

بسم الله الرحمن الرحيم



## تمرین کامپیوتری ۳

سیگنال ها و سیستم ها

عرفان باقری سولا

شماره دانشجویی: ۸۱۰۱۹۸۳۶۱

## لیست مطالب

۲	..... سوال ۱
۳	..... سوال ۲
۳	..... Laplace Analysis
۴	..... Laplace Transform
۵	..... سوال ۳
۷	..... سوال ۴
۷	..... Discrete Analysis
۹	..... Sequences
۱۰	..... Discrete Transforms
۱۲	..... سوال ۵

## سوال ۱

(ب)

محاسبه تبدیل لاپلاس به صورت تئوری:

$$x(t) = A_1 e^{-\alpha t} u(t) + A_2 e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \theta) u(t)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} u(t)\} = \frac{1}{s + \alpha} \quad \text{Re}\{s\} > -\alpha$$

$$\mathcal{L}\{e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \theta) u(t)\} = \frac{\omega_0 \cos(\theta) + (\beta + s) \sin(\theta)}{\omega_0^2 + (\beta + s)^2}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{A_1}{s + \alpha} + A_2 \times \frac{\omega_0 \cos(\theta) + (\beta + s) \sin(\theta)}{\omega_0^2 + (\beta + s)^2}$$

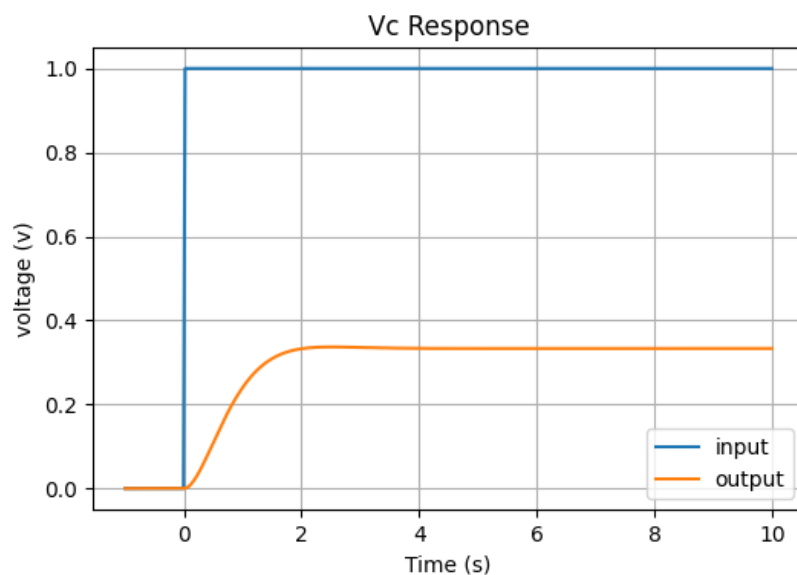
$$\text{ROC: } \text{Re}\{s\} > \max(-\alpha, -\beta)$$

(د)

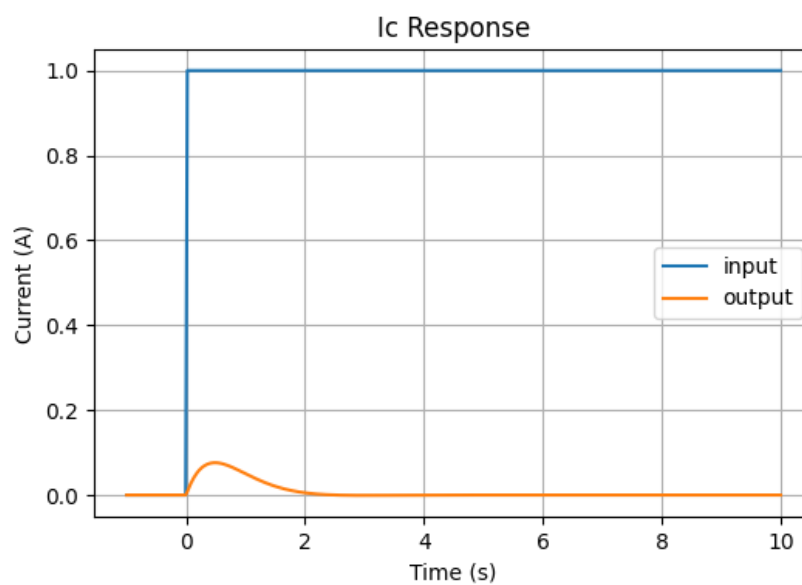
در این نوع نمایش به راحتی می توان قطب های تابع را به صورت مجزا مشاهده کرد و همچنین در صورت نیاز به تبدیل معکوس گرفتن به صورت دستی، این نمایش ساده تر است.

