AMPLIACIÓN DE CÁLCULO Grupo C
Examen parcial (1-XII-08)

Nombre y apellidos ....

1.- Estudia la convergencia puntual, uniforme y en media cuadadrática de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, en el intervalo $[-1,1]$.

2.- Prueba la igualdad: $\frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $0 \le x \le 2\pi$. Deduce de lo anterior que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1º) SI X ESTA FIJO ESTAMOS ANTE UNA SERIE GEOMÉTRICA

SI $x=1$ $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = \infty$; SI $x=-1$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ NO ES CONVERGENTE $(-1)^n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

SI $x\in(-1,1)$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ SUMA DE LA SERIE GEOMÉTRICA.

LÍMITE PUNTUAL

$\forall x\in(-1,1)$ $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

SI $x=1$ $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \infty$ Y SI $x=-1$ LA SERIE DIVERGE

LÍMITE UNIFORME: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ES UNA SERIE DE POTENCIAS DE RADIO DE CONVERGENCIA IGUAL A "1", POR LO VISTO ANTERIORMENTE. ASÍ SI $a\in(0,1)$ LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $[-a,a]$; EN $[-1,1]$ NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME YA QUE NI SIQUIERA HAY CONVERGENCIA PUNTUAL, EN $x=1$ Y $x=-1$.

HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN $(-1,1)$ TAMPOCO HAY CONVERGENCIA UNIFORME YA QUE $\forall N\in\mathbb{N}$

$$\left|\frac{1}{1-x} - \sum_{n=1}^{N} x^n\right| \xrightarrow[x\to 1^-]{} \infty \text{ , ASÍ } \underline{\underline{\text{NO}}} \text{ ES}$$

POSIBLE QUE $\forall \varepsilon>0$ $\exists N_0$: $N \geq N_0$ SE TENGA QUE

$$\left|\frac{1}{1-x} - \sum_{n=1}^{N} x^n\right| \leq \varepsilon \quad \forall x\in(-1,1).$$

CONVERGENCIA EN MEDIA CUADRÁTICA

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \longrightarrow \frac{1}{1-x}$$ UNIFORMEMENTE EN $[-a,a]$ $\forall a\in(0,1)$

LUEGO COMO LA CONVERGENCIA UNIFORME IMPLICA LA CONVERGENCIA EN MEDIA CUADRÁTICA ASÍ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$ CONVERGE EN $\|\ \|_2$ A $\frac{1}{1-x}$ EN $L_2[-a,a]$

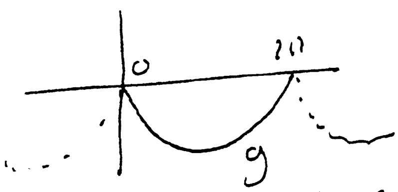
SIN EMBARGO EN $L_2(-1,1)$ NO HAY CONVERGENCIA CUADRÁTICA, YA QUE SI $\frac{1}{1-x}$ ES EL LÍMITE PUNTUAL DE LA SERIE Y $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$ CONVERGE EN $\|\ \|_2$ EN $L_2(-1,1)$ SE TENDRÍA QUE $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{\|\ \|_2} \frac{1}{1-x}$

PERO $\frac{1}{1-x} \notin L_2[-1,1]$ YA QUE $\left\|\frac{1}{1-x}\right\|_2^2 = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 dx \geq$

$$\geq \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \frac{1}{1-x}\Big|_0^1 = \infty.$$

2º) SEA $g(x) = \frac{x^2}{2} - \pi x$, $x\in[0,2\pi]$; $g(0)=g(\pi)=0$

ASÍ g SE PUEDE EXTENDER DE FORMA 2π-PERIÓDICA



Y $g'(x) = x-\pi$ $\forall x\in(0,2\pi)$ CON

$g'(0^+) = -\pi = g'(2\pi^+)$ Y $g'(0^-) = g'(2\pi^-) = \pi$.

ADEMÁS g ES PAR, LUEGO SUS COEFICIENTES b_n DE FOURIER SON NULOS

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{2} - \pi x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{6} - \frac{\pi x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = -\frac{2\pi^2}{3}$$ ASÍ $\boxed{\frac{a_0}{2} = -\frac{\pi^2}{3}}$

ADEMÁS

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x^2}{2} - \pi x\right)\cos nx\,dx$ = APLICANDO INTEGRACIÓN POR PARTES 2 VECES $= 2/n^2$

ASÍ $$\frac{x^2}{2} - \pi x = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\cos nx \qquad 0\leq x\leq 2\pi.$$

LA IGUALDAD SE TIENE DE LOS TEOREMAS DE CONVERGENCIA YA QUE $\exists\, g'$ EN $(0,2\pi)$ Y ADEMÁS EN 0 Y 2π EXISTEN LAS DERIVADAS LATERALES Y $g(0^+) = g(0^-) = g(2\pi^+) = g(2\pi^-) = 0$

POR OTRO LADO PARA $x=0$, SUSTITUYENDO EN LA IGUALDAD ANTERIOR, QUE $0 = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\cos n0$

DESPEJANDO $$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$