Notación

A lo largo de estas notas se utilizarán diferentes notaciones en especial para la variable independiente. Esto no se hace con el ánimo de confundir al lector sino para facilitarle la lectura de otros libros de texto en particular aquellos escritos para físicos o ingenieros.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ designan respectivamente el campo de los números reales y el campo de los números complejos.

$sgn(x)$ es la función signo que asigna el valor $+1$ si x es positivo y -1 si x es negativo.

x y/o t designan la variable independiente.

y y/o u designan la función incógnita.

$y' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dy}{dx}$ o $\frac{dy}{dt}$.

L designa un operador lineal. Por ejemplo L_2 es un operador lineal de segundo orden.

K designa una constante (real).

$\mathcal{L}$ designa el operador de $\mathcal{L}$aplace

$\mathcal{D}$ designa generalmente un dominio.

$\overrightarrow{X}$ designa un vector $\in \mathbb{R}^n$

A designa una matriz $\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

CAPíTULO 1

Introducción general

Una ecuación diferencial (e.d.) es una ecuación donde intervienen variables independientes, funciones y sus derivadas. Por ejemplo la ecuación:

$$(1) \qquad y' + 2xy = 0, \qquad y' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dy}{dx}$$

es una ecuación diferencial donde y es la función incógnita y x es la variable independiente. Se llama solución de la e.d. a la función $y = \phi(x)$ que satisface (1) es decir tal que $\phi'(x) + 2\phi(x) = 0$. En este caso concreto es fácil comprobar que la función $y = e^{-x^2}$ es una solución de (1) . La e.d. (1) es una ecuación diferencial de primer orden ya que sólo interviene la derivada primera de la función. De manera general las e.d. de primer orden se escriben de la forma

$$(2) \qquad F(x, y, y') = 0$$

Mas formalmente, una función $y = y(x)$ es solución de (2) en un intervalo J si $y(x)$ es una función diferenciable en J y si además se cumple

$$(3) \qquad F(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad \text{para todo } x \in J.$$

La forma explícita de la e.d. de primer orden es $y' = f(x, y)$ mientras que la expresión (3) es la forma implícita de la e.d. De manera análoga una e.d. de orden n se escribe de la forma:

$$(4) \qquad F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0.$$

En este caso una función solución $y(x)$ de (4) debe ser n-veces diferenciable además de satisfacer

$$(5) \qquad F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad \text{para todo } x \in J.$$

Todo lo mencionado hasta ahora se aplica a las ecuaciones diferenciales ordinarias (e.d.o) es decir a las ecuaciones diferenciales para funciones y de una sola variable independiente x. En el caso de que estén presentes varias variables independientes la ecuación diferencial es del tipo ecuación en derivadas parciales como por ejemplo $u_x + u_y = x + y$. Este tipo de ecuación se estudiará en la última parte de estas notas.

Para terminar esta introducción mencionaremos la expresión integral de una e.d. Se dice que una familia de funciones $y(x; C_{1,} C_2, \cdots, C_n)$ que depende de la variable independiente x y de los parámetros C_n es una integral completa de la e.d. o una solución general de la e.d. de orden n si se satisface que cada función $y(x; C_{1,} C_2, \cdots, C_n)$ es solución de la ecuación para un conjunto cualquiera de valores de los parámetros $C_{1,} C_2, \cdots, C_n$ y si toda solución de (5) se obtiene de esta manera.

CAPíTULO 2

Ecuaciones diferenciales de primer orden. Algunos casos integrables.

1. E.d. de primer orden explícitas $y' = f(x, y)$

En todo este apartado supondremos que la función $f(x, y)$ es una función real definida en un conjunto abierto $\mathcal{D}$ del plano xy.

1.1. Solución, campo de vectores. Sea J un intervalo cualquiera acotado o no de la recta real $\mathbb{R}$. Se dice que una función $y(x) : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución de la e.d. $y' = f(x, y)$ en el intervalo J si $y(x)$ es diferenciable, si el grafo de $y(x)$ es un subconjunto del dominio $\mathcal{D}$ y si se verifica le ecuación. Es decir si

$$(x, y(x)) \in \mathcal{D} \text{ y } y'(x) = f(x, y(x)) \text{ para todo } x \in J. \tag{6}$$

La ecuación diferencial (6) tiene una interpretación geométrica muy sencilla. Si $y(x)$ es una curva integral de la ecuación que pasa por el punto (x_0, y_0) entonces la e.d. determina la pendiente de la curva en dicho punto: $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Esto nos induce de manera natural a la noción de elemento de línea y de campo de vectores.

Dado un triplo de números (x, y, p) la interpretación geométrica es la siguiente: (x, y) define un punto geométrico en el plano mientras que la tercera componente p define la pendiente α de una línea que pasa por el punto (x, y) de forma que $\tan(\alpha) = p$ donde α es el ángulo de inclinación de la línea. En geometría al triplo (x, y, p) se le denomina elemento de línea y al conjunto de elementos de línea de la forma $(x, y, f(x, y))$ es decir aquellos que son de la forma $p = f(x, y)$ se llaman campo de direcciones o campo vectorial (Ver figura 1.1).

1.2. El problema de valor inicial P.V.I.. Se denomina problema de valor inicial (P.V.I.) al sistema

$$\left\{ \begin{array}{rl} y' = f(x, y(x)) & \text{en } J \\ y(\xi) = \eta & \end{array} \right. \tag{7}$$

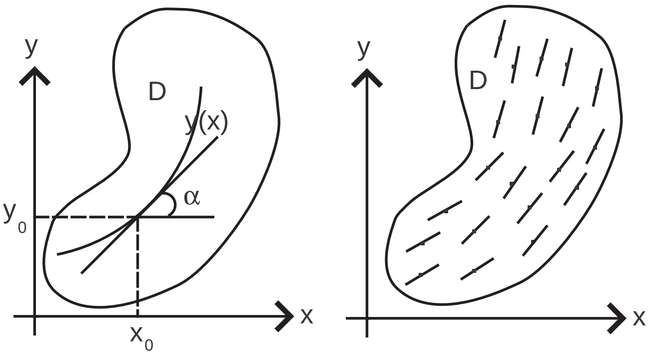

Figura 1. Pendiente p. Elemento de linea y campo vectorial.

donde (ξ, η) es un punto del dominio $\mathcal{D}$. La ecuación $y(\xi) = \eta$ es la condición inicial y determinará la unicidad de la solución como veremos más adelante.

1.3. E.d. de tipo $y' = f(x)$. Supongamos que la función $f(x)$ es continua en un intervalo J. El dominio $\mathcal{D}$ será entonces la banda $J \times \mathbb{R}$. Para este tipo de e.d. el campo de direcciones es claramente independiente de la variable y (ya que ésta no aparece en la función f . Ver figura 1.3). Por esta razón parece natural pensar que todas la soluciones de la e.d. se pueden obtener mediante una translación en el eje de las y de una solución particular. En efecto si $\xi \in J$ es un punto fijado en $\mathcal{D}$, por el Teorema Fundamental del Cálculo tendremos que la función

$$\phi(x) := \int_{\xi}^{x} f(t)dt \tag{8}$$

es una solución (particular) de la e.d. que satisface la condición inicial $y(\xi) = 0$; la solución general se escribe de la forma

$$y = y(x; C) = \phi(x) + C, \tag{9}$$

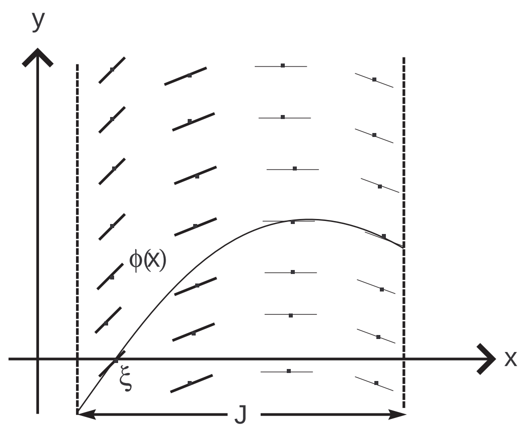

FIGURA 2. Campo vectorial cuando f depende sólo de x

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria. Para el caso del P.V.I. tenemos que determinar el valor de la constante C. La solución (única) será $y(x) = \phi(x) + \eta$, ya que es la única que satisface $y(\xi) = \eta$.

EJEMPLO 1. *Sea la e.d.*

$$y' = x^3 + \cos x$$

la solución general de la e.d. es $y(x; C) = \frac{1}{4}x^4 + \sin x + C$. *Si tuvieramos que resolver el P.V.I.:*

$$\begin{cases} y' = x^3 + \cos x \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

la solución sería $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + \sin x + (\frac{3}{4} - \sin(1))$.

Así pues resolver una e.d. del tipo $y' = f(x)$ es equivalente a determinar el valor de la integral $\int f(\zeta)d\zeta$. Por esta razón se suele decir que se *integra* una e.d. en lugar de decir que se halla la solución de una e.d. El problema es que en la mayoría de los casos no sabemos hallar el valor de esa integral.

1.4. E.d. de tipo $y' = g(y)$. De nuevo supondremos que la función $g(y)$ es continua en el intervalo J. Más adelante veremos que esta hypótesis es importante ya que nos dará la existencia de la solución. Re-escribiendo la e.d. tenemos formalmente

$$„\frac{dy}{dx} = g(y) \iff \frac{dy}{g(y)} = dx". \tag{10}$$

se dice que hemos "separado las variables" x e y. Una vez hecho esto se puede integrar cada miembro de la igualdad. Formalmente

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int dx = x + C \tag{11}$$

donde C es a priori una constante real arbitraria. Si $g \neq 0$ entonces obtenemos $x = x(y)$ y aplicando el Teorema de la función inversa podremos hallar $y(x)$, es decir la solución general.

Observación 2. *Para el caso del P.V.I., es decir si queremos que la solución satisfaga además una condición inicial del tipo $y(\xi) = \eta$ entonces tendremos que determinar el valor de la constante C:*

$$x(y) = \xi + \int_\eta^y \frac{dz}{g(z)}, \tag{12}$$

de manera que $x(\eta) = \xi \iff y(\xi) = \eta$).

Observemos que una transalación de la solución $y(x)$ en la dirección de las x nos dará también una solución de la e.d. Esto es así porque la función $g = g(y)$ sólo depende de y. En efecto, si $y(x)$ es una solución entones $\bar{y}(x) = y(x + C\ )$ es también solución ya que $\bar{y}'(x) = y'(x + C\ ) = g(y + C) = g(\bar{y}(x))$.

Ejemplo 3. *Sea la e.d. $y' = -2y$ en el dominio $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$. Haciendo una separación de variables obtenemos*

$$\frac{dy}{y} = -2dx \iff Ln|y| = -2x + C \iff |y| = e^{\bar{C}-2x}.$$

La solución general de la e.d. es pues $y(x; C) = Ce^{-2x}$ ($C = e^{\bar{C}}$), $C \in \mathbb{R}$ (ver figura 1.4.)

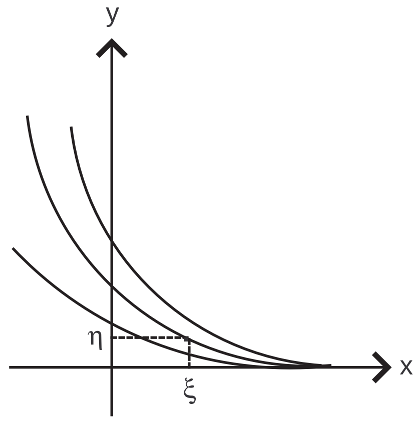

FIGURA 3. Curvas solución $y(x; C) = Ce^{-2x}$.

1.5. El problema de la no-unicidad. La continuidad de la función g **no es suficiente** para asegurar la unicidad de la solución como muestra el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 4. *Sea la e.d.* $y' = \sqrt{|y|}$ *en el dominio* $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$*. Antes de resolver esta e.d. observemos que al cumplir la función que* $g(y) = g(-y)$ *tendremos que si* $y(x)$ *es una solución entonces* $-y(-x)$ *también lo será. Por esta razón nos basta con calcular la solución para* $y > 0$*.*

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx \iff 2\sqrt{y} = x + C$$

luego $y(x; C) = \frac{(x+C)^2}{4}$ *en el intervalo* $J =]-C, \infty[\,,\ C \in \mathbb{R}$*, nos da las soluciones positivas. Las soluciones negativas vendrán dadas por -*$y(-x; C)$*.*

Supongamos que para este caso nos fijamos la condición inicial $y(1) = 2$*, entonces las funciones:*

$$\phi(x) = \begin{cases} x^2/4 \quad para \quad x > 0 \\ 0 \quad para \quad a \le x \le 0 \\ -(x-a)^2/4 \quad para \quad x < 2. \end{cases}$$

y

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2/4 \quad para \quad x > 0 \\ 0 \quad para \quad x \le 0 \end{cases}$$

son solución de la e.d. y cumplen $\phi(2) = 1, \psi(2) = 1$ *(ver figura 1.5).*

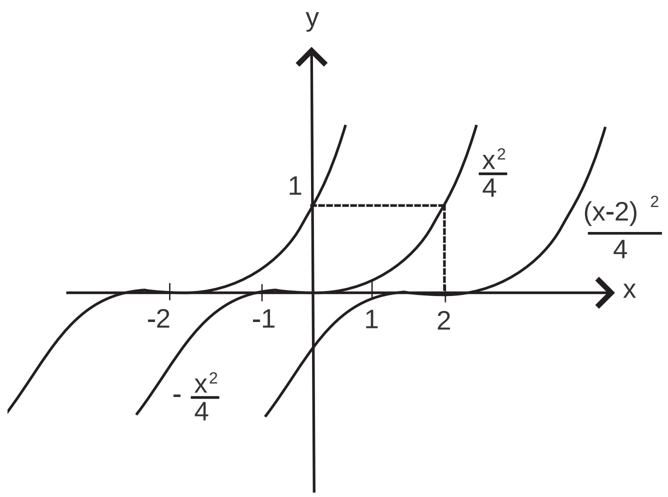

FIGURA 4. Curvas solución de la e.d. $y' = \sqrt{|y|}$.