(ه)

همانطور که در محاسبات دستی بالا مشخص است، ناحیه مجاز s را مشخص کرده ایم. اگر قطب ها را نیز محاسبه کرده و بخش حقیقی آنها را مورد توجه قرار دهیم میبینیم که دو قطب در  $-\alpha$  ,  $-\beta$  داریم که هر کدام بزرگتر باشد باید مرز ناحیه مجاز را مشخص کند.



شکل ۱-۲: پاسخ پله مدار برای خروجی ولتاژ خازن



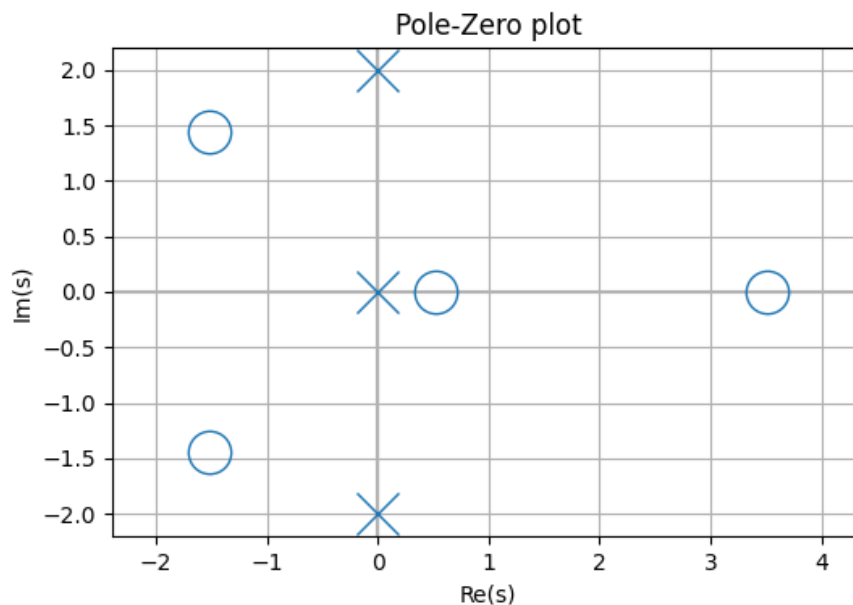
شکل ۲-۲: پاسخ پله مدار برای خروجی جریان خازن

$$m(t) = (3 - 2f_0)\delta(t) + \left(\frac{f_0^2}{2} + \left(\frac{f_0^2}{2} - 6f_0 - 2\right)\cos(2t) + \left(\frac{3f_0^2}{2} + 2f_0 - 6\right)\sin(2t)\right)u(t) + \delta^{(1)}(t)$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{\delta^{(1)}(t)\} = s$$

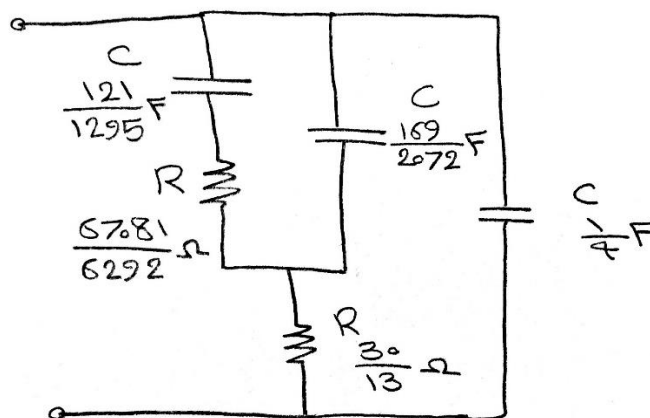
$$\mathcal{L}\{\cos(2t)u(t)\} = \frac{s}{s^2 + 4} \quad \mathcal{L}\{\sin(2t)u(t)\} = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$\Rightarrow X(s) = 3 - 2f_0 + \frac{f_0^2}{2s} + \left(\frac{f_0^2}{2} - 6f_0 - 2\right)\frac{s}{s^2 + 4} + \left(3\frac{f_0^2}{2} + 2f_0 - 6\right)\frac{2}{s^2 + 4} + s$$



