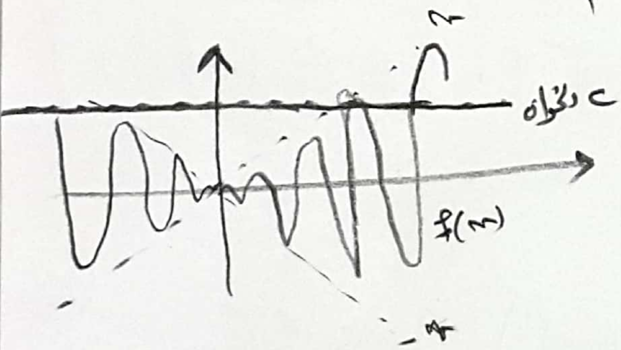
۱) فرض کنیم $f(n)=n\sin(n)$ و $g(n)=1$

برای اثبات $f(n)\neq O(g(n))$ فرض خلف می‌کنیم:

$$f(n)=O(g(n)) \Rightarrow \exists c>0 \quad \exists n_0>1 \quad \forall n\geq n_0$$

$$f(n)\leq c\cdot g(n) \Rightarrow n\sin n \leq c\cdot 1 = c$$

این رابطه همواره نادرست است زیرا کافی است به ازای c دلخواه مقادیر $n>c$ را در نظر بگیریم. اولین $\frac{k\pi}{2}$ پس از c (k فرد) مقدار $f(n)$ بیش از c خواهد شد.



برای اثبات $g(n)\neq O(f(n))$ فرض خلف می‌کنیم:

$$g(n)=O(f(n)) \Rightarrow \exists c>0 \quad \exists n_0>1 \quad \forall n\geq n_0$$

$$g(n)\leq c f(n) \Rightarrow 1\leq c n\sin n \Rightarrow \frac{1}{c}\leq n\sin n$$

مطابق قبل اولین $\frac{k\pi}{2}$ پس از $\frac{1}{c}$ $f(n)$ از آن بیشتر خواهد بود.

۲) a) براساس maste theorem

$$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=3 \end{array}\right\} \to f(n) \in O(n^{\log_3^3 - \varepsilon}) \xrightarrow{\varepsilon = \frac{1}{2}} \sqrt{n} \in O(n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n})$$

بنا براین

$$f(n) \in \Theta(n)$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=4 \end{array}\right\} \to \log_4^3 < 1 \Rightarrow n\log n \in \Omega(n^{\log_4^3 + \varepsilon})$$

I

$$\to 3\left(\frac{n}{4}\log\frac{n}{4}\right) < c\, n\log n \Rightarrow \frac{3}{4}(\log n - 2) < c\log n$$

$$\longrightarrow c = \frac{3}{4}$$ به ازای برقرار است $$\xrightarrow[c<1]{master} T(n) \in \Theta(n\log n)$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} a=4 \\ b=2 \end{array}\right\} \log_2^4 = 2 \qquad n^2 \in \Theta(n^2) \xrightarrow{master}$$

$$T(n) \in \Theta(n^2 \log n)$$

d) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log^2 n$

$= 4\left(4T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n^2}{4}\log^2\frac{n}{2}\right) + n^2\log^2 n$

$= 4^i\, T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2 \sum_{k=0}^{i} \underbrace{\left(\log\frac{n}{2^k}\right)^2}_{\underbrace{(\log n - k)^2}_{\log^2 n - 2k\log(n) + k^2}}$ $\qquad \xrightarrow{\frac{n}{2^i}=1 \Rightarrow i=\log(n)}$

$= 2n\,T(1) + n^2\left(\log(n)\log^2(n) + \underbrace{\sum k^2}_{\frac{\log(n)\log(n+1)(2\log(n)+1)}{6}} - \overbrace{\sum k\log(n)}^{\log(n)\times\frac{\log(n)\times(\log(n)-1)}{2}}\right.$

$= O\left(n^2\log^3(n)\right)$

e) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log n} = 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n/2}{\log\frac{n}{2}}\right) + \frac{n}{\log n} = \dots = 2^i\,T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \sum_{k=0}^{i}\frac{n}{\log\frac{n}{2^k}}$

$\xrightarrow{i=\log n} 2^{\log_2 n}\, O(1) + \sum_{k=0}^{\log n - 1}\frac{n}{\log\frac{n}{2^k}} =$

Scanned by CamScanner

$$= n + n \sum \frac{1}{\log \frac{n}{2^k}} \Rightarrow T(n) = n + n \log_2(\log n)$$

$$= O(n\log(\log n))$$

$$\sum_{i=1} \frac{1}{\log 2^i}$$

$$\sum_{i=1}^{\log n} \frac{1}{i} \xrightarrow[\text{مقادیر زیاد } (n \to \infty)]{\text{به ازای}} \simeq \log n \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

f) $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1 = T(n^{\frac{1}{4}}) + 1 + 1 = \dots$

$= T(n^{\frac{1}{2^i}}) + i$ — برای $T(0)$ و $T(1)$ جواب ندارد $\Rightarrow n^{\frac{1}{2^i}} = 2$

$$\Rightarrow \frac{\log n}{2^i} = \log 2 \Rightarrow i = \log(\log(n))$$

$$= T(1) + \log(\log(n)) = O(\log(\log(n)))$$

Scanned by CamScanner