(0,0)=0$ (4) Y $f(-1,-2)=0$ (5)

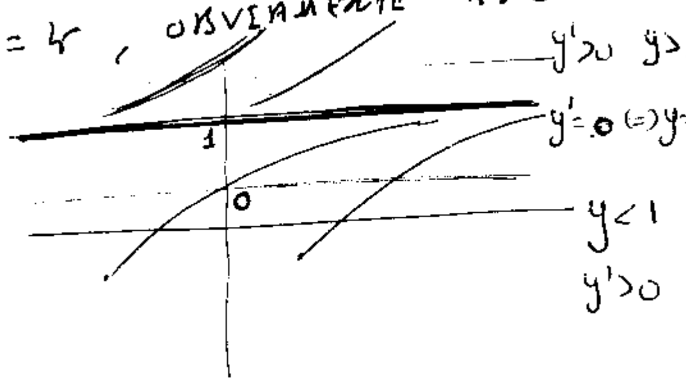
EN RESUMEN



HOJA 6:

PROBLEMA 3:

a) $y' = (y-1)^2$ LAS LINEAS ISOCLINAS SON LA FAMILIA DE CURVAS DEL PLANO $(y-1)^2 = k$, OBVIAMENTE $k > 0$



$\Rightarrow$ $y = \sqrt{k} - 1$ si $y > 1$

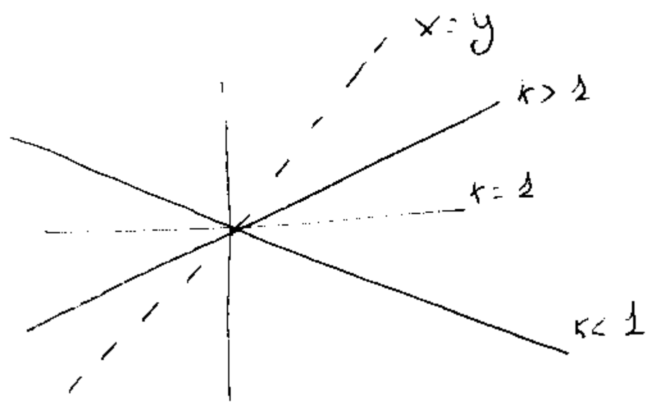
ó $y = 1 - \sqrt{k}$ si $y < 1$

si $y = 1$, $(y-1)^2 = 0$

c) $y' = (x+y)(x-y)^{-1}$

$0 = (x+y)(x-y)^{-1} \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow x=-y$

ISOCLINA NULA

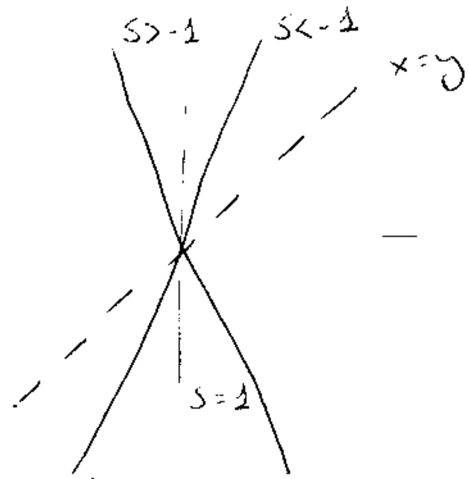


$0 < k = \frac{x+y}{x-y} \Leftrightarrow$

$kx - ky = x + y$ Y ASI

$(k-1)x = (k+1)y$

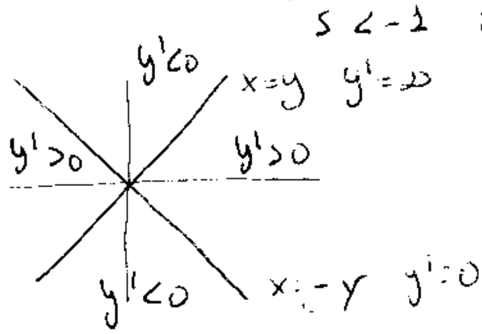
$y = \frac{(k-1)x}{k+1}$ $\begin{cases} k=0 & y=0 \\ k>1 & 1 > \frac{k-1}{k+1} > 0 \\ k<1 & -1 < \frac{k-1}{k+1} < 0 \end{cases}$