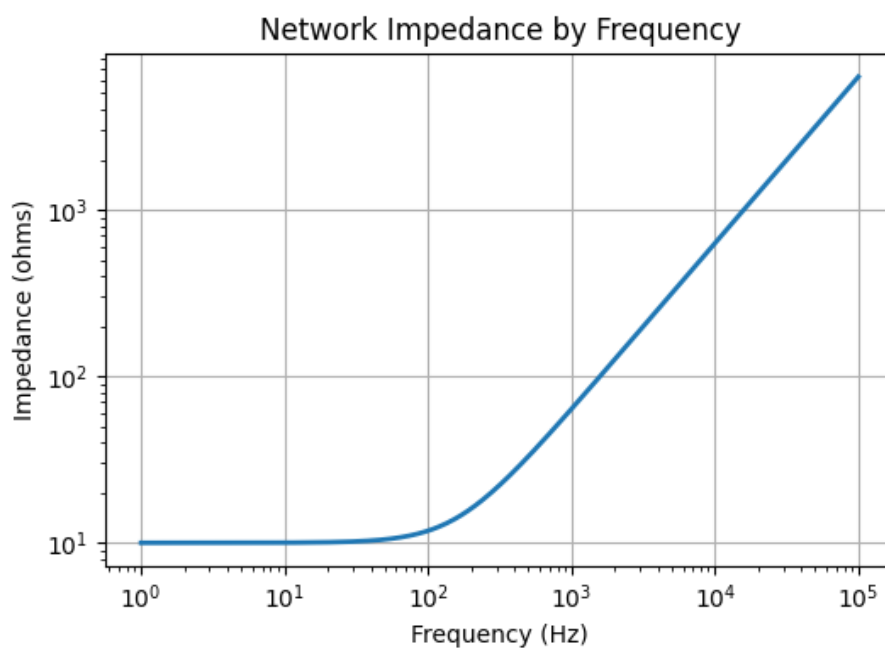
شکل ۳-۲: نمودار قطب ها و صفر های سیگنال

سوال ۳  
(الف)

