

# Apuntes de la asignatura Ampliación de Cálculo

Ignacio Villanueva Díez



## Índice general

Capítulo 1. Sucesiones y series de funciones	3
1. Funciones y espacios funcionales	3
2. Límites de sucesiones de funciones	8
3. Convergencia puntual	9
4. Convergencia uniforme	10
5. Convergencia en norma 2	15
6. Series funcionales	18
Capítulo 2. Polinomios y desarrollos en serie de Taylor	23
1. Introducción y definiciones	23
Capítulo 3. Series de potencias	29
1. Introducción	29
Capítulo 4. Series de Fourier	35
1. Introducción y definiciones	35
2. Convergencia de las series de Fourier	45
Capítulo 5. Transformada Integral de Fourier	51
1. Definición.	51
2. Propiedades de la transformada de Fourier	54
Capítulo 6. Aplicaciones a la teoría de la señal.	57
1. Convolución y filtros	57
2. Teorema de Nyquist	60
3. Modulación de amplitud	63
Bibliografía	65



## CAPÍTULO 1

### Sucesiones y series de funciones

#### 1. Funciones y espacios funcionales

A lo largo de este curso trabajaremos a menudo con funciones  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ , donde  $I$  será un intervalo de  $\mathbb{R}$ . Frecuentemente  $I$  será  $[0, 1]$ , o  $(-\infty, +\infty)$ , aunque en general puede ser cualquier intervalo de  $\mathbb{R}$ .

Tendremos necesidad en muchas ocasiones de hablar de “las funciones definidas sobre  $I$ ”. El problema es que el conjunto de todas las funciones reales definidas sobre un intervalo  $I$  es en general demasiado grande, poco manejable, y la gran mayoría de funciones que contiene no son interesantes para la ingeniería (ni siquiera para la matemática). Es por ello que necesitaremos definir *espacios funcionales* más pequeños y manejables y que contengan las funciones interesantes para la ingeniería.

Por ello pasamos a recordar algunas nociones algebraicas necesarias para poder definir estos espacios:

**1.1. Espacios Vectoriales.** Comenzamos recordando la noción de Espacio Vectorial. Sea  $E$  un conjunto en el que tenemos definida una suma

$$+ : E \times E \longrightarrow E$$

de manera que  $(E, +)$  es un grupo conmutativo, es decir,  $+$  verifica las siguientes propiedades:

1. Asociatividad, es decir, para todos  $x, y, z \in E$ ,

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

2. Conmutatividad, es decir, para todos  $x, y \in E$ ,

$$x + y = y + x$$

3. Existencia de Elemento neutro, es decir, existe un elemento  $0 \in E$  tal que para todo  $x \in E$ ,

$$x + 0 = x.$$

4. Existencia de Elemento Simétrico, es decir, para todo  $x \in E$  existe  $-x \in E$  tal que

$$x + (-x) = 0$$

Sea ahora  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  el cuerpo de los escalares, y supongamos que existe un producto

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$$

con las siguientes propiedades

1. Para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , para todo  $x \in E$ ,

$$(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$$

2. Para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  y para todo  $x \in E$ ,

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

3. Para todos  $x, y \in E$  y para todo  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

4. Para todo  $x \in E$

$$1 \cdot x = x$$

(Habitualmente se omite la escritura del punto  $\cdot$ )

En ese caso decimos que  $E$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ .

Ya conocéis del curso pasado algunos ejemplos de espacios vectoriales, la mayor parte de ellos finito dimensionales, siendo  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$  el prototipo de estos. En este curso utilizaremos a menudo, explícita o implícitamente, espacios vectoriales de dimensión infinita. Veamos algunos de ellos.

**EJEMPLO 1.1.** Sea  $\mathbb{R}^{[0,1]}$  el espacio de todas las funciones  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ . Consideramos en él la suma y el producto puntuales, es decir

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

y

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Con dichas suma y producto,  $\mathbb{R}^{[0,1]}$  es un espacio vectorial.

**EJEMPLO 1.2.** Sea  $C[0, 1]$  el conjunto de las funciones  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  continuas, dotado de nuevo con la suma y el producto puntuales. Entonces  $C[0, 1]$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^{[0,1]}$ . Análogamente,  $C^1[0, 1]$ , el conjunto de las funciones  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  con derivada continua también es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^{[0,1]}$ .

Es fácil demostrar que todos los espacios que aparecen en los ejemplos anteriores tienen dimensión infinita. Basta con observar que por ejemplo el conjunto de vectores  $\{x^n; n \in \mathbb{N}\}$  contenido en todos ellos es linealmente independiente.

**1.2. Normas en un espacio vectorial.** Recordamos aquí la definición de norma en un espacio vectorial, que quizá sea nueva para algunos de vosotros.

Dado un espacio vectorial  $E$ , una función

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow [0, +\infty)$$

se dice una norma si verifica

1. Para todo  $x \in E$ ,  $\|x\| = 0$  si y sólo si  $x = 0$
2. Para todo  $x \in E$  y para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ , donde  $|\lambda|$  denota el valor absoluto o el módulo de  $\lambda$ , según estemos en  $\mathbb{R}$  o en  $\mathbb{C}$ .
3. Para todos  $x, y \in E$ ,  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ . A esta propiedad se le suele denominar *propiedad triangular*.

La idea de una norma es “medir” vectores. Nuestra intuición habitual nos dice que hay una única forma “razonable” de medir vectores, y esta forma de medir se corresponde con la norma euclídea, también llamada por ello *norma usual*. Sin embargo para muchas aplicaciones es necesario definir otras normas. Nosotros en este curso trabajaremos con la *norma euclídea* y la *norma del supremo*.

Veamos algunos ejemplos de normas en  $\mathbb{R}^3$ .

- **Norma Euclídea.** La función

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow [0, +\infty)$$

dada por

$$\|(x, y, z)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

es una norma, conocida habitualmente como norma euclídea, norma 2 o norma usual.

- **Norma del supremo.** La función

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^3 \longrightarrow [0, +\infty)$$

dada por

$$\|(x, y, z)\|_\infty = \max\{|x|, |y|, |z|\}$$

es una norma, conocida habitualmente como norma del supremo, o norma infinito.

- **Norma 1.** La función

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow [0, +\infty)$$

dada por

$$\|(x, y, z)\|_1 = |x| + |y| + |z|$$

es una norma, conocida habitualmente como norma 1.

EJERCICIO 1.3. *Verificar que cada una de las funciones recién definidas es efectivamente una norma en  $\mathbb{R}^3$ .*

EJERCICIO 1.4. *Pintar la bola de centro 0 y radio 1 para cada una de las normas de arriba, consideradas en  $\mathbb{R}^2$ .*

**1.3. Espacios funcionales.** Buena parte del contenido de esta asignatura consistirá en el estudio de ciertos comportamientos de funciones. Por ello, en ocasiones será necesario que trabajemos dentro de un espacio vectorial cuyos elementos son funciones, y a estos objetos se les llama *espacios funcionales*. Por ejemplo, supongamos que estamos trabajando con funciones  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Podríamos empezar considerando el espacio (demasiado general)  $\mathbb{R}^{[0,1]}$  de todas las funciones de  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}$ . El problema es que este espacio no tiene ningún interés en las aplicaciones, puesto que da cabida a “demasiadas” funciones. Las funciones que tienen interés en ingeniería, y en cualquier aplicación de las matemáticas, son funciones que tienen algún tipo de “buen comportamiento” que nos permite utilizarlas.

Para nuestros aplicaciones este año necesitaremos trabajar con espacios  $L_\infty$  y espacios  $L_2$ . Los primeros son espacios de funciones acotadas, y los segundos son espacios de “energía” finita, y son los más usados en ingeniería. Pasamos a definirlos:

**1.4. Los espacios  $L_\infty$  y  $L^2$ .** Definiremos estos dos espacios de manera levemente inexacta pero más que suficiente para nuestros fines. Una definición totalmente correcta de estos espacios requiere las nociones de función medible y conjunto de medida nula, lo que excede el interés de este curso.

DEFINICIÓN 1.5. Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo. Definimos  $L_\infty(I)$  como el espacio de las funciones  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  integrables tales que

$$\sup_{x \in I} |f(x)| < +\infty.$$

En ese espacio la función

$$\|\cdot\|_\infty : L_\infty(I) \rightarrow [0, +\infty)$$

definida por

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

es una norma.



DEFINICIÓN 1.6. Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo. Definimos  $L_2(I)$  como el espacio de las funciones  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  integrables tales que

$$\int_I f^2(t)dt < +\infty.$$

En ese espacio la función

$$\|\cdot\|_2 : L_2(I) \longrightarrow [0, +\infty)$$

definida por

$$\|f\|_2 = \left( \int_I f^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma.

OBSERVACIÓN. Nótese que en ambas definiciones pedimos que las funciones sean integrables. Esto no supone ninguna limitación en la práctica, ya que recordad que aprendisteis en primero que toda función “continua a trozos”, es decir con a lo sumo una cantidad finita o numerable de discontinuidades, es integrable. Todas (o el 99’99 %) las funciones utilizadas en ingeniería son integrables.

OBSERVACIÓN. Cuando  $I = [a, b]$  usamos la notación  $L_2[a, b]$ , o  $L_\infty[a, b]$ . Si  $I = \mathbb{R}$  usamos la notación  $L_2(\mathbb{R})$  o  $L_\infty(\mathbb{R})$ .

OBSERVACIÓN. El contenido de esta nota es sólo para aquellos alumnos interesados en los aspectos más formales de la asignatura. Los restantes pueden omitir su lectura sin remordimientos.

Nótese que al intentar verificar que las funciones arriba definidas son normas, uno se encuentra con funciones que no son 0 cuya norma es 0. Por ejemplo si definimos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

entonces  $f$  es una función integrable,  $f$  no es la función 0 y sin embargo  $\|f\|_1 = \|f\|_2 = 0$ . La solución a este problema se obtiene formalmente considerando en realidad  $L_\infty$  o  $L_2$  como el espacio cociente de los anteriores por la relación de equivalencia  $f \sim g$  si y sólo si  $f(t) = g(t)$  en casi todo punto.

No resulta obvio el porqué de estas definiciones. Sí parece razonable definir y utilizar el espacio  $L_\infty$  de las funciones de supremo acotado, pues en muchas ocasiones es una condición muy fácil de verificar.

Además, nos interesará de ellos no sólo el espacio en sí, sino también la norma  $\|\cdot\|_\infty$  que aparece en su definición, puesto que veremos más adelante que la convergencia uniforme de funciones es precisamente la convergencia en esta norma.

En cuanto a los espacios  $L_2$ , intentaré explicaros su importancia, aunque sólo lo entenderéis realmente cuando hayáis trabajado con ellos, tanto de forma teórica como práctica.

Desde el punto de vista matemático, notad que la norma  $\|\cdot\|_2$  viene definida como la norma euclídea en  $\mathbb{R}^n$ , sustituyendo un sumatorio por una integral (y ya deberíais saber que esta es la forma de pasar de “lo discreto” a “lo continuo”). Esto hace que los espacios  $L_2$  sean “buenos” (formalmente se llaman *espacios de Hilbert*) y se caracterizan porque son los únicos espacios vectoriales infinito dimensionales en los que siguen siendo válidos muchos aspectos de nuestra intuición geométrica habitual.

Desde el punto de vista físico, cuando  $f(t)$  represente algún tipo de “señal”, la norma  $\|f\|_2$  va a ser su energía, por lo que la condición  $f \in L_2$  se interpretará como que la energía de  $f$  sea finita, y obviamente estas van a ser las únicas funciones interesantes. En concreto, si  $f(t)$  representa el voltaje de una onda electromagnética como función del tiempo,  $f^2(t)$  es (salvo producto por una constante) su potencia (esto se entiende en un curso elemental de electromagnetismo), por lo que  $\int_a^b f^2(t)dt$  representa (salvo producto por una constante) la energía de la onda en el intervalo temporal  $[a, b]$ . Por tanto, pedir que  $f$  pertenezca a  $L_2[a, b]$  equivale a pedir que  $f$  no sea demasiado discontinua (esto es más o menos la integrabilidad) y que su energía sea finita en  $[a, b]$ . Ambas peticiones son muy razonables, de forma que cualquier onda con la que eventualmente trabajéis en un problema real pertenecerá a  $L_2$ .

