Hoja 4 de problemas de Ampliación de Cálculo

Series de Fourier.

Ejercicio 1

Demostrar que si f es una función periódica de periodo T entonces

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 2

El voltage de un circuito eléctrico viene dado por la función:

$$V(t) = \begin{cases} 40 & 0 < t < 2 \\ 0 & 2 < t < 5 \end{cases}$$

Obtener los cinco primeros términos de la serie de Fourier compleja para la función $V(t)$.

Ejercicio 3

Sea $f(t)$ una función periódica de período T, continua a trozos en el intervalo $-T/2 < T < T/2$. Demostrar que la serie de Fourier

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

se puede integrar término a término y obtener la expresión de $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

Ejercicio 4

Sea la función $f(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \\ \ell - x & \text{si } \frac{\ell}{2} < x \leq \ell. \end{cases}$$

a) Hacer una gráfica utilizando el hecho que $f(x) = -f(-x)$.

b) Determinar el desarrollo en serie de Fourier.

Ejercicio 5

Para cada una de las funciones siguientes :

a) Hacer una gráfica de la función.

b) Justificar la existencia de un desarrollo de Fourier .

c) Calcular los coeficientes de Fourier.

1. $f(x) = x^2,\ x \in [-\pi, \pi]$.
2. $f(x) = |x|,\ x \in]-\pi, \pi[$.
3. $f(x) = |\sin x| . x \in]-\pi, \pi[$.
4. $f(x) = x,\ x \in (-\pi, \pi)$.
5. $f(x) = x,\ x \in (0, 2\pi)$.
6. $f(x) = x^2,\ x \in (0, 2\pi)$.
7. $f(x) = x(\pi - x), x \in [0, \pi]$

Ejercicio 6

Utilizando los resultados del ejercicio anterior deducir

1. A partir de 1, el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

2. A partir de 2, el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

3. A partir de 7, el valor de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}.$$