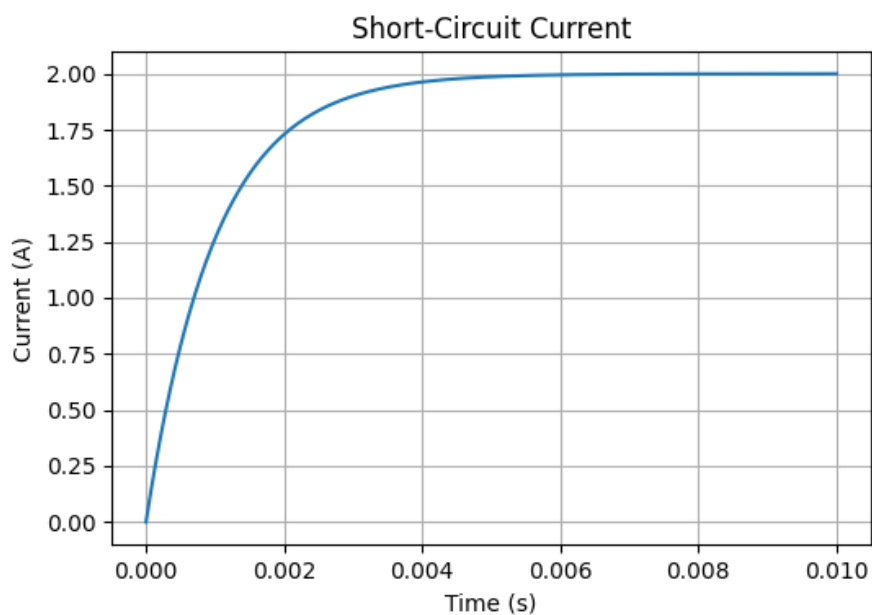


شکل ۱-۳: دیاگرام یک تحقق برای مدار

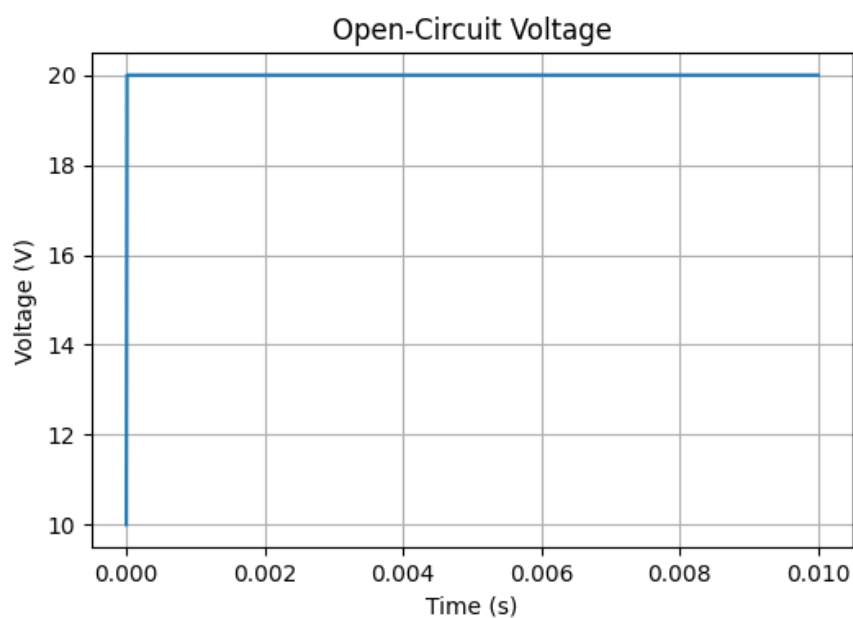
(ب)



شکل ۲-۳: مقدار امپدانس مدار بر حسب فرکانس



شکل ۳-۳: جریان اتصال کوتاه در حوزه زمان



شکل ۳-۴: ولتاژ مدار باز در حوزه زمان

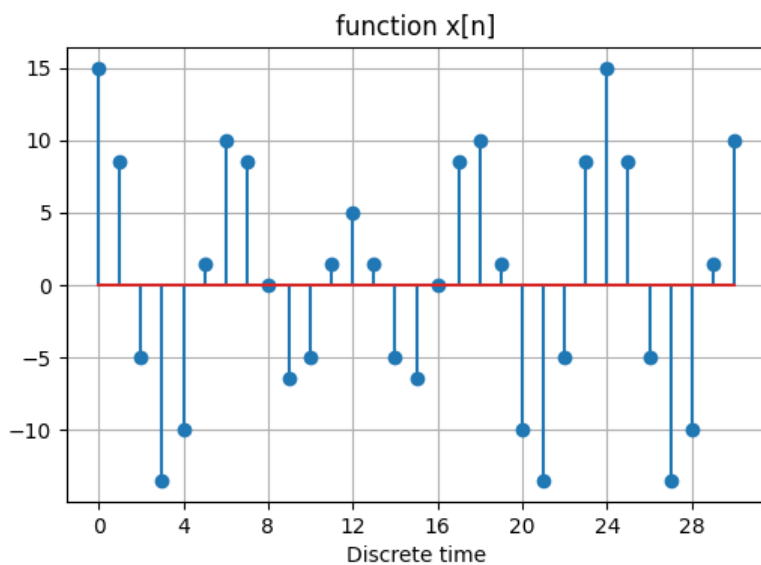
واضح است که در حالت مدار باز چون مدار کاملاً سری است، جریانی جاری نمی‌شود و مستقیماً ولتاژ منبع را مشاهده می‌کنیم.

## سوال ۴

### Discrete Analysis

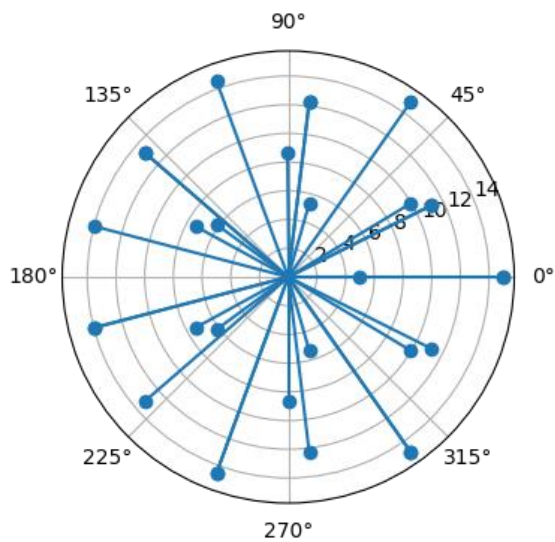
(الف)

واضح است که دوره تناوب این سیگنال ۲۴ می باشد.



