

دو گزاره زیر را در نظر بگیرید:

- تابع g عضو $O(h)$ است.
- تابع h عضو $O(g)$ است.

یک جفت تابع g و h پیدا کنید که هیچ کدام از دو گزاره فوق برقرار نباشد. جواب خود را اثبات کنید.

می‌دانیم که تابع g عضو $O(h)$ است اگر برای n های بزرگتر مساوی n_0 و $c > 0$ داشته باشیم:

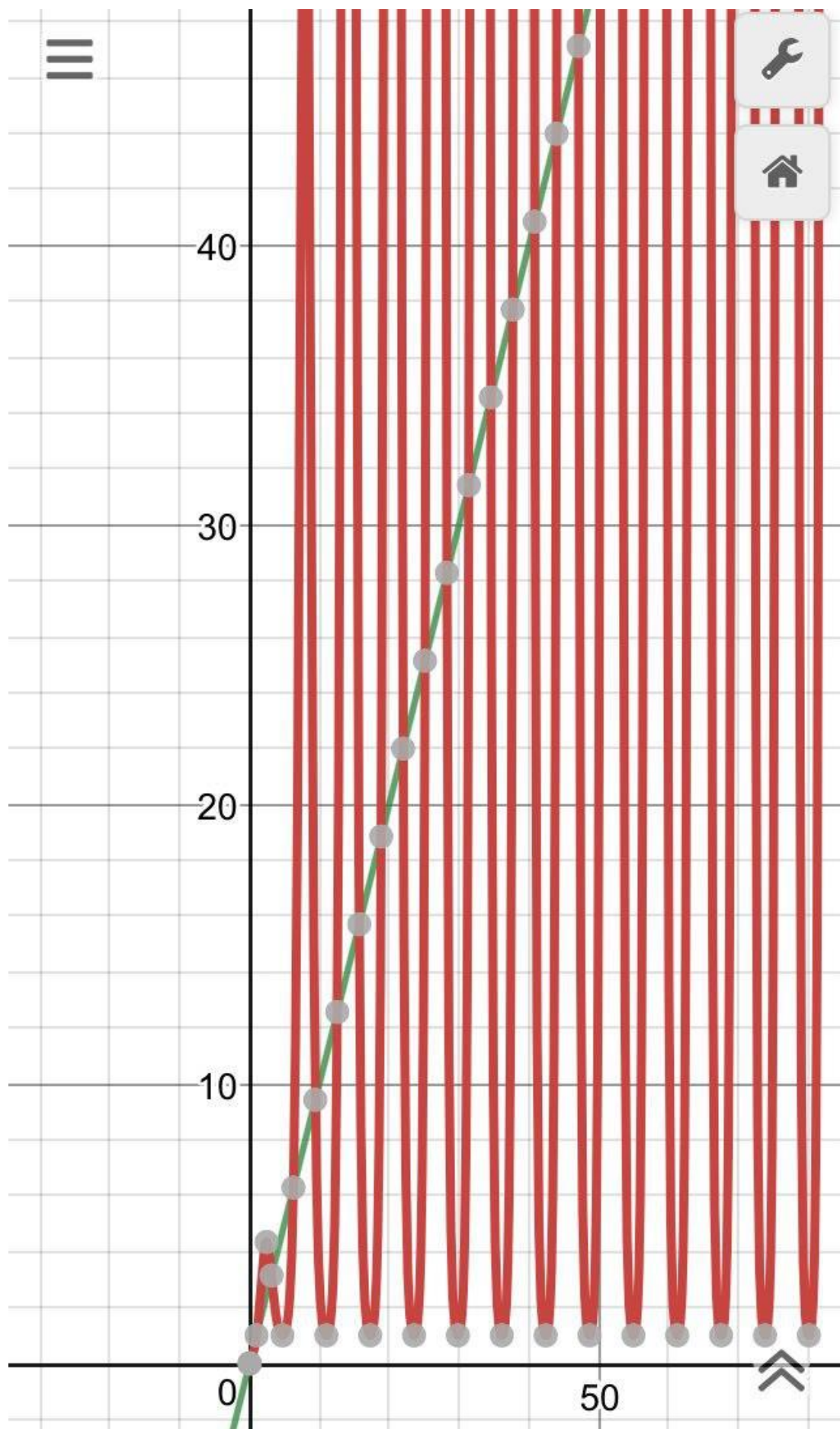
$$g(n) \leq c \cdot h(n)$$

یعنی در نمودار دو تابع، تابع $h(n)$ ضربدر c باید از یک جایی به بعد بالاتر از $g(n)$ قرار گیرد و این بالا بودن تا بی نهایت ادامه داشته باشد.

حال ما اگر دو تابع در نظر گیریم که در بعضی نقاط یکی از دیگری بالاتر باشد و در بعضی نقاط دیگری بالاتر باشد به جواب مسئله رسیده ایم.

گیریم: $g(n) = n$ و $h(n) = n^{(1+\sin(n))}$

نمودار این دو تابع به این صورت است:



می‌بینیم که این دو تابع بی نهایت نقطه تلاقی دارند و در بعضی نقاط g بالاتر است و در بعضی نقاط h .
حال اگر هر کدام از دو تابع در c نیز ضرب شوند برای n_0 های بزرگ باز هم به همین صورت است.
پس هیچ c مثبت پیدا نمی‌شود که برای n های بزرگتر مساوی n_0 ، $g(n) \leq c.h(n)$ یا
 $h(n) \leq c.g(n)$
پس نه h عضو $O(g)$ است و نه g عضو $h(n)$.