



تمرین دوم درس مدل های مولد عمیق

دستیاران آموزشی:

محمد جواد عباسی

محمد مهدی مهمانچی

## سوال اول – ۳۰ نمره

الف) (۱۰ نمره)

فرض کنید توزیع های  $p(z)$  و  $q(z|x)$  به صورت زیر تعریف شوند که در آن  $\mu$  و  $\delta$  به فضای  $\mathcal{R}^k$  تعلق دارند.

$$q(z|x) = \mathcal{N}(z; \mu(x), \text{diag}(\sigma^2(x)))$$

$$p(z) = \mathcal{N}(z; 0, I)$$

ثابت کنید فاصله ی KL بین دو توزیع  $q(z|x)$  و  $p(z)$  به صورت زیر می باشد:

$$\mathcal{D}(q(z|x) \parallel p(z)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (\sigma_i^2(x) + \mu(x)_i^2 - 1 - \log \sigma_i^2(x))$$

ب) (۱۰ نمره)

اگرچه ELBO به عنوان کران پایین log-likelihood در نظر گرفته می شود، اما در مواقعی که  $q_\phi(z|x)$  تقریب ضعیفی از  $p_\theta(z|x)$  باشد امکان دارد کران مناسبی نباشد. در نتیجه کران پایین محکم تری تحت عنوان IWAE<sup>۱</sup> به صورت زیر ارائه شده است. اثبات کنید که کران پایین IWAE، یک کران پایین معتبر برای  $\log p_\theta(x)$  یا log-likelihood است.

$$\mathcal{L}_m(x; \theta, \phi) = \mathbb{E}_{z^{(1)}, \dots, z^{(m)} \sim q_\phi(z|x)} \left( \log \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{p_\theta(x, z^{(i)})}{q_\phi(z^{(i)}|x)} \right)$$

در رابطه ی بالا،  $z^{(i)}$  ها m نمونه یا sample از توزیع  $q_\phi(z|x)$  می باشند.

ج) (۵ نمره)

چالش Posterior Collapse در VAE چیست و دلیل آن را توضیح دهید؟ چگونه می توان با آن مقابله کرد؟

د) (۵ نمره – امتیازی)

ثابت کنید:  $\log p_\theta(x) \geq ELBO(x; \theta, \phi) = E_{q_\phi(z|x)} [\log p_\theta(x|z)] - KL(q_\phi(z|x) \parallel p(z))$

برای اثبات خود از توضیحات لازم و کافی استفاده کنید.

<sup>1</sup> Importance Weighted Autoencoder (IWAE)

مقدمه بخش پیاده‌سازی:

در این تمرین ما از کتابخانه‌ی PyTorch برای پیاده‌سازی VAE و یادگیری یک مدل احتمالاتی از مجموعه داده ارقام دست‌نویس (MNIST) استفاده خواهیم کرد. فرض کنید یک توالی از پیکسل‌های باینری  $x \in \{0,1\}^d$  داریم و  $z \in R^k$  نشان دهنده متغیرهای نهان (latent variable) باشد. هدف ما یادگیری یک مدل متغیر نهان  $p_\theta(x)$  برای توزیع داده‌های با ابعاد بالا  $p_{data}(x)$  است. مدل VAE یک مدل متغیر نهان است که احتمال زیر را یاد می‌گیرد:

$$p_\theta(x) = \int p(z)p_\theta(x|z)dz$$

به صوت خاص، VAE توسط مدل مولد زیر تعریف میشود:

$$p(z) = \mathcal{N}(z|0, I)$$

$$p_\theta(x|z) = \text{Bern}(x|f_\theta(z))$$

به بیانی دیگر، فرض می‌کنیم که متغیرهای نهان  $z$  از یک توزیع نرمال استاندارد ( $\mathcal{N}(z|0, I)$ ) نمونه‌برداری شده‌اند. سپس این متغیرها از کدگذار<sup>۳</sup> شبکه عصبی  $f_\theta(\cdot)$  عبور داده می‌شوند تا پارامترهای  $d$  متغیر تصادفی برنولی که پیکسل‌های هر عکس را مدل می‌کنند به دست آیند.

با وجود آنکه ما علاقه‌مند به بیشینه کردن درست‌نمایی حاشیه ای ( $p_\theta(x)$ ) هستیم، اما حساب کردن مقدار  $\int p(z)p_\theta(x|z)dz$  به دلیل نیاز به انتگرال‌گیری روی تمام مقادیر ممکن  $z$  عملی نمی‌باشد. برای حل این مشکل، یک تخمین Variational به مقدار posterior واقعی می‌زنیم و amortized inference به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$q_\phi(z|x) = \mathcal{N}\left(z|\mu_\phi(x), \text{diag}\left(\sigma_\phi^2(x)\right)\right)$$

<sup>3</sup> decoder

به صورت خاص، ما هر عکس  $x$  را از یک شبکه عصبی رد میکنیم که خروجی آن میانگین  $\mu_\phi$  و کواریانس قطری  $diag(\sigma_\phi^2(x))$  برای یک توزیع نرمال چند متغیره است که خود تخمینی از توزیع روی متغیرهای نهان  $z$  با توجه به  $x$  است.