Al final del capítulo 3 daremos el enunciado de un Teorema de existencia y unicidad de la solución para e.d. de primer orden.

1.6. E.d. de tipo $y' = f(x)g(y)$. A este tipo de e.d. se las denomina ecuaciones diferenciales de *variables separadas*. Las e.d. que hemos visto en (1.3) y en (1.4) forman parte de esta familia. De forma análoga al método expuesto anteriormente, se procede a la resolución de estas e.d. haciendo (si $g(y) \neq 0$)

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

Sea $G(s) = \int \frac{ds}{g(s)}$, es decir $G'(s) = \frac{1}{g(s)}$. Entonces pôr la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = G'(y(x))y'(x) = \frac{y'(x)}{g(y(x))}.$$

Sea ahora $F(x) = \int f(x)dx$. Entonces

$$\frac{d}{dx}F(y(x)) = \frac{d}{dx}G(y).$$

De aquí que

$$G(y(x)) = F(x) + C \qquad (i.e.\ G(y) = F(x) + C)$$

y si podemos despejar de aquí la y, tendremos la solución general $y(x)$ dependiente de una constante C determinada por la condición inicial.

Formalmente, al igual que en el caso anterior, lo que hacemos es

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \iff \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Para obtener la solución particular que pasa por el punto (ξ, η) se resuelve la ecuación:

$$\int_\eta^y \frac{ds}{g(s)} = \int_\xi^x f(t)dt. \tag{13}$$

Como se observa se puede dar el caso de que exista un punto interior al intervalo tal que $g(s) = 0$ y la integral sea divergente. A continuación damos un teorema general que nos dice cuando este método es válido para resolver el P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y); \qquad y(\xi) = \eta. \tag{14}$$

Teorema 5. *Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo J_x y sea $g(y)$ continua en el intervalo J_y. Sean $\xi \in J_x$ y $\eta \in J_y$ donde η es un punto interior al intervalo tal que $g(\eta) \neq 0$. Entonces existe un entorno del punto ξ para el cual el P.V.I (14) admite una única solución.*

Demostración. Vamos a demostrar primero la validez del método para hallar la solución. Sea $F(x) = \int_\xi^x f(t)dt$ y sea $G(y) = \int_\eta^y \frac{ds}{g(s)}$. La ecuación (13) se escribe pues $F(x) = G(y)$. Por hypótesis tenemos que $g(y) \neq 0$ en un entorno de η luego $G(y)$ existe en ese entorno. Como además $G' = \frac{1}{g} \neq 0$, existirá también la función inversa de G que llamaremos H. Asi pues tendremos $y \equiv H(G(y))$ de modo que la ecuación (13) se escribe ahora $y(x) = H(F(x))$. Derivando la igualdad $F(x) = G(y)$ obtenemos

$$G'(y(x))y'(x) = F'(x) \ \ (= f(x))$$

y reemplazando $G' = \frac{1}{g}$

$$\frac{1}{g(y(x))}y'(x) = f(x) \iff y'(x) = f(x)g(y(x))$$

luego se satisface la ecuación. Además se tiene que $F(\xi) = 0,\ G(\eta) = 0$ y $H(0) = \eta$ luego se cumple la condición inicial $y(\xi) = H(F(\xi)) = \eta$.

Ahora demostraremos la unicidad de la solución al P.V.I. haciendo un razonamiento por el absurdo. Para ello supongamos que el P.V.I. posee otra solución $z(x) \neq y(x)$. Entonces en un entorno de ξ tendremos que $g(z) \neq 0$ y por tanto se cumple $\frac{z'(x)}{g(z(x))} = f(x)$. Integrando esta igualdad entre ξ y x y con el cambio de variable $s = z(x)$ nos queda

$$\int_{\xi}^{x} f(t)dt = \int_{\xi}^{x} \frac{z'(t)}{g(z(t))} = \int_{\eta}^{z(x)} \frac{ds}{g(s)}$$

es decir $F(x) = G(z(x))$, por lo que $z(x) = H(F(x)) = y(x)$ en contradicción con la hypótesis; la solución es pues única. ■

1.7. E.d. de tipo $y' = f(ax + by + c)$. Para este tipo de e.d. se buscan soluciones de la forma $u(x) = ax + by + c$. Supondremos en esta sección que $b \neq 0$ ya que el caso $b = 0$ se reduce al tipo de e.d. de la forma $y'(x) = f(x)$ que ya tratamos en (1.3). Observemos que si $y(x)$ es una solución es decir si $y'(x) = f(ax + by + c)$ entonces

$$u'(x) = a + by'(x) = a + f(ax + by + c) = a + bf(u). \tag{15}$$

De esta manera obtenemos una e.d. del tipo $u' = h(u)$ que ya resolvimos también en (1.3). Se demuestra por otra parte que toda solución a este tipo de e.d. se determina mediante el cambio de variable $u(x) = ax + by + c$.

Ejemplo 6. *Resolver la e.d.* $y' = (x + y)^2$.

En este caso se ve fácilmente que $a = 1, b = 1, c = 0$ *así pues hacemos el cambio de variable* $u(x) = x + y(x)$. *Reemplazando en la e.d. se tiene*

$$u' = 1 + y'(x) = 1 + (x + y)^2 = 1 + u^2.$$

Hemos obtenido la e.d en u *de la forma* $u' = u^2 + 1$ *que se integra de forma inmediata;* $u(x) = \tan(x + C)$. *Deshaciendo el cambio de variables obtenemos la solución general de la e.d.*

$$y(x; C) = \tan(x + C) - x.$$

1.8. E.d. de tipo $y' = f(\frac{y}{x})$. En este tipo de e.d. parece natural hacer el cambio de variable $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ (con $x \neq 0$). Derivando:

$$u'(x) = \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2}.$$

La e.d. se escribe entonces

$$y'(x) = xu'(x) + \frac{y(x)}{x}. \tag{16}$$

es decir de la forma $y'(x) = f(u) \iff u' = \frac{f(u)-u}{x}$ que se integra por el método de separación de variables $\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$. Una vez calculada esta integral para $u(x)$ hallamos la solución general deshaciendo el cambio de variables; $y(x) = xu(x)$.

EJEMPLO 7. *Resolver el P.V.I.*

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}; \qquad y(1) = 1.$$

Haciendo el cambio de variable $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ *la e.d. se trasforma en* $u'(x) = -\frac{1}{xu(x)^2}$ *y* $u(1) = \frac{y(1)}{1} = 1$. *Separando las variables obtenemos*

$$\int_1^u s^2 ds = -\int_1^x \frac{dt}{t} \iff \frac{u^3-1}{3} = -\log(x).$$

Finalmente $y(x) = xu(x) = x\sqrt[3]{1 - 3\log x}$. *Esta solución está definida en el intervalo* $J =]0, \sqrt[3]{e}[$.

1.9. E.d. de tipo $y' = f(\frac{ax+by+c}{dx+ey+k})$. Para resolver este tipo de e.d. primero hay que estudiar las soluciones del sistema lineal de ecuaciones algebraícas

$$\left\{ \begin{array}{r} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + k = 0. \end{array} \right. \tag{17}$$

Sea el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$. Si $\Delta = 0$, es decir si $a = \lambda d$ y $b = \lambda e$, $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $f(\frac{ax+by+cl}{dx+ey+k}) = f(\lambda + \frac{\bar{d}}{dx+ey+k})$ y la e.d. es de alguno de los tipos tratado anteriormente. Más interesante es el caso $\Delta \neq 0$ para el cual el sistema lineal (17) posee una solución única (x_0, y_0). Haciendo el cambio de variables $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$ la función solución será de la forma $\bar{y}(\bar{x}) = y(\bar{x} + x_0) - y_0$ y la e.d. se escribe de la forma

$$\frac{d\bar{y}(x)}{d\bar{x}} = y'(\bar{x} + x_0) = f(\frac{a(\bar{x}+x_0) + b(\bar{y}+y_0) + c}{d(\bar{x}+x_0) + e(\bar{y}+y_0) + k} \tag{18}$$

$$= f(\frac{a\bar{x} + b\bar{y}(\bar{x})}{d\bar{x} + e\bar{y}(\bar{x})}) = f(\frac{a + b\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}{d + e\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}) \tag{19}$$

que es una e.d. de tipo homogéneo ya tratada en la sección (1.8).

EJEMPLO 8. *Resolver la e.d.*

$$y' = \frac{y+1}{x+2} + e^{\frac{y+1}{x+2}}.$$

Primero hallamos $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. *A continuación hallamos la solución al sistema* $\begin{cases} y+1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \iff (x_0, y_0) = (-2, -1)$. *Mediante el cambio de variables* $\bar{x} = x+2,\ \bar{y} = y+1$ *la e.d. se escribe* $\frac{dy}{dx} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} - e^{\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}$. *Sea* $u = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$, *tenemos que integrar la e.d.*

$$\bar{x}u' = -e^u \iff -\int e^{-u}du = \int \frac{d\bar{x}}{\bar{x}}.$$

Resolviendo estas integrales inmediatas se obtiene $e^{-u} = \log|\bar{x}| + \bar{C}$. *La solución general es pues*

$$\begin{aligned} y(x) &= -1 - (x+2)\log(\log|x+2| + \bar{C} \\ &= -1 - (x+2)\log(\log c|x+2| \end{aligned}$$

donde hemos hecho (por "elegancia") $\bar{C} = \log c$. *Observemos que esta solución existe sólo para* $c|x+2| > 0$. *Si quisiéramos la solución particular que pasa por el origen i.e.* $y(0) = 0$ *entonces 0*$=-1-2\log(\log c|2|$ *luego* $c = \frac{1}{2}e^{e^{-\frac{1}{2}}}$.

CAPíTULO 3

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son de la forma $y'+g(x)y = h(x)$. En todo este apartado supondremos que las funciones reales $g(x)$ y $h(x)$ son continuas en el intervalo J. Cuando $h(x) = 0$ se dice que la e.d. lineal es homogénea. De ahora en adelante usaremos la notación

$$L[y] = y' + g(x)y. \tag{20}$$

La e.d. lineal se escribe pues $L[y] = h(x)$ y la correspondiente e.d. homogénea $L[y] = 0$. Así $L[\phi](x)$ indica el valor de la función $L[\phi]$ en un punto x, para cualquier función $\phi \in \mathcal{C}^1(J)$. El operador L es un operador lineal es decir cumple la propiedad:

$$L[a\phi + b\psi] = aL[\phi] + bL[\psi]$$

para $\phi, \psi \in \mathcal{C}^1(J)$ y a, b dos constantes $\in \mathbb{R}$.

1. La e.d. lineal homogénea

Son aquellas que se escriben de la forma:

$$L[y] = y' + g(x)y = 0. \tag{21}$$

Como se ve fácilmente esta e.d. entra dentro de las que hemos llamado "de variables separadas"que hemos visto en el capítulo I.

$$\begin{aligned} y'(x) &= -g(x)y \iff \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int g(x)dx \iff \\ \ln|y| &= G(x) \iff y = Ce^{-G(x)} \end{aligned}$$

donde

$$G(x) = \int_\xi^x g(t)dt \quad \text{y} \quad \xi \in J \text{ es un punto fijado.}$$

Se comprueba fácilmente que esta fórmula nos da una solución para toda constante $C \in \mathbb{R}$ y exactamente una única solución si queremos que la curva solución pase por el punto $(\xi, \eta) \in J \times \mathbb{R}$. En este caso se demuestra la unicidad como sigue: supongamos que la función $\phi(x)$ es también solución. Entonces $L[\phi] = 0$ con $u(x) = e^{G(x)}\phi(x)$, luego $u'(x) = e^{G(x)}(g\phi + \phi') = e^{G(x)}L[\phi] = 0$, es decir la función $u(x)$ es una función constante;

$$u(x) = e^{G(x)}\phi(x) = C \iff \phi(x) = Ce^{-G(x)}$$

es decir $\phi(x) = y(x)$.