## 2. Límites de sucesiones de funciones

Suponemos bien conocida la noción de límite de una sucesión numérica  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  (y por favor, dado que esta noción va a ser absolutamente básica este curso, cualquier duda que tengáis o que os surja acerca de ella preguntadla, en clase o en tutorías).

Queremos ahora extender esa noción de límite de una sucesión de números a la de límite de una sucesión de funciones  $(f_n)$ .

Empezaremos poco a poco: Suponed un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , para fijar ideas supongamos el intervalo  $[0, 1]$ . Una sucesión de funciones definidas

en este intervalo no es más que una colección  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de funciones donde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  es una función  $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Puesto que sé que a menudo hay confusión en este punto, notad por favor que en una sucesión  $(f_n)$  hay dos variables en juego, la “ $n$ ” y la “ $x$ ”:

Por un lado la  $n$ , que va tomando valores naturales, y por otro lado, fijado cualquier  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $f_{n_0}$  es una función que a cada valor  $x \in [0, 1]$  le asigna el número  $f_{n_0}(x)$ , por tanto la variable  $x$  va tomando valores reales en el intervalo  $I$  (en este caso el  $[0, 1]$ ). Procurad distinguir bien entre ambas variables y observad el distinto papel que juega cada una.

Una vez definida la noción de sucesión de funciones, empezamos a estudiar la noción de *límite de una sucesión de funciones*.

Aunque quizás no resulte inmediatamente obvio, veremos que hay diferentes formas de definir la noción de límite de una sucesión de funciones. En este curso estudiaremos varias de esas definiciones.

Empezamos con las dos más básicas, la convergencia puntual y la convergencia uniforme.

### 3. Convergencia puntual

DEFINICIÓN 3.1. Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo, y para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$  una función. Decimos que la sucesión  $(f_n)$  converge *puntualmente* a la función  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  si para cada  $x_0 \in I$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

OBSERVACIÓN. Nótese que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x_0)$  es un número (y no una función) por lo que el límite que aparece en la definición es el límite ya conocido de una sucesión numérica

OBSERVACIÓN. Notad que necesitamos que todas las  $f_n$  estén definidas en el mismo intervalo  $I$ , y que en ese mismo intervalo es donde estará definida la función límite  $f$  si existe.

EJEMPLO 3.2. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  la función definida como

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ nx + 1 - n & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Comprobar que la sucesión  $(f_n)$  converge puntualmente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

**EJEMPLO 3.3.** *Comprobar que la sucesión  $(x^n)_n \in \mathbb{N}$  converge puntualmente en el intervalo  $[0, 1]$  a la misma función que el ejemplo anterior.*

De los dos ejemplos anteriores podría desprenderse que la función límite  $f$  toma siempre un número finito de valores (y mi experiencia me enseña que algunos de vosotros lo interpretáis efectivamente así. Para ver que esto no es cierto, estudiad el siguiente ejemplo:

**EJEMPLO 3.4** (Septiembre 2003). *Para todo  $n \geq 1$ , sea*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ x - \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*Entonces, la sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente en el intervalo  $[0, 1]$  a la función  $f(x) = x$ .*

*En efecto, sea  $x_0 > 0$  y sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_0} < x_0$ . Entonces, para todo  $n > n_0$ ,  $f_n(x_0) = x_0 - \frac{1}{n}$ , y por tanto*

$$\lim_n f_n(x_0) = \lim_n x_0 - \frac{1}{n} = x_0.$$

*Por otro lado, está claro que*

$$\lim_n f_n(0) = 0,$$

*de donde se sigue que la sucesión  $(f_n)$  converge puntualmente a la función  $f(x) = x$  en el intervalo  $[0, 1]$ .*

La idea de la convergencia puntual es que, punto a punto, la sucesión converge, es decir, que para cada  $x_0 \in I$ , la sucesión  $(f_n(x_0))_n$  converge. Esta parece ser la noción más intuitiva de límite de una sucesión de funciones. El problema que presenta es que no mantiene necesariamente las “buenas” propiedades de las funciones de la sucesión: los ejemplos 3.2 y 3.3 nos muestran cómo el límite de una sucesión de funciones continuas no tiene por qué ser una función continua. Lo mismo ocurre con la derivabilidad y la integrabilidad, que no se mantienen necesariamente.

#### 4. Convergencia uniforme

Esto hace que sea conveniente en ocasiones trabajar con otro tipo de convergencia, la *convergencia uniforme*, que sí mantiene las buenas propiedades de las funciones, como veremos más adelante. A cambio por supuesto hay que pagar un precio, y este es que la convergencia uniforme es más restrictiva que la convergencia puntual: si una sucesión

de funciones converge uniformemente también lo hace puntualmente, sin embargo una sucesión puede converger puntualmente y no hacerlo uniformemente, como veremos en los ejemplos.

La idea de la convergencia uniforme es, esencialmente, definirla como la convergencia en la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

Para que se entienda más fácilmente la definición, veamos primero un razonamiento con sucesiones numéricas.

Sea  $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$  una sucesión de números reales. Notemos que decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

es lo mismo que decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a = 0$$

y esto a su vez es equivalente a decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0.$$

(La última equivalencia es un ejercicio típico de primer curso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ si y sólo si } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.)$$

Así pues, podemos pensar que la definición de límite nos dice que el límite de una sucesión es  $a$  si y sólo si la distancia de la sucesión a  $a$  tiende a 0.

Podemos entonces pensar en transportar esta versión de la definición de límite, sustituyendo los escalares por funciones y el valor absoluto por norma. Elegimos primero la norma infinito, y llegamos así a la definición de convergencia uniforme:

**DEFINICIÓN 4.1.** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Decimos que la sucesión  $(f_n)$  converge uniformemente a la función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

equivalentemente, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} \{|f_n(x) - f(x)|\} = 0$$

Es fácil ver que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual:

**PROPOSICIÓN 4.2.** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Si la sucesión  $(f_n)$  converge uniformemente a la función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $(f_n)$  también converge puntualmente a la misma función  $f$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $x_0 \in I$ . Puesto que sabemos por hipótesis que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} \{|f_n(x) - f(x)|\} = 0,$$

y además claramente

$$|f_n(x_0) - f(x)| \leq \sup_{x \in I} \{|f_n(x) - f(x)|\},$$

se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_0) - f(x_0)| = 0,$$

lo que implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$

lo que concluye la demostración.  $\square$

Sin embargo, el recíproco no es cierto; es decir, una sucesión puede converger puntualmente y no hacerlo uniformemente, como vemos en alguno de los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 4.3 (Septiembre 2003).

Para todo  $n \geq 1$ , sea

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ x - \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Entonces, la sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntual y uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$  a la función  $f(x) = x$ .

En efecto, sea  $x_0 > 0$  y sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_0} < x_0$ . Entonces, para todo  $n > n_0$ ,  $f_n(x_0) = x_0 - \frac{1}{n}$ , y por tanto

$$\lim_n f_n(x_0) = \lim_n x_0 - \frac{1}{n} = x_0.$$

Por otro lado, está claro que

$$\lim_n f_n(0) = 0,$$

de donde se sigue que la sucesión  $(f_n)$  converge puntualmente a la función  $f(x) = x$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

Estudiemos ahora si la convergencia es uniforme. Para ello es necesario calcular

$$\lim_n \sup_x |f_n(x) - x|.$$

Para ello, calculemos previamente  $\sup_x |f_n(x) - x|$ : Para todo  $x \geq \frac{1}{n}$ ,

$$|f_n(x) - x| = |x - \frac{1}{n} - x| = \frac{1}{n}.$$

Por otro lado, si  $x < \frac{1}{n}$ ,

$$|f_n(x) - x| = |0 - x| = x < \frac{1}{n}.$$

Por tanto,  $\sup_x |f_n(x) - x| = \frac{1}{n}$  y

$$\lim_n \sup_x |f_n(x) - x| = 0,$$

lo que implica que la convergencia es uniforme.

EJEMPLO 4.4. Para todo  $n \geq 1$ , sea

$$f_n = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Entonces, la sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente pero no uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$  a la función  $f(x) = 0$ .

En efecto, para  $x = 0$ ,  $f_n(0) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$$

Si fijamos ahora un  $x \neq 0$  en el intervalo  $[0, 1]$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq n_0$ ,  $f_n(x) = 0$ , y por tanto, de nuevo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

Es decir, para todo  $x \in [0, 1]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

con  $f(x) = 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ , es decir, la sucesión converge puntualmente.

Sin embargo la sucesión  $(f_n)_n$  no converge uniformemente en  $[0, 1]$ . Para ver esto aplicamos la definición.

$f_n$  converge uniformemente a  $f$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Es fácil ver que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = 1$$

(Esto está claro si se representa  $f_n$  gráficamente. En cualquier caso, nótese que  $f_n(\frac{1}{n}) = 1$ )

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0,$$

es decir, la convergencia no es uniforme.

**EJEMPLO 4.5.** Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la siguiente sucesión de funciones:

$$(1) \quad f_n(x) = \frac{2nx^2}{n^2x^4 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

*Solución:* Vemos fácilmente que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ . Observamos además que  $f_n(0) = 0$  y que para  $x \neq 0$ ,  $f_n(x) > 0$ .

La sucesión  $f_n(x)$  converge pues puntualmente a la función  $f(x) = 0$ .

Para estudiar la convergencia uniforme buscamos  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0|$ .

Ahora bien,  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = f_n(x_0)$ , donde  $x_0$  es un punto que necesariamente anula la derivada. Calculemos  $f'_n(x) = 4nx \frac{1-n^2x^4}{(n^2x^4+1)^2}$ . Luego  $f'_n(x_0) = 0 \iff x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Así,

$$(2) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\pm \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1.$$

La convergencia no es uniforme en  $\mathbb{R}$ .

Hallemos ahora en qué partes de  $\mathbb{R}$  la convergencia es uniforme. Para ello basta observar que  $f'_n(x) < 0$  para  $n > \frac{1}{a^2}$ , donde  $a > 0$ . Entonces dado que  $f_n(x)$  es decreciente en el intervalo  $]a, +\infty[$  y que

$$(3) \quad \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{2na^2}{n^2a^4 + 1}.$$

tendremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = 0$ .

La convergencia será uniforme en los intervalos de la forma  $[a, +\infty)$  y  $(-\infty, -a]$ .



**4.1. Propiedades de la convergencia uniforme.** La convergencia puntual no conserva la continuidad, tal y como muestran los ejemplos anteriores. Uno de los motivos por los que se introduce la noción de convergencia uniforme es porque “mejora” la convergencia, en el sentido de que pasa a respetar la continuidad y la integrabilidad y, con hipótesis adicionales, la derivabilidad. En concreto tenemos los siguientes resultados cuya demostración, si bien no es difícil, omitimos.

**TEOREMA 4.6.** *Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Supongamos que  $(f_n)$  converge uniformemente a la función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces se tiene:*

1. *Si  $(f_n)$  es continua en  $[a, b]$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $f$  es continua.*
2. *Si  $(f_n)$  es integrable en  $[a, b]$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $f$  es integrable.*

**TEOREMA 4.7.** *Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Supongamos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  es derivable en  $[a, b]$ , y sea  $f'_n$  su derivada. Supongamos además que la sucesión  $(f'_n)$  converge uniformemente a una función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y que existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que existe el  $\lim_n f_n(x_0)$ . Entonces existe  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $[a, b]$ , tal que  $f' = g$  y tal que  $(f_n)$  converge uniformemente a  $f$ .*

No os perdáis: el teorema dice que si tengo una sucesión de funciones derivables cuyas derivadas convergen uniformemente y además la sucesión original converge en al menos un punto, entonces la sucesión original va a converger uniformemente y, lo que más nos interesa, la función a la que converge es a su vez derivable, es decir se mantiene la derivabilidad cuando hay convergencia uniforme de las derivadas.