برای حل این سوال نوت بوکی با نام VAE.ipynb آماده شده است و شما تنها باید قسمت‌های مربوط به هر سوال را در بخش مربوطه (قسمت‌هایی که در نوت بوک با TODO مشخص شده اند) پیاده کنید.

**نکته مهم:** هیچ الزامی در استفاده از فایل VAE.ipynb یا استفاده از کتابخانه‌ی PyTorch برای پیاده‌سازی این سوال وجود نداشته و این فایل تنها به منظور راحتی شما در امر پیاده‌سازی فراهم شده است.

(الف) (۵ نمره)

کد مربوط به Reparameterization Trick را در تابع sample\_gaussian وارد کنید. این تابع باید میانگین و واریانس توزیع گوسی  $q_\phi(z|x)$  را بگیرد و یک نمونه  $z \sim q_\phi(z|x)$  از آن برگرداند.

(ب) (۵ نمره)

کد بخش مربوط به Negative ELBO bound را در تابع negative\_elbo\_bound وارد کنید. توجه داشته باشید که باید منفی مقدار ELBO را حساب کنید چون بهینه‌سازی PyTorch تابع هزینه را کمینه میکند. همچنین از آنجایی که منفی ELBO را هر بار برای یک mini-batch داده می‌خواهیم بدست آوریم، میانگین آن را برای داده‌های آن mini-batch می‌خواهیم، یعنی  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ELBO(x^{(i)}; \theta, \phi)$ . در نهایت از آنجایی که بخش reconstruction loss در ELBO قابل محاسبه نیست و نمی‌توان آن را مستقیماً محاسبه کرد، آن را با استفاده از Monte Carlo sampling و به صورت زیر تخمین بزنید:

$$-E_{q_\phi(z|x)}[\log p_\theta(x|z)] \cong -\log p_\theta(x|z^{(1)})$$

با فرض اینکه  $z^{(1)} \sim q_\phi(z|x)$  نشان دهنده‌ی یک نمونه باشد.

(ج) (۵ نمره)

روی مدل ساخته شده یادگیری انجام دهید و تغییرات KL term، negative ELBO و reconstruction loss را برای داده‌ی test و train در طول زمان نشان دهید.

(د) (۱۰ نمره)

کد مربوط به کران IWAE را در تابع `negative_iwae_bound` وارد کنید. توابع مورد نیاز برای پیاده‌سازی این قسمت در بخش `utility function` موجود است.

(ه) (۵ نمره - امتیازی)

به منظور ارزیابی پیاده‌سازی انجام گرفته از باند IWAE، مقدار `negative IWAE` (متغیر `niwae` در تابع `negative_iwae_bound`) را به ازای  $m=[5,50,150]$  و بر روی مجموعه داده‌ی آزمایش گزارش دهید. به عبارت دیگر، در این سوال نیاز نیست شبکه را مجدداً آموزش دهید و تنها کافی است خروجی `negative IWAE` به ازای هر  $m$  را به صورت میانگین (۵۰ تکرار برای هر  $m$ ) بر روی مجموعه داده آزمایش گزارش داده و با خروجی `negative ELBO` مقایسه کنید.

### سوال سوم - ۵۰ نمره

در این سوال، هدف آشنایی بیشتر با مدل‌های مبتنی بر جریان<sup>۴</sup> برای متغیرهای تصادفی پیوسته می‌باشد. این مدل‌ها با بیشینه کردن لگاریتم درستنمایی دادگان آموزش داده می‌شوند. برای این کار، از رابطه زیر که به قضیه تغییر متغیر مشهور است استفاده می‌شود:

$$p(x) = p(z = f^{-1}(x)) \left| \det \left( \frac{\partial f^{-1}(x)}{\partial x} \right) \right|$$

در رابطه بالا،  $Z$  و  $X$  دو متغیر تصادفی پیوسته هستند  $f: Z^D \rightarrow X^D$  یک تابع برگشت پذیر می‌باشد. همچنین ترم دوم این عبارت همان دترمینان ماتریس ژاکوبیان تبدیل  $f$  می‌باشد.

الف) (۱۰ نمره)

متغیر تصادفی  $z \in \mathbb{R}$  با توزیع  $p(z) = N(z|0,1)$  را در نظر بگیرید. هم چنین فرض کنید  $f(z) = 1.5x + 3$ . به کمک قضیه تغییر متغیر<sup>۵</sup>، توزیع احتمال متغیر تصادفی  $x$  را به دست آورید.