La solución, única, que pasa por el punto (ξ, η) viene dada por la fórmula:

$$y(x) = \eta e^{-G(x)} \quad \text{donde} \quad G(x) = \int_\xi^x g(t)dt \tag{22}$$

y esta soluciuón existe para todo $x \in J$.

2. La e.d. lineal no homogénea

Estas e.d. son aquellas que se escriben de la forma $L[y] = h(x)$. El método para hallar la solución a este tipo de e.d. fue inventado por Lagrange y se conoce como *método de la variación de la constante.* Como el nombre indica el método consiste en reemplazar la constante C en la expresión $y(x) = Ce^{-G(x)}$ por una función $C(x)$ es decir ahora $y(x) = C(x)e^{-G(x)}$. Así pues

$$L[y] \equiv y' + gy \equiv (C' - gC + gC)e^{-G(x)} = C'e^{-G(x)},$$

luego $L[y] \equiv h(x)$ si y sólo si

$$C' = h(x)e^{G(x)} \iff C = \int_\xi^x h(t)e^{G(t)}dt + C_0.$$

Teorema 9. *Sean g y h dos funciones continuas en un intervalo J y sea ξ un punto perteneciente a J. Entonces el problema no homogéneo:*

$$\begin{cases} L[y] = y'(x) + g(x)y(x) = h(x) \\ y(\xi) = \eta \end{cases} \tag{23}$$

posee como única solución

$$y(x) = \eta e^{-G(x)} + e^{-G(x)} \int_\xi^x h(t)e^{G(t)}dt \tag{24}$$

y esta solución existe para todo $x \in \mathbb{R}$.

OBSERVACIÓN 10. *En el caso de la e.d. no homogénea observamos que por la propiedad de linealidad del operador* $L[]$ *si* y *e* $\bar{y}$ *son solución de la e.d. (23) entonces* $L[y-\bar{y}] = L[y] - L[\bar{y}] = 0$ *luego* $z(x) = y(x) - \bar{y}(x)$ *es también solución de la e.d. homogénea. Así pues todas las soluciones del problema no homogéneo se escriben de la forma*

$$y(x) = \bar{y}(x) + z(x) \tag{25}$$

donde $\bar{y}(x)$ *es una solución particular del problema no homogéneo y* $z(x)$ *es la solución general del problema homogéneo. Esta propiedad es válida también para e.d. lineales de orden superior como veremos más adelante.*

EJERCICIO 11. *a) Mostrar que si una solución* $y(x)$ *del problema homogéneo es tal que* $y(\xi) = 0$ *para* ξ *un punto cualquiera del intervalo* J *entonces necesariamente* $y(x) \equiv 0$.

b) Deducir de a) que si 2 soluciones y *e* $\bar{y}$ *del problema no homogéneo coinciden en un punto del intervalo* J *entonces necesariamente* $y(x) \equiv \bar{y}(x)$.

Solución:

a) Recordemos que si $y(x)$ *es solución del problema homogéneo entonces*

$$y(x) = \eta e^{-G(x)}, \quad \textit{con} \qquad G(x) = \int_{\xi}^{x} g(t)dt$$

luego

$$y(\xi) = 0 \iff \eta e^{\int_{\xi}^{\xi} g(t)dt} = \eta = 0$$

es decir $y(x) \equiv 0$.

b) Sea ς *el punto donde las soluciones coinciden. Utilizando (25) tendremos que* $y(\varsigma) = \bar{y}(\varsigma) + z(\varsigma)$. *Como por hypótesis* $y(\varsigma) = \bar{y}(\varsigma)$ *necesariamente* $z(\varsigma) = 0$ *y por el resultado del apartado a) tendremos* $z(x) \equiv 0$ *es decir* $y(x) \equiv \bar{y}(x)$.

EJEMPLO 12. *Hallar la solución general de la e.d.*

$$y' + y \sin x = \sin^3 x.$$

Esta e.d. es de la forma $L[y] = y' + g(x) = h(x)$ *con* $g(x) = \sin x$ *y* $h(x) = \sin^3 x$. *Primero hallaremos la solución general de la ecuación homogénea asociada:* $y' + y \sin x = 0$. *Aplicando (22) tendremos que* $G(x) = \int^x -\sin t dt = \cos x + \bar{c}$, *luego la solución general es* $y(x; C) = Ce^{\cos x}$.

Ahora buscamos la solución particular $\bar{y}(x)$ *de la ecuación* $y' + y\sin x = \sin^3 x$ *que pase por el origen, es decir* $\bar{y}(0) = 0$*. Utilizando la fórmula (24) tendremos*

$$\bar{y}(x) = \eta e^{-\cos x} + e^{\cos x}\int_0^x \sin^3 t e^{-\cos t} dt.$$

Como $\bar{y}(0) = 0$ *necesariamente* $\eta = 0$*. Haciendo el cambio de variables* $x = \cos t$ *nos queda hallar el valor de la integral* $\int_1^{\cos x}(s^2 - 1)e^{-s}ds = \left[(s^2-1)+2s+2\right]_1^{\cos x}$ *. Finalmente*

$$\begin{aligned}\bar{y}(x) &= e^{\cos x}\left[(s^2-1)+2s+2\right]_1^{\cos x}\\ &= \sin^2 x - 2\cos x - 2 + 4e^{\cos x - 1}\end{aligned}$$

por lo que la solución general de la e.d. no homogénea es

$$y(x;C) = \sin^2 x - 2\cos x - 2 + Ce^{\cos x}.$$

2.1. La ecuación de Bernoulli.

$$y' + g(x)y + h(x)y^{\alpha} = 0, \qquad \alpha \neq 1. \tag{26}$$

Este tipo de e.d. debe su nombre al matemático Jacobo Bernoulli (1654-1705) y forma parte de la familia de las e.d. lineales de primer orden. Supondremos como siempre que las funciones f y g son continuas en el intervalo J. También supondremos que $y > 0$. Observamos que si multiplicamos la e.d. por $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ y utilizamos $(y^{1-\alpha})' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ entonces obtendremos

$$(y^{1-\alpha})' + (1-\alpha)g(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(x) = 0,$$

luego la función $z = y^{1-\alpha}$ satisface la e.d. lineal:

$$z' + (1-\alpha)g(x)z + (1-\alpha)h(x) = 0.$$

Recíprocamente, si $z(x)$ es una solución positiva de la ecuación (2.1) entonces la función $y(x) = (z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$ es una solución positiva de la ecuación de Bernoulli (26). Sea $\eta > 0$, la condición inicial $y(\xi) = \eta$ se transforma en $z(\xi) = \eta^{1-\alpha} > 0$. En el caso de que α sea un entero hay que distinguir los casos α par o impar y pueden existir soluciones $y < 0$.

Caso α impar: En este caso se deduce de la ecuación de Bernoulli que tenemos

$$(-y)' + g(x)(-y) + h(x)(-y)^\alpha = 0, \qquad \alpha \neq 1$$

luego si $y(x)$ es una solución positiva de la ecuación de Bernoulli, $u(x) = -y(x)$ es una solución negativa. En estos casos se pueden hallar la solución a un P.V.I. con $\eta < 0$.

Caso α par: Entonces como $1-\alpha$ es impar y $y < 0$ tendremos que $y^{1-\alpha} < 0$ lo que implica $y = |z|^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Luego para una condición inicial negativa η, la solución negativa z a la ecuación (2.1) con la condición inicial $z(\xi) = \eta^{1-\alpha}$ nos dará una solución negativa $y = -|z|^{\frac{1}{1-\alpha}}$ que cumple $y(\xi) = \eta$.

Ejemplo 13. *Hallar la solución al P.V.I.:*

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0 \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

La ecuación diferencial está definida para y positiva y negativa. El cambio de variables $z = \frac{1}{y^3}$ *nos conduce a la e.d.*

$$z' - \frac{3}{1+z} = 3(1+x).$$

Resolvemos primero la e.d. homogénea asociada $z' - \frac{3}{1+z} = 0$. *Por separación de variables se obtiene fácilmente que* $\phi(x) = C(1+x)^3$ *es la solución general. Por el método de la variación de la constante, i.e. haciendo* $z = C(x)(1+x)^3$ *se obtiene que* $C(x) = -\frac{3}{1+x}$. *Así pues la solución general de la e.d. es*

$$z(x;C) = C(1+x)^3 - 3(1+x)^2 = (1+x)^2(Cx + C - 3).$$

Como en este caso $\alpha = 4$ *es par, deshaciendo el cambio de variables nos queda*

$$y(x;C) = \frac{sgn(Cx + C - 3)}{\sqrt[3]{(1+x)^2(Cx + C - 3)}}.$$

La solución que pasa por el punto $(0,-1)$ *(por ejemplo) será pues*

$$y(x;2) = -\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-2x)}}$$

definida para $-1 < x < \frac{1}{2}$.

2.2. La ecuación de Ricatti.

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x). \tag{27}$$

El nombre de esta ecuación es debido también a un Jacobo; Jacobo Francesco Ricatti (1676-1754). Como siempre supondremos que las funciones $g(x), h(x)$ y $k(x)$ son continuas en un intervalo J. Para la mayoría de los casos no sabemos hallar una solución analítica de esta e.d.. Sin embargo, si conocemos una solución particular entonces podemos hallar todas las soluciones. En efecto, sean y y ϕ dos soluciones. Consideremos la diferencia $u(x) = y(x) - \phi(x)$. La función $u(x)$ satisface entonces la ecuación:

$$u' + gu + h(y^2 - \phi^2) = 0. \tag{28}$$

Utilizando $y^2 - \phi^2 = (y - \phi)(y + \phi) = u(u + 2\phi)$, la e.d. anterior se transforma en

$$u' + [g(x) + 2\phi(x)h(x)]\, u + h(x)u^2 = 0 \tag{29}$$

que es una ecuación de Bernoulli. Utilizando las técnicas que hemos visto en el apartado (2.1) la e.d. (29) se transforma en la e.d. lineal

$$z' - [g(x) + 2\phi(x)h(x)]\, z = 0, \qquad \text{donde } z(x) = \frac{1}{u(x)}. \tag{30}$$

Resumiendo: si conocemos una solución $\phi(x)$ de la e.d. de Ricatti (27), entonces las otras soluciones se obtienen de la forma

$$y(x) = \phi(x) + \frac{1}{z(x)},$$

donde $z(x)$ es una solución cualquiera de la e.d. (30).

Ejemplo 14. *Hallar la solución general de la e.d.*

$$y' - y^2 - 2xy = 2.$$

La única manera de poder empezar a resolver esta e.d. es hallar una solución particular .ª ojo". Se ve que la función $\phi(x) = -\frac{1}{x}$ cumple $(\frac{1}{x^2}) - (\frac{1}{x^2}) - 2x(-\frac{1}{x}) = 2$, luego es una solución particular de la e.d. de Ricatti. Para hallar todas las otras soluciones utilizamos (30) que nos conduce a resolver la e.d. lineal

$$z' + z(2x - \frac{2}{x}) + 1 = 0.$$

La solución general a la e.d. homogénea asociada $z' + z(2x - \frac{2}{x}) = 0$ *es, por integración inmediata,* $z(x;C) = Cx^2e^{-x^2}$. *Para hallar una solución particular* $\bar{z}(x)$ *de la e.d. no homogénea utilizamos el método de la variación de la constante y obtenemos*

$$\begin{aligned}
\bar{z}(x) &= -x^2e^{-x^2}\int \frac{e^{x^{22}}}{x^2}dx \\
&= -x^2e^{-x^2}(-\frac{e^{x^{22}}}{x} + 2\int e^{x^2}dx) \\
&= x - 2x^2e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt.
\end{aligned}$$

Con la notación $E(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$ *es la función error (que de momento no sabemos determinar) la solución general de la ecuación de Ricatti será:*

$$\begin{aligned}
y(x;C) &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x + x^2e^{-x^2}(C - 2E(x))}. \\
&= \frac{-e^{-x^2}(C - 2E(x))}{1 + xe^{-x^2}(C - 2E(x))}.
\end{aligned}$$

Observemos que $y(0;C) = -C$ *luego todo P.V.I. de la forma* $y(0) = \eta$ *se resuelve inmediatamente.*

3. Curvas solución y e.d. exactas

El Teorema de Peano prueba que si la función $f(x,y)$ es contínua en un dominio $\mathcal{D}$ entonces el conjunto de las soluciones de la e.d. $y'(x) = f(x,y)$ forma una familia de curvas que cubren todo el dominio $\mathcal{D}$. Recíprocamente; si una familia dada de curvas cubre $\mathcal{D}$ entonces es posible determinar una e.d. de primer orden tal que sus soluciones sean las curvas dadas. La prueba es muy sencilla: sea $(\bar{x},\bar{y})$ un punto cualquiera del dominio $\mathcal{D}$ y sea $y = \phi(x)$ la curva solución que pasa por ese punto. Si definimos la función $f(\bar{x},\bar{y}) = \phi'(x)$ entonces cada curva será solución de la e.d. $y'(x) = f(x,y)$.

