AMPLIACIÓN DE CÁLCULO Hoja 4
Series de Fourier

1.- Calcula el periodo de las funciones senax, cosax y e^{iax}.

2.- a) Probar que las siguientes familias son ortogonales en los espacios que se indican : *i*) $\{\cos nx, \operatorname{sen} nx\}_{n\geq 0}$ en $L_2[-\pi,\pi]$. *ii*) $\{ e^{inx} \}_{n\in\mathbb{Z}}$ en ($L_2[-\pi,\pi]$, $\mathbb{C}$) *iii*) las familias $\{ \cos nx \}_{n\geq 0}$ y $\{ \operatorname{sen} nx \}_{n\geq 1}$ en $L_2[0,\pi]$.

3.- Sea f,g dos funciones de $L_2[a,b]$ ortonormales. Prueba que $\| f - g \|_2 = \sqrt{2}$.

4.- Sean $\{f_1,f_2,...,f_n\} \subseteq L_2([a,b],\mathbb{R})$ una familia finita ortonormal de L_2. Sean $f \in L_2[a,b]$ y $g = f - \sum_{k=1}^{n} \langle f,f_k\rangle f_k$. Prueba que h y g son ortogonales, donde h es cualquier vector del espacio vectorial engendrado por $\{f_1,f_2,...,f_n\}$ (el vector $\sum_{k=1}^{n} \langle f,f_k\rangle f_k$ se llama la proyección ortogonal de f sobre el espacio vectorial engendrado por $\{f_1,f_2,...,f_n\}$).

5.- Sea (x_n) una sucesión numérica convergente a un número x. Sea $\sigma_k = \dfrac{x_1 + ... + x_k}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, la sucesión de medias Césaro de (x_n). Probar que (σ_n) converge a x. **(El teorema de Fejer** asegura que las medias Césaro de una serie de Fourier de una función continua 2π-periódica convergen uniformemente a dicha función.)

6.- Sea $f \in C[-\pi,\pi]$ 2π-periódica y derivable. Probar que si f es par (e.d. $f(-x) = f(x)$), entonces se puede escribir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Y por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$, si f es impar (e.d. $f(-x) = -f(x)$).

7.- Hallar las series de Fourier de las funciones:

i) $f(x) = |x|$ *ii*) $f(x) = \cos^3 x$ *iii*) $f(x) = e^x$ *iv*) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ *v*) $f(x) = \operatorname{sen}^5 x$. (Se entiende la serie clásica de Fourier en el intervalo $[-\pi,\pi]$).

8.- Sea f una función continua y periódica de periodo T. Prueba que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt, \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Obsevación: Si f es 2π-periódica, f(x)sennx y f(x)cosnx son 2π-periódicas y por el ejercicio previo nos da igual trabajar en el intervalo $[-\pi,\pi]$ o en $[-\pi + \alpha,\pi + \alpha]$.

9.- Probar que:

a) $$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}, \quad 0<x<2\pi$$

b) $$\frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad 0\leq x\leq 2\pi$$

c) $$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}, \quad -\pi<x<\pi$$

d) $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}, \quad -\pi\leq x\leq \pi$$

10.- Probar las siguientes igualdades:

a) $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$ b) $$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

(Indicación: Usar las igualdades del ejercio anterior).

11.- Sean las funciones $f(x) = (x-2)^2$, $x \in [0,4]$ y $g(x) = |x|^3$, $x \in [-3,3]$. Encontrar expresiones en serie de senos y cosenos de estas funciones.

12.- Encuentra expresiones en serie de senos y cosenos (series de Fourier) de las funciones:

a) $$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -T/2<t<0 \\ 1 & \text{si } 0<t<T/2 \end{cases}, \quad \text{siendo f T-periódica.}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<x\leq 12 \\ 0 & \text{si } 1/2<x\leq 1 \end{cases}, \quad \text{siendo f 1-periódica.}$$

c) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0\leq x\leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1<x\leq 2 \end{cases}, \quad \text{siendo f 2-periódica.}$$

13.- Sea $f \in C[-\pi,\pi]$ 2π-periódica y tal que las sucesiones de coeficientes de Fourier $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ verifican que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$. Probar que la serie de Fourier de f converge uniformemente a f en $[-\pi,\pi]$.

14.- Prueba las siguientes igualdades: 1) $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}$ 2) $|e^{it}| = 1$ 3) $\overline{e^{it}} = e^{-it}$ 4) $\cos nx = (e^{inx} + e^{-inx})/2$ y $\operatorname{sen} nx = (e^{inx} - e^{-inx})/2i$ 5) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\, dt = e^{int}/in \Big|_{-\pi}^{\pi}$

(**Indicación:** tener en cuenta que $\int f(t) + ig(t)dt = \int f(t)dt + i\int g(t)dt$).

15.- Sea $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$ la serie de Fourier de una función f. Poner $\cos nx = (e^{inx} + e^{-inx})/2$ y $\operatorname{sen} nx = (e^{inx} - e^{-inx})/2i$ y obtener $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, donde:

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{y} \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Demostrar que también $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

16.- El voltage de un circuito eléctrico viene dado por la función, que depende del tiempo, $V(t) = \begin{cases} 40 & \text{si } 0<t<2 \\ 0 & \text{si } 2<t<5 \end{cases}$. Obtener los primeros cinco términos de la serie de Fourier compleja de V.