Ampliación de Cálculo

Examen de septiembre. /09/09 Grupos A, B y C

Ejercicio 1. Estudiar la convergencia puntual, uniforme y en media cuadrática de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

en el intervalo $[-a, a]$, con $0 < a \leq 1$.

Ejercicio 2.

1. Hallar la serie de Fourier de la función

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, \quad -\pi < x < \pi \\ f(x+2\pi) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Deducir el valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

(Nota: Se recuerda que $e^{\pi} - e^{-\pi} = 2\mathrm{senh}(\pi)$)

Ejercicio 3. Se consideran la siguientes funciones definidas en todo $\mathbb{R}$

$$g(x) = \mathrm{sen}(x)\chi_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(x) \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{t\cos(\frac{\pi}{2}t)}{1-t^2}\mathrm{sen}(tx)\,\mathrm{d}t.$$

Probar que ambas funciones son la misma.

(Nota: El Teorema de Inversión asegura que si $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de f, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{\omega t i}\,\mathrm{d}\omega = f(t).)$$

Ejercicio 4. Hallar una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' + 9y = 3\sec 3t.$$

Ejercicio 5. Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 5y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 11 \end{cases}$$

usando la transformada de Laplace.

EJERCICIO 1: SI x ESTÁ FIJO, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $x \neq \pm 1$,

(SUMA DE UNA SERIE GEOMÉTRICA). POR TANTO:

LÍMITE PUNTUAL: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{SI } x \in (-1,1) \\ \sum 1^n = \infty \text{ NO CONVERGE} & \text{SI } x = 1 \\ \sum (-1)^n \text{ NO CONVERGE} & \text{SI } x = -1 \end{cases}$

LÍMITE UNIFORME: LA SERIE DE POTENCIAS $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

TIENE RADIO DE CONVERGENCIA "1", POR LO TANTO SI $a \in (0,1)$, LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $[-a,a]$; SI $a = 1$ NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN $[-1,1]$ YA QUE NI SIQUIERA HAY CONVERGENCIA PUNTUAL

TAMPOCO HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN $(-1,1)$

YA QUE $\left| \frac{1}{1-x} - \sum_{n=1}^{N} x^n \right| \xrightarrow[x \to 1^-]{} \infty$, ASÍ NO ES POSIBLE QUE $\forall \varepsilon > 0$ EXISTA N_0 DE MODO QUE $\forall N \geq N_0$

$$\left| \frac{1}{1-x} - \sum_{n=1}^{N} x^n \right| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (-1,1)$$

CONVERGENCIA EN MEDIA CUADRÁTICA: SI $a \in (0,1)$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \longrightarrow \frac{1}{1-x}$ UNIFORMEMENTE EN $[-a,a]$

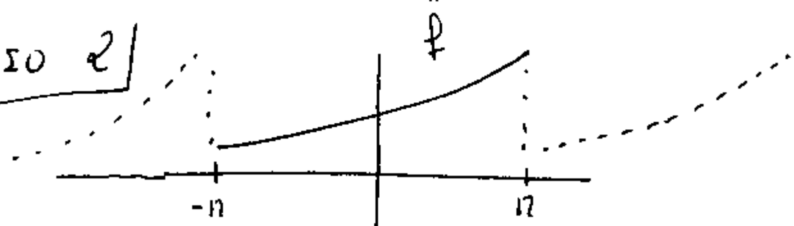
ASÍ, COMO LA CONVERGENCIA UNIFORME IMPLICA LA CONVERGENCIA EN MEDIA CUADRÁTICA, SE TIENE QUE $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ CONVERGE EN $\| \ \|_2$ A $\frac{1}{1-x}$ EN $L_2[-a,a]$, $a<1$.