Ejemplo 15. *La familia de círculos concéntricos* $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$ *satisface la e.d.* $2x + 2yy' = 0 \iff y' + \frac{x}{y} = 0$ *ya que la pendiente de la recta que pasa por el origen y por el punto* (x,y) *es* $m = \frac{y}{x}$ *; la recta perpendicular a ésta tendrá como pendiente* $-\frac{1}{m} = -\frac{x}{y}$ $(= y')$.

Las funciones $y(x;C) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ $(r > 0)$ no son propiamente las curvas (en este caso círculos) solución de la e.d. ya que existen puntos

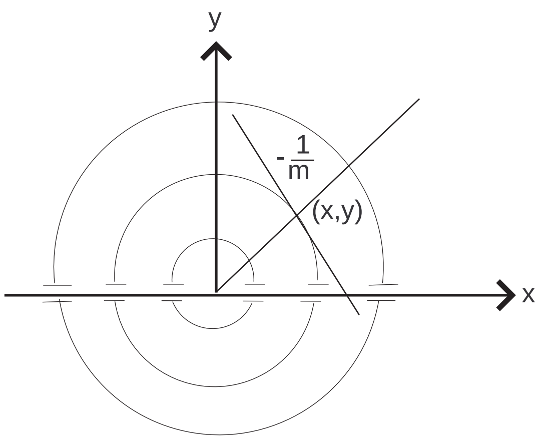

FIGURA 1. Curvas solución.

tales que $y'(x) \longrightarrow \infty$. La e.d. se satisface únicamente en el intervalo $-r < x < r$ ya que la derivada $y'(x)$ se hace infinita en los puntos $x = \pm r$ (ver figura 3.)

Para evitar este problema lo que se hace es representar las curvas solución de forma implícita $F(x,y) = C$ o de forma paramétrica $(x = x(t), y = y(t))$. Una representación simétrica de la e.d. viene dada por

$$g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0 \tag{31}$$

o lo que es lo mismo

$$g(x,y)\dot{x} + h(x,y)\dot{y} = 0. \tag{32}$$

Escrito de esta forma cobra sentido la hypótesis $(g^2 + h^2) > 0$, es decir $(\dot{x}(t) + \dot{y}(t)) > 0$, lo que excluye las soluciones de tipo $(x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t)$ y además garantiza que en un entorno de cada punto de la curva solución podemos expresar explícitamente $y = \phi(x)$ o $x = \psi(t)$ con $\phi, \psi \in C^1$.

4. Ecuaciones Diferenciales Exactas

La e.d.

$$g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0 \ \text{ o } \ g(x,y)\dot{x} + h(x,y)\dot{y} = 0$$

se llama e.d. *exacta* en el dominio $\mathcal{D}$ si existe una función $F(x,y) \in C^1(\mathcal{D})$ tal que

$$F_x(x,y) = g(x,y) \text{ y } F_y(x,y) = h(x,y) \ \text{ en } D. \tag{33}$$

Se dice entonces que el par de funciones (g, h) es un *campo gradiente* y a la función $F(x, y)$ se le llama *función potencial* para el gradiente (g, h) . Se define la derivada *total* de la función $F(x, y)$, como $dF(x, y) = F_x dx + F_y dy$. De ahí que se diga que la e.d. es exacta en $\mathcal{D}$ si y sólo si se puede representar de la forma $dF(x, y) = 0$ para $(x, y) \in \mathcal{D}$.

TEOREMA 16. *Sean g y h dos funciones continuas en un dominio $\mathcal{D}$. Si la e.d. (31) es exacta en $\mathcal{D}$ y si $F(x, y)$ es una función potencial, entonces $(x(t), y(t)) \in C^1(J)$ que toma valores en $\mathcal{D}$ es una solución de la e.d. (32) si y sólo si $F(x(t), y(t))$ es constante en el intervalo J.*

De la misma manera $y(x)$ es una solución de la e.d. $g(x, y) + h(x, y)y'(x) = 0$ si y sólo si $F(x, y(x))$ es constante. Si además se cumple que $(g^2 + h^2) > 0$ entonces la curva solución se obtiene resolviendo $F(x, y) = C$.

Para determinar si una e.d. es exacta y para hallar la función potencial tenemos el siguiente

TEOREMA 17. *Si $g(x, y), h(x, y) \in C^1(\mathcal{D})$ entonces existe una función potencial que satisface*

$$F_x(x, y) = g(x, y) \text{ y } F_y(x, y) = h(x, y) \quad \text{en } D \tag{34}$$

si y sólo si

$$g_y(x, y) \equiv h_x(x, y) \quad \text{en } D. \tag{35}$$

Para hallar la función potencial se tiene que

$$F_x(x, y) = g(x, y) \iff F(x, y) = \int^x g(t, y)dt = \varphi(x, t) + C(y). \tag{36}$$

Igualmente

$$F_y(x, y) = h(x, y) \iff F(x, y) = \int^y h(x, t)dt = \chi(t, y) + C(x) \tag{37}$$

donde $C(x)$ o $C(y)$ se determinan resolviendo (34).

EJEMPLO 18. *La e.d.*

$$(y^2 e^{xy} + 3x^2 y)dx + (x^3 + (1 + xy)e^{xy})dy$$

es de la forma (31) con

$$g_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 e^{xy} + 3x^2 y) = (2y + xy^2)e^{xy} + 3x^2$$

y

$$h_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + (1 + xy)e^{xy}) = 3x^2 + (2y + xy^2)e^{xy}$$

Tenemos que $g_y(x,y) = h_y(x,y)$ *luego es una e.d. exacta en* $\mathbb{R}^2$. *Para hallar una función potencial hacemos lo siguiente:*

$F(x,y) = \int^x (y^2 e^{ty} + 3t^2 y)dt = ye^{xy} + x^3 y + C(y)$. *Para determinar* $C(y)$ *hallamos* $\frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} + x^3 y + C(y)) = x^3 + (1+xy)e^{xy} + C'(y)(= h(x,y))$, *luego* $C'(y) = 0$. *Finalmente* $F(x,y) = ye^{xy} + x^3 y$ *es una función potencial.*

4.1. Factores Integrantes. Empezaremos con un ejemplo: la e.d. $ydx + 2xdy = 0$ es del tipo (31) con $g_y = 1 \neq h_x = 2$ luego no es una e.d. exacta. Sin embargo se puede volver exacta mediante la mutiplicación por una función: el *factor integrante*. En efecto, si multiplicamos toda la e.d. por el factor $\frac{1}{\sqrt{x}}$ nos queda la e.d.; $\frac{y}{\sqrt{x}}dx + \frac{2x}{\sqrt{x}}dy = 0$, que es exacta ya que $g_y = \frac{1}{\sqrt{x}} = h_x$. De paso podemos calcular la función potencial $F(x,y) = \int^x \frac{y}{\sqrt{t}}dt = 2y\sqrt{x} + C(y)$. Como $F_y(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{x}} + C'(y)$, $C(y) = 0$. Luego $F(x,y) = 2y\sqrt{x}$ es una función potencial. Observemos que el factor integrante no es único ya que si por ejemplo multiplicamos la e.d. original por y entonces la e.d. resultante $y^2dx + 2xydy = 0$ también es exacta con $F(x,y) = xy^2$.

Teorema 19. *Si las funciones* $f(x,y)$ *y* $g(x,y)$ *son continuas en un dominio* D *entonces se llama factor integrante (o multiplicador de Euler) a una función continua* $\mu(x,y)$ *si la e.d.* $\mu(x,y)\ g(x,y)dx + \mu(x,y)h(x,y)dy = 0$ *es una e.d. exacta. En ese caso se satisface*

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)g(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)h(x,y)). \tag{38}$$

En general no es fácil encontrar un factor integrante ya que la ecuación (38) es una ecuación en derivadas parciales que puede poseer varias soluciones y que resulta difícil de resolver. Sin embargo en algunos casos sí sabemos determinar el factor integrante y será en los casos en que el factor integrante dependa de una sóla variable. En efecto, supongamos que $\mu(x,y) \equiv \mu(x)$ es decir que dependa sólo de la variable x. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)g(x,y)) = \mu(x)\frac{\partial}{\partial y}g(x,y). \tag{39}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)h(x,y)) = \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}h(x,y) + h(x,y)\frac{d\mu(x)}{dx}. \tag{40}$$

Luego se satisface (38) cuando

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}g(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}h(x,y)}{h(x,y)}\mu(x). \tag{41}$$

Si la función $\frac{\frac{\partial}{\partial y}g(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}h(x,y)}{h(x,y)}$ es una función sólo de x, entonces existe un factor integrante $\mu(x)$ que se determina resolviendo la e.d. (41) que es una e.d. lineal de primer orden.

Ejemplo 20. *Determinar un factor integrante dependiente sólo de la variable x de la e.d.*

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0.$$

Primero comprobamos que no es exacta. En efecto tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}(3xy + y^2) = 3x + 2y \neq \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy) = 2x + y.$$

Calculemos la cantidad

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y}g(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}h(x,y)}{h(x,y)} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x},$$

luego existe un factor integrante que depende sólo de x y que satisface la e.d. $\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{1}{x}\mu(x)$. Resolviendo esta e.d. se tiene inmediatamente $\mu(x) = x$. Multiplicando la e.d. por x nos queda $(3x^2y+xy^2)dx+(x^3 + x^2y)dy = 0$. Esta e.d. es exacta y se encuentra fácilmente una función potencial $F(x,y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2$. Una vez más vemos que el factor integrante no es único, ya que en este caso $\mu(x,y) = \frac{1}{xy(x+y)}$ también nos da la misma solución.

CAPíTULO 4

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

1. Introducción

De forma general las ecuaciones diferenciales de segundo orden son de la forma

$$y'' = f(x, y, y') \tag{42}$$

La enorme importancia de este tipo de e.d. radica en que son ubícuitas en muchas disciplinas de la Ciencia como por ejemplo en la Mecánica.

EJEMPLO 21. *La famosa 2ª ley de Newton o Ley Fundamental de la dinámica:*

$$\frac{d^2y}{dt^2} = F(t, y, \frac{dy}{dt}).$$

donde la variable independiente t representa al tiempo y $\frac{d^2y}{dt^2}$ es la aceleración.

Al ser una ecuación diferencial de segundo orden, un problema de valor inicial P.V.I. vendrá dado cuando además de $f(x, y, y')$ tengamos **dos** condiciones iniciales:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'.$$

En general las ecuaciones diferenciales de segundo orden son muy difíciles de resolver. De hecho sólo aprenderemos a resolver las e.d. lineales, es decir aquellas que se pueden escribir de la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = h(x). \tag{43}$$

Como siempre empezaremos por resolver la ecuación homogénea asociada i.e. $h(x) \equiv 0$. Sea x_0 un punto en el intervalo J y sea el P.V.I.:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases} \tag{44}$$

TEOREMA 22. *Sean las funciones $p(x)$ y $q(x)$ continuas en el intervalo J. Entonces existe una única solución $y(x)$ al problema de valor inicial anterior en el intervalo $\alpha < x < \beta$. En el caso particular de que $y(x_0) = 0$ y $y'(x_0) = 0$ entonces la solución es identicamente nula, $y(x) \equiv 0$.*

Las e.d. lineales de segundo orden poseen las siguientes propiedades algebraícas: Si definimos

$$L_2\left[y\right](x) = y"(x) + p(x)y'(x) + q(x)y,$$

entonces tenemos las propiedades:

(i) $L_2\left[cy\right] = cL\left[y\right] \quad \forall c$ constante.

(ii) $L_2\left[y_1 + y_2\right] = \left[y_1\right] + \left[y_2\right]$

Para estas e.d. que son lineales y de segundo orden, tenemos el siguiente

TEOREMA 23. *Supongamos que tenemos dos soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ del problema general homogéneo en el intervalo J, con la propiedad*

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1^{\prime(x)}y_2(x) \neq 0$$

(al determinante $W[y_1, y_2]$ se le conoce como el Wronskiano*) entonces $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ es la solución general de la e.d. (**??**).*

2. Caso de coeficientes constantes

En esta sección consideraremos que las funciones $p(x), q(x)$ son constantes. Para este tipo de e.d. definimos el operador lineal:

$$L_2[y] := a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0, \quad a, b, \text{ y } c \text{ constantes } \in \mathbb{R}. \tag{45}$$

Según el teorema de existencia y unicidad si conocemos 2 soluciones y_1 e y_2 independientes, es decir tal que $W(y_1,\ y_2) \neq 0$, entonces la solución general será:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{46}$$

es decir una combinación lineal de $y_1(x)$ e $y_2(x)$. El problema es pues determinar $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Examinando la forma de la e.d. (45) parece lógico intentar hallar soluciones de tipo:

$$y(x) = e^{rx}, \quad r \equiv C^{te}. \tag{47}$$

Si reemplazamos en la e.d. (45) nos queda

$$L_2[y] = (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \tag{48}$$

luego hemos pasado de resolver una e.d. a tener que resolver una ecuación algebraíca cuadrática (llamada tambien ecuación *característica*); $ar^2 + br + c = 0$. Las raíces de esta ecuación son sobradamente conocidas: $r_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Luego las dos soluciones que buscamos son $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ que claramente son independientes ya que $W(y_1, y_2) = (r_1 - r_2)e^{(r_1-r_2)x}$. Reemplazando el valor de las raiíces se obtienen las soluciones y para determinar las constantes c_1 y c_2 se utilizan las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$.

