AMPLIACIÓN DE CÁLCULO Hoja 3
SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES

1.- Estudia la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones: a) $f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0\leq x\leq 1/n \\ (-x/n-1)+(1/n-1) & \text{si } 1/n\leq x\leq 1 \end{cases}$ b) $f_n(x) = \dfrac{1 - x^n}{1 + x^n}$ si $1\leq x<\infty$

c) $f_n(x) = x - x^n$ si $x \in [0,1]$ d) $f_n(x) = (1 - x)^n$ si $0\leq x\leq 1$

2.- a) Sea $f_n(x) = xe^{-nx}$ $x\geq 0$. Prueba que esta sucesión converge uniformente en $[0,\infty)$.

b) Sea $f_n(x) = \dfrac{\text{sen } nx}{1 + nx}$ $x\geq 0$. Prueba que para todo $a>0$ la sucesión anterior converge uniformente en $[a,\infty)$, pero no así en $[0,\infty)$.

c) Sea $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx}$ $x\geq 0$. Prueba que para todo $a>0$ la sucesión anterior converge uniformemente en $[a,\infty)$, pero no así en $[0,a)$.

3.- Prueba que la sucesión $\dfrac{x^n}{1 + x^n}$ no converge uniformemente en el intervalo $[0,2]$.

4.- Sea $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = n^2xe^{-nx^2}$.

a) Estudia la convergencia puntual y uniforme de (f_n) en $[0,1]$.

b) Si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, estudia la validez de las siguientes expresiones:

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f$; $\lim_{n\to\infty} (\lim_{x\to 1} f_n(x)) = \lim_{x\to 1} f(x)$ y $f'(1/2) = \lim_{n\to\infty} f_n'(1/2)$.

5.- Demuestra que una sucesión de funciones acotadas puede converger a una función no acotada. ¿Y si la convergencia es uniforme?

6.- a) Escribe expresiones en forma de serie de:

1) $\displaystyle\int_1^a \frac{\text{sent}}{t}\, dt$ $a > 1$ 2) $\displaystyle\int_0^x \frac{\log(1 + t)}{t}\, dt$

b) Calcula: $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\text{sent}}{t}\, dt$ con un error menor de 0,0001

7.- Estudia la convergencia puntual y uniforme de las series de funciones siguientes:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ con $x \in [0,1]$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}^2 nx}{n^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{senx}}{(1 + \text{senx})^n}$ con $x \in [0,\pi]$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x + 1)(nx + 1)}$ con $x>0$.

8.- Demuestra que la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$, $x \in \mathbb{R}$, tiene derivada continua.

9.- Encuentra los intervalos de convergencia de las siguientes series de potencias. Determinar la convergencia en los extremos.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(n-1)!(1-x)^n$

10.- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x^2$. Demuestra que la primera serie converge en [-1,1] ; que la tercera no converge en ningún punto de [-1,1]\{0} y que para la segunda hay al menos un punto de [-1,1] en la que la serie no es convergente.

11.- Se considera la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n (n!)^2}$. Demostrar que su radio de convergencia es infinito. Si se denota por f su suma, prueba que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$.

12.- Calcula la norma 2 y la norma infinito de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $I = [0,2\pi]$ y $I = \mathbb{R}$. b) $f(x) = 1/\sqrt[4]{x}$ en $I = [0,1]$.

c) $f(x) = 1$ en $I = [a,b]$ y $I = [0,\infty)$ d) $f(x) = e^{-x}$ en $I = [0,1]$ y $I = [0,\infty)$.

13.- a) Estudia la convergencia puntual de la sucesión:

$f_n(x) = \frac{2nx^2}{n^2x^4 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. b) Calcula $||f_n||_\infty$

14.- Estudia la convergencia uniforme y en media cuadrática de las siguientes sucesiones de funciones:

a) $f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 + x^n}$ si $1 \leq x < \infty$; b) $f_n(x) = xe^{-nx}$ si $x \in [0,\infty)$

c) $f_n(x) = x^n$ si $x \in [0,1]$ d) $f_n(x) = (\cos \pi x)^{2n}$

15.- Estudia la convergencia uniforme y en media cuadrática de la sucesión:

$f_n(x) = \frac{2nx^2}{n^2x^4 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

16.- Estudia la convergencia puntual, uniforme y en media cuadadrática de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ en los intervalos $[0,a]$, $a \in \mathbb{R}$, y $[0,\infty)$.

17.- Estudia la convergencia puntual, uniforme y en media cuadadrática de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ en el intervalo [-1,1].