# Capítulo 10

# Sucesiones y series de funciones

Exponemos este tema siguiendo el capítulo 11 de [APOSTOL1], completado con algunas partes del capítulo 7 de [BARTLE-SHERBERT].

## 10.1. Sucesiones y series de funciones: convergencia puntual

**Definición 10.1.1.** *Sea $A$ un subconjunto de $\mathbb{R}$. Supongamos que para cada número natural $n$ está dada una función $f_n : A \to \mathbb{R}$; la aplicación $n \mapsto f_n$ recibe el nombre de* **sucesión de funciones** *(definidas en $A$, si es necesaria la precisión). La función $f_n$ asociada al número natural $n$ recibe el nombre de* **término $n$-ésimo** *de la sucesión.*

Informalmente, una sucesión de funciones es una lista sin fin

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

de funciones definidas en el conjunto $A$. Como hicimos con las sucesiones de números reales, denotamos la sucesión de funciones cuyo término $n$-ésimo es $f_n$ con $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o, simplificando si no hay confusión, con $(f_n)$.

Para cada punto $x \in A$ podemos considerar la sucesión de números reales que tiene por término $n$-ésimo el número real $f_n(x)$, valor en $x$ de la función $f_n$. Esta sucesión podrá ser convergente o no.

El conjunto $C$ de todos los puntos $x \in A$ para los que la sucesión de números $(f_n(x))$ converge suele llamarse ***campo de convergencia*** de la sucesión de funciones $(f_n)$; si $C \neq \emptyset$, podemos definir una nueva función $f : C \to \mathbb{R}$ haciendo corresponder a cada $x \in C$ el número real $f(x) = \lim_n f_n(x)$.

Hablamos entonces de convergencia puntual (o punto a punto) de la sucesión $(f_n)$ a la función $f$, concepto que vamos a definir en general.

**Definición 10.1.2.** *Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto $A$, $S$ un subconjunto de $A$ y $f$ una función definida en $S$. Si para cada $x \in S$, $f(x) = \lim_n f_n(x)$, se dice que la sucesión $(f_n)$* **converge puntualmente** *a $f$ en $S$, o que converge* **punto a punto** *a $f$ en $S$.*

*En este caso a $f$ se le llama el* **límite puntual** *de la sucesión $(f_n)$ en $S$.*

*Cuando existe tal función $f$, decimos que la sucesión $(f_n)$ es* **convergente punto a punto** *en $S$, o que la sucesión $(f_n)$ es* **convergente puntualmente** *en $S$.*

**Ejemplos.** a) La sucesión $(x^n)$ converge puntualmente en el intervalo cerrado $[0,1]$ a la función $f$ definida en dicho intervalo por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

b) La sucesión $\left(\dfrac{x^n}{1+x^n}\right)$ converge puntualmente en $[0,+\infty)$ a la función $f$ definida en tal intervalo por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 1. \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

c) La sucesión $(\operatorname{sen} n\pi x)$ converge puntualmente a 0 en todos los $x \in \mathbb{Z}$. Menos trivial es probar que en los demás puntos no converge. En efecto: sea $x \in \mathbb{R}$ y supongamos que $\operatorname{sen} n\pi x \to \ell$; desde luego, debe ser $\ell \in \mathbb{R}$ y entonces

$$\ell = \lim_n \operatorname{sen} 2n\pi x = \lim_n 2 \operatorname{sen} n\pi x \cos n\pi x = \lim_n 2\ell \cos n\pi x.$$

De aquí se deduce que o bien $\ell = 0$, o bien $\lim_n \cos n\pi x = \dfrac{1}{2}$.