SIN EMBARGO EN $L_2(-1,1)$ NO HAY CONVERGENCIA EN MEDIA CUADRÁTICA, YA QUE $\frac{1}{1-x}$ ES EL LÍMITE PUNTUAL DE LA SERIE Y SI $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$ CONVERGIERA EN $\| \ \|_2$ EN $L_2(-1,1)$ SE TENDRÍA QUE $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{\| \ \|_2} \frac{1}{1-x}$, PERO

$\frac{1}{1-x} \notin L_2[-1,1]$ YA QUE $\left\| \frac{1}{1-x} \right\|_2^2 = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 dx \geq$

$$\geq \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2} dx = \left. \frac{1}{1-x} \right|_0^1 = \infty.$$

EJERCICIO 2



f 2π- PERIÓDICA; NO ES NI PAR NI IMPAR

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t\,dt = \frac{1}{2\pi}\, e^t\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{senh}\pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos nt\,dt \underset{\text{PARTES}}{=} \frac{\operatorname{sen} nt}{\pi n} e^t\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nt$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nt\, e^t\,dt \underset{\text{PARTES}}{=} \frac{1}{n\pi}\frac{\cos nt}{n} e^t\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, e^t\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos nt\,dt \left[1 + \frac{1}{n^2}\right] = \frac{1}{n\pi}\left[\frac{\cos n\pi}{n} e^{\pi} - \frac{\cos n\pi\, e^{-\pi}}{n}\right]$$

ASÍ $$a_n = \frac{n^2}{n^2+1}\,\frac{\cos n\pi}{\pi n^2}\left[e^{\pi} - e^{-\pi}\right] = \frac{(-1)^n}{(n^2+1)\pi}\, 2\operatorname{senh}\pi$$

DEL MISMO MODO

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \operatorname{sen} nt\,dt \underset{\text{PARTES}}{=} -\frac{1}{\pi n}\cos nt\, e^t\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, e^t\,dt =$$

$$= \frac{-\cos n\pi}{\pi n}\left[e^{\pi} - e^{-\pi}\right] + \frac{1}{n}\, a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\, 2\operatorname{senh}\pi + \frac{(-1)^n\, 2\operatorname{senh}\pi}{n\pi(n^2+1)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n\pi}\, 2\operatorname{senh}\pi\left[-1 + \frac{1}{n^2+1}\right] = \frac{(-1)^n}{\pi n}\, 2\operatorname{senh}\pi\left[\frac{-n^2}{n^2+1}\right]$$

ASÍ LA SERIE DE FOURIER DE f SERÁ

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{senh}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+1)\pi}\, 2\operatorname{senh}\pi \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\, 2\operatorname{senh}\pi\left[\frac{n}{n^2+1}\right]\operatorname{sen} nx$$

$\forall x\in(-\pi,\pi)$, YA QUE f ES CONTINUA Y DERIVABLE EN $(-\pi,\pi)$. EN PARTICULAR PARA $x=0$, $f(0) = e^0 = 1 = \frac{1}{\pi}\operatorname{senh}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+1)\pi}\, 2\operatorname{senh}\pi.$

YA QUE $\operatorname{sen} 0 = 0$, DESPEJANDO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \left(1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{senh}\pi\right)\frac{\pi}{2\operatorname{senh}\pi} = \frac{\pi}{2\operatorname{senh}\pi} - \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 3º] SI $g(x) = \operatorname{sen} x \, \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}(x)$

SE TIENE QUE:

$$\hat{g}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\lambda x} dx =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos \lambda x \, dx - i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \lambda x \, dx$$

$$= -i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \lambda x \, dx \underset{\text{PARTES}}{=} i \cos x \operatorname{sen} \lambda x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - i\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos \lambda x \, dx =$$

YA QUE senx ES IMPAR Y $\cos \lambda x$ ES PAR

$$= -i\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos \lambda x \, dx \underset{\text{PARTES}}{=} -i\lambda \left[\operatorname{sen} x \cos \lambda x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \lambda x \, dx \right]$$

DESPEJANDO $(i\lambda^2 - i) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \lambda x = -i\lambda 2 \cos \frac{\lambda\pi}{2}$

ASI $-i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \lambda x \, dx = i \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} 2 \cos \frac{\lambda \pi}{2} = \hat{g}(\lambda)$.