## 5. Convergencia en norma 2

Una vez estudiada la convergencia uniforme, es muy fácil definir análogamente otras formas de convergencia, sustituyendo la norma del supremo por otras normas. Estudiaremos el caso de la convergencia en norma 2, o convergencia en media cuadrática, que nos resultará interesante más adelante.

**DEFINICIÓN 5.1.** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Decimos que la sucesión  $(f_n)$  converge en media cuadrática, o en norma 2 a la función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0$$

equivalentemente, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_I (f_n(t) - f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Esta es la definición para funciones con valores reales. Veremos más adelante el caso de funciones con valores complejos.

Veamos en primer lugar que las relaciones con las otras formas de convergencia estudiadas no son tan fáciles como antes. Nos limitaremos a estudiar el caso en que  $I$  es un intervalo acotado, por ejemplo el  $[0, 1]$ . La situación cambia esencialmente si  $I$  no está acotado.

**PROPOSICIÓN 5.2.** *Si  $I$  es un intervalo acotado, entonces para toda  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , la norma 2 de  $f$  en  $I$  es menor o igual que una constante por la norma del supremo de  $f$  en  $I$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces

$$\|f\|_2 = \left( \int_I f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \|f\|_\infty^2 \int_I dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_\infty \sqrt{\lambda(I)},$$

donde  $\lambda(I)$  es la longitud del intervalo.  $\square$

Con esa proposición es fácil probar lo siguiente.

**DEMOSTRACIÓN.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Si la sucesión  $(f_n)$  converge uniformemente a  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces también converge en media cuadrática.  $\square$

**DEMOSTRACIÓN.** En efecto, por la proposición anterior y por la hipótesis, se tiene que

$$0 \leq \lim_n \|f_n - f\|_2 \leq \sqrt{\lambda(I)} \lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$$

$\square$

La recíproca no es cierta. Veamos con un ejemplo que hay sucesiones que convergen en media cuadrática y no lo hacen uniformemente.

**EJERCICIO 5.3.** *Para todo  $n \geq 1$ , sea*

$$f_n = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*Demuéstrese que  $(f_n)$  converge en media cuadrática a 0, pero no converge uniformemente.*

Las relaciones con la convergencia puntual son menos claras, y para entenderlas correctamente habría que estudiar con algo más de detalle el espacio  $L_2$ . Veamos ahora simplemente con un par de ejemplos que ninguna de las formas de convergencia implica la otra.

EJERCICIO 5.4. Para todo  $n \geq 1$ , sea

$$f_n = \begin{cases} 2n^2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -2n^2x + 2n & \text{si } \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Demuéstrese que la sucesión  $(f_n)$  converge puntualmente a la función constante de valor 0, pero que no converge en media cuadrática.

EJERCICIO 5.5. Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , considérense las funciones  $f_k^1, \dots, f_k^k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$f_k^i = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{1-i}{k} < x \leq \frac{i}{k} \\ 0 & \text{para los restantes valores de } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Consideramos entonces la sucesión de funciones

$$f_1^1, f_2^1, f_2^2, f_3^1, f_3^2, f_3^3 \dots$$

Compruébese que la sucesión de funciones así definida no converge puntualmente en ningún punto, y en cambio sí converge en norma 2 a la función constante de valor 0. Esto último se sigue porque, para todo  $k \in \mathbb{N}$  y para todo  $1 \leq i \leq k$  se verifica que

$$\|f_k^i\|_2 = \sqrt{\frac{1}{k}}.$$

Lo anterior eran las malas noticias. Las buenas son que sí podemos decir algo, aunque no mucho. La demostración de la siguiente proposición no es fácil y no la incluiremos. En realidad tampoco usaremos este curso la proposición misma, sino el corolario que la sigue.

PROPOSICIÓN 5.6. Supongamos que la sucesión de funciones  $(f_n)$  converge en norma 2 a la función  $f$ . Entonces existe una subsucesión  $(f_{n_k})$  tal que  $f_{n_k}$  converge a  $f$  en casi todo punto.

Como ya he dicho, no necesitaremos esta proposición, pero el siguiente corolario sí puede ser útil en ocasiones.

COROLARIO 5.7. Si la sucesión  $(f_n)$  converge puntualmente a la función  $f$ , y si además sabemos que la sucesión  $(f_n)$  converge en norma 2, entonces necesariamente  $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ .

Para nosotros la utilidad principal de dicho corolario es la siguiente: supongamos que nos dan una sucesión de funciones  $(f_n)$  y nos preguntan si dicha sucesión converge en norma 2. Si sabemos que  $(f_n)$  converge puntualmente a  $f$ , entonces ya sabemos que  $f$  es la única función a la que  $(f_n)$  podría converger en norma 2.

Finalmente, veamos con un sencillo ejemplo que la convergencia en norma 2 no mantiene la continuidad.

EJEMPLO 5.8. *Para todo  $n \geq 1$ , sea*

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ -\frac{n}{2}x + \frac{n}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*Es decir,  $f_n$  es continua, vale 1 desde 0 hasta  $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ , vale 0 desde  $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$  hasta 1 y varía linealmente de 1 a 0 en el resto.*

*Comprobar que la sucesión  $(f_n)$  converge en norma 2 a (y puntualmente a la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

*Obsérvese que a efectos de la convergencia en media cuadrática, podemos definir  $f(\frac{1}{2})$  como queramos.*

## 6. Series funcionales

Nuestro interés por la convergencia de sucesiones funcionales en este curso se debe a que tendremos que estudiar en ocasiones *series funcionales*.

Para definir series funcionales uno intenta proceder como en el caso de la definición de serie numérica. Recordemos: si tenemos una sucesión  $(x_n)$ , para definir su serie asociada  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  se considera la sucesión de sumas parciales

$$s_m := \sum_{n=1}^m x_n$$

y a continuación se define

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m x_n.$$

Para definir una serie funcional  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  cuando  $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$  es una sucesión de funciones procedemos exactamente igual: definimos la sucesión de sumas parciales

$$S_m := \sum_{n=1}^m f_n$$

(nótese que, para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,  $S_m$  es una función bien definida en el intervalo  $I$ , puesto que se trata simplemente de una suma finita de funciones)

y a continuación definimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n := \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m f_n.$$

La novedad ahora es que si bien la noción de convergencia (límite) está unívocamente definida en el caso de números reales, en el caso de las funciones tenemos varias nociones de convergencia (ya hemos estudiado tres de ellas, la puntual, la uniforme y la convergencia en media cuadrática), por lo que tenemos que precisar a cual de ellas nos referimos. Diremos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  *converge*, si la sucesión de sumas parciales converge puntualmente. Si, además, la sucesión de sumas parciales converge uniformemente entonces decimos que la serie *converge uniformemente*. Formalizamos a continuación lo dicho anteriormente:

**DEFINICIÓN 6.1.** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones  $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ . Definimos las funciones  $S_m : I \longrightarrow \mathbb{R}$  como  $S_m(x) = \sum_{n=1}^m f_n(x)$ . Decimos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge (puntualmente) a  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  si, para cada  $x \in I$ ,

$$\lim_m S_m(x) = f(x)$$

y lo escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x).$$

Si además la sucesión  $(S_m)$  converge uniformemente a  $f$ , entonces decimos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge uniformemente a  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ .

**OBSERVACIÓN.** Si  $\sum_n f_n$  converge uniformemente a  $f$  en un intervalo  $[a, b]$  y las funciones  $f_n$  son continuas (respectivamente integrables) en  $[a, b]$  entonces el Teorema 4.6 nos garantiza que  $f$  es continua (resp. integrable) en  $[a, b]$ , y un razonamiento análogo se puede hacer con la derivabilidad usando el Teorema 4.7.

EJEMPLO 6.2. *Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie*

$$\sum_n \frac{x^n}{n!}$$

en los intervalos  $[0, a]$  y  $[0, \infty)$ .

En general no resulta totalmente obvio determinar la convergencia o divergencia de una serie numérica, y este problema se complica algo más en el caso de la convergencia de una serie funcional. Por ello enunciaremos a continuación un criterio bastante útil (cuando se puede aplicar) a la hora de determinar la convergencia de una serie funcional.

Antes de enunciarlo recordemos una noción del curso anterior: una serie numérica  $\sum_n a_n$  se dice *absolutamente convergente* si la serie

$$\sum_n |a_n|$$

converge. Visteis el curso anterior que si una serie es absolutamente convergente entonces es convergente, mientras que el recíproco no tiene por qué ser cierto.

Veamos ya el criterio de Weierstrass:

TEOREMA 6.3 (Criterio  $M$  de Weierstrass). *Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $(M_n) \subset \mathbb{R}$  una sucesión numérica que verifica las dos condiciones siguientes*

1. *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y para cada  $x \in A$ ,*

$$|f_n(x)| \leq M_n$$

2. *La serie  $\sum_n M_n$  converge*

*Entonces existe una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para todo  $x \in I$  la serie  $\sum_n f_n(x)$  converge (absolutamente) a  $f(x)$ . Además, la serie  $\sum_n f_n$  converge uniformemente a  $f$ .*

DEMOSTRACIÓN. Veamos en primer lugar que la serie  $\sum_n f_n$  converge puntualmente (y absolutamente). Para esto hay que ver que, para cada  $x_0 \in I$ , la serie numérica  $\sum_n f_n(x_0)$  converge. Para ello vamos a ver que la serie  $\sum_n |f_n(x_0)|$  converge, y para ver esto último utilizamos el criterio de comparación: puesto que

$$|f_n(x_0)| \leq M_n$$

y puesto que  $\sum_n M_n$  converge, el criterio de comparación nos garantiza que  $\sum_n |f_n(x_0)|$  converge, es decir,  $\sum_n f_n(x_0)$  converge absolutamente.

Una vez que hemos probado la convergencia puntual, tenemos garantizada la existencia de una función  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que, para cada  $x \in I$ ,

$$f(x) = \sum_n f_n(x).$$

Veamos ahora que, de hecho,  $\sum_n f_n$  converge *absolutamente* a  $f$ .

En efecto

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^m f_n \right\|_{\infty} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} \left\{ \left| f(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x) \right| \right\} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} \left\{ \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) \right| \right\} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} \left\{ \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(x)| \right\} \leq \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} M_n = 0, \end{aligned}$$

y por tanto la convergencia es uniforme.  $\square$

Veremos en los ejercicios varias aplicaciones del criterio M de Weierstrass. En particular, conviene mencionar que el Teorema de Abel de la convergencia de series de potencias es una sencilla aplicación de este criterio.





## CAPÍTULO 2

### Polinomios y desarrollos en serie de Taylor

#### 1. Introducción y definiciones

Buena parte de los contenidos de esta asignatura girarán en torno a la noción de una serie (finita o infinita) de funciones que aproxima o converge a una función dada.

El caso más elemental de esta situación son los polinomios (sumas finitas) y desarrollos en serie (sumas infinitas) de Taylor.

El problema es el siguiente: tenemos una función  $f$  cualquiera (y por lo tanto poco manejable) y queremos aproximarla por medio de polinomios, que son funciones muy bien conocidas y con muy buenas propiedades que nos permiten manejarlas cómodamente.

Es fácil ver que si la propia  $f$  no tiene algún tipo de “buen comportamiento” no vamos a poderla aproximar por polinomios. El buen comportamiento que vamos a necesitar para poder calcular polinomios de Taylor es que  $f$  sea continua y varias veces (quizás infinitas) derivable.

Supongamos pues inicialmente que  $f$  es tantas veces derivable como necesitemos y veamos cómo podríamos aproximarla por polinomios.

Una forma razonable de comenzar a pensar en el problema es intentar aproximar un polinomio por polinomios, con lo que por supuesto deberíamos llegar a que el mejor polinomio aproximante es precisamente el polinomio inicial.

