۹۵۱۳۰۳۲ ریاضی دان عاشق

همان طور که در کلاس یاد گرفتیم DAG را به صورت توپولوژیکال مرتب کرده $(O(V+E))$ و چک می‌کنیم که آیا رئوس مرتب شده هم متصل هستند یا خیر.

در صورت متصل نبودن سوال، جواب ندارد و یعنی مسیری وجود ندارد و در صورت متصل بودن، رئوس مرتب شده پاسخ ما خواهند بود.

```
def check (list v):
    foreach vi in V except last one:
        if not is_connected(vi, vi+1):
            return false
    return true
```

V بار اجرا می‌شود

اگر متصل بودن را در گراف به ماتریس مجاورت باشد در $O(1)$ جواب می‌دهد.

در غیر این صورت در $O(\deg v_i)$

بنابراین این تابع در $O(V)$ یا $O(E)$ پاسخ می‌دهد.

چون خود مرتب‌سازی در $O(E+V)$ و این تابع

در $O(V)$ به پاسخ می‌رسد بنابراین سوال را این سوال

در زمان خطی پاسخ داد.

چون به اندازه حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی

گراف به حافظه‌ی بیشتری نیاز نداریم بنابراین

حافظه‌ی این راه حل برابر با $O(V+E)$ خواهد بود

درستی: ← می‌دانیم که مرتب‌سازی توپولوژیکال

یک مرتب‌سازی ارائه می‌دهد که در صورتی که v قبل از

w آمده باشد بنابراین یا این ۲ به هم وابسته نیستند

(یعنی مسیری از v به w وجود ندارد) یا مسیری

وجود دارد که از v به w می‌رود. (در کلاس

اثبات شده است.) بنابراین درصورتی که رئوس

مرتب شده، متوالیاً به هم متصل باشند مسیری ارائه

که الگوریتم این را تضمین می‌کند،

شده است که همیلتونی است.

→ : مسیر همیلتنی وجود دارد ⇐ مرتب سازی توپولوژیکال

پیوسته یکتا وجود دارد.

فرض خلف : ۱) مرتب سازی توپولوژیکال وجود ندارد.

۲) مرتب سازی توپولوژیکال پیوسته وجود ندارد.

۳) " " " " یکتا نیست.

اثبات

تناقض در صورت ۱ : از فرض می‌دانیم مسیر همیلتنی وجود دارد

و در مسیر همیلتنی هر v_i و v_{i+1} پشت سرهم ، به هم

متصل هستند (یعنی یال (v_i, v_{i+1}) وجود دارد) بنابراین

مسیر همیلتنی مرتب شده‌ی توپولوژیکالی است. بنابراین با ۱

در تناقض است.

اثبات تناقض در صورت ۲: مانند مورد قبل (v_i, v_{i+1}) به هم

متصل هستند بنابراین مسیر همیلتنی که در توپولوژیکال بود هست پیوسته

است بنابراین مسیری وجود دارد که با ۲ در تناقض است.

اثبات تناقض در صورت ۳ : اگر ۲ مسیر مرتب شده ی پیوسته

وجود داشته باشد بنابراین ۲ راس v و w وجود دارد که

در یک مسیر v قبل از w وجود دارد (بنابراین مسیری

از v به w وجود دارد) و در مسیر دیگر w قبل از v است (

بنابراین مسیری از w به v وجود دارد) که در این صورت

با توجه به وجود مسیر از v به w و از w به v یک دور وجود

دارد که با فرض DAG بودن در است .