شکل ۴-۱-۱: نمودار سیگنال

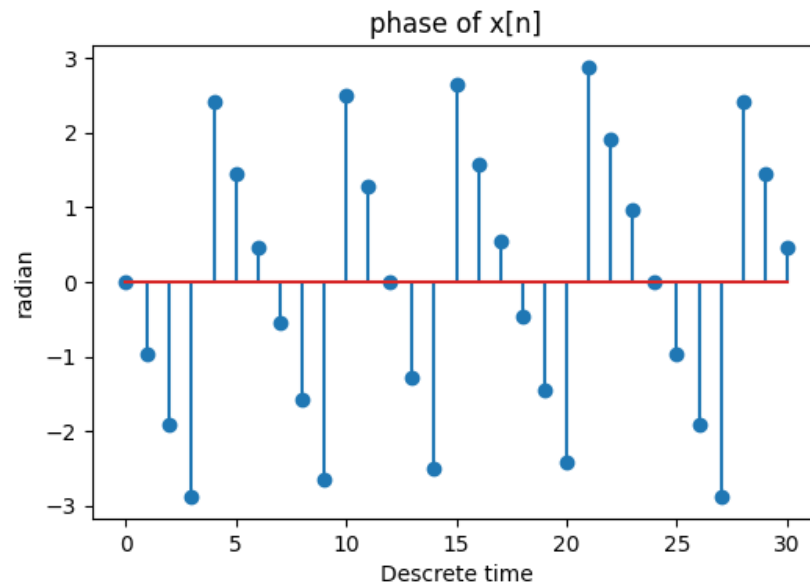
(ب)



شکل ۴-۱-۲: نمایش قطبی سیگنال

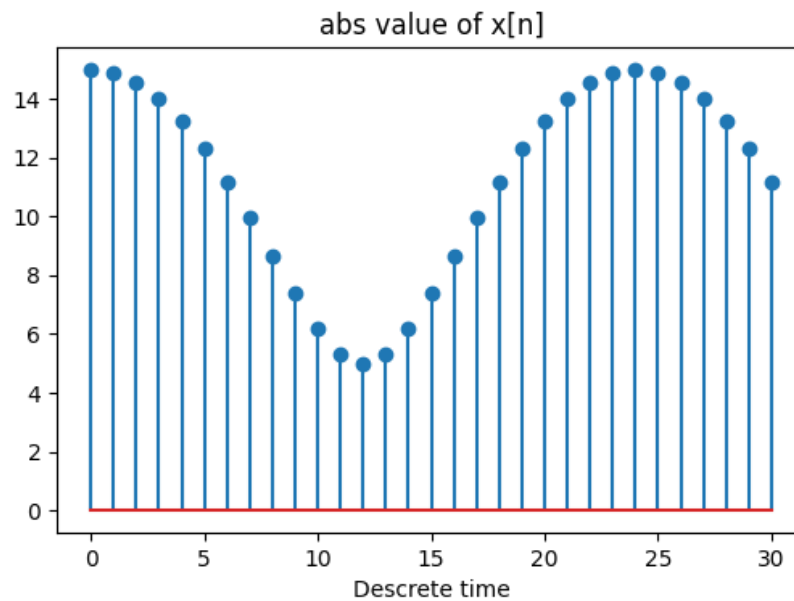


واضح است که بیشترین فاز مربوط به  $n=18$  می باشد چون کمترین مقدار منفی را دارد و این یعنی نزدیک ترین مقدار به فاز  $۳۶۰$  درجه می باشد.



شکل ۴-۱-۳: نمودار فاز سیگنال

بیشترین اندازه نیز مربوط به  $n=0, 24, \dots$  می باشد چون هر دو ترم حد اکثر مقدار خود را دارند.



شکل ۴-۱-۴: نمودار اندازه سیگنال

(الف)

در واقع circular convolution یک حالت خاص از convolution می باشد که برای سیگنال های پریودیک استفاده می شود. (چون کانولوشن معمولی روی سیگنال های پریودیک همگرا نمی شود). برای مثال در فصل سری فوریه پیوسته و گسسته درس، همواره از circular convolution استفاده می کردیم چون با سیگنال های پریودیک روبرو بودیم.