Notamos entonces que si tenemos un polinomio  $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  entonces

$$\begin{aligned} P(0) &= a_0 \\ P'(0) &= a_1 \\ P''(0) &= 2a_2 \\ &\vdots \\ P^{(n)}(0) &= n!a_n \\ P^{(n+1)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$P^{n+2)}(0) = 0$$

$$\vdots$$

por lo que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Esto nos permite tener esperanzas de que la siguiente definición sea útil.

DEFINICIÓN 1.1. Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y sea  $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  una función  $n$ -veces derivable en  $x_0 \in I$ . Se llama polinomio de Taylor de la función  $f$  de grado  $n$  y centrado en el punto  $x_0$  a:

$$P_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

El teorema de Taylor nos dirá que el polinomio de Taylor aproxima a la función  $f$ , tanto mejor cuanto mayor sea  $n$  y más cerca estemos de  $x_0$ . Enunciamos y demostramos el teorema para  $x > x_0$ , pero por supuesto se puede dar una versión similar para  $x < x_0$ .

TEOREMA 1.2 (Teorema de Taylor). Sea  $f : [x_0, x] \longrightarrow \mathbb{R}$  una función  $n + 1$  veces derivable en  $[x_0, x]$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Además, si definimos el resto de Taylor como  $R_{n,x_0}(x) = f(x) - P_{n,x_0}(x)$  entonces se tiene que existe  $t \in (x_0, x)$  tal que

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

DEMOSTRACIÓN. El primer límite se puede probar por inducción: Si  $n = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^n} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0, \end{aligned}$$

por la definición de derivada.

Supongamos ahora el resultado cierto para  $n - 1$  y consideremos el caso  $n$ .

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = \\ & = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n}. \end{aligned}$$

Tanto el numerador como el denominador tienden a 0, y ambos son derivables, por lo que aplicamos el teorema de L'Hopital y llegamos a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(x_0) - \frac{2f''(x_0)(x-x_0)}{2!} - \dots - \frac{nf^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-1}}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

y ahora aplicamos la hipótesis de inducción a la función  $f'$  y obtenemos que el límite de arriba vale 0. (Pensadlo despacio; si no lo veis, haced primero los casos  $n = 2$  y  $n = 3$ ).

Demostramos a continuación la fórmula del resto.

Sea

$$s(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k$$

Entonces

$$s'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n$$

Sea ahora

$$g(t) = (x - t)^{n+1}$$

Entonces

$$g'(t) = -(n+1)(x - t)^n$$

Por el teorema del valor medio de Cauchy existe un  $t \in (x_0, x)$  tal que

$$\frac{s(x) - s(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{s'(t)}{g'(t)} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

como  $s(x) = g(x) = 0$  y  $s(x_0) = R_{n,x_0}(f)(x)$  se tiene que existe  $t \in [x_0, x]$  tal que

$$R_{n,x_0}(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

□

**OBSERVACIÓN.** *Existen varias expresiones posibles para el resto de Taylor. Aunque para nosotros este año es suficiente con la enunciada más arriba, enuncio a continuación otras dos expresiones útiles en ciertos contextos.*

1. *Fórmula del resto de Cauchy. Existe  $t \in (x, x_0)$  tal que*

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^n (x-x_0).$$

2. *Fórmula integral del resto. Si además  $f^{(n+1)}$  es integrable sobre  $[x_0, x]$  entonces existe  $t \in (x_0, x)$  tal que*

$$R_{n,x_0}(x) = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

Lo que nos dice el Teorema de Taylor es que si conocemos el valor de una función y sus derivadas en un punto  $x_0$ , entonces podemos aproximar el valor de la función en un punto  $x$  por un polinomio, y la aproximación será tanto mejor cuanto más cerca esté el punto y cuantas más derivadas consideremos.

EJEMPLO 1.3. *Calcular los polinomios de Taylor de grado  $n$  centrados en el 0 de las funciones  $e^x$ ,  $\sin x$  y  $\cos x$*

EJEMPLO 1.4. *Utilizar los polinomios de Taylor para calcular, con una precisión mejor que  $10^{-5}$  los números  $e$  y  $\sin 1$*

EJEMPLO 1.5 (Septiembre 2003). *Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de la función  $\log x$  centrado en el punto 1 y estimar el error cometido al aproximar  $\log 2$  por el polinomio anterior.*

*El polinomio de Taylor de grado 3 de la función  $\log x$  centrado en el punto 1 es*

$$P_3(x) = x - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$$

*y por tanto  $P_3(2) = \frac{5}{6} \simeq 0,833$ .*

*Sabemos que en este caso el resto de Taylor se puede acotar por*

$$R = \frac{f^{(4)}(\theta)}{4!} (2-1)^4 = \frac{\frac{6}{\theta^4}}{4!} \leq \frac{6}{4!} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

*Utilizando la calculadora, podemos ver que  $\log 2 \simeq 0,693$  y por tanto el error vale exactamente  $E \simeq 0,14$ .*

Como vemos los polinomios de Taylor aproximan a la función tanto mejor cuanto mayor sea el orden del polinomio (la  $n$ ). Resulta entonces natural extender la noción de polinomio de Taylor a la de *serie* de

Taylor, dejando que  $n$  tienda a infinito, y preguntarse si, dada una función infinitamente diferenciable  $f$ , la serie de Taylor converge en todo punto a la función  $f$ .

DEFINICIÓN 1.6. Sea  $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  una función infinitamente derivable en  $I$  (esto es, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $f^{(n)}$  en  $I$ ). En ese caso se llama *serie de Taylor* de  $f$  centrada en  $x_0$  a la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Existe una clase muy amplia de funciones  $f$ , llamadas *analíticas* que verifican que la serie de Taylor converge (al menos puntualmente) a la función  $f$ . Obviamente

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

si y sólo si  $R_{n,x_0}(f)(x) \rightarrow 0$  y a menudo ésta es la condición más fácil de estudiar.

Para mostrar que puede haber problemas y que es necesario comprobar efectivamente que la serie converge a la función original, veamos un ejemplo de función infinitamente derivable cuya serie de Taylor no converge a la función.

EJEMPLO 1.7. *Comprobar que la función*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

*es infinitamente derivable, y sin embargo la serie de Taylor no converge a  $f(x)$  en ningún  $x \neq 0$ .*



## CAPÍTULO 3

### Series de potencias

#### 1. Introducción

Dentro de las series funcionales, resultan especialmente importantes las series de potencias.

Definimos una *serie de potencias* centrada en  $a$  como una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

En lo sucesivo consideraremos todo el tiempo  $a = 0$  por comodidad en la notación, pero todo lo que digamos se puede generalizar a cualquier otro  $a \in \mathbb{R}$ .

Como siempre que definimos una serie, el problema es la convergencia. En el caso de las series de potencias, el estudio de la convergencia de la serie es más sencillo que en las series funcionales generales. El resultado principal es el siguiente.

**TEOREMA 1.1 (Abel).** *Sea una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$  de modo que existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que la serie (numérica)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  es convergente. Sea ahora  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $r < |x_0|$ . Entonces, para todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| \leq r$  la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge absolutamente. Además se tiene que la serie de potencias converge uniformemente en el intervalo  $[-r, r]$ . Además la función  $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*es derivable y*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

*es decir, la derivación se puede hacer término a término.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $x_0$  y  $r$  como en la hipótesis. Por ser  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  convergente, se tiene que  $|a_n x_0^n| \rightarrow 0$ , por lo que existe  $M > 0$  tal que  $|a_n x_0^n| < M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $|x| < r$ , entonces

$$|a_n x^n| = |a_n| |x|^n \leq |a_n| |r|^n \leq |a_n| |x_0|^n \frac{|r|^n}{|x_0|^n} \leq M \left| \frac{r}{x_0} \right|^n.$$

Como sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{r}{x_0} \right|^n \text{ converge}$$

(por que  $\left| \frac{r}{x_0} \right| < 1$ ) el criterio  $M$  de Weierstrass (tomando  $M_n = M \left| \frac{r}{x_0} \right|^n$ ) nos garantiza la convergencia uniforme de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  en el intervalo  $[-r, r]$ .

Para comprobar la derivabilidad de  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  necesitamos comprobar la convergencia uniforme de la serie de las derivadas  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  (ver Teorema I. 4.7).

Tenemos

$$|n a_n x^{n-1}| = n |a_n| |x|^{n-1} \leq n |a_n| |r|^{n-1} \leq n |a_n| |x_0|^{n-1} \frac{|r|^{n-1}}{|x_0|^{n-1}} \leq n M \left| \frac{r}{x_0} \right|^{n-1}.$$

Al igual que antes, sabemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n M \left| \frac{r}{x_0} \right|^{n-1} \text{ converge}$$

(esto se puede ver usando el criterio del cociente). Por tanto, de nuevo el criterio  $M$  de Weierstrass (tomando  $M_n = n M \left| \frac{r}{x_0} \right|^{n-1}$ ) nos garantiza la convergencia uniforme de la serie de las derivadas  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  en el intervalo  $[-r, r]$ . Esto, junto con el Teorema I. 4.7 es suficiente para garantizar la derivabilidad de  $f$  en  $[-r, r]$  y que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

□

OBSERVACIÓN. Nótese que en las hipótesis del teorema,  $f'(x)$  vuelve a ser una serie de potencias en  $[-r, r]$ .

EJEMPLO 1.2. Ver lo que ocurre con  $e^x$  cuya derivada es ella misma, y con  $\sin x$ , cuya derivada es el coseno.

El teorema anterior nos sugiere la siguiente definición



DEFINICIÓN 1.3. Dada una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , se llama *radio de convergencia* de la serie al número

$$\rho = \sup \left\{ |x_0| \in \mathbb{R} \text{ tales que } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \text{ converge} \right\}$$

Si el conjunto

$$\left\{ |x_0| \in \mathbb{R} \text{ tales que } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \text{ converge} \right\}$$

no es acotado, decimos que  $\rho = +\infty$ .

Nótese que, puesto que la serie converge para  $x = 0$ ,  $\rho \geq 0$ .

TEOREMA 1.4. Sea  $\rho$  el radio de convergencia de una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Entonces ocurre uno de los tres casos siguientes

1.  $\rho = 0$ . En ese caso la serie converge para  $x = 0$  y diverge para todo  $x \neq 0$ .
2.  $0 < \rho < \infty$ . En ese caso, para todo  $r < \rho$  la serie converge uniformemente en  $[-r, r]$  y diverge si  $|x| > \rho$ . En los puntos frontera ( $\pm\rho$ ) la serie puede converger o diverger.
3.  $\rho = \infty$ . En ese caso la serie converge para todo  $x \in \mathbb{R}$ , y para todo  $r > 0$  la serie converge uniformemente en  $[-r, r]$ .

Aunque no lo necesitamos en este curso, se puede demostrar que, dada una serie de potencias  $\sum a_n x^n$ ,

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

donde  $\limsup$ , el límite superior de una sucesión, viene definido por

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{m \geq n} b_m \right\}.$$

Para aquellos que no estén familiarizados con esta noción, mencionaremos simplemente que si una sucesión  $(a_n)$  tiene límite, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

No os sintáis excesivamente tentados a usar esta fórmula para calcular  $\rho$ ; la definición es mucho más fácil y lleva a entender y manejar mejor el concepto.

OBSERVACIÓN. Existe un rumor muy extendido según el cual

$$\rho = \lim_n \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

*Desconozco el origen de este rumor, pero en cualquier caso es falso, como se puede ver sin más que considerar la serie  $\sum \sin nx^n$  cuyo radio de convergencia es 1 (aunque esto no es totalmente obvio) y sin embargo no existe*

$$\lim_n \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_n \frac{\sin n}{\sin n + 1}.$$

*Lo que sí es cierto es que si ese límite existe entonces coincide con  $\rho$ . La demostración es una consecuencia sencilla del criterio del cociente de convergencia de series numéricas.*

EJEMPLO 1.5.

