Ampliación de Cálculo Hoja 7

1.- Sea $a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = 0$, con a,b y c funciones continuas. El teorema de existencia y unicidad dice que fijadas condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = x_1$ existe una única solución:

a) Si x e y son soluciones de la ecuación y $\lambda \in \mathbb{R}$, prueba que $x + \lambda y$ es también solución.

b) Si x e y son soluciones linealmente independientes de la ecuación, prueba que forma una base del conjunto de soluciones.

c) Sea $a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = f(t)$, y sean y_0 e y_1 dos soluciones de esta ecuación. Prueba que $y_0 - y_1$ es una solución de la ecuación homogénea asociada.

2.- Resuelve el problema $x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$.

(**Indicación:** Resuelve la segunda ecuación, que es de primer orden, sustituye en la primera y resuelvela. Otra forma de hacerlo es transformar el sistema en una ecuación de lineal de segundo orden. Al no tener condiciones iniciales, la transformada de Laplace no es muy útil).

3.- Esboza los diagramas de fases de los sistemas $x' = Ax$ correspondientes a las matrices A siguientes(e.d. representar las curvas paramétricas $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$, donde (x_1, x_2) es solución del sistema):

a) $\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$;

4.- a) Sea $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que $Lf(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} f(t)\, dt$ existe para algún $s_0 > 0$. Probar que para todo $s > s_0$ existe

$$Lf(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

A la función Lf se la llama *transformada de Laplace* de la función f. Comprueba que el dominio de Lf es al menos $[s_0,\infty)$.

b) Comprueba la siguiente tabla de transformadas:

para $f(x) = 1$, $Lf(s) = 1/s$, para $f(x) = x$, $Lf(s) = 1/s^2$

para $f(x) = e^{-\alpha x}$, $Lf(s) = \dfrac{1}{s + \alpha}$, para $f(x) = \operatorname{sen}\beta x$, $Lf(s) = \dfrac{\beta}{s^2 + \beta^2}$

para $f(x) = \cos\beta x$, $Lf(s) = \dfrac{s}{s^2 + \beta^2}$

Nota: Se puede probar que si $Lf(s) = Lg(s)$, entonces $f = g$.

5.- Prueba las siguientes propiedades de la transformada de Laplace:

a) Prueba que para f y g funciones y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ se tiene que $L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$.

b) Si f es dos veces derivable, probar que

$Lf'(s) = sLf(s) - f(0)$ y $Lf''(s) = s^2Lf(s) - sf(0) - f'(0)$.

c) Con todas las propiedades anteriores resuelve el sistema líneal de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) + t \\ y'(t) &= -4x(t) \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $y(0) = -1$.

d) Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

$d_1)$ $\begin{cases} x' = x - 2y - t, & x(0) = 1 \\ y' = 2x - 3y - t, & y(0) = 1 \end{cases}$ $d_2)$ $\begin{cases} x' = x - 2y + 2, & x(0) = 0 \\ y' = 5x - y + 1, & y(0) = 0. \end{cases}$

(Nota: Aplicar la transformada de Laplace**)**.

6.- Sean $Lf(s) = \dfrac{1}{s+3}$, $Lf(s) = \dfrac{4}{s^2+3s+1}$ y $Lf(s) = \dfrac{s}{s^2-4s+3}$ tres tranformadas de Laplace. Calcula en cada caso f.

7.- Sean $H(s) = \dfrac{1}{s+3}$, $H(s) = \dfrac{4}{s^2+3s+1}$ y $H(s) = \dfrac{s}{s^2-4s+3}$ tres funciones de transferencia de otros tantos sistemas lineales causales (circuitos eléctricos). Encuentra las ecuaciones diferenciales que riguen estos circuitos.

8.- Resuelve los siguientes problemas de valor inicial usando la transformada de Laplace:

a) $y'' - 6y' + 5y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 11$

b) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Nº de orden	Original	Transformada
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$\operatorname{sen} \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
3	$\cos \alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$
4	$\cos \alpha (t-t_0)$	$\frac{pe^{-pt_0}}{p^2+\alpha^2}$
5	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
6	$\operatorname{sh} \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
7	$\operatorname{ch} \alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
8	$e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
9	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
10	t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$
11	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$
12	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
13	$t \operatorname{sen} \alpha t$	$\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$
14	$t \cos \alpha t$	$\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$
15	$f^{(n)}(t)$, $f(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$	$p^n F(p)$
16	$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\frac{1}{p} F(p)$

Continuacion

Nº de orden	Original	Transformada
17	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(q)\, dq$
18	$f(t-t_0)$	$e^{-pt_0} F(p)$
19	$\sigma_0(t-h)$	$e^{-ph} \frac{1}{p}$
20	$f_1^* f_2$	$L[f_1;\ p] \cdot L[f_2;\ p]$
21	$f(t)g(0)+\int_0^t f(\tau) g'(t-\tau)\, d\tau$	$pL[f;\ p] \cdot L[g;\ p]$
22	$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} \frac{t^k}{k!}\ (t>0)$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$

§ 7.3. Aplicaciones del cálculo operacional

Supongamos que está dada la ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden con coeficientes constantes

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t). \qquad (1)$$

Es preciso hallar la solución de la ecuación (1) cuando $t \geqslant 0$ para las condiciones siguientes

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0', \ \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \qquad (2)$$

Supongamos que $x(t)$ es la solución de (1) que satisface las condiciones iniciales (2). Entonces, al sustituir esta función en (1), obtenemos la identidad. Por lo tanto, la función que figura en el primer miembro de (1) y la función $f(t)$ tienen una misma L-transformada.

$$L\left[\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k x}{dt^k};\ p\right] = L[f(t);\ p].$$