

به نام خدا



## پروژه اول درس جبر خطی

مدرس: دکتر محمدسعید سرافراز

نفیسه مقنی زاده

دانشجوی کارشناسی مهندسی برق دانشگاه تهران

[nmoghazadeh@gmail.com](mailto:nmoghazadeh@gmail.com)

عرفان عسگری

دانشجوی کارشناسی مهندسی برق دانشگاه تهران

[erfanasgari21@gmail.com](mailto:erfanasgari21@gmail.com)

فردین عباسی

دانشجوی کارشناسی مهندسی برق دانشگاه تهران

[fardinabbasi1381@gmail.com](mailto:fardinabbasi1381@gmail.com)

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

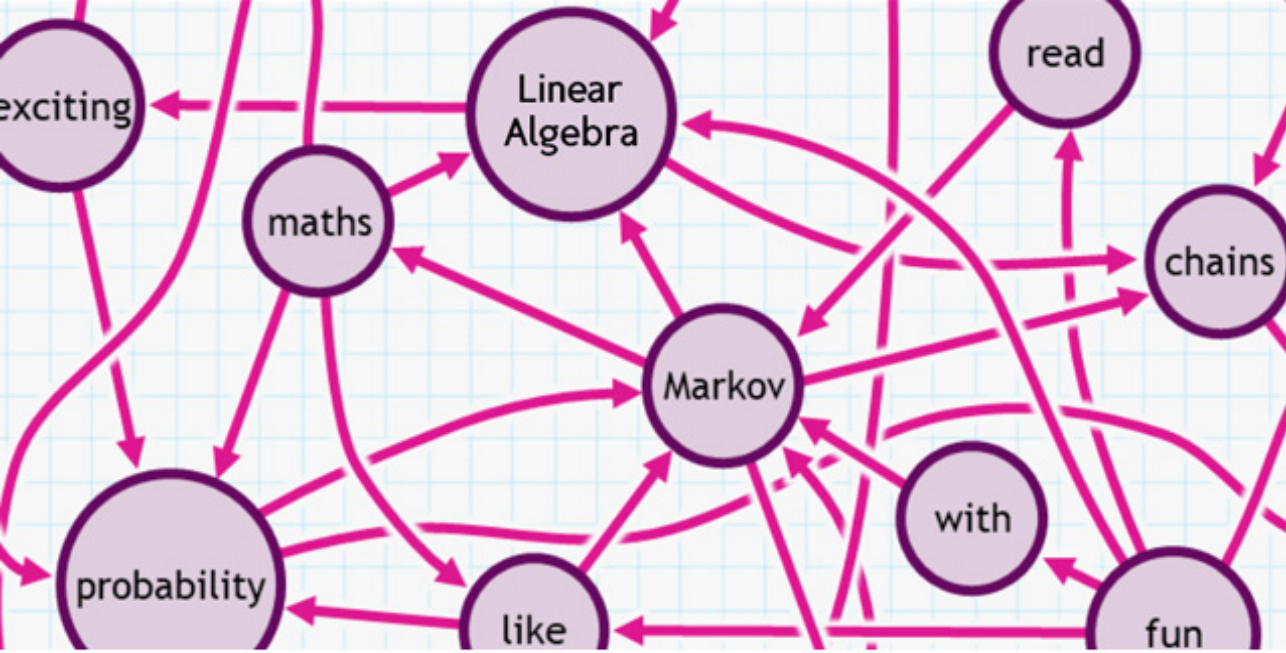
دانشکده فنی

دانشگاه تهران

بهار ۱۴۰۳

## فهرست مطالب

۳	شرح پروژه
۴	آشنایی با زنجیره های مارکوف
۶	آشنایی با چند روش عددی
۸	تحلیل چرخه تجاری
۱۲	نکات کلی
۱۴	منابع



فصل ۱

## شرح پروژه

در این پروژه سعی شده است، به جنبه های مختلف کاربرد جبر خطی در زنجیره های مارکوف پرداخته شود. امید است با انجام این پروژه دانش قبلی شما تثبیت شود و با مفاهیم جدید در جبر خطی آشنا شوید.

