Ejercicios

Indicad razonadamente la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- $2^{n+1} \in \mathcal{O}(2^n)$
  Cierto. $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$. Con $c = 2, n_0 \geq 0, 2 \cdot 2^n \leq c \cdot 2^n$
- $(n+1)! \in \mathcal{O}(n!)$
  Falso. Supongamos que existe un $c > 0$ tal que $(n+1)! \leq c \cdot n! \implies \frac{(n+1)!}{n!} \leq c \implies n+1 \leq c$. No existe ningún valor para c que cumpla esta desigualdad para cualquier valor de $n \geq n_0$
- $f(n) \in \mathcal{O}(n) \implies 2^{f(n)} \in \mathcal{O}(2^n)$
  Falso. Tomemos como ejemplo $f(n) = 2n$. En este caso, $f(n) \in \mathcal{O}(n)$, pero $2^{f(n)} = 2^{2n} \notin \mathcal{O}(2^n)$. Si no fuera así, entonces existiría un $c > 0$ tal que $2^{2n} \leq c \cdot 2^n \implies \frac{2^{2n}}{2^n} \leq c \implies 2^n \leq c$. No existe ningún valor de c que verifique esta desigualdad para todo $n \geq n_0$
- $3^n \in \mathcal{O}(2^n)$
  Falso. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{3}{2})^n = \infty \implies 3^n \notin \mathcal{O}(2^n),\ 3^n \in \Omega(2^n)$

Ejercicios (cont.)

Indicad razonadamente la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- $2^{n+1} \in \Omega(2^n)$
  Cierto. $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$. Con $c = 2, n_0 \geq 0, 2 \cdot 2^n \geq c \cdot 2^n$
- $(n+1)! \in \Omega(n!)$
  Cierto. Con $c = 1$, $(n+1)! \geq n!$ para todo $n \geq 1$. También se puede demostrar con la regla del límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty \implies (n+1)! \in \Omega(n!), n! \in \mathcal{O}((n+1)!)$
- $f(n) \in \Omega(n) \implies 2^{f(n)} \in \Omega(2^n)$
  Falso. Tomemos como ejemplo $f(n) = n/2$. En este caso, $f(n) \in \Omega(n)$, pero $2^{f(n)} = 2^{n/2} \notin \Omega(2^n)$. Si no fuera así, entonces existiría un $c > 0$ tal que $2^{n/2} \geq c \cdot 2^n \implies \frac{2^{n/2}}{2^n} \geq c \implies \frac{1}{2^{n/2}} \geq c$. No hay ningún valor de $c > 0$ tal que verifique esta desigualdad para todo $n \geq n_0$
- $3^n \in \Omega(2^n)$
  Cierto. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{3}{2})^n = \infty \implies 3^n \notin \mathcal{O}(2^n),\ 3^n \in \Omega(2^n)$

Ejercicios (cont.)

Indicad razonadamente la verdad o falsedad de la siguiente afirmación:

$$f(n) \in \mathcal{O}(n) \implies f(n)^k \in \mathcal{O}(n^k), \text{ con } k \in \mathbb{N}$$

- Cierto.
  - Por la definición de $\mathcal{O}$, $f(n) \in \mathcal{O}(n)$ significa que existen $c > 0, n_0 \geq 0$ tales que para todo $n \geq n_0$, $f(n) \leq c \cdot n$.
  - Elevando a k ambos lados de la desigualdad, tenemos que $f(n)^k \leq (c \cdot n)^k \implies f(n)^k \leq c^k \cdot n^k$
  - Esto quiere decir que existe un $c' = c^k$ tal que para todo $n \geq n_0$, $f(n)^k \leq c' \cdot n^k$
  - Por tanto, $f(n)^k \in \mathcal{O}(n^k)$
- También se puede aplicar la propiedad del producto:

  $f_1(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ y $f_2(n) \in \mathcal{O}(h(n)) \implies f_1(n) \cdot f_2(n) \in \mathcal{O}(g(n) \cdot h(n))$

  En nuestro caso particular, $f(n) \in \mathcal{O}(n) \implies f(n) \cdot f(n) \in \mathcal{O}(n \cdot n)$.

  Aplicando esta regla sucesivas veces, tenemos:

  $$\underbrace{f(n) \cdot \ldots \cdot f(n)}_{k} \in \mathcal{O}(\underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{k}) \implies f(n)^k \in \mathcal{O}(n^k)$$

Ejercicios (cont.)

- Calculad el número de operaciones elementales del procedimiento **sumador1** utilizando como tamaño de la entrada el valor del argumento

```
proc sumador1(n)
   i ← 1
   s ← 0
   mientras i ≤ 2*n hacer
      s ← s * fact(i)
      i ← i+1
   fin mientras
fin proc
```

```
fun fact(n)
   aux ← 1
   i ← n
   mientras i > 0 hacer
      aux ← aux * i
      i ← i-1
   fin mientras
   devolver aux
fin fun
```

- $OE_{fact}(n) = 2 + 1 + n(1 + 4) + 1 = 5n + 4$

- $OE_{sumador1}(n) = 2 + 2 + \sum_{i=1}^{2n}(2 + 4 + 1 + OE_{fact}(i)) = 4 + \sum_{i=1}^{2n}(7 + 5i + 4) =$

  $4 + 22n + 5\frac{2n(2n + 1)}{2} = 10n^2 + 27n + 4$