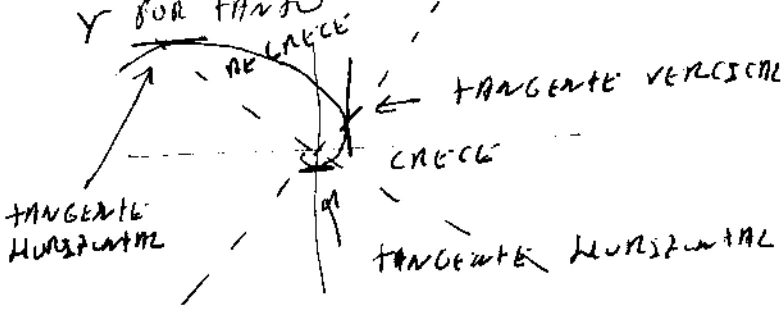
$0 > s = \frac{x+y}{x-y}$

$y = \frac{s-1}{s+1}x$ $\begin{cases} s=-1 & x=0 \\ s>-1 & -\infty < \frac{s-1}{s+1} < -1 \\ s<-1 & 1 < \frac{s-1}{s+1} < \infty \end{cases}$

ASI



Y POR TANTO



HOJA 6:

PROBLEMA 4:

a) $(1+e^t)\,x(t)\,x'(t) = e^t \iff x(t)\,x'(t) = \dfrac{e^t}{1+e^t}$

Como $\displaystyle\int x(t)x'(t)\,dt = \frac{x^2(t)}{2}$

Y como $\displaystyle\int \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \lg(1+e^t) + k$ $\Big\} \Rightarrow \dfrac{x^2(t)}{2} = \lg(1+e^t)+k$

Y así la solución general de esta ecuación es

$$|x(t)| = \sqrt{2\lg(1+e^t)+k} \quad \text{con } k \geq 0.$$

c) $y' = 2y^2 - 2y \iff \dfrac{y'}{2y^2-2y} = 1$

$\displaystyle\int 1\,dx = x + k$

$\displaystyle\int \frac{y'}{2y^2-2y}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u(u-1)}\,du = \frac{1}{2}\int -\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1}\,du = \frac{1}{2}\left(-\lg u + \lg(u-1)\right) =$

$u = y(x)$

$du = y'(x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\lg\left(\frac{y(x)-1}{y(x)}\right) = x + k \Rightarrow$$

$1 - \dfrac{1}{y(x)} = e^{2x+2k}$ y así $y(x) = \dfrac{1}{1-e^{2x}e^{2k}}$.

d) $d_1)$ $\begin{cases} y'x^3 \operatorname{sen} y = 2 \\ y \xrightarrow[x\to\infty]{} \pi/3 \end{cases}$ La solución general de la ecuación $y' \operatorname{sen} y = \dfrac{2}{x^3}$ será

$\displaystyle\int y' \operatorname{sen} y\,dx = -\cos y(x)$

$\displaystyle\int \frac{2}{x^3}\,dx = -\frac{1}{x^2} + k$ $\Bigg\} \Rightarrow y(x) = \operatorname{Arc\,cos}\left(\frac{1}{x^2} + k\right)$

Si $y \xrightarrow[x\to\infty]{} \pi/3 \Rightarrow \operatorname{Arc\,cos} k = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{k = \cos\frac{\pi}{3}}$

Y así $y(x) = \operatorname{Arc\,cos}\left(\dfrac{1}{x^2} + \cos\dfrac{\pi}{3}\right)$.

