Hoja 1 de problemas de Ampliación de Cálculo

Convergencia puntal y uniforme de sucesiones de funciones

Ejercicio 1

Para las sucesiones de funciones $n \in \mathbb{N}$

a. $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^n}, \quad x \in [1, \infty)$
b. $f_n(x) = xe^{-nx}, \quad x \in [0, \infty)$
c. $f_n(x) = x^n, \; x \in [0, 1]$
d. $f_n(x) = (\cos \pi x)^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Se pide

1. Representar $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$
2. Estudiar la convergencia puntual
3. Estudiar la convergencia uniforme.

Ejercicio 2

Sean las sucesiones de funciones definidas en el intervalo $[0, 1]$ por

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}, \qquad g_n(x) = \frac{1}{1+nx} \;,$$

a) Estudiar la convergencia puntual y uniforme.
b) Sea ahora

$$h_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, \quad x \geq 0.$$

Probar que la sucesión $h_n(x)$ converge uniformemente en el intervalo $[a, \infty)$ pero no en el intervalo $[0, a]$, para cualquier $a > 0$.

Ejercicio 3

Sea la sucesión de funciones definidas en el intervalo $[0, \pi]$ por

$$f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$$

Estudiar la convergencia puntual y uniforme.

Ejercicio 4

Sea la sucesion de funciones definidas en el intervalo $[0, 1]$ por

$$f_n(x) = x^n(1-x)$$

a) Estudiar la convergencia puntual y uniforme.
b) Deducir la convergencia puntual y uniforme de la sucesión

$$g_n(x) = (-1)^n x^n (1-x).$$

Ejercicio 5

Deteminar

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x} dx.$$