

الف) ① $f(\alpha) = 100(\alpha_2 - \alpha_1^2)^2 + (1 - \alpha_1)^2$

$$\nabla f(\alpha) = \begin{bmatrix} -400\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1^2) - 2(1 - \alpha_1) \\ 200(\alpha_2 - \alpha_1^2) \end{bmatrix} = 0$$

$$200(\alpha_2 - \alpha_1^2) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1^2$$

$$\underbrace{-400\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1^2)}_{=0} - 2(1 - \alpha_1) = -2(1 - \alpha_1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

نقطه $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ تنها جایی است که گرادیان تابع 0 می شود پس تنها نقطه بهینه ی باشد. چون تابع محدب است است، پس این نقطه، نقطه بهینه سراسری هم می باشد.

ب) ضابطه گرادیان پیشتر نوشته شده است.

$$\nabla f(\alpha^{(0)}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0.5 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(\alpha^{(1)}) = \begin{bmatrix} 400 \\ -200 \end{bmatrix} \quad \alpha^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0.5 \begin{bmatrix} 400 \\ -200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -199 \\ 100 \end{bmatrix}$$

ج)

$$H = \begin{bmatrix} -400(\alpha_2 - \alpha_1^2) + 800\alpha_1^2 + 2 & -400\alpha_1 \\ -400\alpha_1 & 200 \end{bmatrix}$$

$$H(\alpha^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \rightarrow \rho = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{200} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$