عکس از: [Chalkdust Magazine](#)

## آشنایی با زنجیره های مارکوف

در یک کشور فرضی، با گذشت هر دهه، 5 درصد از روستاییان به شهرها مهاجرت کرده و 0.1 درصد از شهرنشینان به روستاها مهاجرت معکوس می نمایند.

۱. رابطه جبری سهم جمعیت دهه آینده شهرها ( $C_{t+1}$ ) و روستاها ( $v_{t+1}$ ) را بر حسب سهم جمعیت فعلی شهرها ( $C_t$ ) و روستاها ( $v_t$ ) بنویسید. (۲ نمره)

۲. با تعریف بردار توزیع جمعیت  $p_t = \begin{pmatrix} C_t \\ v_t \end{pmatrix}$  رابطه  $p_{t+1}$  را به صورت ضرب ماتریسی بازنویسی کنید. (۲ نمره)

۳. با فرض اینکه بردار  $p_0$  توزیع جمعیت در مبدا فرضی زمان است و بردار  $p_t$  توزیع جمعیت در  $t$  دهه بعد را نشان می دهد، رابطه  $p_t$  بر حسب  $p_0$  چیست؟ (۲ نمره)

به ماتریس هایی مثل ماتریس ضرایب این مسئله، که مربعی بوده و بیانگر احتمال می باشد، **ماتریس مارکوف** گفته می شود.

۴. با توجه به مفهوم ماتریس مارکوف و خواص ماتریسی که در مسئله قبل تشکیل دادید، کدام یک از ماتریس های زیر، یک ماتریس مارکوف می باشد؟ دو ویژگی ماتریس های مارکوف را با توجه به اصول احتمال<sup>۱</sup> بیان کنید. (۶ نمره) (Chapter 10.3, Strang(2016b))

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 & 1.2 \\ 0.7 & 0.2 & -0.4 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0.65 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

۵. با توجه به دو ویژگی ماتریس های مارکوف، نشان دهید: (۱۰ نمره)

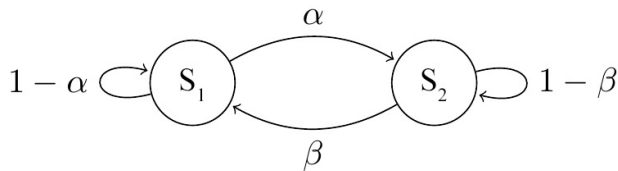
الف) هر ماتریس مارکوف دارای یک مقدار ویژه برابر ۱ می باشد.

ب) مقادیر ویژه یک ماتریس مارکوف بزرگتر از ۱ نیست. (راهنمایی: مقدار درایه های  $A^T v$  از کدام درایه  $v$  نمی تواند بزرگتر باشد؟)

<sup>1</sup>Probability Axioms

**بردار احتمال (Stochastic Vector)** یک توزیع احتمال گسسته را می‌توان به کمک یک بردار که درایه های آن نامنفی بوده و مجموع آنها ۱ باشد نشان داد. هر درایه از این بردار مبین احتمال یکی از پیشامدهای ممکن با ترتیب قراردادی می‌باشد. به چنین برداری، بردار احتمال گفته می‌شود.

شکل زیر یک **زنجیره مارکوف**<sup>۲</sup> را نشان می‌دهد که دارای دو حالت<sup>۳</sup> می‌باشد. احتمال اولیه قرارگیری در هریک از حالات را با بردار احتمال  $p_0$  نشان می‌دهیم و به آن توزیع حالت اولیه<sup>۴</sup> می‌گوییم. در یک زنجیره مارکوف، احتمال انتقال<sup>۵</sup> به هریک از حالات تنها وابسته به حالت کنونی است. بنابراین زنجیره زیر را می‌توان مشابه سوال ۱ با یک ماتریس مارکوف ۲ در ۲ توصیف کرد.