HOJA 6:

PROBLEMA 5º]

a) $\begin{cases} x' + 5x = t^2 \\ x(0) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = -5x + t^2 \\ x(0) = 3 \end{cases}$

ECUACIÓN LINEAL NO HOMOGÉNEA.

LA SOLUCIÓN GENERAL DE $x' = -5x$ ES $x(t) = ke^{-5t}$.

USANDO EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES PROBAMOS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL TIPO

$y(t) = k(t)e^{-5t}$ Y ASÍ

$$y'(t) = k'(t)e^{-5t} + \cancel{k(t)(-5)e^{-5t}} =$$

$$= \cancel{-5k(t)e^{-5t}} + t^2 \implies k'(t) = t^2e^{5t}.$$

ASÍ $\int k'(t) = k(t) = \int t^2e^{5t} \underset{\text{PARTES}}{=} \frac{t^2e^{5t}}{5} - \frac{2}{5}\int te^{5t}\,dt \underset{\text{PARTES}}{=}$

$$= \frac{t^2e^{5t}}{5} - \frac{2}{5}\left\{t\frac{e^{5t}}{5} - \frac{1}{5}\int e^{5t}\,d\right\} =$$

$$= \frac{t^2e^{5t}}{5} - \frac{2}{25}te^{5t} + \frac{2}{5^3}e^{5t}$$

LUEGO LA SOLUCIÓN GENERAL ES.

$$x(t) = ke^{-5t} + \frac{\cancel{e^{5t}}}{5}\left[t^2 - t/_5 + \frac{2}{25}\right]\cancel{e^{-5t}}$$

COMO $x(0) = 3 \implies k + \frac{2}{125} = 3 \implies k = 3 - \frac{2}{125} = \frac{373}{125}$.

e) $\begin{cases} y' = 3y - 2e^{-2x} \\ y(0) = 5 \end{cases}$ EC. LINEAL NO HOMOGÉNEA.

$y(x) = ke^{3x}$ SOLUCIÓN DE LA HOMOGÉNEA

$y(x) = k(x)e^{3x}$ SOL PARTICULAR $\implies \{\, k'(x)e^{3x} = -2e^{-2x}$

ASÍ $k(x) = \int -2e^{-5x}\,dx = \frac{2e^{-5x}}{5}$

LUEGO $y(x) = \frac{2e^{-5x}}{5}e^{3x} + ke^{3x}$ SOLUCIÓN GENERAL.

SI $y(0) = \frac{2}{5} + k = 5 \implies k = 5 - \frac{2}{5} = \frac{23}{5}$ //

HOJA 6ª

PROBLEMA 6º

t TIEMPO $x(t)$ POBLACIÓN EN EL TIEMPO t.

LA TASA ES LA VARIACIÓN DE $x(t)$, $x'(t)$, PARTIDO POR LA POBLACIÓN

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a = \text{cte}.$$

LUEGO $x'(t) = a\,x(t)$ E.D.O LINEAL DE FORMA

ASÍ $x(t) = k e^{at}$ ¿ $x(0) = k e^{a0} = k$?

AHORA $x(5) = k e^{a5} = 40.000$ LUEGO $\Rightarrow \boxed{k = 40.000 e^{-5a}}$

POR OTRO LADO $x(3) = 2x(0)$

$\Leftrightarrow$ $x(3) = \cancel{40.000 e^{-5a}} e^{3a} = 2\,\cancel{40.000\,e^{-5a}} e^{a\times 0} = 2x(0)$

$\Leftrightarrow$ $e^{3a} = 2$ LUEGO $a = 1/3\ \lg 2$

Y ASÍ $x(t) = 40.000\, e^{-5/3 \lg 2} e^{t/3 \lg 2} =$

$= 40.000\, e^{1/3 \lg 2 [t-5]}$

PROBLEMA 7º

a) SI $y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \Rightarrow y' = c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) \underset{f_1 \text{ y } f_2 \text{ soluciones}}{=}$