AHORA APLICANDO EL TEOREMA DE INVERSION

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\lambda}{\lambda^2 - 1} 2 \cos \frac{\lambda \pi}{2} \cdot e^{i\lambda x} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \lambda \frac{\pi}{2} 2 \cos \lambda x + i^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} 2 \cos \frac{\lambda \pi}{2} \operatorname{sen} \lambda x \, d\lambda \right.$$

COMO $g(x) \in \mathbb{R}$, LA PARTE IMAGINARIA DEL COMPLEJO ANTERIOR DEBE SER NULA Y ASI

$$g(x) = \frac{i^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} 2 \cos \frac{\lambda \pi}{2} \operatorname{sen} \lambda x \, d\lambda \underset{i^2 = -1}{=}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) \operatorname{sen} \lambda x \, d\lambda. = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \cos\left(\lambda \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen} \lambda x \, d\lambda$$

YA QUE LA FUNCION $\frac{\lambda}{1-\lambda^2} \cos\left(\lambda \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen} \lambda x$ ES PAR

EJERCICIO 4: $y'' + 9y = 3\sec 3t = 3\dfrac{1}{\cos 3t}$

E. CARACTERÍSTICA $\lambda^2 + 9 = 0 \quad \lambda = \pm i3$

ASI $y(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \operatorname{sen} 3t$ SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUAC. HOMOGÉNEA

USAREMOS EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES PARA CALCULAR UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA ECUACIÓN <u>NO</u> HOMOGÉNEA

SEA $y(t) = C_1(t)\cos 3t + C_2(t)\operatorname{sen} 3t$

ASI $y'(t) = C_1'(t)\cos 3t + C_2'(t)\operatorname{sen} 3t - 3C_1(t)\operatorname{sen} 3t + 3C_2(t)\cos 3t$

SUPONIENDO QUE $\boxed{C_1'(t)\cos 3t + C_2'(t)\operatorname{sen} 3t = 0}$

$y''(t) = -9C_1(t)\cos 3t - 9C_2(t)\operatorname{sen} 3t - 3C_1'(t)\operatorname{sen} 3t + 3C_2'(t)\cos 3t$

Y ASI $y''(t) + 9y(t) = -3C_1'(t)\operatorname{sen} 3t + 3C_2'(t)\cos 3t = 3\dfrac{1}{\cos 3t}$

ASI TENEMOS EL SISTEMA
$$\begin{cases} C_1'(t)\cos 3t + C_2'(t)\operatorname{sen} 3t = 0 \\ -\cancel{3}C_1'(t)\operatorname{sen} 3t + \cancel{3}C_2'(t)\cos 3t = \cancel{3}\dfrac{1}{\cos 3t} \end{cases}$$

COMO $\begin{vmatrix} \cos 3t & \operatorname{sen} 3t \\ -\operatorname{sen} 3t & \cos 3t \end{vmatrix} = \cos^2 3t + \operatorname{sen}^2 3t = 1 \neq 0$ ESTE SISTEMA TIENE SOLUCIÓN ÚNICA, IGUAL A

$$C_1'(t) = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 3t \\ \dfrac{1}{\cos 3t} & \cos 3t \end{vmatrix} = -\frac{\operatorname{sen} 3t}{\cos 3t} \Rightarrow C_1(t) = \frac{1}{3}\ln\cos 3t$$

$$Y \quad C_2'(t) = \begin{vmatrix} \cos 3t & 0 \\ -\operatorname{sen} 3t & \dfrac{1}{\cos 3t} \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow C_2'(t) = t.$$

ASI $y(t) = \frac{1}{3}(\ln\cos 3t)\cdot\cos 3t + t\operatorname{sen} 3t$ ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA ECUACIÓN.

EJERCICIO 5:

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

$$y(0) = 3$$

$$y'(0) = 11$$

APLICANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE NOS QUEDA

$$\mathcal{L}y''(s) - 6\mathcal{L}y'(s) + 5\mathcal{L}y(s) = 0 \Rightarrow$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$\{s^2 \mathcal{L}y(s) - s\,y(0) - y'(0)] - 6[s\mathcal{L}y(s) - y(0)] + 5\mathcal{L}y(s) =$$

$$= \{s^2 - 6s - 5\}\mathcal{L}y(s) - 3s - 11 + 18 = 0$$

ASÍ $\mathcal{L}y(s) = \dfrac{3s-7}{s^2-6s+5} = \dfrac{3s-7}{(s-5)(s-1)} =$

DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

$$= \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s-1} =$$

DONDE

$$Bs - 5B + As - A = 3s - 7$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 3 \\ -5B - A = -7 \end{cases}$$ POR TANTO $B = 1$, $A = 2$

$$= \frac{2}{s-5} + \frac{1}{s-1}$$ POR TANTO, USANDO LAS TABLAS DE TRANSFORMADAS,

$$\boxed{y(t) = 2e^{5t} + e^{t}}$$