در این قسمت، تعریف رسمی تری برای بردار احتمال و ماتریس انتقال حالت که یک ماتریس مارکوف می‌باشد ارائه شده است:

$$p_t = \begin{pmatrix} Pr\{S_t = 1\} \\ Pr\{S_t = 2\} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} Pr\{S_t = 1 | S_{t-1} = 1\} & Pr\{S_t = 1 | S_{t-1} = 2\} \\ Pr\{S_t = 2 | S_{t-1} = 1\} & Pr\{S_t = 2 | S_{t-1} = 2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \beta \\ \alpha & 1 - \beta \end{bmatrix}$$

چنانچه توزیع حالت اولیه به صورت  $p_0 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}$  داده شود به این معنی است که در ابتدا به احتمال 0.3 در حالت  $S_1$  و به احتمال 0.7 در حالت  $S_2$  قرار داریم. این توزیع احتمال در لحظه بعدی به شکل  $p_1 = Ap_t$  تغییر می‌کند و مبین احتمال بودن در هر یک از حالات در لحظه بعد است. مطالعه اختیاری این **کتابچه تعاملی** می‌تواند در درک مفهوم زنجیره های مارکوف مفید باشد.

<sup>۲</sup>Markov Chain

<sup>۳</sup>State

<sup>۴</sup>Initial State Distribution

<sup>۵</sup>Transition Probability

## آشنایی با چند روش عددی

۶. [پایاده سازی] برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}$ ، بردارهای  $w, Aw, A^2w, A^3w, \dots, A^{10}w$  را در ازای سه مقدار  $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ ،  $w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  و  $w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  به صورت نقطه‌ای در سه نمودار مجزا رسم کنید. همچنین مقادیر و بردارهای ویژه این ماتریس را به کمک توابع آماده بیابید و راستای بردارهای ویژه را به صورت خط در این نمودارها نشان دهید.

با توجه به نمودارها، بردار  $A^N w$  با بزرگ شدن مقدار  $N$  به چه راستایی میل می‌کند؟ (۸ نمره)

۷. با تجزیه بردار فرضی  $v$  در راستای بردارهای ویژه، رفتار مشاهده شده در سوال قبل را توجیه کنید و یک حالت استثناء برای آن بیابید. (۵ نمره)

۸. [پایاده سازی] با توجه به نتیجه سوال قبل، روشی برای یافتن بردارویژه و مقدارویژه یک ماتریس با تکرار ضرب ماتریسی پیشنهاد کنید. این روش تنها کدام یک از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را می‌یابد؟ تابعی بنویسید که با گرفتن یک ماتریس و تعداد تکرار این عملیات به عنوان ورودی، با روش پیشنهاد شده بردار ویژه و مقدار ویژه مربوطه را یافته و بازگرداند. تابع خود را آزمایش کنید و نتیجه را با توابع آماده مقایسه کنید. (۱۰ نمره)

تابع شما نباید در ازای مقادیر خیلی بزرگ یا کوچک برای تعداد تکرار یا مقدار ویژه دچار ناپایداری عددی شود.

۹. چنانچه مجموعه  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  و  $\{v_1, \dots, v_n\}$  به ترتیب مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس  $A$  باشند، مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس های زیر را بیابید: (۵ نمره)

$$A - \mu I \quad (\text{الف } A^{-1} \text{ ب})$$

۱۰. [پایاده سازی] درباره روش تکرار معکوس<sup>۶</sup> که روشی برای یافتن مقادیر و بردارهای ویژه یک ماتریس است تحقیق کرده و کارکرد آن را با کمک دو قضیه سوال قبل توضیح دهید. این روش را در قالب تابعی با فرض گرفتن مقدار شیفت در ورودی پایاده سازی کنید این روش چگونه محدودیت روش قبل که تکرار توان نام دارد را برطرف کرده است؟ (۱۲ نمره) (Chapter 11.3, Strang(2016b) 🔗)

<sup>۶</sup>Inverse Iteration Method

۱۱. در شرایطی که فرمول بندی یک مسئله احتمالاتی پیچیده باشد یا برخی مقادیر نامشخص باشند، روش **Monte Carlo Estimation** یا تخمین به کمک آزمایش و نمونه گیری می تواند در بدست آوردن برخی متغیرها مفید باشد. با مطالعه این **کتابچه تعاملی** کاربرد استفاده از این روش در تخمین عدد  $\pi$  را به اختصار توضیح دهید. (۴ نمره) (Chapter 12.1, Strang(2016b)↔)