Ejemplo 24. *Resolver el P.V.I.:*

$$\begin{cases} y'' + 4y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1, \; y'(0) = 2. \end{cases} \tag{49}$$

Buscamos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$. *El polinomio característico asociado es:* $r^2+4r-2 = 0$ *cuyas raíces son* $r_1 = -2+\sqrt{6}$, $r_2 = -2 - \sqrt{6}$. *Reemplazando en la e.d. obtenemos que* $c_1 = (\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{6}})$ *y* $c_2 = (\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{6}})$. *Finalmente la solución será* $y(x) = (\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{6}})e^{(-2+\sqrt{6})x} + (\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{6}})e^{(-2-\sqrt{6})x}$.

Como ya sabemos, el tipo de raíces de la ecuación carfacterística depende del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$ las raíces son reales y distintas; es el caso que acabamos de resolver en el ejemplo.

2.1. Caso de las raíces complejas. En el caso de que r_1 y r_2 sean números complejos el método sigue siendo válido. Supongamos que $\Delta < 0$ es decir que las raíces son números complejos (conjugados)$r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$. Entonces $y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha}(\cos\beta x + i\sin\beta y)$ y $y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$.

Lema 25. *Sea* $y(x) = u(x)+iv(x)$ *una función que toma valores en* $\mathbb{C}$ *solución de la e.d.(45). Entonces* $y_1(x) = u(x)$ *y* $y_2(x) = v(x)$ *son dos funciones que toman valores en* $\mathbb{R}$ *y que además son solución de la e.d. (45)*

Lo que este lema nos dice es que la parte real y la parte imaginaria de una solución compleja de una e.d. lineal a coeficientes constantes son por separado solución de la misma e.d.. Es decir $L_2[u] = L_2[v] = 0$. La solución general será pues de la forma:

$$\begin{aligned}
(50)\qquad y(x) &= (c_1 + c_2)e^{\alpha x}\cos\beta x + (c_1 - c_2)e^{\alpha x}\sin\beta x \\
(51)\qquad &= \bar{c}_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + \bar{c}_2 e^{\alpha x}\sin\beta x.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 26. *Resolver el P.V.I.:*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 4 = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Primero hallamos la ecuación característica: $r^2 + 2r + 4 = 0$. *En este caso* $\Delta = -12 < 0$ *y las raíces son* $r_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $r_2 = -1 - i\sqrt{3}$. *Así pues*

$$\begin{aligned}
e^{r_1 x} &= e^{-x}(\cos\sqrt{3}x + i\sin\sqrt{3}x) \\
e^{r_2 x} &= e^{-x}(\cos\sqrt{3}x - i\sin\sqrt{3}x)
\end{aligned}$$

Por el lema anterior tendremos que tanto $y_1(x) = e^{-x}\cos\sqrt{3}x$ *como* $y_2(x) = e^{-x}\sin\sqrt{3}x$ *son solución luego la solución general será* $y(x) = e^{-x}(c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x)$. *Utilizando ahora las condiciones iniciales;* $y(0) = 1 \implies c_1 = 1$ *por otra parte* $y'(0) = 1 \implies c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

2.2. Caso de la raíz doble. En el caso de que $\Delta = 0$ por el método anterior encontraríamos sólo una solución $y_1(x) = e^{(-\frac{b}{2a})x}$. El problema es ahora encontrar otra solución $y_2(x)$ de la e.d. que además sea linealmente independiente de $y_1(x)$. La idea es utilizar lo que sabemos de $y_1(x)$ para hallar $y_2(x)$ de la manera siguiente. Sea $w(x)$ una nueva variable definida por $y(x) = y_1(x)w(x)$. Reemplazando en (45) tendremos

$$L_2[y] = y_1 w'' + (2y_1' + by_1)w_1' = 0 \tag{52}$$

o lo que es lo mismo, haciendo $z(x) = w_1'(x)$

$$y_1 z' + (2y_1' + by_1)z = 0. \tag{53}$$

Así pues hemos reducido le e.d. de segundo orden a una e.d. de primer orden

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{Ce^{-\frac{b}{a}x}}{y_1^2(x)}. \tag{54}$$

Podemos escoger a este nivel $C = 1$ ya que únicamente necesitamos una solución $w(x)$ de (53). Reemplazando valores tendremos que $w(x) = \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{-\frac{b}{a}x}} = 1$ y la segunda solución buscada será

$$y_2(x) = y_1(x)\int^x w(t)dt. = xy_1(x) \tag{55}$$

Esta solución es claramente independiente de $y_1(x)$. Finalmente la solución a la e.d. (45) en el caso de la raíz doble se escribe:

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{-\frac{b}{2a}x}. \tag{56}$$

Ejemplo 27. *Resolver el P.V.I.:*

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4 = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 3. \end{cases}$$

En este caso la ecuación característica es $(r+2)^2 = 0$*, luego existe una única raíz doble* $r_{1,2} = -2$.*Una primera solución es* $y_1(x) = e^{-2x}$. *Utilizando directamente (55) obtenemos* $y_2(x) = xe^{-2x}$ *y gracias a las las condiciones iniciales se halla* $c_1 = 1$ *y* $c_2 = 5$*, luego*

$$y(x) = (1 + 5x)e^{-2x}.$$

Nota: Este método también es válido para las e.d. de segundo orden del tipo (**??**) donde hay que reemplazar la ecuación (54) por la ecuación

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{Ce^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}. \tag{57}$$

3. E.d. lineales no homogéneas

Las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden lineales no homogéneas se escriben de la forma

$$L_2[y] := \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = h(x), \tag{58}$$

donde las funciones $p(x), q(x)$ y $h(x)$ son continuas en un intervalo $J \ni x$. Al igual que para las e.d. lineales de primer orden tenemos el

Teorema 28. *Sean* $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *dos soluciones linealmente independientes de la e.d. homogénea. Sea* $\psi(x)$ *una solución particular de la ecuación completa (58), entonces la solución general de la e.d. no homogénea (58) es de la forma:*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \psi(x). \tag{59}$$

Si suponemos que hemos resuelto la e.d. homogénea asociada es decir si conocemos dos soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ linealmente independientes el problema es ahora hallar una solución particular $\psi(x)$ de la e.d. (58). Para ello procederemos de manera similar al caso de las e.d. lineales de primer orden.

3.1. Variación de las constantes. Este método consiste en hacer que las constantes de la solución general de la e.d. homogénea sean ahora funciones que dependan de la variable independiente x. Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la e.d. homogénea. Buscamos una solución particular de la e.d; (58) que sea de la forma:

$$\psi(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x). \tag{60}$$

Veamos como se escribe ahora el operador lineal $L_2[\psi(x)]$. Para ello calculemos primero

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

y

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= c_1''(x)y_1(x) + c_2''(x)y_2(x) + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \\ &\quad c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x).\end{aligned}$$

Observamos que la expresión de $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$, luego la de $L_2[\psi(x)]$, no tendrá términos en $c_1''(x)$ ni en $c_2''(x)$ si se cumple que

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{61}$$

Con esta condición (61) y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x) &= 0 \\ y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x) &= 0, \end{aligned}$$

la expresión de $L_2[\psi](x)$ nos queda

$$L_2[\psi](x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)c_1y_2'(x). \tag{62}$$

De este modo hemos reducido el problema de resolver una e.d. de segundo orden a resolver el sistema de e.d. de primer orden:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = h(x). \end{cases}$$

La solución de este sistema de ecuaciones algebraícas cuyas incógnitas son $c_1'(x)$ y $c_2'(x)$ es

$$c_1'(x) = -\frac{g(x)y_2(x)}{W[y_1,y_2](x)}, \quad c_é'(x) = +\frac{g(x)y_1(x)}{W[y_1,y_2](x)}.$$

De aquí la enorme importancia de que las soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sean linealmente independientes ($W[y_1,y_2](x) \neq 0$).Finalmente integrando los términos $c_1'(x)$ y $c_2'(x)$, la solución general al problema no homogéneo es de la forma

$$y(x) = (\int^x -\frac{g(t)y_2(t)}{W[y_1,y_2](t)}dx)\ y_1(x) + (\int^x \frac{g(t)y_1(t)}{W[y_1,y_2](t)}dx)\ y_2(x). \tag{63}$$

El inconveniente con este método es que nos conduce a tener que hallar dos integrales que pueden resultar difíciles de calcular. A continuación damos otro método válido para las e.d. lineales de segundo orden y a coeficientes constantes.

3.2. El método de los coeficientes indeterminados. Este otro método para hallar una solución particular de las e.d. del tipo

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = h(x), \tag{64}$$

consiste en "adivinar" la forma de la solución observando la forma de la función $h(x)$. Veamos varios casos.

CASE 29. *Caso de que $h(x)$ sea un polinomio de grado n; $h(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Entonces parece razonable buscar una soulución que sea de la forma $\psi(x) = \psi_0 + \psi_1x + \cdots + \psi_nx^n$. Si calculamos $L_2[\psi](x)$ e igualamos los coeficientes de las potencias en la igualdad $L_2[\psi](x) = h(x)$ nos sale el sistema:*

$$\begin{cases} c\psi_n = a_n \\ c\psi_{n-1} + nb\psi_n = a_{n-1} \\ \vdots \\ c\psi_0 + b\psi_1 + 2a\psi_2 = a_0, \end{cases} \tag{65}$$

que resolvemos fila por fila. En el caso de que $c = 0$ entonces $L_2[y](x)$ es un polinomio de grado $n-1$ y $h(x)$ un polinomio de grado n. Para asegurarnos que $L_2[\psi](x) := a\frac{d^2\psi}{dx^2} + b\frac{d\psi}{dx}$ es de grado n

tendremos que buscar una solución particular de la forma $\psi(x) = x(\psi_0 + \psi_1 x + \cdots \psi_n x^n)$.

En el caso de que $b = 0$ *y* $c = 0$ *por el mismo razonamiento tendremos que buscar una solución particular de la forma* $\psi(x) = x^2(\psi_0 + \psi_1 x + \cdots \psi_n x^n)$ *y proceder como anteriormente.*

CASE 30. *Caso de que* $h(x)$ *sea de la forma* $h(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)e^{\alpha x}$. *En este caso hacemos el cambio de variable* $y(x) = w(x)e^{\alpha x}$. *La expresión de* $L_2[y]$ *será:*

$$L_2[y] = e^{\alpha x}(aw'' + (2a\alpha + b)w' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)w) \tag{66}$$

luego $y(x) = w(x)e^{\alpha x}$ *será solución si y sólo si*

$$aw'' + (2a\alpha + b)w' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)w = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n. \tag{67}$$

Para hallar una solución particular de la e.d. (67) tenemos que distinguir según los casos en analogía con el apartado anterior.

(i) $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$. *En este caso buscamos una solución de la forma* $\psi(x) = \psi_0 + \psi_1 x + \cdots \psi_n x^n$.

(ii) $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ *y* $2a\alpha + b \neq 0$. *En este caso lo que sucede es que* α *es una raíz de la ecuación característica. Buscamos una solución de la forma* $\psi(x) = x(\psi_0 + \psi_1 x + \cdots \psi_n x^n)$.

(iii) $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ *y* $2a\alpha + b = 0$. *En este caso lo que sucede es que* α *es una raíz doble de la ecuación característica luego* $e^{\alpha x}$ *y* $xe^{\alpha x}$ *son solución de la e.d. homogénea. Buscamos una solución de la forma* $\psi(x) = x^2(\psi_0 + \psi_1 x + \cdots \psi_n x^n)$.

CASE 31. *Caso de que* $h(x)$ *sea de la forma* $h(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\cos\theta x$ *(o* $\sin\theta x$*). Para este caso necesitamos el*

LEMA 32. *Sea* $w(x) = u(x) + iv(x)$ *una solución compleja de la e.d.* $L_2[w](x) = h(x) = h_1(x) + h_2(x)$. *Entonces necesariamente se cumple que* $L_2[u](x) = h_1(x)$ *y* $L_2[v](x) = h_2(x)$.

Sabiendo esto lo que hacemos es buscar una solución de la forma $\psi(x) = (\psi_0 + \psi_1 x + \cdots \psi_n x^n)e^{i\theta x}$.

EJEMPLO 33. *Hallar una solución particular de la e.d.*

$$L_2[y] := y'' + 4y = \sin 2x.$$

Por lo dicho anteriormente resolveremos la e.d. $y'' + 4y = e^{i2x}$ *y luego tomaremos la parte imaginaria de la solución.*

Primeramente resolvemos la e.d. homogénea asociada $y'' + 4y = 0$. *Haciendo el cambio* $y(x) = e^{rx}$ *nos queda le ecuación característica*

$r^2+2=0$, luego las raíces son $r=\pm 2i$. Como en este caso resulta que $2i$ es decir el argumento del seno es raíz de la e.d. asociada buscaremos una solución particular de la forma $\psi(x)=x(\psi_0)e^{2ix}$. Calculando nos queda; $L_2[\psi]=4i\psi_0 e^{2ix}$.