- No puede ser $\lim_n \cos n\pi x = \dfrac{1}{2}$, ya que tendríamos

$$\frac{1}{2} = \lim_n \cos 2n\pi x = \lim_n 2\cos^2 n\pi x - 1 = -\frac{1}{2}.$$

- Así que debe ser $\ell = 0$, luego $\lim_n |\cos n\pi x| = \lim_n \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 n\pi x} = 1$. Como

$$\operatorname{sen}(n+1)\pi x = \operatorname{sen} n\pi x \cos \pi x + \cos n\pi x \operatorname{sen} \pi x,$$

queda $\lim_n \cos n\pi x \operatorname{sen} \pi x = 0$ y, por lo tanto, $\operatorname{sen} \pi x = 0$. Es decir, $x \in \mathbb{Z}$.

Pueden verse más ejemplos con sus gráficas en [BARTLE-SHERBERT, págs. 312–315].

**Observación.** La convergencia puntual puede expresarse en términos similares a los de la convergencia de sucesiones numéricas. Concretamente:

- *Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto A, S un subconjunto de A, $f$ una función definida en S. La sucesión $(f_n)$ converge puntualmente a $f$ en S si y solo si para cada $x \in S$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon, x)$ tal que siempre que $n > N(\varepsilon, x)$ se verifica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

En consecuencia, tenemos la siguiente ***condición de Cauchy*** para la convergencia puntual:

- *Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto A, S un subconjunto de A. La sucesión $(f_n)$ converge puntualmente en S (a una cierta función) si y solo si para cada $x \in S$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon, x)$ tal que siempre que m, $n > N(\varepsilon, x)$ se verifica $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.*

Las definiciones de serie de funciones y convergencia puntual de una serie de funciones son fácilmente adivinables.

**Definición 10.1.3.** *Una* **serie de funciones** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *es un par ordenado de sucesiones de funciones* $\big((f_n),(s_n)\big)$ *relacionadas por la condición de que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *es*

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n.$$

*Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, el término n-ésimo de la primera sucesión,* $f_n$*, recibe el nombre de* **término** $n$**-ésimo de la serie***; el término n-ésimo de la segunda sucesión,* $s_n$*, recibe el nombre de* **suma parcial** $n$**-ésima de la serie**.

*Decimos que una serie de funciones* **converge puntualmente** *a una función* $f$ *en un conjunto* $S$ *si lo hace la sucesión de sus sumas parciales. En tal caso, la función* $f$ *es* **la suma** *de la serie en el conjunto* $S$.

**Ejemplo.** La serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ converge puntualmente en $(-1,1)$ y su suma es la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, si $-1 < x < 1$.

## 10.2. Convergencia uniforme

El estudio de las sucesiones de funciones abre al menos dos interesantes opciones: de un lado, podemos construir nuevas funciones como límites de funciones conocidas; de otro, podemos pensar en sustituir, en ciertos problemas, una función dada por funciones que la aproximan y que pueden tener un comportamiento mejor controlado respecto a la situación que nos interese. En cualquiera de los dos casos, la primera tarea es examinar qué propiedades de las funciones que forman la sucesión se traspasan a la función límite. El resultado de un primer análisis no puede ser más descorazonador, como muestran los siguientes ejemplos (ver [APOSTOL1, pág. 518]).

**Ejemplos.**

a) Sucesión de funciones continuas con función límite discontinua: la sucesión $f_n(x) = x^n$ en $[0,1]$ converge puntualmente a la función que vale 1 en $x = 1$ y 0 en los demás puntos.

b) Sucesión de funciones cuyas integrales no convergen a la integral de la función límite: la sucesión $(f_n)$ definida por

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n, \qquad 0 \le x \le 1,$$

converge puntualmente a 0 en $[0,1]$. Sin embargo,

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_n f_n(x)\,dx.$$

Peor aún es lo que ocurre con la derivación, como veremos posteriormente. A la vista de estos ejemplos, está claro que hay que introducir una noción más fuerte de convergencia (ver comentarios en [APOSTOL1, págs. 518–519]).

### 10.2.1. Definición de convergencia uniforme

**Definición 10.2.1.** *Sea* $(f_n)$ *una sucesión de funciones definidas en un conjunto* $A$*,* $S$ *un subconjunto de* $A$*,* $f$ *una función definida en* $S$*. Se dice que la sucesión* $(f_n)$ **converge uniformemente** *a* $f$ *en* $S$ *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $N = N(\varepsilon)$ *tal que siempre que* $n > N(\varepsilon)$*, para todo* $x \in S$ *se verifica* $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$.