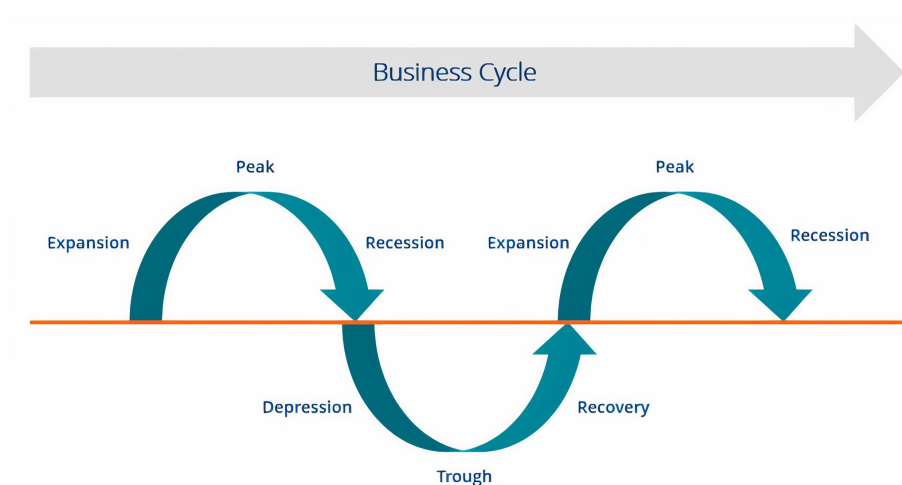
۱۲. **توزیع حالت ماندگار**<sup>۷</sup> در یک زنجیره مارکوف، برداری است که بردار توزیع احتمال در  $t \rightarrow \infty$  به آن میل می کند. با به کارگیری آنچه از روش Monte Carlo آموختید، روشی را پیشنهاد دهید که می توان با استفاده از شبیه سازی و نمونه گیری، توزیع حالت ماندگار در یک زنجیره مارکوف را تخمین زد. (۸ نمره)

در روش پیشنهادی نباید از ضرب ماتریسی استفاده کنید و فقط مجاز به نمونه گیری<sup>۸</sup> از توزیع های احتمال هستید.



## تحلیل چرخه تجاری

چرخه تجاری<sup>۹</sup> یکی از سرفصل‌های مهم در اقتصاد کلان است. چرخه تجاری که به طور مداوم در اقتصاد‌های سراسر جهان تکرار می‌شود، به مجموعه‌ای از مراحل در اقتصاد که با انقباض و انقباض همراه است، اشاره دارد. دولت‌ها با درک مکانیسم‌های مختلف این چرخه می‌توانند تصمیمات سیاسی بهتری بگیرند.



هر چرخه تجاری در طول عمر خود ۴ حالت مشخص زیر را طی می‌کند:

**انبساط یا شکوفایی (Expansion/Recovery):** شکوفایی یا انبساط که مطلوب ترین حالت اقتصادی می‌باشد، دوره رونق کسب و کارها است.

**اوج (Peak):** زمانی که پارامترهای اقتصادی بیش از حد افزایش یا کاهش یابد، اقتصاد شروع به رشد خارج از کنترل می‌کند. این رشد می‌تواند تعادل اقتصاد را برهم بزند. این نقطه عطفی است که در آن جایی برای رشد باقی نمانده است و حالت رکود یا انقباض در راه است.

<sup>۹</sup> Business Cycle



**رکود یا انقباض (Recession/Depression):** حالت انقباض با کاهش فعالیت های اقتصادی همراه است. در طول این حالت آمار بیکاری معمولاً افزایش می یابد، سهام نزولی می شود و رشد تولید ناخالص به زیر ۲ درصد افت می کند.

**قعر (Trough):** حالت قعر دقیقاً نقطه مقابل اوج است. چرخه تجاری زمانی به نقطه قعر می رسد که رکود به پایان رسیده باشد و چرخه شروع به بازگشت به شکوفایی بکند.