*Calcular el radio de convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log n) x^n.$$

*Si  $x = 1$ ,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)$$

*que no converge puesto que  $\lim_n \log n = +\infty$ .*

*En cambio, sea  $0 < x < 1$ . En ese caso la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log n) x^n$$

*converge, como se ve fácilmente aplicando el criterio del cociente:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n + 1)x^{n+1}}{(\log n)x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n + 1}{\log n} x = x < 1.$$

*Por tanto,*

$$\rho = \sup\{x; \quad 0 \leq x < 1\} = 1.$$

Es importante que notéis que la serie de Taylor es un caso especial de serie de potencias.

EJEMPLO 1.6. *Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

*en el intervalo  $[0, 29]$ ,*

*Aunque no es necesario para resolver el ejercicio, obsérvese que la serie es el desarrollo en serie de Taylor en el origen de la función  $e^x$ .*

*La serie es una serie de potencias, por tanto lo más fácil es calcular su radio de convergencia. Elíjase  $x_0 > 0$ . Entonces la serie numérica*

$$\sum_n \frac{x_0^n}{n!}$$

*converge, como se ve fácilmente de muchas formas (por ejemplo por el criterio del cociente). Puesto que esto ocurre para un  $x$  arbitrario, tenemos que el radio de convergencia es infinito, por lo que hay convergencia uniforme en cualquier intervalo cerrado y acotado, en particular la serie converge uniformemente en  $[0, 29]$ .*



## CAPÍTULO 4

### Series de Fourier

#### 1. Introducción y definiciones

Como ya hemos visto, los polinomios y series de Taylor nos permiten a menudo aproximar una función por polinomios, o hallar una serie de potencias que converja a la función.

La idea del análisis de Fourier es muy similar, sólo que ahora nos plantearemos la aproximación de una función por combinaciones de funciones seno y coseno elegidas adecuadamente.

Obviamente la primera pregunta que uno se hace es ¿por qué vamos a querer aproximar una función por combinaciones de senos y cosenos?.

Iremos respondiendo a esta pregunta al desarrollar el tema, valga de momento saber que el análisis de Fourier se empezó a desarrollar en el siglo XIX (aunque sus antecedentes datan del siglo XVIII) y que todavía está en plena evolución, no sólo de forma teórica sino en sus aplicaciones prácticas.

En particular, para lo que a un ingeniero informático le interesa, tanto el análisis de circuitos como el tratamiento de la señal se hacen tomando como herramienta básica el análisis de Fourier. Recientemente se ha desarrollado una herramienta nueva, las *ondículas* (*wavelets* en inglés) que suponen un refinamiento del análisis de Fourier y que están teniendo una importancia decisiva en el tratamiento de la señal; por poner algunos ejemplos, las wavelets se han usado para comprimir los archivos digitales de huellas dactilares del FBI, se usan en la mayoría de las películas de animación que se realizan en la actualidad, en los formatos de imagen jpg (a partir de 2000), en la detección de cánceres, en los estudios geológicos, etc, etc.

**1.1. Funciones periódicas.** El problema que vamos a enfrentar en primer lugar es el de representar “adecuadamente” una función periódica. Para justificar el porqué de estudiar este problema recordemos que muchas de las ondas electromagnéticas usadas en la transmisión de información son funciones periódicas, o van moduladas sobre funciones periódicas.

Empecemos recordando la definición de función periódica.

DEFINICIÓN 1.1. Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice periódica si existe  $T > 0$  tal que, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f(t + T) = f(t).$$

En ese caso, al menor de los  $T$  que cumple esa igualdad se le denomina periodo de  $f$ .

EJEMPLO 1.2. Para todo  $\omega_0 > 0$ , las funciones  $\sin \omega_0 x$  y  $\cos \omega_0 x$  son periódicas de periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Notad que si conocemos una función periódica en un intervalo de longitud  $T$  ya conocemos el valor de la función en todo  $\mathbb{R}$ . Esto hace que cuando estudiemos funciones periódicas nos limitamos a algún intervalo de longitud  $T$ , habitualmente el  $[0, T]$  o el  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

### 1.2. Ortogonalidad de funciones. Necesitamos otra definición.

DEFINICIÓN 1.3. Dadas funciones reales  $\phi_\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , un conjunto  $\{\phi_\alpha(t); \alpha \in A\}$  de funciones se dice ortogonal sobre  $I \subset \mathbb{R}$  si, para todo  $\alpha \neq \beta$ ,

$$\int_I \phi_\alpha(t) \phi_\beta(t) dt = 0.$$

OBSERVACIÓN. Para que entendáis el por qué de llamar ortogonales a tales funciones, aquí va la explicación: Dado un espacio vectorial  $E$  se puede definir una noción abstracta de producto escalar como una forma bilineal definida positiva, esto es, una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

separadamente lineal en ambas variables y que verifica que  $\langle f, f \rangle \geq 0$  para toda  $f \in E$  y  $\langle f, f \rangle = 0$  si y sólo si  $f = 0$ . Siempre que tenemos un producto escalar definido en un espacio vectorial se puede definir una norma asociada como

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle},$$

y también se puede definir una noción de ortogonalidad, y en general la noción de ángulo entre vectores. La noción de ortogonalidad se define como  $f \perp g$  si y sólo si  $\langle f, g \rangle = 0$ .

Todo esto se aplicaba a un espacio vectorial abstracto  $E$ . En el caso particular del espacio  $L_2(I)$ , se puede definir

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t)g(t)dt$$

y se demuestra con facilidad que, así definido,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto escalar y que la norma anteriormente definida en  $L_2(I)$  es precisamente su norma asociada. Por tanto, dos funciones  $f$  y  $g$  son ortogonales si su producto escalar es 0, es decir, si  $\int_I f(t)g(t)dt = 0$ .

Nuestro ejemplo principal de familia ortogonal de funciones es el siguiente.

EJEMPLO 1.4. Para todo  $\omega_0 > 0$ , la familia de funciones

$$\{1, \sin n\omega_0 x, \cos m\omega_0 x; \quad n, m \in \mathbb{N}\}$$

es ortogonal sobre  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ , con  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

Para verificarlo, basta comprobar que

1. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t dt = 0$$

2. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t dt = 0$$

3. Para todo  $n \neq m$ ,

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = 0$$

4. Para todo  $n \neq m$ ,

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = 0$$

5. Para todos  $n, m \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = 0$$

Las dos primeras integrales son inmediatas. Para las tres últimas utilizamos las identidades trigonométricas que expresan sin y cos de  $A + B$  en términos de sin y cos de  $A$  y  $B$ , y obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle \cos(nx), \sin(nx) \rangle &= \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx) \sin(nx) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} (\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{+\pi} = 0, (m \neq n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \cos(nx), \cos(nx) \rangle &= \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx) \cos(nx) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin((m+n)x)}{m+n} + \frac{\sin((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{+\pi} = 0, (m \neq n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle &= \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin((m-n)x)}{m-n} - \frac{\sin((m+n)x)}{m+n} \right]_{-\pi}^{+\pi} = 0, (m \neq n)
\end{aligned}$$

**1.3. Coeficientes de Fourier.** Una de las preguntas básicas en análisis de Fourier (así como en el análisis de ondículas) es si, dada una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y un conjunto ortogonal  $\{\phi_\alpha(t); \alpha \in A\}$  de funciones sobre  $[a, b]$ , ¿existen coeficientes  $a_\alpha \in \mathbb{R}$  tales que  $f$  se puede representar como

$$f(x) = \sum_{\alpha} a_\alpha \phi_\alpha(x)?$$

La respuesta va a ser *sí*, al menos para ciertas familias destacadas de familias ortogonales  $\{\phi_\alpha(t); \alpha \in A\}$  y para una amplia clase de funciones  $f$ .

Enunciaremos más adelante, sin demostración, teoremas que nos garantizan que una amplia familia de funciones (en particular todo  $L_2[a, b]$ ) se pueden representar por medio de series del tipo arriba indicado.



De momento, supongamos que una cierta función  $f$  fuera representable de la forma

$$f(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \phi_{\alpha}(x),$$

y veamos cómo se calculan los coeficientes  $a_{\alpha}$  en ese caso.

Supongamos que podemos integrar término a término (no nos detendremos a justificar esta hipótesis, pues excede los objetivos de la asignatura). En ese caso, para cada  $\beta \in A$ , se tendría

$$\int_a^b f(x) \phi_{\beta}(x) dx = \sum_{\alpha} \int_a^b a_{\alpha} \phi_{\alpha}(x) \phi_{\beta}(x) dx = a_{\beta} \int_a^b \phi_{\beta}^2(x) dx$$

y por tanto

$$a_{\beta} = \frac{\int_a^b f(x) \phi_{\beta}(x) dx}{\int_a^b \phi_{\beta}^2(x) dx}$$

Por tanto, tenemos la siguiente

DEFINICIÓN 1.5. Sea  $\{\phi_{\alpha}(x); \alpha \in A\}$  una familia ortogonal sobre  $[a, b]$ . Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Se llaman coeficientes de Fourier de  $f$  con respecto a  $\{\phi_{\alpha}(x); \alpha \in A\}$  a los números

$$a_{\alpha} = \frac{\int_a^b f(x) \phi_{\alpha}(x) dx}{\int_a^b \phi_{\alpha}^2(x) dx}$$

A la serie

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha} \phi_{\alpha}(x)$$

se le llama serie de Fourier de  $f$

OBSERVACIÓN. Es frecuente elegir la familia  $\{\phi_{\alpha}(x); \alpha \in A\}$  normalizada de manera que  $\int_a^b \phi_{\alpha}^2(x) dx = 1$  para cada  $\alpha \in A$ .

Veamos el ejemplo concreto más importante para nosotros de todo lo anterior.

DEFINICIÓN 1.6. Cuando consideramos en la definición anterior el sistema  $\{1, \cos n\omega_0 x, \sin m\omega_0 x\}$  y  $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  obtenemos los coeficientes clásicos de Fourier. Se llaman *coeficientes (clásicos) de Fourier* a los números

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos m\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt.$$

Con esos coeficientes se puede definir la serie de Fourier de  $f$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x$$

EJEMPLO 1.7. *Encontrar la serie de Fourier de la función*

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

y definida periódica de periodo  $T$  en todo  $\mathbb{R}$ .

**Solución:** Es fácil ver que  $a_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $b_n = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$ , independientemente de  $T$

EJEMPLO 1.8 (Septiembre 2003). Sea  $f(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  la función periódica de periodo 1 definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Obtener el desarrollo en serie de Fourier de  $f(x)$ .

**Solución:** Por ser  $f(x)$  periódica de periodo  $T = 1$ , admite un desarrollo en serie de Fourier, es decir,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 x,$$

con

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$$

y donde

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\omega_0 x dx, \text{ y}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin n\omega_0 x dx$$

Así,

$$\frac{a_0}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}$$

Además

$$a_n = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2n\pi x) dx = \frac{2}{2n\pi} \sin 2n\pi x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Finalmente,

$$b_n = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2n\pi x) dx = -\frac{1}{n\pi} \cos 2n\pi x \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

y por tanto,  $b_n = 0$  si  $n$  es par y  $b_n = \frac{2}{n\pi}$  si  $n$  es impar.

**EJEMPLO 1.9.** Sea  $f(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  la función periódica de periodo 2 definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Obtener el desarrollo en serie de Fourier de  $f(x)$ .

**Solución:** Por ser  $f(x)$  periódica de periodo  $T = 2$ , admite un desarrollo en serie de Fourier, es decir,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 x,$$

con

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

y donde

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx,$$

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\omega_0 x dx, \text{ y}$$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\omega_0 x dx$$

Por la periodicidad, es indistinto calcular las integrales en  $[-1, 1]$  ó en  $[0, 2]$  (o en general en cualquier intervalo de amplitud 2. Debido a que implica alguna cuenta menos integraremos en  $[-1, 1]$ . Para ello obsérvese que, para todo  $x \in [-1, 0]$ ,  $f(x) = -x$ .