Desde luego, el último $\leq$ puede sustituirse por $<$ y la definición es equivalente. Ver comentarios e interpretación gráfica en [APOSTOL1, págs. 519–520].

Comparando esta definición con la reformulación que dimos anteriormente para la convergencia puntual, es obvio que *toda sucesión $(f_n)$ que converge uniformemente a una función $f$ en $S$, también converge puntualmente a $f$ en $S$.*

Una manera útil de expresar la definición de convergencia uniforme es la siguiente:

**Proposición 10.2.2.** *Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto $A$, $S$ un subconjunto de $A$, $f$ una función definida en $S$. La sucesión $(f_n)$ converge uniformemente a $f$ en $S$ si y solo si*

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in S\} \xrightarrow{n} 0.$$

*Demostración.* Si para cada $n \in \mathbb{N}$ escribimos

$$M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in S\},$$

entonces que la sucesión $(f_n)$ converja uniformemente a $f$ en $S$ significa, según la definición, que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon)$ tal que siempre que $n > N(\varepsilon)$, $M_n \leq \varepsilon$. Pero esto a su vez significa que $\lim_n M_n = 0$. $\square$

**Aplicación.** La sucesión $\left(\dfrac{\operatorname{sen} nx}{n}\right)$ converge uniformemente a 0 en $\mathbb{R}$, ya que

$$\sup\left\{\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n} - 0\right| : x \in \mathbb{R}\right\} \leq \frac{1}{n} \to 0.$$

Sin embargo, la sucesión $(f_n)$ con $f_n(x) = x^n$ no converge uniformemente en $[0,1]$, pues en caso afirmativo tendría que hacerlo a la función $f$ a la que converge puntualmente, y para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = \sup[\{x^n : x \in [0,1)\} \cup \{0\}] = 1 \not\to 0$$

(ver este y otros ejemplos en [BARTLE-SHERBERT, págs. 316–317]).

**Proposición 10.2.3 (condición de Cauchy para la convergencia uniforme).** *Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto $A$, $S$ un subconjunto de $A$. Entonces $(f_n)$ converge uniformemente en $S$ a alguna función si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon)$ tal que para todos los números naturales $m, n \geq N(\varepsilon)$ se cumple*

$$\sup\{|f_m(x) - f_n(x)| : x \in S\} \leq \varepsilon.$$

*Demostración.* No la desarrollamos, pero la comprobación de que es condición suficiente resulta muy ilustrativa. Puede verse en detalle en [BARTLE-SHERBERT, págs. 317–318]. $\square$

### 10.2.2. Convergencia uniforme y continuidad

A diferencia de la convergencia puntual, la convergencia uniforme conserva la continuidad, como pasamos a comprobar.

**Teorema 10.2.4.** *Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones que converge uniformemente en un conjunto $S$ a una función $f$ con dominio $S$, y sea $x$ un punto de $S$. Si cada función $f_n$ es continua en $x$, entonces $f$ también es continua en $x$.*

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$. Según la definición de convergencia uniforme, hay algún $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t \in S$

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon/3$$

(de hecho, cualquier $n > N(\varepsilon/3)$ vale). Fijamos $n$ y como $f_n$ es continua en $x$, ahora hay algún $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq \varepsilon/3,$$

siempre que sea $|y-x| < \delta$. Entonces, si $|y-x| < \delta$ se tiene

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(y) - f_n(y) + f_n(y) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir, $f$ es continua en $x$. □

Los resultados sobre sucesiones de funciones tienen su equivalente en términos de series de funciones. La convergencia uniforme de una serie de funciones se define de manera análoga a la convergencia puntual:

**Definición 10.2.5.** *Una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se dice que converge uniformemente a una función $f$ en un conjunto $S$ cuando la sucesión $(s_n)$ de sus sumas parciales,*