Luego la ecuación que nos queda por resolver es: $4i\psi_0 e^{2ix}=Im(e^{2ix}) \implies \psi_0=-\frac{i}{4}$. Finalmente $\psi(x)=Im(-\frac{i}{4}xe^{2ix})=-\frac{x}{4}\cos 2x$ es la solución particular buscada.

3.3. Aplicación: El resorte. La ecuación del movimiento de una masa m suspendida del techo por un resorte de constante de rigidez k y de amortiguamiento c, viene dada por la segunda ley de Newton. La ecuación diferencial resultante es:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+c\frac{dy}{dt}+ky=F(t), \tag{68}$$

donde el término $F(t)$ representa la suma de las fuerzas externas que se ejercen sobre la masa. En este apartado vamos a considerar diferentes casos de movimientos posibles y a resolver la e.d. correspondiente.

Case 34. *El caso de las oscilaciones libres sin amortiguamiento (i.e. $c=0$). En este caso la e.d. (68) se reduce a:*

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2 y=0; \qquad \omega_0^2=\frac{k}{m}.$$

La solución general de esta e.d. es:

$$y(t)=a\cos\omega_0 t+b\sin\omega_0 t=R\cos(\omega_0 t-\phi),$$

donde $R=\sqrt{a^2+b^2}$ es la amplitud y $\phi=\tan^{-1}(\frac{b}{a})$ es la fase.

Case 35. *El caso de las oscilaciones libres (i.e. $F(t)=0$). En este caso la e.d. (68) se reduce a*

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+c\frac{dy}{dt}+ky=0.$$

Las raíces de la ecuación característica son $r_{1,2}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4m}}{2M}$, luego debemos considerar los casos posibles según el signo de c^2-4km.

(i) $c^2-4km.>0$. En este caso las dos raíces r_1 y r_2 son negativas y la solución es de la forma

$$y(t)=ae^{r_1t}+be^{r_2t}.$$

(ii) $c^2-4km=0$. En este caso la solución es de la forma

$$y(t)=(a+bt)e^{-\frac{c}{2m}t}.$$

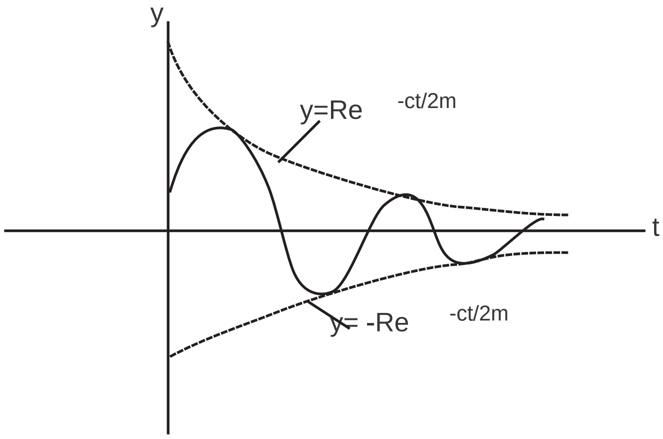

FIGURA 1. Gráfica de $Re^{-\frac{c}{2m}t}\cos(\mu t-\phi)$.

(iii) $c^2-4km<0$. En este caso la solución es de la forma:

$$y(t)=e^{-\frac{c}{2m}t}(a\cos\mu t+b\sin\mu t), \qquad \mu=\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}$$

que podemos reescribir $y(x)=Re^{-\frac{c}{2m}t}\cos(\mu t-\phi)$. La trayectoria está pues comprendida entre las curvas $y=\pm Re^{-\frac{c}{2m}t}$ y representa un coseno cuya amplitud decae exponencialmente (ver figura 3.3).

CASE 36. *El caso de las oscilaciones forzadas. En este caso sometemos a la masa a una fuerza externa de la forma* $F(t)=F_0\cos\omega t$. *La e.d. resultante se escribe:*

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+c\frac{dy}{dt}+ky=F_0\cos\omega t.$$

Buscaremos una solución particular de esta e.d. que sea de la forma

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \frac{F_0}{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}\left[(k-m\omega^2)\cos\omega t+c\omega\sin\omega t\right]\\ &= \frac{F_0}{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}\left[(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2\right]^{1/2}\cos(\omega t-\phi)\\ &= \frac{F_0\cos(\omega t-\phi)}{[(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2]^{1/2}},\end{aligned}$$

donde $\tan\phi=\frac{c\omega}{(k-m\omega^2)}$.

CASE 37. *El caso de las oscilaciones libres forzadas. En este caso la e.d. (68) se reduce a*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos\omega t; \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

En el caso $\omega \neq \omega_0$ es el menos interesante ya que la solución será de la forma:

$$y(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t \tag{69}$$

es decir la suma de dos funciones periódicas de períodos distintos. Es más interesante el caso en que la frecuencia de la fuerza exterior es igual a la frecuencia propia del sistema i.e. $\omega = \omega_0$. A este caso se le llama **resonancia**. *Buscamos una solución particular de la e.d. $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t$ como la parte real de la solución $\varphi(t)$ de la e.d.*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}e^{i\omega_0 t}. \tag{70}$$

Como $e^{i\omega_0 t}$ es solución de la e.d. homogénea, sabemos que tenemos que buscar una solución particular de la forma $\varphi(t) = \varphi_1 t e^{i\omega_0 t}$. Calculando $\varphi'' + \omega_0^2\varphi = 2i\omega_0\varphi_1 e^{i\omega_0 t}$ obtenemos que $\varphi_1 = \frac{-iF_0}{2m\omega_0}$, luego

$$\varphi(t) = \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\sin\omega_0 t - i\frac{F_0 t}{2m\omega_0}\cos\omega_0 t$$

es solución de la e.d.(70) y la la solución particular buscada sera

$$\psi(t) = Re\left\{\varphi(t)\right\} = \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

Finalmente toda solución de la e.d.(69) se escribe de la forma:

$$y(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t + \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\sin\omega_0 t$$

CAPíTULO 5

La transformada de $\mathcal{L}$aplace

La transformada de $\mathcal{L}$aplace se aplica sobre todo a e.d. que aparecen en fenómenos físicos donde la variable independiente es el tiempo a partir de ahora $y(x) \equiv y(t)$ y análogamente $f(x) \equiv f(t)$. El método de la transformada de $\mathcal{L}$aplace es especialmente idóneo para resolver problemas de valor inicial para ecuaciones de tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t) \\ y(0) = y_0 \ , \quad y'(0) = y'_0 \end{array} \right. \tag{71}$$

donde a, b y c son constantes reales y la función $f(t)$ es: **discontinua** o **nula excepto en intervalos de tiempo muy cortos** donde toma valores grandes (i.e. deltas de Dirac δ).

La idea detrás de este método es la siguiente: la función incógnita $y(t)$ se transforma en su función transformada $\mathcal{L}$aplace que notaremos $Y(s)$. En el ."espacio" de $\mathcal{L}$aplace calcular la derivada $y'(t)$ se traduce en calcular $sY(s) - y(0)$ por lo que la e.d. (84) se transforma en una ecuación algebraíca que resolvemos fácilmente para hallar $Y(s)$. Una vez determinada la expresión de $Y(s)$ por el método de la transformada inversa hallaremos la expresión de la función buscada $y(t)$.

DEFINICIÓN 38. *Sea la función $f(t)$ definida en el intervalo $0 \leq t < \infty$. La transformada de $\mathcal{L}$aplace de $f(t)$ que se denota $F(s)$ o $\mathcal{L}\{f(t)\}$ viene dada por la fórmula:*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \tag{72}$$

Calculemos algunos ejemplos de las funciones más elementales.

EJEMPLO 39. *La transformada de $\mathcal{L}$aplace de la función $f(t) = 1$ será:*

$$\mathcal{L}\{1\} = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-st} 1 dt = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{s}, & s > 0 \\ \infty, & s \leq 0. \end{array} \right. \tag{73}$$

EJEMPLO 40. *La transformada de $\mathcal{L}$aplace de la función $f(t) = e^{at}$ será:*

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{(a-s)t} dt = \begin{cases} \frac{1}{s-a}, & s > a \\ \infty, & s \leq a. \end{cases} \tag{74}$$

Observemos que el operador de $\mathcal{L}$aplace act/'ua sobre funciones. Además este operador es lineal ya que se cumple la propiedad:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] dt \\ &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) dt \\ &= c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}. \end{aligned}$$

Como hemos podido ver la mayor dificultad de este método consiste en calcular integrales definidas en intervalos no acotados. Para asegurarnos que la integral será siempre convergente tenemos que exigir dos requisitos a la función $f(t)$:

1. Que $f(t)$ sea continua a trozos. Esto quiere decir que $f(t)$ tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo $0 \leq t \leq A$ y que en los puntos de discontinuidad existen sus límites por la izquierda y por la derecha.
2. Que $f(t)$ sea de orden exponencial, es decir que existan dos constantes M y c tales que $|f(t)| \leq Me^{ct}, \;\; 0 \leq t < \infty$.

Otra de las propiedades interesantes de la transformada de $\mathcal{L}$aplace es la siguiente:

LEMA 41. *Sea $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Entonces*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0). \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f(0) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Estamos ahora en disposición para transformar el P.V.I. (84) en un problema algebraíco. Sean $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Tomando transformadas de $\mathcal{L}$aplace a ambos lados de la e.d. y utilizando el lema y el hecho de que el operador es lineal nos queda la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{ay''(t) + by'(t) + cy(t)\} \iff \\ F(s) &= a[s^2 Y(s) - sy_0 - y_0'] + b[sY(s) + y_0] + cY(s). \end{aligned}$$

Despejando la incógnita tendremos

$$Y(s) = \frac{(as+b)y_0}{as^2+bs+c} + \frac{ay_0'}{as^2+bs+c} + \frac{F(s)}{as^2+bs+c}. \tag{75}$$

La ecuación (75) nos da la transformada de $\mathcal{L}$aplace de la solución. Para hallar la expresión buscada $y(t)$ debemos hallar la transformada inversa de $\mathcal{L}$aplace $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$. Este último paso requiere saber integrar en el campo de los complejos lo cual no sabemos hacer todavía. Por ello lo que haremos será mirar en las tablas de transformadas mas comunes y aplicar una serie de propiedades que enunciamos a continuación.

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$t^n,\ n \in \mathbb{N}^+$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\quad s > 0$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$
$e^{ax}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$t^n e^{at},\ n \in \mathbb{N}^+$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s > a$
$\delta(t-c)$	e^{-cs}

Transformadas de $\mathcal{L}$aplace de las funciones mas usuales.

0.3.1. Algunas propiedades de la Trasformada de $\mathcal{L}$aplace.

PROPOSICIÓN 42. *Sea $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Entonces*

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}F(s). \tag{76}$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición sabemos que $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$. Derivando a ambos lados con respecto de la variable s tendremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st})f(t)dt = \int_0^\infty -te^{-st} f(t)dt \\ &= \mathcal{L}\{-tf(t)\}. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 43. *Hallar la transformada de $\mathcal{L}$aplace de la función $f(t) = t^{13}$.*

Aplicando la propiedad anterior 13 *veces tendremos*

$$\mathcal{L}\{x^{13}\} = (-1)^{13}\frac{d^{13}}{ds^{13}}\mathcal{L}\{1\} = (-1)^{13}\frac{d^{13}}{ds^{13}}(\frac{1}{s}) = \frac{(13)!}{s^{14}}.$$

PROPOSICIÓN 44. *Sea $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Entonces*

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a). \tag{77}$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}f(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt \equiv F(s-a).\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 45. *¿Qué función es tal que su transformada de $\mathcal{L}$aplace sea $F(s) = \frac{1}{s^2-4s+9}$? Observemos que*

$$\frac{1}{s^2-4s+9} = \frac{1}{(s-2)^2+5}.$$

Utilizando la Tabla vemos que

$$\frac{1}{s^2+5} = \mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t\}$$

luego por la proposición tendremos

$$\frac{1}{s^2-4s+9} = \frac{1}{(s-2)^2+5} = \mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{5}}e^{2t}\sin\sqrt{5}t\}$$

0.4. E.d. con miembros derechos discontinuos. En este apartado estudiaremos la utilidad de la transformada de $\mathcal{L}$aplace para funciones de tipo Heaviside y funciones de tipo delta de Dirac. La función mas sencilla que presenta un salto de discontinuidad es la función de Heaviside

$$H_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < c \\ 1, & t \ge c. \end{cases} \tag{78}$$

