AMPLIACIÓN DE CÁLCULO Grupo C
Examen parcial (4-XII-09)

Nombre y apellidos ....

1.- Determina el origen de las siguientes expresiones:

1) $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ si $|x| \simeq 0$

2) $(\log x)^2 \simeq (x-1)^2 - (x-1)^3$ si $|x| \simeq 1$

3) Prueba que si $x > 0$, entonces

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

Utiliza la desigualdad anterior para aproximar $\sqrt{1,2}$ y haz una estimación del error cometido.

2.- Prueba la igualdad: $\operatorname{sen}(x)\chi_{[-\pi,\pi]}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} s\pi}{1-s^2}\operatorname{sen} sx\,ds \quad x \in [-\pi,\pi].$

PROBLEMA 1:

1) $f(x) = \sqrt{1+x}$; $f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$; $f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$; $f''(0) = -\frac{1}{4}$

$f(x) = P_{2,0}(x) + R_{2,0}(x) =$

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + R_{2,0}(x)$

ASI $f(x) \simeq P_{2,0}(x)$ SI $|x| \simeq 0$.

2) $f(x) = (ly\,x)^2$; $f(1) = 0$

$f'(x) = 2\frac{1}{x}ly\,x$; $f'(1) = 0$

$f''(x) = 2\frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x^2}ly\,x$; $f''(1) = 2$

$f'''(x) = -\frac{4}{x^3} - 2\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^3}ly\,x$; $f'''(1) = -6$

$f(x) = P_{3,1}(x) + R_{3,1}(0) =$

$= (x-1)^2 - (x-1)^3 + R_{3,1}(0)$

ASI $f(x) \simeq P_{3,1}(x)$ SI $|x| \simeq 1$

3) POR 1) PARA $f(x) = \sqrt{1+x}$ $P_{1,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ Y

$R_{1,0}(x) = \int_0^x \frac{-\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}}{1}(x-t)dt < 0$

SI $t \in [0,x]$, $x > 0$

ASI $f(x) = P_{1,0}(x) + R_{1,0}(x) \leq 1 + \frac{x}{2}$ YA QUE $R_{1,0}(x) < 0$

POR OTRO LADO $|R_{1,0}(x)| \leq \int_0^x \frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}(x-t)dt \leq \int_0^x \frac{x-t}{4}dt = \frac{x^2}{8}$

$1+x > 1$
$x > 0$

LUEGO $-\frac{x^2}{8} \leq R_{1,0}(x)$

Y ASI $1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} \leq f(x)$.

PARA $x = 0,2$

$$1 + \frac{0,2}{2} - \frac{0,04}{8} < \sqrt{1+0'2} = \sqrt{1,2} < 1 + \frac{0,2}{2} = 1,1$$

LUEGO $\sqrt{1,2} \simeq 1,1$ CON UN ERROR MENOR QUE $\left|\frac{0,04}{8}\right| = \underline{\underline{0,005}}$

— o —

PROBLEMA 2:) $f(x) = \text{sen}(x) \cdot \chi_{[-\pi,\pi]}(x)$ ES UNA FUNCIÓN DE L_1 ADEMAS IMPAR; SI CALCULAMOS SU TRANSFORMADA DE FOURIER

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}\, x\, \chi_{[-\pi,\pi]}(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = -i\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\, x \cdot \text{sen}\lambda x \cdot dx =$$

$$\underset{\downarrow}{=} -i \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2} \left[\cos(x-\lambda x) - \cos(x+\lambda x) \right] dx =$$

$\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$

$$= -\frac{i}{2} \left[\frac{\text{sen}\, x(1-\lambda)}{1-\lambda} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\text{sen}\, x(1+\lambda)}{1+\lambda} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] =$$

$$= -\frac{i}{2} \left[\frac{2\, \text{sen}\, \pi(1-\lambda)}{1-\lambda} - \frac{2\, \text{sen}\, x(1+\lambda)\pi}{1+\lambda} \right] \underset{\uparrow}{=}$$

$\text{sen}(a+b) = \cos a\, \text{sen}\, b + \text{sen}\, a \cos b$

$$= -i \left[\frac{(1+\lambda)\,\text{sen}\,\lambda\pi + (1-\lambda)\,\text{sen}\,\pi\lambda}{1-\lambda^2} \right] = -i\, \frac{2\,\text{sen}\,\lambda\pi}{1-\lambda^2}$$

ASI $\hat{f}(\lambda)$ ES UNA FUNCIÓN CONTINUA EN TODO $\mathbb{R}$

$$\left[\lim_{\lambda \to \pm 1} -i\, \frac{2\,\text{sen}\,\lambda\pi}{1-\lambda^2} \underset{\text{L'HOSPITAL}}{=} \cdots = -i \right]$$

Y $\hat{f} \in L_1$

POR EL TEOREMA DE INVERSIÓN

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -i\, \frac{2\,\text{sen}\,\lambda\pi}{1-\lambda^2}\, i\, \text{sen}\,\lambda x\, d\lambda =$$

$\hat{f}(\lambda)$ ES IMPAR

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,\text{sen}\,\lambda\pi}{1-\lambda^2}\, \text{sen}\,\lambda x\, d\lambda \underset{\downarrow}{=} \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\text{sen}\,\lambda\pi}{1-\lambda^2}\, \text{sen}\,\lambda x\, d\lambda.$$

$\frac{2\,\text{sen}\,\lambda\pi}{1-\lambda^2}\, \text{sen}\,\lambda x$ PAR