Así,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

Además

$$a_n = \int_{-1}^0 -x \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx.$$

Integrando por partes, se tiene

$$a_n = 2 \frac{(-1 + \cos n\pi + n\pi \sin n\pi)}{n^2 \pi^2}$$

Finalmente,

$$b_n = \int_{-1}^0 -x \sin(n\pi x) dx + \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx,$$

y de nuevo integrando por partes se obtiene

$$b_n = 0.$$

**1.4. Expresión compleja de las series de Fourier.** Recordemos la expresión

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

que se puede justificar usando series de Taylor, aunque su fundamentación rigurosa requiere algunos conocimientos de variable compleja. De esta expresión se obtienen, sin mas que despejar, las siguientes

$$(4) \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

y

$$(5) \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Por tanto, si  $f(t)$  es una función periódica de periodo  $T$  con desarrollo en serie de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t,$$

podemos sustituir los senos y cosenos por las expresiones dadas por (4) y (5) y obtenemos

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}}{2i}.$$

Usando que  $\frac{1}{i} = -i$  y despejando llegamos a

$$\begin{aligned}
f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega_0 t} + c_{-n} e^{-in\omega_0 t}) = \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t},
\end{aligned}$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \text{ y } c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Para entender todo esto mejor necesitamos algunas definiciones más:

**1.5. Ortogonalidad de funciones complejas.** Al igual que hicimos para funciones reales, vamos a definir un producto escalar de funciones complejas.

DEFINICIÓN 1.10. Dadas  $f, g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$  se define su producto escalar  $\langle f, g \rangle$  como

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t) \overline{g(t)} dt,$$

donde  $\bar{z}$  denota el conjugado complejo de  $z$ .

Ahora decimos que  $f$  y  $g$  son ortogonales si su producto escalar es 0.

Siguiendo con la analogía con el caso real podemos definir la norma 2 de una función compleja  $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$  como

$$\|f\|_2 = (\langle f, f \rangle)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_I f(t) \overline{f(t)} dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Con estas definiciones a mano, podemos ahora seguir con los coeficientes  $c_n$  el mismo camino seguido con los  $a_n$  y  $b_n$ .

En primer lugar notemos

PROPOSICIÓN 1.11. La familia  $\{e^{in\omega t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es ortogonal en el intervalo  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  (o en el  $[0, T]$ ), donde  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $n \neq m$ . Entonces

$$\begin{aligned}
\langle e^{in\omega t}, e^{im\omega t} \rangle &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{in\omega t} \overline{e^{im\omega t}} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \\
&= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos n\omega t + i \sin n\omega t)(\cos m\omega t - i \sin m\omega t) dt = 0.
\end{aligned}$$

□

**1.6. Cálculo de los coeficientes  $c_n$ .** Ahora podemos calcular los coeficientes análogamente a cómo calculamos los  $a_n$  y los  $b_n$ :

Supongamos que una función  $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  (en realidad esto también va a valer para funciones  $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$ ) fuera representable en la forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}.$$

Entonces, dado  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \langle f, e^{in_0\omega t} \rangle &= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}, e^{in_0\omega t} \right\rangle = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \langle e^{in\omega t}, e^{in_0\omega t} \rangle = c_{n_0} \langle e^{in_0\omega t}, e^{in_0\omega t} \rangle = \\ &= c_{n_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{in_0\omega t} \overline{e^{in_0\omega t}} dt = c_{n_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{in_0\omega t} e^{-in_0\omega t} dt = \\ &= c_{n_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = c_{n_0} T, \end{aligned}$$

de donde

$$c_n = \frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \overline{e^{in_0\omega t}} dt}{T},$$

expresión que por supuesto coincide con la obtenida anteriormente a partir de los  $a_n$  y los  $b_n$ .

Como ya hemos dicho anteriormente, se puede demostrar que la expresión  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$  nos permite representar no sólo funciones periódicas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sino también funciones periódicas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Notemos que muchas señales se representan de manera natural como una función con valores reales (por ejemplo una señal sonora) mientras que otras, en particular los campos electromagnéticos, se representan de manera natural como una función con valores complejos.

A partir de ahora trabajaremos con la expresión de la serie de Fourier en términos de los  $c_n$ , por ser más adecuada para la mayoría de las aplicaciones que la expresión en términos de los  $a_n$  y  $b_n$ .

## 2. Convergencia de las series de Fourier

Tenemos definida formalmente la serie de Fourier, pero aún no sabemos nada de su convergencia o no a la función  $f$ . Los teoremas clásicos del análisis de Fourier nos van a garantizar que para una amplia clase de funciones  $f$ , la serie de Fourier de  $f$  converge en casi todo punto a  $f$ . Pero sobre todo nos interesará saber que para todas las funciones en  $L_2(I)$ , la serie de Fourier converge *en norma 2* a la función.

**2.1. Convergencia en norma 2.** Empezamos considerando la convergencia en norma 2 de la serie de Fourier, muy importante en muchas aplicaciones. Recordemos que se dice que una sucesión de funciones  $(f_n) \subset L_2(I)$  converge en norma 2 (o en media cuadrática) a  $f \in L_2(I)$  si

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f,$$

esto es, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0,$$

o, equivalentemente, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0.$$

Nótese que, en el caso de ondas electromagnéticas, esto se puede interpretar como que la energía de la sucesión de ondas  $\varepsilon_n := f_n - f$  tiende a 0 cuando  $n$  tiende a infinito, e interesa darse cuenta de que la sucesión  $\varepsilon_n$  es el error cometido al aproximar  $f$  por  $f_n$ .

Consideramos la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier

$$S_k(t) = \sum_{n=-k}^k c_n e^{in\omega t}$$

y llamamos  $\varepsilon_k(t) = f(t) - S_k(t)$  al error cometido al aproximar  $f$  por  $S_k$ . Decir que  $S_k$  converge en norma 2 a  $f$  equivale a decir que  $\|\varepsilon_k\|_2$  tiende a 0, es decir, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\langle \varepsilon_k, \varepsilon_k \rangle)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varepsilon_k(t) \overline{\varepsilon_k(t)} dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Notemos que

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varepsilon_k(t) \overline{\varepsilon_k(t)} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t) - S_k(t)) \overline{(f(t) - S_k(t))} dt =$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \overline{f(t)} + S_k(t) \overline{S_k(t)} - 2\Re f(t) \overline{S_k(t)} dt = \\
& \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \overline{f(t)} dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left( \sum_{n=-k}^k c_n e^{in\omega t} \right) \overline{\left( \sum_{n=-k}^k c_n e^{in\omega t} \right)} dt - \\
& - 2\Re \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \overline{\left( \sum_{n=-k}^k c_n e^{in\omega t} \right)} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \overline{f(t)} dt + \\
& + \sum_{n=-k}^k |c_n|^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{in\omega t} e^{-in\omega t} dt - 2\Re \sum_{n=-k}^k \overline{c_n} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt = \\
& = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \overline{f(t)} dt + T \sum_{n=-k}^k c_n \overline{c_n} - 2\Re \sum_{n=-k}^k \overline{c_n} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt + \\
& + \sum_{n=-k}^k \frac{\left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt \right) \overline{\left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt \right)}}{T} - \\
& - \sum_{n=-k}^k \frac{\left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt \right) \overline{\left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt \right)}}{T} = \\
& = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \overline{f(t)} dt + \\
& T \sum_{n=-k}^k \left( c_n - \frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt}{T} \right) \overline{\left( c_n - \frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt}{T} \right)} - \\
& - \sum_{n=-k}^k \frac{\left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt \right) \overline{\left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt \right)}}{T}.
\end{aligned}$$

Si consideramos esto como una ecuación en  $c_n$  y buscamos minimizarla, vemos que la norma 2 del error es mínima cuando

$$c_n = \frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt}{T}.$$



Es decir, los  $c_n$  son los mejores coeficientes que podemos ponerles a las funciones  $e^{in\omega_0 t}$  para que la suma

$$\sum_n c_n e^{in\omega_0 t}$$

aproxime a  $f(t)$  tan bien (en norma 2) como sea posible.

De hecho, con razonamientos emparentados con estos, aunque más sofisticados, se puede demostrar que para todo intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , toda función  $f \in L_2(I)$  admite una serie de Fourier como la anterior de manera que  $\sum_n c_n e^{in\omega_0 t}$  converge a  $f$  en norma 2. Recordad que ya hemos dicho anteriormente que las funciones  $f \in L_2(I)$  son las más interesantes en ingeniería, puesto que, por un lado  $L_2(I)$  es un espacio matemáticamente “cómodo” y por otro la condición  $f \in L_2(I)$  se interpreta casi siempre como que  $f$  tiene energía finita, lo cual es muy razonable.

**2.2. Convergencia puntual en casi todo punto.** Enunciaremos aquí sin demostrar un teorema que nos garantiza la convergencia puntual en casi todo punto de la serie de Fourier de una muy amplia familia de funciones. En particular, prácticamente todas las funciones con interés en la ingeniería verifican las condiciones del teorema.

**TEOREMA 2.1.** *Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua a trozos, acotada y monótona a trozos (esto es,  $f$  tiene una cantidad finita de máximos y mínimos en  $I$ ). Entonces la serie de Fourier de  $f$  converge a  $f(t_0)$  en todo  $t_0 \in I$  en el que  $f$  sea continua. En los puntos  $t_0 \in I$  en los que  $f$  no sea continua se tiene que la serie de Fourier converge a*

$$\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2},$$

donde

$$f(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$$

y

$$f(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t).$$

**2.3. Espectros discretos.** Fijáos que de todo lo anterior se sigue que para una muy amplia clase de funciones  $f$ , su serie de Fourier  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega_0 t}$  determina unívocamente (excepto quizás en una cantidad finita de puntos) la función  $f$ . En términos de información, esto se puede expresar diciendo que toda la información contenida en  $f$  se halla en sus coeficientes de Fourier.

Esto da lugar a la noción de espectro de una función  $f$ . Podemos pensar en sus coeficientes  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  como una función

$$c : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$c(n) = c_n$$

La función  $c$  (o su gráfica) es lo que llamamos el *espectro* de  $f$ . Para el caso de funciones periódicas (equivalentemente funciones definidas en un intervalo  $[a, b]$ ) el espectro de  $f$ ,  $c$  está definido sobre los enteros, no sobre todo  $\mathbb{R}$ , por lo que le llamamos *espectro discreto*. Veremos más adelante que para representar una función no periódica necesitamos un *espectro continuo*. Las técnicas de *análisis espectral*, de las que probablemente hayáis oído hablar puesto que se usan en muchas disciplinas, consisten precisamente en estudiar el espectro de una función (la radiación emitida por un cuerpo celeste, por ejemplo) para obtener información contenida en esa función.

Los valores  $(c_n)$  son también llamados las componentes en frecuencia de la señal  $f$ . Los que sepáis algo de teoría musical, deberíais notar cómo una función periódica (una nota cualquiera dada por un instrumento) se descompone por su serie de Fourier en la suma de sus armónicos ( $\omega_0$  es la frecuencia fundamental,  $2\omega_0$  es la misma nota una octava más arriba,  $3\omega_0$  es la quinta por encima de la octava,  $4\omega_0$  es la misma nota dos octavas por encima de la original, etc).

Notad que si  $f(t)$  toma valores reales, esto es,  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ , entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}$   $c_n = \overline{c_{-n}}$ .

**2.4. Teorema de Parseval.** Un resultado muy importante en análisis de Fourier es el Teorema de Parseval, que físicamente se puede leer como que la energía de la señal es igual a la suma de las energías de sus componentes, y geométricamente se puede simplemente interpretar como una consecuencia de una versión infinito dimensional del Teorema de Pitágoras. La demostración del teorema de Parseval es razonablemente sencilla una vez se conocen técnicas elementales de espacios de Hilbert (espacios  $L_2$ ). No la incluiremos aquí, pero sí quiero incluir una “pseudodemostración” que puede resultar ilustrativa.