$= c_1 [-p(x) f_1(x)] + c_2 [-p(x) f_2(x)] =$

$= -p(x) [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = -p(x) f(x)$ c.q.d

b) SEA $y(x) = f(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ CON f SOLUCIÓN DE $y' + p(x) y = g(x)$ Y f_1 Y f_2 SOLUCIONES DE $y' + p(x) y = 0$

ASÍ $y'(x) = f'(x) + c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = -p(x) f(x) + g(x) - c_1 p(x) f_1(x) - c_2 p(x) f_2(x)$

$= -p(x) [f(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] + g(x) = -p(x) y + g(x)$

LUEGO y ES SOLUCIÓN NO HOMOGÉNEA

HOJA 6:

PROBLEMA 8:]

SI t ES EL TIEMPO Y $C_{14}(t)$ ES LA CANTIDAD DE NÚCLEOS DE ESTE ISÓTOPO EN EL TIEMPO t TENEMOS QUE EN:

$t=0$ $C_{14}(0)=C_{14}$ (MOMENTO EN EL QUE MUERE LA PLANTA)

ASÍ $\frac{C_{14}}{C_{12}}=r \iff C_{14}=rC_{12}$.

LA DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA ES UN PROCESO CUYA VELOCIDAD ES PROPORCIONAL A LA CANTIDAD DE NÚCLEOS (FÍSICA!) ASÍ

$$\begin{cases} C_{14}'(t)=k\,C_{14}(t) \\ C_{14}(0)=C_{14} \end{cases}$$

E.D.O LINEAL DE PRIMER ORDEN CON UNA CONDICIÓN INICIAL

ASÍ $C_{14}(t)=k_1 e^{-kt}$

Y COMO $C_{14}(0)=C_{14}=k_1 \Rightarrow C_{14}(t)=C_{14}e^{kt}$

VAMOS A CALCULAR k CON EL DATO DE QUE

$$C_{14}=2\,C_{14}(5700)$$

(ESTO ES LO QUE QUIERE DECIR QUE LA VIDA MEDIA ES DE 5700 AÑOS, QUE EN ESE TIEMPO DESAPARECE LA MITAD DE LOS NÚCLEOS RADIOACTIVOS)

ASÍ $C_{14}=2\,C_{14}e^{k\,5700}$

$\Rightarrow k=(\log 1/2)\frac{1}{5700}$. (OBSERVEMOS QUE $k<0$ YA QUE $\log 1/2<0$).

ASÍ $C_{14}(t)=C_{14}e^{-\log 2/5700\, t}$.

AHORA PARA $t=2000$ Y SI EL CARBONO CATORCE SE DESINTEGRA A CARBONO 12.

$$C_{12}(2000)=C_{12}+\left(C_{14}-C_{14}(2000)\right)$$

$$\text{Y } C_{14}(2000)=C_{14}(2000)=C_{14}e^{-\log 2\,\frac{2000}{5700}}$$

$$\text{ASÍ } \frac{C_{14}(2000)}{C_{12}(2000)}=\frac{C_{14}e^{\ldots}}{C_{12}+C_{14}-C_{14}e^{-\log 2\frac{2000}{5700}}}$$

OBSERVACIÓN: SE CONOCEMOS $k=\frac{C_{14}(t)}{C_{12}(t)}$

$k=\frac{ae^{-bt}}{c+a-ae^{-bt}}$

SE PUEDE DESPEJAR e^{-bt} Y ASÍ ENCONTRAR t [SISTEMA DE DATACIÓN POR CARBONO 14]

HOJA 6:

PROBLEMA 9:

b) $t \dfrac{x'(t)}{x^3(t)} + \dfrac{1}{x^2(t)} = t$

MULTIPLICANDO POR $\dfrac{x^3(t)}{t}$

$x'(t) + \dfrac{x(t)}{t} = x^3(t)$ ECUACIÓN DE BERNOULLI.