<sup>۴</sup> Flow-based models (Normalizing flows)

<sup>۵</sup> Change of variable theorem

(ب)

در این قسمت، هدف آشنایی بیش تر با مدل مبتنی بر جریان RealNVP می باشد. ابتدا، مقاله ای که در این [لینک](#) آمده است را مطالعه کنید.

(ج) (۱۰ نمره)

لایه کوپلینگ<sup>۶</sup> مهم ترین لایه به کار رفته در مدل RealNVP می باشد. در این لایه، ورودی  $x$  ابتدا به دو بخش  $x_a$  و  $x_b$  شکسته می شود. سپس مطابق رابطه زیر، خروجی ( $y$ ) محاسبه می گردد:

$$\begin{aligned}y_a &= x_a \\y_b &= \exp(s(x_a)) \odot x_b + t(x_a) \\y &= \text{concat}(y_a, y_b)\end{aligned}$$

که در آن  $s$  و  $t$  دو شبکه عصبی دلخواه می باشند. مقدار دترمینان ماتریس ژاکوبیان این لایه را محاسبه کنید.

(د) (۳۰ نمره)

در این قسمت، هدف پیاده سازی مدل RealNVP بر روی پایگاه داده تصویری MNIST می باشد. برای این کار لازم است که تبدیل کوپلینگ را پیاده سازی نمایید. در پیاده سازی تبدیل کوپلینگ، ورودی را به دو قسمت مساوی تقسیم نمایید. هم چنین پس از هر تبدیل کوپلینگ لازم است که از یک تبدیل جایگشت برای تغییر ترتیب خروجی های لایه کوپلینگ استفاده نمایید (بخش ۳.۵ در مقاله اصلی). برای این کار نیز می توانید از دستور *flip* پکیج PyTorch استفاده نمایید (در صورت استفاده از پکیج های دیگر می توانید از کد معادل این دستور استفاده نمایید). دقت نمایید که نیازی به پیاده سازی سایر لایه های معرفی شده در مقاله مانند Masked Convolution و Batch Normalization نمی باشد. انتخاب معماری شبکه های  $s$  و  $t$  به عهده خودتان می باشد.

برای این که مدل بتواند عملکرد قابل قبولی داشته باشد لازم است که از چند جفت تبدیل (کوپلینگ، جایگشت) پشت سر هم استفاده نماییم. برای این کار از ۴ جفت تبدیل استفاده نمایید. در نهایت نمودار مقدار تابع خطای آموزش و تست را بر حسب ایپاک گزارش نمایید. هم چنین ۱۶ تصویر به صورت تصادفی از مدل آموزش دیده تولید کرده و در گزارش خود نمایش دهید.

---

<sup>6</sup> Coupling

## نکات تحویل

- مهلت ارسال این تمرین تا پایان روز " دوشنبه ۲۹ آبان ماه " خواهد بود.
- در صورت نیاز می‌توانید از grace time استفاده کنید.
- انجام این تمرین به صورت یک نفره می‌باشد.
- در صورت مشاهده هر گونه تشابه در گزارش کار یا کدهای پیاده سازی، این امر به منزله تقلب برای طرفین در نظر گرفته خواهد شد.
- استفاده از کدهای آماده بدون ذکر منبع و بدون تغییر به منزله تقلب خواهد بود و نمره تمرین شما صفر در نظر گرفته خواهد شد.
- گزارش شما در فرایند تصحیح از اهمیت ویژه ای برخوردار خواهد بود. لذا تمامی نکات و فرض هایی که برای پیاده سازی و محاسبات خود در نظر می‌گیرید را در گزارش ذکر کنید.
- تمامی تصاویر و جداول مورد استفاده در گزارش کار باید دارای توضیح (caption) و شماره باشند.
- در صورت عدم رعایت فرمت گزارش کار، نمره گزارش به شما تعلق نخواهد گرفت.
- لطفا گزارش، فایل کدها و سایر ضمیمات مورد نیاز را با فرمت زیر در سامانه مدیریت دروس بارگزاری نمایید:

HW2\_[Lastname]\_[StudentNumber].zip

خواهشمند است در صورت داشتن هر گونه سوال یا ابهام با دستیاران آموزشی در ارتباط باشید:

محمد جواد عباسی ( مسئول سوالات اول و دوم)

[mj.abbasi93@gmail.com](mailto:mj.abbasi93@gmail.com)

محمد مهدی مهمانچی (مسئول سوال سوم)

[mehmanchimahdi@gmail.com](mailto:mehmanchimahdi@gmail.com)

موفق باشید