Empezamos con:

**PROPOSICIÓN 2.2.** Sean  $f_1, f_2 \in L_2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ , y sean  $(c_n^1)_{n \in \mathbb{Z}}, (c_n^2)_{n \in \mathbb{Z}}$  sus respectivos coeficientes de Fourier. Entonces

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) \overline{f_2(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^1 \overline{c_n^2}.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) \overline{f_2(t)} dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^1 e^{in\omega_0 t} \right) \overline{\left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m^2 e^{im\omega_0 t} \right)} dt = \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_n^1 \overline{c_m^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{in\omega_0 t} e^{-im\omega_0 t} dt = \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^1 \overline{c_n^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{in\omega_0 t} e^{-in\omega_0 t} dt = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^1 \overline{c_n^2}.
 \end{aligned}$$

□

De aquí se deduce fácilmente (sin más que tomar  $f_1 = f_2$ ) el siguiente

TEOREMA 2.3 (Teorema de Parseval). *Sea  $f \in L_2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ , y sean  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , coeficientes de Fourier. Entonces*

$$\frac{1}{T} (\|f\|_2)^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \overline{f(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2.$$



## CAPÍTULO 5

### Transformada Integral de Fourier

#### 1. Definición.

Todo lo visto hasta ahora se aplicaba al estudio de funciones periódicas, o de funciones definidas en un intervalo  $[a, b]$ . Para ciertas aplicaciones esto no es suficiente, y necesitamos estudiar funciones  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  no periódicas. Este tipo de funciones no pueden ser representadas por medio de una *serie* de Fourier, pero en cambio sí que se pueden representar por medio de una *integral* de Fourier.

Describimos a continuación la idea intuitiva en el paso de las series de Fourier a la integral de Fourier. Todo esto se puede formalizar con todo rigor, pero no lo haremos ya que llevaría demasiado tiempo y no lo consideramos prioritario para nuestra asignatura.

Como ya hemos visto, una función periódica de periodo  $T$  se puede representar por medio de una serie de Fourier  $\sum_n c_n e^{in\omega_0 t}$ , con  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . La idea ahora, dicha burdamente, es considerar una función no periódica como una función periódica de periodo infinito.

EJEMPLO 1.1. *Supongamos que queremos estudiar la función  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Cuando hablábamos del espectro de una función periódica  $f$  nos referimos al valor de los coeficientes  $c_n$ , que podían ser entendidos como una función  $c(\omega) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$  (ó  $\mathbb{R}$ ) que toma valores distintos de 0 sólo en los puntos  $\omega = n\omega_0$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ , en los que vale  $c_n$ .

Notemos que al hacer tender  $T$  (el periodo) a infinito, la frecuencia fundamental  $\omega_0$  tiende a 0, por lo que los puntos  $n\omega_0$  están cada vez más próximos, de manera que parece razonable pensar que en el límite el espectro se hace continuo, es decir, podemos definir  $c(\omega)$  para todo  $\omega$ . Por otro lado, es fácil ver con los ejemplos que al hacer tender  $T$  a infinito, las amplitudes  $c_n = c(n\omega_0)$  tienden a 0.

Se pueden formalizar matemáticamente estos razonamientos (aunque no lo haremos aquí), pero la idea que hay detrás es que, a medida que  $T$  tiende a infinito, los armónicos (los puntos  $n\omega_0$ ) se encuentran infinitamente cercanos y son de amplitud infinitesimal, es decir, el espectro discreto se vuelve continuo.

Con estas ideas intuitivas, hagamos una construcción no formal de la integral de Fourier.

Sea  $f(t)$  una función periódica de periodo  $T$ . Sea su serie de Fourier

$$(6) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

donde

$$(7) \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

y

$$(8) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Sustituyendo (7) en (6), se tiene

$$(9) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-in\omega_0 x} dx \right) e^{in\omega_0 t}$$

Utilizando (8) tenemos que

$$(10) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-in\omega_0 x} dx \right) \omega_0 e^{in\omega_0 t}$$

Hagamos un pequeño inciso y recordemos lo que sabemos de la definición de integral de Riemann, y el paso de las sumas de Riemann a la integral.

Si tenemos una función  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable y suponemos elegida una partición equiespaciada  $P(\omega_0) = \{a = x_0, x_1, \dots, x_k = b\}$  de  $[a, b]$  en la que  $x_i - x_{i-1} = \omega_0$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , tenemos que

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \sum_{n=1}^k h(a + n\omega_0) \omega_0 = \int_a^b h(t) dt.$$

Recordando esto, volvamos a la expresión (10) y llamemos

$$h(\omega) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) e^{i\omega t}.$$

Aplicando los razonamientos anteriores y haciendo el paso a una integral impropia (dejamos esto al alumno) tenemos que, cuando  $\omega_0$  tiende a 0 (equivalentemente cuando  $T$  tiende a infinito)

$$(11) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) e^{i\omega t} d\omega$$

Si definimos la transformada de Fourier  $\mathbf{F}(\omega)$  de  $f$  como

$$(12) \quad \mathbf{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Entonces (11) se convierte en

$$(13) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Con esto definimos la transformada de Fourier y la transformada inversa. Escribimos a continuación ambas definiciones explícitamente.

DEFINICIÓN 1.2. Sea  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  (ó  $\mathbb{C}$ ). Entonces definimos su transformada integral de Fourier como una función

$$\mathcal{F}(f) = \mathbf{F} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathbf{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Análogamente definimos

DEFINICIÓN 1.3. Sea  $\mathbf{F} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ . Entonces definimos su transformada inversa de Fourier como una función

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{F}) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (ó } \mathbb{C})$$

dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{F})(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

## 2. Propiedades de la transformada de Fourier

Nótese que la transformada de Fourier viene definida por medio de una integral impropia, que puede ser convergente o no serlo. Empezamos enunciando el teorema que nos garantiza la existencia de la transformada de Fourier para una amplia familia de funciones

**TEOREMA 2.1.** *Sea  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Entonces existe la transformada de Fourier de  $f$ , y es una función  $\mathbf{F} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$*

La condición  $f \in L^2(\mathbb{R})$  es suficiente, pero no necesaria, para la existencia de  $\mathbf{F}$ . Existen numerosos ejemplos de funciones que no están en  $L^2(\mathbb{R})$  y sin embargo su transformada está bien definida.

Enunciamos a continuación algunas propiedades básicas de la transformada de Fourier.

- Linealidad. Si  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces  $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$ .
- Si  $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y  $g(t) = f(\alpha t)$  entonces

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

- Si

$$g(t) = f(t)e^{i\alpha t}$$

$$\text{entonces } \mathcal{F}(g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega - \alpha)$$

- Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $g(t) = f(t - t_0)$  entonces

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega)e^{-i\omega t_0}.$$

El siguiente resultado es la clave que permite aplicar la transformada de Fourier a la resolución de ecuaciones diferenciales.

**PROPOSICIÓN 2.2.** *Sea  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  una función derivable, que admite transformada de Fourier  $\mathcal{F}(f)$ , y tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0.$$

*(Nótese que esta última condición se verifica siempre que  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ). Entonces*

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \mathcal{F}(f)(\omega).$$

**DEMOSTRACIÓN.**

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt.$$



Integramos por partes y obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f')(\omega) &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} f(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-t_0}^{t_0} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} f(t_0)e^{-i\omega t_0} - \lim_{t_0 \rightarrow \infty} f(-t_0)e^{i\omega t_0} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = i\omega \mathcal{F}(f)(\omega),\end{aligned}$$

puesto que

$$\lim_{t_0 \rightarrow \pm\infty} f(t_0) = 0$$

y

$$e^{i\omega t_0} = \cos \omega t_0 + i \sin \omega t_0$$

está acotada.  $\square$

A continuación enunciamos sin demostración unos resultados que nos garantizan el buen comportamiento de la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier para una amplia familia de funciones.

TEOREMA 2.3. Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  entonces  $\mathcal{F}(f)$  es continua y

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}(f)(\omega) = 0$$

Dos comentarios son pertinentes: en primer lugar observar que aunque  $f \in L^2(\mathbb{R})$  puede no ser continua, su transformada siempre lo es. En segundo lugar, el hecho de que

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}(f)(\omega) = 0$$

indica que, para cualquier señal, la amplitud de sus componentes en frecuencia tiende a 0 cuando la frecuencia tiende a infinito.

TEOREMA 2.4 (Inversión). Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  entonces  $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ , y además la función

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

(es decir, la transformada inversa de la transformada de  $f$ ) verifica que

$$f(t) = g(t) \text{ en casi todo punto.}$$

OBSERVACIÓN. La expresión “en casi todo punto” tiene un significado matemático muy preciso. Quiere decir que  $f(t) = g(t)$  excepto en, a lo sumo, un conjunto de medida cero. Excede del alcance de este curso la definición de conjunto de medida cero, pero daremos una idea intuitiva diciendo que cualquier intervalo no vacío *no* es de medida cero, mientras que un sólo punto, o una cantidad finita, o incluso numerable,

de puntos, *sí* forman un conjunto de medida cero. Por tanto, el teorema de inversión nos dice que si tomo una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , hallo su transformada de Fourier  $\mathcal{F}(f)$ , y a continuación hallo la transformada inversa de  $\mathcal{F}(f)$ , entonces recupero  $f$  (salvo quizás en unos pocos puntos, que no van a tener ninguna importancia en la gran mayoría de las aplicaciones). Esto es lo que nos permite decir que “no perdemos información”, al considerar  $\mathcal{F}(f)$  en lugar de  $f$ , puesto que podemos recuperar  $f$  (salvo quizás en unos pocos puntos) a partir de  $\mathcal{F}(f)$ .

## CAPÍTULO 6

### Aplicaciones a la teoría de la señal.

#### 1. Convolución y filtros

El propósito de esta sección es simplemente contar una aplicación clásica de la transformada de Fourier al tratamiento de la señal, y lograr que los hipotéticos lectores de estas notas se vayan familiarizando con el hecho de que la transformada de Fourier nos permite pensar en una función, que originalmente estaba en “el dominio del tiempo”, como una función “en el dominio de la frecuencia”.

Nuestro propósito es describir lo que en teoría de la señal se conoce como filtros. Para ello necesitamos previamente una nueva herramienta matemática, la convolución.

DEFINICIÓN 1.1. Sean  $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Se define su convolución  $f * g$  como

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

siempre y cuando la integral impropia anterior exista.

El interés para nosotros en este momento de la convolución de funciones es el siguiente resultado

TEOREMA 1.2. Sean  $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ . Entonces  $f * g$  existe,  $f * g \in L_2(\mathbb{R})$  y además

1.

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) \cdot \mathcal{F}(g)(\omega) \text{ para todo } \omega \in \mathbb{R}$$

2.

$$\mathcal{F}(f \cdot g)(\omega) = (\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g))(\omega) \text{ para todo } \omega \in \mathbb{R}$$

Esta fuera del alcance de este curso demostrar el teorema tal y como está enunciado (es decir, con  $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ ). En cambio sí que vamos a demostrar el punto 1 en el caso algo más sencillo de que  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ , donde

$L_1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tales que } f \text{ es integrable y tales que}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty\}.$$

La herramienta básica para la demostración de este resultado es el teorema de Fubini, que habitualmente se estudia junto con la noción de integral doble. Lo enunciamos a continuación para el caso particular en que el recinto de integración sea un rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$ , puesto que eso es suficiente para nosotros.

**TEOREMA 1.3 (Fubini).** *Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable y  $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  un rectángulo. Entonces*

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Aquellos alumnos que no estén excesivamente familiarizados con la noción de integral doble no deben preocuparse, puesto que nosotros sólo necesitamos la segunda de las igualdades del teorema, y esa no necesita de la noción de integral doble.

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.2.** Veamos en primer lugar que  $f * g$  (existe y) pertenece a  $L^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} |f * g(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \right| dx \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)| dy \right) dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)| dx \right) dy = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| dx \right) dy = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy \right) < \infty. \end{aligned}$$

Esto prueba que  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ . Para probar que

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) \cdot \mathcal{F}(g)(\omega)$$

necesitaremos de nuevo el teorema de Fubini. En efecto

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f * g(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y) dy \right) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y) e^{-i\omega y} e^{i\omega y} dy \right) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-y) e^{-i\omega(t-y)} g(y) e^{-i\omega y} dy \right) dt \stackrel{\text{Fubini}}{=} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i\omega y} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-y) e^{-i\omega(t-y)} dt \right) dy = \mathcal{F}(f)(\omega) \mathcal{F}(g)(\omega) \end{aligned}$$

lo que termina la demostración del teorema.