EL CAMBIO DE VARIABLE

$z(t) = x(t)^{-2} \iff x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{z(t)}}$

$x'(t) = \dfrac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z(t)}}}{z(t)} \cdot = -\dfrac{z'(t)}{2\, z(t)^{3/2}}$

POR TANTO $-\dfrac{z'(t)}{2\, z(t)^{3/2}} + \dfrac{1}{t\, z(t)^{1/2}} = \dfrac{1}{z(t)^{3/2}}$

ASÍ $-\frac{1}{2} z'(t) + \frac{1}{t} z(t) = 1$

$\iff z'(t) = \frac{2}{t} z(t) - 2$

ECUACIÓN LINEAL NO HOMOGÉNEA.

$\boxed{\text{EC. HOMOGÉNEA}}$ $\dfrac{z'(t)}{z(t)} = \dfrac{2}{t} \Rightarrow \ln z(t) = 2\ln t + K \Rightarrow z(t) = K t^2$.

$\boxed{\text{ECUAC. NO HOMOGÉNEA}}$. PROBAREMOS $y(t) = k(t)\, t^2$

(VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES).

$y'(t) = k'(t)\, t^2 + \cancel{k(t) 2t} = \cancel{\frac{2}{t} k(t) t^2} - 2$

$\Rightarrow k'(t) = -\dfrac{2}{t^2}$ ASÍ $k(t) = \dfrac{2}{t}$

Y LA SOLUCIÓN GENERAL ES $z(t) = 2t + k t^2$, DE LA ECUACIÓN LINEAL.

COMO $z(t) = x(t)^{-2} \iff x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{z(t)}}$

$$\boxed{\text{ASÍ } x(t) = \frac{1}{\sqrt{2t + k t^2}} \quad k \in \mathbb{R}}$$

HOJA 6ª

PROBLEMA: 10)

e) $2y'' - 4y' - 8y = -40\cos 3t + 50\,\mathrm{sen}\,3t$

$\boxed{\text{Ec. Homogénea}}$ $2y'' - 4y' - 8y = 0 \iff y'' - 2y' - 4 = 0$

Ec. característica $\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

Así $y(t) = C_1 e^{(1+\sqrt{5})t} + C_2 e^{(1-\sqrt{5})t}$ solución general de la homogénea

$\boxed{\text{E. no homogénea}}$ La función $f(t) = -40\cos 3t + 50\,\mathrm{sen}\,3t$

Como $\pm 3i$ no es solución de la ecuación característica, buscamos una función del tipo

$g(t) = A\cos 3t + B\,\mathrm{sen}\,3t$; $-8g(t) = -8A\cos 3t - 8B\,\mathrm{sen}\,3t$

$g'(t) = -3A\,\mathrm{sen}\,3t + 3B\cos 3t$ $\quad -4g'(t) = -12B\cos 3t + 12A\,\mathrm{sen}\,3t$

$g''(t) = -9A\cos 3t - 9B\,\mathrm{sen}\,3t$ $\quad 2g''(t) = -18A\cos 3t - 18B\,\mathrm{sen}\,3t$

Y así $2g''(t) - 4g'(t) - 8g(t) = (-26A - 12B)\cos 3t + (-26B + 12A)\,\mathrm{sen}\,3t =$

$= -40\cos 3t + 50\,\mathrm{sen}\,3t$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -26A - 12B &= -40 \\ 12A - 26B &= 50 \end{aligned}$$ resolviendo el sistema

$B = -\frac{1}{12}[-40 + 26A]$ así $12A - 26\left[-\frac{1}{12}[-40 + 26A]\right] = 50$

$\Rightarrow 12A + \frac{13}{6}[-40 + 26A] = 50$

$12A + \frac{13^2}{3}A = 50 + \frac{40}{6} \times 13 = \frac{300 + 520}{6}$

$\Rightarrow A = \frac{3}{36 + 13^2} \cdot \frac{820}{6} = \frac{410}{36 + 169} = \frac{410}{205} = 2$

Y $B = -\frac{1}{12}[-40 + 52] = -1$. Luego la solución general es $y(t) = 2\cos 3t - B\,\mathrm{sen}\,3t + C_1 e^{(1+\sqrt{5})t} + C_2 e^{(1-\sqrt{5})t}$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

HOJA 6:

PROBLEMA 10:

g) $y'' - y' - 5y = 1$, $y \to -1/5$ SI $x \to \infty$.