Su transformada de $\mathcal{L}$aplace es:

$$\mathcal{L}\{H_c(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}H_c(t)dt = \int_c^\infty e^{-st}dt \tag{79}$$

$$= \lim_{A\to\infty}\int_c^A e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty}\frac{e^{-cs}-e^{-sA}}{s} \tag{80}$$

$$= \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s>0. \tag{81}$$

Si por example escribimos $g(t) = H_c(t)f(t-c)$ esto nos dice que la función $g(t) = 0$ para los tiempos $t \leq c$ y que $g(t) = f(t-c)$ para los tiempos $t \geq c$ es decir igual a $f(t)$, c unidades de tiempo antes. Tenemos la siguiente propiedad:

Proposición 46. *Sea $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Entonces*

$$\mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s). \tag{82}$$

Ejemplo 47. *Resolver el P.V.I.:*

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y &= f(t) = \begin{cases} 1,\ 0\leq t<1; & 0,\ 1\leq t<2\\ 1,\ 2\leq t<3; & 0,\ 3\leq t<4\\ 1,\ 4\leq t<5; & 0, 5\leq t<\infty.\end{cases}\\ y(0) &= 0, \quad y'(0)=0.\end{aligned}$$

Sea $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ y $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Tomando transformadas de $\mathcal{L}$aplace a ambos lados obtenemos

$$Y(s) = \frac{F(s)}{(s-1)(s-2)}.$$

La mejor manera de calcular $F(s)$ es escribiendo $f(t)$ de la forma

$$f(t) = [H_0(t) - H_1(t)] + [H_2(t) - H_3(t)] + [H_4(t) - H_5(t)].$$

Por linealidad de la transformada de $\mathcal{L}$aplace

$$F(s) = [\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}] + [\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}] + [\frac{e^{-4s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s}].$$

(también se puede calcular $F(s)$ aplicando la definición;

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^1 e^{-st}dt + \int_2^3 e^{-st}dt + \int_4^5 e^{-st}dt.)$$

Despejando tendremos

$$Y(s) = \frac{1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+e^{-4s}-e^{-5s}}{s(s-1)(s-2)}.$$

El siguiente paso es escribir

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s-1)(s-2)} &= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-2)}\\ &= \mathcal{L}\{\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\}.\end{aligned}$$

Finalmente utilizando (82) la solución buscada es

$$\begin{aligned}y(t) &= (\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}) - H_1(t)(\frac{1}{2} - e^{(t-1)} + \frac{1}{2}e^{2(t-1)})\\ &\quad +H_2(t)(\frac{1}{2} - e^{(t-2)} + \frac{1}{2}e^{2(t-2)}) - H_3(t)(\frac{1}{2} - e^{(t-3)} + \frac{1}{2}e^{2(t-3)})\\ &\quad +H_4(t)(\frac{1}{2} - e^{(t-4)} + \frac{1}{2}e^{2(t-4)}) - H_5(t)(\frac{1}{2} - e^{(t-5)} + \frac{1}{2}e^{2(t-5)}).\end{aligned}$$

0.5. La función delta de Dirac. A principios de 1936 el ganador del Premio Nobel de Física P.M. Dirac desarolló una teoría acerca de las funciones "impulso". Su método está basado en el argumento siguiente. Sea t_1 un instante de tiempo que se acerca cada vez más al instante t_0. Entonces la función $\frac{f(t)}{(t_1-t_0)}$ se acerca a una función impulso que vale 0 si $t \neq t_0$, vale ∞ en $t = t_0$ y cuya integral en cualquier intervalo que contenga el punto t_1 vale 1. A esa función se la llama *delta de Dirac* y la notaremos $\delta(t-t_0)$.

PROPOSICIÓN 48. *Sea $\delta(t-t_0)$ la función delta de Dirac. Entonces*

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} \equiv \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-t_0)dt = e^{-st_0}. \tag{83}$$

EJEMPLO 49. *Hallar la solución al P.V.I.:*

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 3\delta(t-1) + \delta(t-2);\\ \qquad y(0) = 1\ , \quad y'(0) = 1.\end{cases}$$

Sea $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ y $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Tomando transformadas de $\mathcal{L}$aplace a ambos lados de la e.d. obtenemos

$$s^2Y(s) - s - 1 - 4(sY(s) - 1) + 4Y(s) = F(s) = 3e^{-s} + e^{-2s},$$

es decir

$$Y(s) = \frac{s-3}{(s-2)^2}. + \frac{3e^{-s}}{(s-2)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s-2)^2}.$$

Sabemos que $\frac{1}{(s-2)^2} = \mathcal{L}\{te^{2t}\}$ *luego*

$$\frac{3e^{-s}}{(s-2)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s-2)^2} = \mathcal{L}\{3H_1(t)(t-1)e^{2(t-1)} + H_2(t)(t-2)e^{2(t-2)}\}.$$

Para hallar la trasformada inversa de $\frac{s-3}{(s-2)^2}$ *observemos que*

$$\frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{s-2}{(s-2)^2} - \frac{1}{(s-2)^2} = \mathcal{L}\{e^{2t}\} - \mathcal{L}\{te^{2t}\}.$$

Finalmente

$$y(t) = (1-t)e^{2t} + H_1(t)(t-1)e^{2(t-1)} + H_2(t)(t-2)e^{2(t-2)}.$$

CAPíTULO 6

Sistemas lineales de e.d.

A lo largo de este capítulo a las funciones incógnitas las denotaremos $x_i, i = 1, , ...n$ y la variable independiente será notada t. El objetivo es aprender a resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma:

$$(84) \qquad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_n. \end{cases}$$

Matricialmente el sistema (84) se escribe como

$$\dot{\overrightarrow{X}}(t) = A\overrightarrow{X}(t) + \overrightarrow{B}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Habremos resuelto el sistema de e.d. cuando hallamos encontrado n funciones $x_i(t), \ i = 1, ...n$ que satisfagan la e.d. (84) y que sean *linealmente independientes.* Es importante recordar el siguiente

Teorema 50. *Sean $\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \cdots, \overrightarrow{V}_n$ n vectores propios de la matriz A de valores propios asociados $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ distintos entonces los vectores propios $\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \cdots, \overrightarrow{V}_n$ son linealmente independientes.*

1. Caso homogéneo

En este caso $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ y el sistema homogéneo es de la forma

$$(85) \qquad \dot{\overrightarrow{X}}(t) = A\overrightarrow{X}(t).$$

Para resolver este sistema de e.d. recordemos que en el capítulo (2) aprendimos a resolver el caso escalar: $\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, donde esa vez $a \in \mathbb{R}$ y cuya solución es $x(t) = x_0 e^{at}$. De forma totalmente análoga, la solución al sistema (85) vendrá dada por $\overrightarrow{X}(t) = \overrightarrow{X}(t_0)e^{At}$ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Al contrario que en el caso escalar aquí A es una matriz. A continuación damos el método para calcular las soluciones sin tener que calcular explícitamente la exponencial de una matriz.

Partimos de la siguiente observación; supongamos que tenemos una solución del sistema (85) de la forma $\overrightarrow{X}(t) = e^{\lambda t}\overrightarrow{V}$. Entonces $\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}\overrightarrow{V}) = \lambda e^{\lambda t}\overrightarrow{V}$ y tambien tenemos que $A(e^{\lambda t}\overrightarrow{V}) = e^{\lambda t}(A\overrightarrow{V})$ luego $\overrightarrow{X}(t) = e^{\lambda t}\overrightarrow{V}$ será solución del sistema (85) si y sólo si

$$\lambda e^{\lambda t}\overrightarrow{V} = e^{\lambda t}A\overrightarrow{V} \iff A\overrightarrow{V} = \lambda\overrightarrow{V} \iff (A - \lambda I)\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}. \tag{86}$$

Es decir que tenemos que hallar los valores escalares λ tales que $(A - \lambda I)$ sea la matriz nula. Esos valores reciben el nombre de *autovalores* o valores propios. De igual modo los vectores que cumplen $A\overrightarrow{V} = \lambda\overrightarrow{V}$ se denominan *autovectores* o vectores propios. La ecuación algebraica (86) tiene solución no trivial (i.e. $\neq 0$) si y solamente si el determinante es nulo; $|A - \lambda I| = 0$. Así pues los autovalores son las raíces del polinomio característico $|A - \lambda I| = 0$. Una vez determinados los autovalores determinamos los autovectores resolviendo $A\overrightarrow{V} = \lambda\overrightarrow{V}$.

Ejemplo 51. *Resolver el problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1 + 12x_2 \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1 + x_2 \end{cases}, \quad x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1.$$

En escritura matricial $\dot{\overrightarrow{X}}(t) = A\overrightarrow{X}(t),\ \overrightarrow{X}(0)$ *tenemos*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},\ \overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Primero hallamos las raíces del polinomio característico;

$$|A - \lambda I| = 0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & 12 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (\lambda - 7)(\lambda + 5) = 0.$$

los valores propios son pues $\lambda_1 = 7$ *y* $\lambda_2 = -5$. *Ahora determinamos los vectores propios asociados a cada autovalor.*

(i) Para el autovalor $\lambda_1 = 7$ el vector propio satisface $A\overrightarrow{V}_1 = 7\overrightarrow{V}_1$ es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1(t) \\ v_1^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7v_1^1(t) \\ 7v_1^2(t) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1(t) \\ v_1^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo hallamos que $v_1^1 = 2v_1^2$ luego $\overrightarrow{V}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio para todo valor de la constante c_1.

(ii) Para el autovalor $\lambda_2 = -5$ el vector propio satisface $A\overrightarrow{V}_2 = -5\overrightarrow{V}_2$ es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1(t) \\ v_2^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5v_2^1(t) \\ -5v_2^2(t) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1(t) \\ v_2^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo hallamos que $v_2^1 = -2v_2^2$ luego $\overrightarrow{V}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio para todo valor de la constante c_2.

La solución general será pues:

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la solución al P.V.I. utilizamos la condición $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que nos determina $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$. Finalmente el vector solución es:

$$\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{7t} - e^{-5t} \\ \frac{1}{2}e^{7t} + \frac{1}{2}e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

1.1. Caso de las raíces complejas. Sea $\lambda = \alpha + i\beta$ un valor propio complejo de la matriz A y sea $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_1} + i\overrightarrow{V_2}$ el vector propio asociado entonces el vector $\overrightarrow{X}(t) = e^{\lambda t}\overrightarrow{V}$ es una solución compleja de la e.d. $\dot{\overrightarrow{X}}(t) = A\overrightarrow{X}(t)$. Esta función da lugar a dos funciones solución reales. En efecto la función compleja $\overrightarrow{X}(t) = e^{\lambda t}\overrightarrow{V}$ se escribe de la forma:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X}(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(\overrightarrow{V_1} + i\overrightarrow{V_2}) &= \overrightarrow{Y}(t) + i\overrightarrow{Z}(t) = \\ &= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)(\overrightarrow{V_1} + i\overrightarrow{V_2}) \\ &= e^{\alpha t}[(\overrightarrow{V_1}\cos\beta t - \overrightarrow{V_2}\sin\beta t) + i(\overrightarrow{V_1}\sin\beta t + \overrightarrow{V_2}\cos\beta t)] \end{aligned}$$

separando parte real y parte imaginaria tenemos que las funciones reales

$$\begin{aligned}\overrightarrow{X}(t) &= e^{\alpha t}(\overrightarrow{V_1}\cos\beta t - \overrightarrow{V_2}\sin\beta t)\\ \overrightarrow{Z}(t) &= e^{\alpha t}(\overrightarrow{V_1}\sin\beta t + \overrightarrow{V_2}\cos\beta t)\end{aligned}$$

son solución de (85). Se demuestra además que estas dos soluciones son linealmente independientes.

Ejemplo 52. *Resolver el P.V.I.:*

$$\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\overrightarrow{X}, \qquad \overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Lo primero que debemos hacer es calcular el polinomio caracteístico $|A-\lambda I| \equiv det(A-\lambda I) = 0$. *Esto es*

$$\det\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+2) = 0$$

luego los valores propios son $\lambda = 1$ *y* $\lambda = 1 \pm i$. *La manera de proceder es idéntica al ejemplo anterior:*

(i) para $\lambda = 1$: *se ve claramente que* $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ *es un vector propio de* A *asociado al valor propio* $\lambda = 1$ *luego* $\overrightarrow{X}^1(t) = c_1 e^{1.t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ *es una solución de la e.d.* $\dot{\overrightarrow{X}} = A\overrightarrow{X}$.