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n,$$

*converge uniformemente a $f$ en el conjunto $S$.*

**Corolario 10.2.6.** *Si una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente hacia la función suma $f$ en su dominio $S$ y si cada término $f_n$ es una función continua en un punto $x$ de $S$, entonces también $f$ es continua en $x$.*

### 10.2.3. Convergencia uniforme e integración

La convergencia puntual no conserva la integrabilidad: hay sucesiones de funciones integrables-Riemann que convergen puntualmente a funciones que, por el contrario, no son integrables-Riemann (véase, por ejemplo, [BARTLE-SHERBERT, ejr. 13, pág. 325]). Una vez más, la situación es distinta con convergencia uniforme.

**Teorema 10.2.7.** *Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones continuas en un intervalo $[a,b]$ que convergen uniformemente en $[a,b]$ a una función $f$. Entonces $f$ es integrable en $[a,b]$ y se cumple*

$$\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

*Demostración.* La función $f$ es integrable, porque es continua, según el teorema 10.2.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &\leq (b-a) \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\}. \end{aligned}$$

Que la sucesión $(f_n)$ converja a $f$ uniformemente en $[a,b]$ significa que

$$\lim_n \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} = 0,$$

así que también

$$\lim_n \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = 0,$$

que es lo que queríamos probar. □

**Nota.** De la misma manera puede probarse que si se define $g_n(x) = \int_a^x f_n$ y $g(x) = \int_a^x f$, entonces la sucesión de funciones $(g_n)$ converge uniformemente a la función $g$ en el intervalo $[a,b]$.

**Observación.** En realidad, no hace falta imponer que las funciones sean continuas. El teorema 10.2.7 si las funciones $f_n$ son integrables, pero entonces no es inmediato que $f$ sea también integrable. La demostración puede verse en [BARTLE-SHERBERT, teor. 7.2.4, págs. 323–324].

El teorema 10.2.7 afirma que, con las hipótesis adecuadas,

$$\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_n f_n.$$

Este es un primer resultado dentro de una larga lista de teoremas de *paso al límite bajo el signo integral*. La necesidad de aligerar sus hipótesis es una de las razones que impulsaron la generalización de Lebesgue del concepto de integral.

**Corolario 10.2.8.** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones continuas que converge uniformemente hacia la función suma $f$ en un intervalo $[a,b]$. Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$ converge y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f,$$

*es decir,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

### 10.2.4. Convergencia uniforme y derivación

Sobre derivación no cabe esperar enunciados tan sencillos como los obtenidos para la continuidad y la integrabilidad, ni siquiera cuando hay convergencia uniforme, según ponen de manifiesto los siguientes ejemplos.

**Ejemplo.** Una sucesión de funciones derivables que converge uniformemente a una función no derivable:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \to f(x) = |x| \quad \text{uniformemente en } -1 \le x \le 1.$$

**Ejemplo.** Una sucesión de funciones derivables que converge uniformemente a una función derivable, mientras que la sucesión de sus derivadas no converge en ningún punto:

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}} \to f(x) = 0 \quad \text{uniformemente en } \mathbb{R}$$

(ver [GELBAUM-OLMSTED, págs. 76–77]).

**Ejemplo.** Una sucesión de funciones derivables que converge uniformemente a una función derivable, mientras que la sucesión de sus derivadas converge a una función que no es límite de las derivadas:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n} \to f(x) = 0 \quad \text{uniformemente en } 0 \le x \le 1.$$

**Ejemplo.** Una sucesión de funciones derivables que no converge en ningún punto, mientras que la sucesión de sus derivadas converge uniformemente:

$$f_n(x) = (-1)^n; \quad f_n'(x) = 0 \to 0 \quad \text{uniformemente en } \mathbb{R}.$$

Vista la situación, es menos sorprendente que vayamos a parar a un enunciado como el que sigue.