ECUACIÓN HOMOGÉNEA:

$y'' - y' - 5y = 0$; ECUAC CARACTERÍSTICA

$$\lambda^2 - \lambda - 5 = 0, \quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+20}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

SOLUCIÓN GENERAL DE LA HOMOGÉNEA

$$y(t) = C_1 e^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}x} + C_2 e^{\frac{1-\sqrt{21}}{2}x}$$

OBSERVEMOS QUE $\frac{1+\sqrt{21}}{2} > 0$ Y $\frac{1-\sqrt{21}}{2} < 0$

ECUACIÓN NO HOMOGÉNEA:

$y'' - y' - 5y = 1$ OBSERVEMOS QUE $y = -1/5$

ES SOLUCIÓN PARTICULAR

ASÍ $y(t) = -1/5 + C_1 e^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}x} + C_2 e^{\frac{1-\sqrt{21}}{2}x}$ ES LA SOLUCIÓN

GENERAL DE LA ECUACIÓN:

$$\text{SI } x \to \infty \quad \begin{cases} C_2 e^{\frac{1-\sqrt{21}}{2}x} \longrightarrow 0 \\ C_1 e^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}x} \longrightarrow (\text{sig } C_1)\infty \quad \text{SI } C_1 \neq 0 \end{cases}$$

LUEGO $C_1 = 0$ Y

$$\boxed{y(t) = -1/5 + C_2 e^{\frac{1-\sqrt{21}}{2}x} \qquad C_2 \in \mathbb{R}}$$

SOLUCIONES QUE VERIFICAN LAS CONDICIONES DE CONTORNO $y \to -1/5$ SI $x \to \infty$.

HOJA 6:

PROBLEMA 11:)

SI $\lambda_1 = -1$ Y $\lambda_2 = 2$ SON SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DE UNA E.D.O LINEAL DE 2º ORDEN, ENTONCES

$$(\lambda+1)(\lambda-1) = \lambda^2 - 1 = 0$$ ES LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA Y

$$(*) \quad y''(t) - 1 = 0$$ LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ASOCIADA.

LAS SOLUCIONES DE $(*)$ SERÁN PUES

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}.$$

PROBLEMA 12:)

•) $\lambda_1 = -r + si$ Y $\lambda_2 = -r - si$ (RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS), $r>0$; LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN SERÁ

$$x(t) = c_1 e^{-rx} \cos sx + c_2 e^{-rx} \operatorname{sen} sx \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

••) SI $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ Y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ENTONCES

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

••) SI $(\lambda - \lambda_1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda\lambda_1 + \lambda_1^2 = 0$ ES LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA CON SOLUCIÓN DOBLE $\lambda_1 < 0$, ENTONCES $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_2 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

EN TODOS LOS CASOS LA SOLUCIÓN GENERAL TIENDE A 0 SI $t \to \infty$ $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

HOJA 6:

PROBLEMA 19:] SEA $p(t) = r_2 t^2 + r_1 t + r_0$ POSIBLE SOLUCIÓN PARTICULAR

$$p'(t) = 2r_2 t + r_1$$
$$p''(t) = 2r_2$$

ASÍ $p''(t) + a_1 p'(t) + a_2 p(t) =$

$$= 2r_2 + [a_1 2r_2 t + a_1 r_1] + a_2 r_2 t^2 + a_2 r_1 t + a_2 r_0 = q(t) = s_2 t^2 + s_1 t + s_0$$