Veamos ahora cómo aplicar esto a la realización de un *filtro en frecuencia*. En teoría de la señal se denomina filtro en frecuencia a un mecanismo que nos permita, dada una señal, quedarnos con sus componentes en cierto rango de frecuencias, y desechar las demás. Es decir, suponemos dada una cierta señal  $f(t)$  y queremos obtener otra señal  $f_s(t)$  cuyas componentes en frecuencia sean exactamente las componentes en frecuencia de  $f(t)$  que pertenezcan a cierto rango de frecuencia.

La manera de obtener  $f_s(t)$  es la siguiente: hallamos la transformada de Fourier de  $f$ ,  $\mathcal{F}(f)$  y la multiplicamos por  $\chi_A(\omega)$  donde  $A \subset \mathbb{R}$  es el rango de frecuencias que queremos seleccionar y  $\chi_A(\omega)$  es la función característica de  $A$ , definida como

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

Para terminar hallamos la transformada inversa de  $\mathcal{F}(f)(\omega)\chi_A(\omega)$  y está será nuestra función  $f_s(t)$ .

Veámoslo con un ejemplo, la realización de un filtro paso bajo. Se llama filtro paso bajo a aquel que se queda con las componentes de baja frecuencia de  $f$  y descarta las demás. En concreto suponemos que deseamos quedarnos con las componentes de frecuencia menor o igual que  $\delta$ . Consideramos la señal  $f(t)$ . Suponemos calculada su transformada de Fourier  $\mathcal{F}(f)$  consideramos  $\mathcal{F}(f)(\omega)\chi_{[-\delta, \delta]}$ . Entonces, aplicando el teorema de inversión 2.4 y el Teorema 1.2, se tiene que  $f_\delta(t)$  (la componente en frecuencia menor o igual que  $\delta$  de  $f$ ) se puede obtener como

$$f_\delta(t) = (f * g)(t)$$

donde  $g(t)$  es una función tal que

$$\mathcal{F}(g) = \chi_{[-\delta, \delta]}.$$

Calculemos  $g(t)$ .

Aplicando de nuevo el teorema de inversión (o, equivalentemente, la fórmula de la transformada inversa de Fourier), se tiene que

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\delta, \delta]}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{i\omega t}}{it} \right|_{-\delta}^{\delta} = \\ &= \frac{1}{\pi t} \frac{e^{i\delta t} - e^{-i\delta t}}{2i} = \frac{\sin \delta t}{\pi t} \end{aligned}$$

y, por tanto, tenemos finalmente que

$$f_\delta(t) = f(t) * \frac{\sin \delta t}{\pi t}.$$

## 2. Teorema de Nyquist

Como ingenieros informáticos, en vuestra vida profesional es más fácil que os encontréis con señales discretas (digitales) que con señales continuas (analógicas). Aunque no tenemos tiempo en este curso de estudiar la transformada discreta de Fourier y otras herramientas usadas en el tratamiento de señal discreta, contaremos a modo de ilustración el teorema de Nyquist, o teorema del muestreo, que nos proporciona información acerca del paso de una señal analógica a una señal discreta.

La situación a la que nos enfrentamos es la siguiente: tenemos una señal continua y la queremos digitalizar. Este proceso consiste en muestrearla (“samplearla” en espanglish), es decir, no quedarnos con toda la señal sino con la sucesión de valores de la señal tomados cada  $T$  segundos (este es el caso del muestreo uniforme en el tiempo, el único que estudiaremos aquí; para ciertas señales puede ser más interesante un muestreo no uniforme). Este proceso tiene una obvia ventaja: que nos permite trabajar con una sucesión de números en lugar de con toda la señal, lo que es muy útil sobre todo para el tratamiento informático de la señal. Y por supuesto, también hay un inconveniente igualmente obvio: la señal muestreada no contiene, en principio, toda la información que había en la señal original. Parece claro que cuantas más muestras por segundo tomemos (esto es, cuanto menor sea  $T$ ) menos información perderemos, pero también más nos costará muestrear y almacenar y manipular la información. Entonces ¿cuál es intervalo de muestreo que debemos usar?.

Veamos un ejemplo concreto, un CD de música. Hasta hace no muchos años la música se almacenaba siempre en vinilo o en cinta magnética, y ambos soportes partían de una señal analógica y almacenaban también una señal analógica. El progreso de la tecnología (en particular la tecnología informática) y la relativamente baja calidad y durabilidad de ambos soportes llevan a plantearse el almacenamiento digital de la música en forma de CD, ya que el soporte físico es muchísimo más duradero y el tratamiento de la señal digital más versátil. El problema es ¿a qué velocidad hemos de muestrear una señal sonora para que la señal muestreada sea gran calidad?. La respuesta a esto la da el teorema de Nyquist. Primero un par de consideraciones biológicas: nuestro oído “oye en frecuencias” (al igual que nuestros ojos ven en frecuencias) y está limitado en frecuencia: nadie oye señales de frecuencia superior a 20KHz, al igual que nadie ve luz infrarroja o ultravioleta. Este límite no es común a todos los animales: algunos, como ratas y perros tienen

la capacidad de oír señales de frecuencia superior, y los famosos ultrasonidos usados en ocasiones para intentar ahuyentar ratas no son sino sonidos de frecuencia superior a 20KHz y gran volumen, que nosotros no oímos pero ellas sí.

Esta limitación de nuestro oído tiene consecuencias prácticas: si consideramos una señal sonora y le quitamos sus componentes de frecuencias superiores a 20KHz, nuestros oídos no son capaces de percibir ninguna diferencia entre ambas señales. Por tanto la respuesta a la pregunta anterior “¿a qué velocidad hemos de muestrear una señal sonora para que la señal muestreada sea gran calidad?” es “A la velocidad necesaria para mantener las componentes de la señal de frecuencias inferiores a 20KHz”. Y aquí es donde interviene el teorema de Nyquist.

**TEOREMA 2.1.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una señal que admite transformada de Fourier  $\mathbf{F}$  (lo que ocurre por ejemplo si  $f \in L_2(\mathbb{R})$ ). Si  $\mathbf{F}(\omega) = 0$  para todo  $\omega > \omega_M = 2\pi f_M$  entonces se puede determinar  $f$  en casi todo punto por medio de sus valores separados por intervalos uniformes menores que  $\frac{1}{2f_M}$  segundos.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sabemos que  $\mathbf{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función que vale 0 para todo  $\omega > \omega_M$ . Consideramos entonces  $\omega_0 > 2\omega_M$  y definimos la función

$$\mathbf{F}_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

como una función periódica (¡en el dominio de la frecuencia!) de periodo  $\omega_0$  dada por

$$\mathbf{F}_s(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \text{ para todo } \omega \in [-\omega_0, \omega_0].$$

Por ser  $\mathbf{F}_s$  periódica podemos expandirla en serie de Fourier; nótese que como su periodo (lo que habitualmente llamábamos  $T$ ) es  $\omega_0$ , entonces su frecuencia fundamental (lo que habitualmente llamábamos  $\omega_0$ ) vale  $\frac{2\pi}{\omega_0}$ . Por tanto

$$(14) \quad \mathbf{F}_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

donde

$$(15) \quad c_n = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} \mathbf{F}_s(\omega) e^{-in\omega \frac{2\pi}{\omega_0}} d\omega.$$

Usando la definición de  $\mathbf{F}_s$  tenemos que

$$(16) \quad c_n = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \mathbf{F}(\omega) e^{-in\omega \frac{2\pi}{\omega_0}} d\omega.$$

Usaremos además que

$$(17) \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{F})(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{+\omega_M} \mathbf{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Suponemos que hemos muestreado cada  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  segundos, en los puntos  $t = nT = n\frac{2\pi}{\omega_0}$ . Por (17) se tiene

$$(18) \quad f(nT) = f\left(\frac{n2\pi}{\omega_0}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{+\omega_M} \mathbf{F}(\omega) e^{i\omega \frac{n2\pi}{\omega_0}} d\omega.$$

Ahora, comparando (18) y (16) se tiene

$$c_n = \frac{2\pi}{\omega_0} f\left(-\frac{n2\pi}{\omega_0}\right) = T f(-nT).$$

Por tanto, podemos conocer los  $c_n$  a partir de los valores muestreados  $f(nT)$ ; a partir de los  $c_n$  usando (14) podemos conocer  $\mathbf{F}_s$ ; una vez conocida ésta conocemos  $\mathbf{F}$  y a partir de  $\mathbf{F}$  usando (17) recuperamos  $f$ .

Para terminar, notemos que nuestra suposición  $\omega_0 > 2\omega_M$  implica que

$$\frac{2\pi}{T} > 4\pi f_M,$$

es decir

$$T < \frac{1}{2f_M},$$

lo cual termina la demostración.  $\square$

**OBSERVACIÓN.** *Se puede demostrar (y está escrito con todo detalle en el libro [4]) que si se unen todos los datos anteriores se obtiene que la manera de recuperar  $f(t)$  a partir de los datos muestreados es*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\sin \omega_M(t - nT)}{\omega_M(t - nT)}$$

para el caso  $\omega_M = 2\pi f_M$ ,  $T = \frac{1}{2f_M}$ .



### 3. Modulación de amplitud

Necesitamos el siguiente resultado

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea  $f(t)$  una señal que admite transformada de Fourier  $\mathbf{F}(\omega)$ . Entonces*

$$\mathcal{F}(f(t) \cos \omega_c t)(\omega) = \frac{\mathbf{F}(\omega - \omega_c) + \mathbf{F}(\omega + \omega_c)}{2}$$

y

$$\mathcal{F}(f(t) \sin \omega_c t)(\omega) = \frac{\mathbf{F}(\omega - \omega_c) - \mathbf{F}(\omega + \omega_c)}{2i}.$$

Esto nos da pie al siguiente simple razonamiento. Tenemos una señal  $f(t)$  limitada en frecuencia (esto es,  $\mathbf{F}(\omega) = 0$  para cada  $\omega > \omega_M$ ) y deseamos transmitirla. Para ello, en primer lugar elegimos una frecuencia  $\omega_c > \omega_M$  (habitualmente  $\omega_c$  es de hecho mucho mayor que  $\omega_M$ ) y consideramos la señal modulada  $m(t) = f(t) \cos \omega_c t$ . Observamos que la transformada de Fourier de  $m(t)$  consiste simplemente de dos copias de la transformada de  $f$  centradas en  $\pm \omega_c$ . Esta señal  $m(t)$  es la que se emite. Veamos como el aparato receptor recibe  $m(t)$  y recupera  $f(t)$ . Supongamos que en el receptor multiplicamos  $m(t)$  por  $\cos \omega_c t$ . Obtenemos entonces la señal

$$m(t) \cos \omega_c t = f(t) \cos^2 \omega_c t = f(t) \frac{1 + \cos 2\omega_c t}{2} = \frac{f(t)}{2} + \frac{f(t) \cos 2\omega_c t}{2}.$$

Puesto que  $\mathcal{F}(m(t) \cos 2\omega_c t)(\omega)$  sólo vale distinto de 0 en dos entornos de centros  $\pm 2\omega_c$  y radio  $\omega_M$ , resulta claro que pasando  $m(t) \cos \omega_c t$  por un filtro paso bajo recuperamos  $f(t)$  (divida por 2, pero esto no es importante).



## Bibliografía

- [1] T. M. Apostol, *Calculus*, Ed. Reverté 1990.
- [2] R. G. Bartle y D. R. Sherbert, *Introducción al Análisis Matemático de una variable* Noriega Editores 1996.
- [3] R. Churchill y J. Brown, *Variable compleja y aplicaciones* McGraw-Hill 1990.
- [4] H. Hsu, *Análisis de Fourier* Fondo Educ. Interamericano 1973.
- [5] A. Oppenheim, R. Schafer y J. Buck, *Tratamiento de señales en tiempo discreto*, Prentice Hall 2000.