(ii) para $\lambda = 1+i$: *buscamos un vector* $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ *no nulo tal que*

$$[A-(\lambda+i)I]\,\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix}-i & 0 & 0\\ 0 & -i & -1\\ 0 & 1 & -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Esto implica necesariamente que $-iv_1 = 0, -iv_2 - v_3 = 0$ *y* $v_2 - iv_3 = 0$. *Claramente el vector* $\overrightarrow{V} = c\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}$ *es un vector propio asociado al* *valor propio* $\lambda = 1+i$, *luego* $\overrightarrow{X}(t) = e^{(1+i).t}\begin{pmatrix}0\\ i\\ 1\end{pmatrix}$ *es una solución de la e.d.* $\dot{\overrightarrow{X}} = A\overrightarrow{X}$. *Ahora hacemos lo siguiente:*

$$\begin{aligned} e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}0\\ i\\ 1\end{pmatrix} &= e^{t}(\cos t + i\sin t)\left[\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right]\\ &= e^{t}\left[\cos t\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} - \sin t\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + i\sin t\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + i\cos t\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right]\\ &= e^{t}\begin{pmatrix}0\\ -\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} + ie^{t}\begin{pmatrix}0\\ \cos t\\ \sin t\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\overrightarrow{X}^2(t) = e^{t}\begin{pmatrix}0\\ -\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$ *y* $\overrightarrow{X}^3(t) = e^{t}\begin{pmatrix}0\\ \cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ *son dos funciones reales solución de la e.d.. Las tres funciones reales* $\overrightarrow{X}^1(t), \overrightarrow{X}^2(t)$, *y* $\overrightarrow{X}^3(t)$ *son linealmente independientes ya que sus valores iniciales*

$$\overrightarrow{X}^1(0) = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \overrightarrow{X}^2(0) = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \quad y \quad \overrightarrow{X}^3(0) = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

son tres vectores independientes en $\mathbb{R}^3$. *La solución* $\dot{\overrightarrow{X}}(t)$ *del P.V.I tiene que ser de la forma*

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + c_2e^{t}\begin{pmatrix}0\\ -\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} + c_3e^{t}\begin{pmatrix}0\\ \cos t\\ \sin t\end{pmatrix}.$$

Como la condición inicial es $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ *tenemos que hallar las constantes resolviendo*

$$\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = c_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}.$$

Lo que nos da los valores $c_1 = c_2 = c_3 = 1$. Finalmente la solución al P.V.I. es:

$$\overrightarrow{X}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

OBSERVACIÓN 53. *En este example podemos constatar lo siguiente. Si $\overrightarrow{V}$ es un vector propio de la matriz A asociado al valor propio λ entonces el vector conjugado $\overline{\overrightarrow{V}}$ es vector propio de A asociado al valor propio conjugado $\bar{\lambda}$.*

1.2. Caso de las raíces iguales. Si el polinomio característico de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no tiene n raíces distintas entonces A no tiene n vectores propios que sean linealmente independientes. Supongamos que la matriz sólo tiene $k < n$ vectores propios linealmente independientes. Entonces la e.d. $\dot{\overrightarrow{X}} = A\overrightarrow{X}$ posee únicamente k soluciones linealmente independientes de la forma $e^{\lambda t}\overrightarrow{V}$. Nuestro problema es pues hallar las otras $(n-k)$ soluciones linealmente independientes. La solución a este problema nos viene dada por el siguiente

TEOREMA 54. *Supongamos que el polinomio característico de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene k raíces distintas $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_k$ de multiplicidades respectivas $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$. (Es decir que el polinomio característico se escribe de la forma $(\lambda-\lambda_1)^{\mu_1}(\lambda-\lambda_2)^{\mu_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{\mu_k}$). Supongamos también que la matriz A posee sólo $\nu_j < \mu_j$ autovectores linealmente independientes asociados al valor propio λ_j. Entonces la ecuación $(A-\lambda_j I)^2\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ tiene al menos $\nu_j + 1$ soluciones independientes. Más generalmente, si la ecuación $(A-\lambda_j I)^m\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ posee sólo $m_j < n_j$ soluciones independientes, entonces la ecuación $(A-\lambda_j I)^{m+1}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ tiene por lo menos m_j soluciones independientes.*

Este teorema nos da el método para calcular los n vectores propios linealmente independientes. El algoritmo es el siguiente:

(1) Supongamos que A tiene n vectores propios linealmente independientes, entonces la e.d. $\dot{\overrightarrow{X}} = A\overrightarrow{X}$ posee exactamente n soluciones de la forma $e^{\lambda t}\overrightarrow{V}$.

(2) Supongamos que A tiene sólo $k < n$ vectores propios linealmente independientes de la forma $e^{\lambda t}\overrightarrow{V}$. Para hallar otras soluciones escogemos un valor propio λ de A y buscamos todos los vectores $\overrightarrow{V}$ que satisfagan $(A-\lambda I)^2\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ pero

$(A-\lambda I)\overrightarrow{V} \neq \overrightarrow{0}$. Para esos vectores tenemos que

(87) $$e^{\lambda t}\overrightarrow{V} = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}\overrightarrow{V} = e^{\lambda t}[\overrightarrow{V} + t(A-\lambda I)\overrightarrow{V}]$$

es otra solución de la e.d. $\dot{\overrightarrow{X}} = A\overrightarrow{X}$. Hacemos esto para todos los valores propios de A.

(3) Si todavía no tenemos suficientes soluciones independientes entonces buscamos todos los vectores $\overrightarrow{V}$ que satisfagan $(A-\lambda I)^3\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ pero $(A-\lambda I)^2\overrightarrow{V} \neq \overrightarrow{0}$. Para esos vectores tenemos que

$$e^{\lambda t}\overrightarrow{V} = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}\overrightarrow{V} = e^{\lambda t}[\overrightarrow{V} + t(A-\lambda I)\overrightarrow{V} + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda I)^2\overrightarrow{V}]$$

es otra solución de la e.d. $\dot{\overrightarrow{X}} = A\overrightarrow{X}$.

(4) Seguimos con el mismo procedimiento hasta encontrar las n soluciones linealmente independientes de la forma $e^{\lambda t}\overrightarrow{V}$.

Ejemplo 55. *Determinar 3 soluciones linealmente independientes de la e.d.:*

$$\dot{\overrightarrow{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}.$$

El polinomio característico es $(1-\lambda)^2(2-\lambda)$ *luego* $\lambda = 1$ *es un autovalor de multiplicidad* 2 *y* $\lambda = 2$ *es un autovalor de multiplicidad uno.*

(i) $\lambda = 1$: *buscamos todos los vectores* $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *no nulos que cumplan*

$$(A-\lambda I)\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $v_2 = v_3 = 0$ *y* v_1 *es arbitrario. Así pues* $\overrightarrow{X}^1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *es una solución. Dado que sólo tenemos un vector para un valor propio de multiplicidad 2 buscamos un segundo vector propio linealmente independiente de éste resolviendo*

$$(A-\lambda I)^2\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lo que implica que $v_3 = 0$ *y* v_2, v_1 *son arbitrarios. Vemos que el vector* $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *satisface* $(A-\lambda I)^2\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ *pero* $(A-\lambda I)\overrightarrow{V} \neq 0$. *Luego*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{X}^2(t) &= e^{At}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^t e^{(A-\lambda I)t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= e^t[I + t(A-I)]\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + te^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

es una segunda solución linealmente independiente de la anterior.

(ii) $\lambda = 2$: *buscamos un vector* $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *no nulo que satisfaga*

$$(A-2I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso tendremos que $v_1 = v_2 = 0$ *y* v_3 *es arbitrario.*

Finalmente $\overrightarrow{X}^3(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *es la tercera solución linealmente independiente de* $\overrightarrow{X}^1(t)$ *y* $\overrightarrow{X}^2(t)s$.

1.3. Matriz fundamental. Si $\overrightarrow{X}^1(t), \overrightarrow{X}^2(t), \cdots, \overrightarrow{X}^n(t)$ son n soluciones linealmente independientes de la a.d. $\overrightarrow{X} = A\overrightarrow{X}$, entonces toda solución de la e.d. se escribe de la forma

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1\overrightarrow{X}^1(t) + c_2\overrightarrow{X}^2(t) + \cdots c_n\overrightarrow{X}^n(t). \tag{88}$$

DEFINICIÓN 56. *La matriz* $\overrightarrow{X}(t)$ *se denomina* matriz solución fundamental *de* $\overrightarrow{X} = A\overrightarrow{X}$ *si sus vectores columna forman un conjunto de* n *soluciones linealmente independientes.*

Aunque existen muchas propiedades importantes de la matriz fundamental, en estas notas nos limitaremos a dar el siguiente

TEOREMA 57. *Sea* $\overrightarrow{X}(t)$ *una matriz solución fundamental de la e.d.* $\overrightarrow{X} = A\overrightarrow{X}$. *Entonces*

$$e^{At} = \overrightarrow{X}(t)\overrightarrow{X}^{-1}(0). \tag{89}$$

2. El caso no homogéneo

Consideremos ahora el caso no homogéneo $\dot{\overrightarrow{X}} = A\overrightarrow{X} + \overrightarrow{F}(t)$. Al igual que en el caso de las e.d. de segundo orden, vamos a utilizar toda la información que tenemos de la e.d. homogénea asociada para hallar soluciones al P.V.I.:

$$\dot{\overrightarrow{X}} = A\overrightarrow{X} + \overrightarrow{F}(t), \qquad \overrightarrow{X}(t_0) = \overrightarrow{X}_0 \tag{90}$$

Sean $\overrightarrow{X}^1(t), \overrightarrow{X}^2(t), \cdots, \overrightarrow{X}^n(t)$ n soluciones linealmente independientes de la e.d. homogénea $\overrightarrow{X} = A\overrightarrow{X}$. Sabemos que la solución general del problema homogenéo se escribe de la forma $\overrightarrow{X}(t) = c_1\overrightarrow{X}^1(t) + c_2\overrightarrow{X}^2(t) + \cdots + c_n\overrightarrow{X}^n(t)$, por lo que buscaremos una solución al problema (90) que sea de la forma:

$$\overrightarrow{X}(t) = u_1(t)\overrightarrow{X}^1(t) + u_2(t)\overrightarrow{X}^2(t) + \cdots + u_n(t)\overrightarrow{X}^n(t). \tag{91}$$

De forma abreviada la ecuación (91) la escribiremos $\overrightarrow{X}(t) = X(t)\overrightarrow{u}(t)$, donde la matriz $X(t) = (\overrightarrow{X}^1(t), \overrightarrow{X}^2(t), \cdots, \overrightarrow{X}^n(t))$ y $\overrightarrow{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$

Si reemplazamos en la e.d. (90) nos queda:

$$\dot{X}(t)\overrightarrow{u}(t) + X(t)\dot{\overrightarrow{u}}(t) = AX(t)\overrightarrow{u}(t) + \overrightarrow{F}(t). \tag{92}$$

Como $X(t)$ es una matriz solución fundamental de (90) verifica que $X(t) = AX(t)$, luego la ecuación (92) se reduce a:

$$X(t)\dot{\overrightarrow{u}}(t) = \overrightarrow{F}(t). \tag{93}$$

Recordemos que las columnas de $X(t)$ estan formadas por vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes para todo t. Luego existe la matriz inversa $X^{-1}(t)$ y podremos escribir:

$$\dot{\overrightarrow{u}}(t) = X^{-1}(t)\overrightarrow{F}(t). \tag{94}$$

Si integramos (94) entre los tiempos t_0 y t obtenemos la expresión

$$\overrightarrow{u}(t) = \overrightarrow{u}(t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\overrightarrow{F}(s)ds \tag{95}$$

$$= X^{-1}(t_0)\overrightarrow{X_0} + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\overrightarrow{F}(s)ds. \tag{96}$$

Finalmente

$$\overrightarrow{X}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\overrightarrow{X_0} + X(t)(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\overrightarrow{F}(s)ds. \tag{97}$$

Si $X(t)$ es la matriz solución fundamental e^{At} la ecuación (97) se escribirá:

$$\overrightarrow{X}(t) = e^{At}e^{-At_0}\overrightarrow{X_0} + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}\overrightarrow{F}(s)ds \tag{98}$$

$$= e^{A(t-t_0)}\overrightarrow{X_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\overrightarrow{F}(s)ds. \tag{99}$$

Ejemplo 58. *Resolver el siguiente P.V.I.*

$$\dot{\overrightarrow{X}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\overrightarrow{X}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t\cos 2t \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la técnica descrita para el caso homogéneo se encuentra fácilmente que la matriz solución fundamental viene dada por

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & 0 & 0 \\ -3e^t & e^t\cos 2t & e^t\sin 2t \\ 2e^t & e^t\sin 2t & -e^t\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora

$$X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} 2e^t & 0 & 0 \\ -3e^t & e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ 2e^t & e^t \sin 2t & -e^t \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos 2t + \sin t & \cos 2t & -\sin 2t \\ 1 + \frac{3}{2} \sin 2t - \cos 2t & \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente aplicando (98) la solución buscada es

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X}(t) &= e^{At} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ & e^{At} \int_0^t e^{-s} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos 2s + \sin s & \cos 2s & -\sin 2s \\ 1 + \frac{3}{2} \sin 2s - \cos 2s & \sin 2s & \cos 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^s \cos 2s \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t - (1 + \frac{1}{2}t) \sin 2t \\ (1 + \frac{1}{2}t) \cos 2t + \frac{5}{4} \sin 2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Este ejemplo ilustra la técnica para hallar una solución al problema no homogéneo. Como se puede constatar el proceso es bastante laborioso ya que requiere invertir una matriz además de calcular varias integrales. Por eso, y en analogía con el caso de las e.d. de segundo orden, muchas veces es más rápido y eficiente "intuir"la forma de la solución y determinar los coeficientes.