POR TANTO

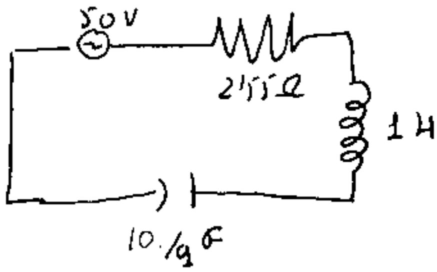
$$a_2 r_2 = s_2 \Rightarrow \boxed{r_2 = \frac{s_2}{a_2}}$$
$$a_2 r_1 + 2a_1 r_2 = s_1 \qquad r_1 = [s_1 - 2a_1 \frac{s_2}{a_2}]1/a_2$$
$$a_2 r_0 + a_1 r_1 + 2r_2 = s_0 \qquad r_0 = [s_0 - 2\frac{s_2}{a_2} - \frac{a_1}{a_2}[s_1 - 2a_1\frac{s_2}{a_2}]]1/a_2$$

SI $a_1, a_2 \neq 0$ EXISTEN r_0, r_1 Y r_2
DE MODO QUE p VERIFICA LA ECUACIÓN.

HOJA 6ª

PROBLEMA 17:

a)



SEGÚN EL PROBLEMA 12: DE LA HOJA 1: PARA UNA ENTRADA CONSTANTE DE 50V

LA SALIDA V VERIFICA LA EDO DE 2º ORDEN

$$50 = V(t) + 2,55 \times \frac{10}{9} V'(t) + 1 \times \frac{10}{9} V''(t)$$

EC. CARACTERÍSTICA DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA

$$\frac{10}{9}\lambda^2 + \frac{25,5}{9}\lambda + 1 = 0 \iff \lambda^2 + 2,55\lambda + \frac{9}{10} = 0$$

$$\lambda = \frac{-2,55 \pm \sqrt{(2,55)^2 - 4\frac{9}{10}}}{2} \in \mathbb{R}$$ Y AMBAS RAÍCES SON NEGATIVAS,

LUEGO COMO $V(t) = 50$ ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL SISTEMA LA SALIDA SERÁ DEL TIPO

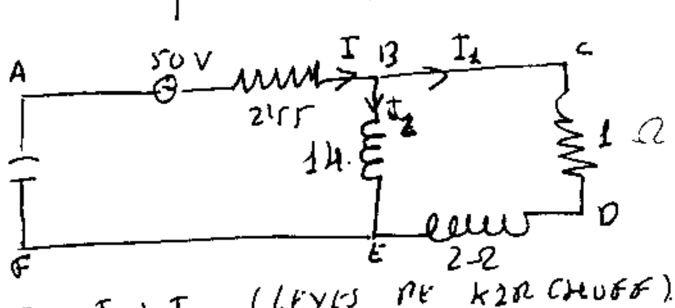
$$V(t) = 50 + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad V'(t) = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}$$

COMO $V(0) = 0$ (EN EL MOMENTO $t=0$ LA SALIDA ES NULA)
Y $V'(0) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} 50 + C_1 + C_2 = 0 \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0 \end{array} \right.$$

LA SOLUCIÓN DE ESTE SISTEMA LINEAL NOS DA LOS ÚNICOS C_1 Y C_2 DE LA SOLUCIÓN ÚNICA DEL SISTEMA

b)



SEGÚN EL PROBLEMA 12: DE LA HOJA 1:

$I = I_1 + I_2$ (LEYES DE KIRCHOFF)

$0 = 2,55 I'(t) + 1 \times I_2''(t) + \frac{9}{10} I(t)$ (CIRCUITO ABEF)

$0 = -I_2''(t) \times 1 + 2 \times I_1''(t) + 1 \times I_1'(t)$ (CIRCUITO BCDE)

SI $x_1 = I_1$, $x_2 = I_1'$, $x_3 = I_2$ Y $x_4 = I_2'$

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = \frac{1}{2}(-x_2 + x_4') = -\frac{1}{2}x_2 + [\qquad]$$
$$x_3' = x_4$$
$$x_4' = -2,55[x_2 + x_4] - \frac{9}{10}[x_1 + x_2]$$