در این پروژه، برای سادگی بیشتر، چرخه را دارای سه حالت در نظر می گیریم و از حالت بین اوج و قعر، به عنوان حالت **میانگین** یاد می کنیم.

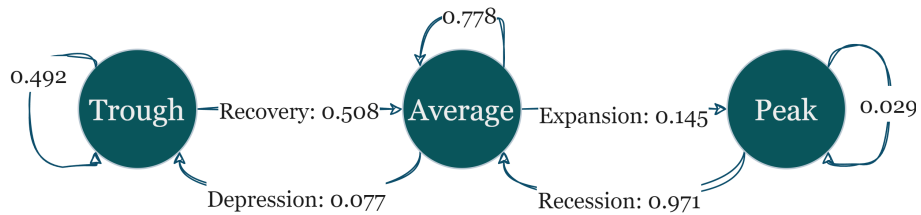


### The Trading Game

چرخه ها با عناوین مختلف اما مکانیسم مشابه در تمامی حوزه های اقتصادی مشاهده می شود! به عنوان مثال در اقتصاد خرد هنگام معرفی یک محصول به بازار چرخه مشابهی به نام چرخه عمر محصول<sup>a</sup> طی می شود. همچنین در بازار های سهام نیز رفتار مشابهی را می توان یافت؛ حال با دانستن این موضوع سعی کنید بیشترین سود را در **شبیه سازی بازار سهام** بدست آورید!

Product life cycle<sup>a</sup>

گراف زنجیره مارکوف چرخه تجاری یکی از کشورها در ادامه پیوست شده است. در هر ماه احتمال انتقال از هر حالت به حالت دیگر توسط یک پیکان نمایش داده شده است. بدیهی است این احتمال وجود دارد که در ماه آتی مجدداً در حالت فعلی بمانیم.



۱۳. ماتریس انتقال حالت را از گراف بالا استخراج کنید. (۵ نمره)

$$A = \begin{pmatrix} & \backslash & Trough & Average & Peak \\ Trough & ? & ? & ? \\ Average & ? & ? & ? \\ Peak & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

۱۴. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این ماتریس مارکوف را بیابید. (۵ نمره)

۱۵. [پایه سازی] اگر بر اساس سیاست های فعلی دولت، بردار توزیع حالت اولیه

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

باشد. با ۱۰۰۰ بار نمونه گیری از این توزیع، یک مجموعه نمونه برای این ماه بسازید. با فرض حفظ سیاست های فعلی دولت در بلند مدت، می خواهیم حالت ماه های آتی را پیش بینی کنیم. با آنچه از روش Monte Carlo Estimation آموختید، با استفاده از این نمونه ها، بردار توزیع حالت را برای ۶، ۱۲، ۷۲ و ۱۲۰ ماه آینده بیابید. (۱۵ نمره)

۱۶. [پایه سازی] یکی از ویژگی های جالب زنجیره های مارکوف این است که بدون نیاز به شبیه سازی های آماری، صرفاً با داشتن ماتریس مارکوف آن می توان توزیع زمان های آینده را پیش بینی کرد. دولت به

ازای پیروی از ۳ سیاست مختلف ممکن است برای این ماه دارای توزیع حالت های زیر باشد. با استفاده از ضرب ماتریسی نتیجه شروع از هر یک از سیاست های زیر را در بازه ۲۴ ماه آینده بررسی محاسبه کنید.

$$p_a = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix} p_b = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{pmatrix} p_c = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.15 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

نمودار نقطه ای <sup>۱۰</sup> توزیع احتمال در هر ماه را به ازای هر یک از سیاست ها در یک نمودار رسم کنید.

این نمودار ۳ بعدی است و هر محور آن احتمال هر حالت است. (۱۲ نمره)

نمودار در ابعاد کافی با تمامی جزئیات اعم از عنوان <sup>۱۱</sup>، نام محور ها و راهنما <sup>۱۲</sup> ترسیم شود و از زوایا و بزرگنمایی های مختلف نسبت به نقطه نهایی تصویر برداری شود و در گزارش آورده شود.

