الف) به ازای هر وابستگی $C(i \to j) = \infty$
(یالی از i به j)

زیرا اگر ظرفیت $\|A, B\|$ (مقدار یک کات با افراز به (A,B)) محدود باشد (یعنی ∞ نباشد) بنابراین به ازای هر یال وابستگی $i \to j$، کارهای i و j در یک سمت این افراز قرار گرفته‌اند. بنابراین A می‌تواند یک پاسخ درست باشد. (با توجه به تعریف ظرفیت یک cut در سؤال داده شده)

ب) ادعا می‌کنیم انتخاب کارهای داخل A (اعضای V)

سود کلی $S - \|A,B\|$ را می‌دهد که S مجموع تمامی

سودهای کارهای سودده (profit > 0) هست و

منظور از $\|A,B\|$ ظرفیت یک cut به ۲ مجموعه A و B

می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که برای

ماکسیمم کردن $S - \|A,B\|$ (با توجه به ثابت بودن S)

باید $\|A,B\|$ را مینیمم کرد و این برابر همین است

که min-cut را حساب کنیم. که بنابر قضیه می‌دانیم

مقدار min-cut برابر با مقدار max-flow است.

اثبات ادعا: ۳ متغیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{cost}(V) = \sum_{i \in C} -P_i = \sum_{i \in V} \underbrace{C_{i \to t}}_{\text{ظرفیت یک یال}}$$

هزینه

$$\text{benefit}(V) = \sum_{j \in P} P_i = \sum_{j \in V} C_{s \to j}$$

عایدی

$$\text{profit}(V) = \sum_{i \in V} P_i \quad *$$

سود

$$\Rightarrow \text{profit}(V) = \text{benefit}(V) - \text{cost}(V)$$

بنابر تعریفی که از S ارائه دادیم:

$*$

$$S = \text{benefit}(A) + \text{benfit}(B)$$

(همان طور که گفتیم، چون cut(A,B)، ظرفیت

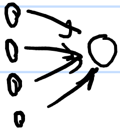
نامحدود ندارد، تنها یال های به شکل $S \to j$ و

$i \to t$ می توانند از cut عبور کنند)

با بر تعریف و انتخاب A به عنوان جواب:

$$\|A,B\| = Cost(A) + benefit(B)$$

*



*

$$\Rightarrow S - |A,B| =$$

*

$$benefit(A) + benfit(B) - cost(A) - benefit(B) =$$

$$benefit(A) - cost(A) = profit(S)$$

بنابراین ادعا ثابت شد.

عرفان مریان
۹۵۱۳۰۳۲