**Teorema 10.2.9.** *Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo $[a,b]$. Supongamos que*

*a) existe un $c \in [a,b]$ tal que la sucesión $(f_n(c))$ converge;*

*b) todas las funciones $f_n$ son derivables y las derivadas son continuas;*

*c) la sucesión de derivadas $(f_n')$ converge uniformemente en $[a,b]$ a una función $g$.*

*Entonces la sucesión $(f_n)$ converge uniformemente en $[a,b]$ a una función $f$ derivable en $[a,b]$ y además $f' = g$.*

*Demostración.* Para cada $x \in [a,b]$,

$$f_n(x) = f_n(c) + f_n(x) - f_n(c) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)\,dt.$$

Sea $\lambda = \lim_n f_n(c)$ y definamos ahora

$$f(x) = \lambda + \int_c^x g(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].$$

Observemos que la función $g$ es continua, por el teorema 10.2.4, así que la función $f$ es derivable y además $f' = g$, según el teorema fundamental del cálculo integral (teorema 6.3.4). Se trata de probar que la sucesión de funciones $(f_n)$ converge uniformemente a $f$ en $[a,b]$.

Para cada $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(c) - \lambda + \int_c^x [f_n'(t) - g(t)]\,dt \right| \\ &\le |f_n(c) - \lambda| + \left| \int_c^x [f_n'(t) - g(t)]\,dt \right|. \end{aligned}$$

Si, por ejemplo, $x \ge c$, entonces

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\le |f_n(c) - \lambda| + \int_c^x |f_n'(t) - g(t)|\,dt \\ &\le |f_n(c) - \lambda| + (b-a)\sup\{|f_n'(t) - g(t)| : t \in [a,b]\}. \end{aligned}$$

Si es $x < c$ se llega a la misma conclusión, pero en la desigualdad intermedia hay que cambiar $\int_c^x$ por $\int_x^c$. Por lo tanto,

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} \le |f_n(c) - \lambda| + (b-a)\sup\{|f_n'(t) - g(t)| : t \in [a,b]\}.$$

Por la hipótesis *c)* y como $\lambda = \lim_n f_n(c)$, se deduce que

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} \xrightarrow{n} 0,$$

es decir, la sucesión de funciones $(f_n)$ converge uniformemente a $f$ en $[a,b]$. $\square$

El lector puede enunciar y demostrar la traducción de este resultado a series de funciones.

**Nota.** En realidad, no hace falta que las funciones $f_n'$ sean continuas ([BARTLE-SHERBERT, teor. 7.2.3, págs. 322–323]).

## 10.3. Una condición suficiente para la convergencia uniforme de series

**Teorema 10.3.1 (criterio $M$ de Weierstrass).** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto para la que se puede encontrar una serie numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ de términos no negativos de manera que se cumple, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in S$.*

*Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $S$ y absolutamente en cada punto de $S$.*

*Demostración.* Dado $n \in \mathbb{N}$, sea

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

la suma parcial $n$-ésima de la serie. Tenemos que probar que la sucesión de funciones $(s_n)$ converge uniformemente en $S$, para lo que es suficiente demostrar que cumple la condición de Cauchy (proposición 10.2.3). Pero suponiendo que $m > n$, para cualquier $x \in S$ es

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, hay algún $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m > n > N(\varepsilon)$

$$\sum_{k=n+1}^{m} M_k \leq \varepsilon$$

(condición de Cauchy para una serie numérica convergente). Por lo tanto,

$$\sup\{|s_m(x) - s_n(x)| : x \in S\} \leq \varepsilon$$

siempre que $m > n > N(\varepsilon)$. De la proposición 10.2.3 se deduce que la serie converge uniformemente en $S$. La convergencia absoluta es una consecuencia inmediata de la desigualdad $|f_n(x)| \leq M_n$. $\square$

**Observación.** En el teorema 10.3.1, basta tener $|f_n(x)| \leq M_n$ desde un $n$ en adelante.

**Ejemplo.** La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ es uniformemente convergente en $[-1,1]$.