۱۷. بردار احتمال بدست آمده در بلندمدت، توزیع حالت ماندگار نام دارد. با توجه به نتایج، آیا توزیع حالت ماه ابتدایی، تاثیری بر توزیع حالت ماندگار دارد؟ (۳ نمره)

۱۸. با استفاده از آنچه درباره مقادیر ویژه ماتریس های مارکوف و روش تکرار توان آموختید، ارتباط بردار توزیع حالت ماندگار را با مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس انتقال حالت بیان کنید. (۴ نمره)

۱۹. یک بیان دیگر برای توزیع حالت ماندگار، توزیعی است که چنانچه فرآیند روند طبیعی خود را طی کند از آن خارج نمی گردد و در زمان های بعدی نیز در همان توزیع باقی می ماند یا به عبارت دیگر:  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{t+1} = p_t$  با توجه به این تعریف و تساوی جبری سوال ۲، دستگاه معادلات یافتن توزیع حالت ماندگار  $p_{ss}$  را بر حسب ماتریس مارکوف حاکم بر زنجیره به فرمت استاندارد ( $Ax = b$ ) تشکیل دهید و توضیح دهید چرا پاسخ یکتای این معادله را مستقیم نمی توان یافت؟ (۵ نمره)

۲۰. [پایه سازی] چه فرضی درباره مجموع درایه های  $p_{ss}$  وجود دارد که در نوشتار قبل لحاظ نشده بود؟ با اضافه کردن این فرض به عنوان یک معادله جدید به دستگاه معادلات، ماتریس ضرایب و معلومات را بازنویسی کنید و با استفاده از توابع آماده حل دستگاه معادلات، جواب آن را بیابید و با نتیجه سوال ۱۴ مقایسه کنید. (۷ نمره)

Scatter Plot<sup>۱۰</sup>Title<sup>۱۱</sup>Legend<sup>۱۲</sup>



فصل ۲

## نکات کلی

لطفا قبل از بارگذاری به موارد زیر توجه نمایید، در صورت عدم رعایت هر یک از موارد زیر پروژه شما تصحیح نخواهد شد.

عکس از: [istockphoto](#)

مجموع بارم پروژه از ۱۳۰ نمره می‌باشد که ۳۰ نمره از آن به صورت امتیازی در نظر گرفته شده است.

هیچگونه شباهتی در انجام پروژه بین افراد مختلف پذیرفته نمی‌شود. در صورت کشف هر گونه تقلب مطابق قوانین درس با افراد خاطی برخورد خواهد شد.

گزارش شما مهم ترین معیار ارزیابی خواهد بود؛ در نتیجه لطفا زمان کافی را برای رسم جامع نمودارها و گزارش نتایج خواسته شده اختصاص دهید.

کد پروژه باید به زبان های Python و یا MATLAB نوشته شود. کد Python حتما به فرمت ipynb و کد MATLAB حتما در محیط MATLAB Live Editor تحویل داده شود.

کد پروژه به همراه گزارش آن به صورت یک فایل تجمیع و با نام `P1__<LastName>__<StdID>.zip` ارسال گردد.

استفاده از مراجع با ارجاع به آنها بلامانع می باشد.

مهلت تحویل پروژه تا ۱۴۰۳/۰۳/۰۴ می باشد و امکان ارسال با تاخیر وجود ندارد!

پس از مطالعه کامل پروژه، در صورت ابهام پیشنهاد می شود از طریق تالار گفتگوی صفحه درس و یا گروه مجازی درس سوال خود را مطرح کنید، در غیر اینصورت با دستیاران آموزشی پروژه، [عرفان عسگری](#) یا [فردین عباسی](#) در ارتباط باشید.



فصل ۳

## منابع

در این بخش منابعی که در طراحی پروژه به کار گرفته شده است شرح داده شده است.

عکس از: [shutterstock](#)

Ⓐ Strang G. Introduction to Linear Algebra. Wellesley-Cambridge Press; 2016.

Ⓐ Team, C. (2023, November 22). Business cycle. [Corporate Finance Institute](#).

Ⓐ [Explorable explanations](#). (n.d.).

Ⓐ OpenBookshelf. [PersianTextbookTemplate](#).