Hoja 5 de problemas de Ampliación de Cálculo

Transformada de Fourier.

Ejercicio 1

Demostrar la fórmula de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)G(it)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(it)g(t)dt$$

donde F y G son las transformadas de Fourier respectivas de $f(t)$ y $g(t)$ que se supondrán suaves ($\mathcal{C}^{\infty}$).

Ejercicio 2

Determinar la transformada de Fourier de la función $f(t)$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} k & -T \leq t < 0 \\ -k & 0 \leq t < T \\ 0 & t \notin [-T, T]\,. \end{cases}$$

Ejercicio 3

Determinar la transformada de Fourier de la función $f(t) = e^{-t^2}$.

Ejercicio 4

Sea

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

a) Demostrar que

$$f(at) * f(bt) = \frac{f(at) - f(bt)}{b - a}$$

donde a y b son dos números reales cualesquiera.

b) Deducir que

$$f(at) * f(at) = tf(at)$$

Se recuerda que $*$ es el operador de convolución definido por:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Ejercicio 5

Sea la función (llamada función característica)

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1, & \text{si } w \in A \\ 0 & \text{si } w \notin A \end{cases}$$

Consideremos una señal $f(t)$. Utilizando la técnica de filtro de frecuencia, determinar $f_\delta(t)$ es decir la componente en frecuencia de f menor o igual que δ.

Indicación: recuérdese que $f_\delta(t) = (f * g)(t)$ donde $g(t)$ es una función tal que $\mathcal{F}(g) = \chi_{[-\delta,\delta]}$.