(ب)

$$\{ \underline{3 + 2 * j}, -2 + j, -1 - 6j, 6 - 7j, 7 - 2j, 2 - 3j \}$$

شکل ۱-۲-۴: حاصل circular convolution در پایتون

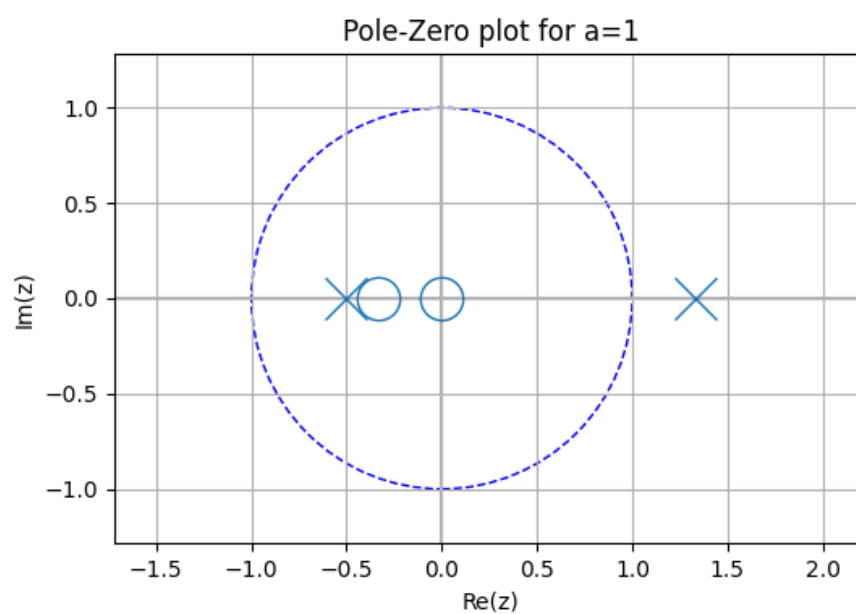
(ج)

سپس به صورت تئوری نیز این کانولوشن را انجام می دهیم و می بینیم که جواب های یکسانی را به دست آورده ایم.

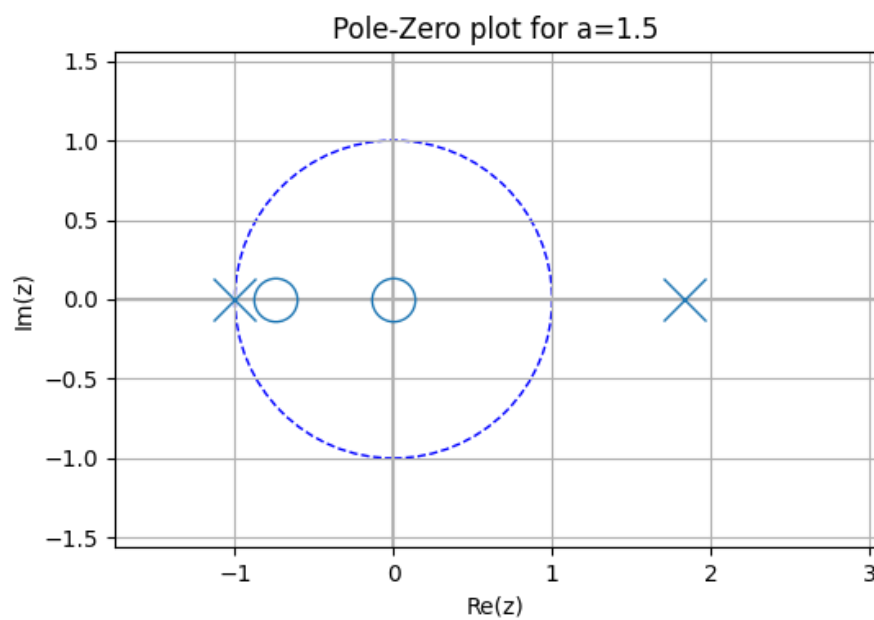
$$\begin{aligned} n_4[0] &= n_1[5] \times n_2[0] + n_1[0] \times n_2[1] + n_1[1] \times n_2[2] \\ &\quad + n_1[2] \times n_2[3] + n_1[3] \times n_2[4] + n_1[4] \times n_2[5] \\ &= -j \times 0 + 1 \times 1 + (-j) \times 2 + (-1) \times 3 + j \times 4 + 5 \\ &= 3 + j2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_4[1] &= n_1[4] \times n_2[0] + n_1[5] \times n_2[1] + n_1[0] \times n_2[2] \\ &\quad + n_1[1] \times n_2[3] + n_1[2] \times n_2[4] + n_1[3] \times n_2[5] \\ &= 1 \times 0 + (-j) \times 1 + 1 \times 2 + (-j) \times 3 + (-1) \times 4 + j \times 5 \\ &= -2 + j \end{aligned}$$

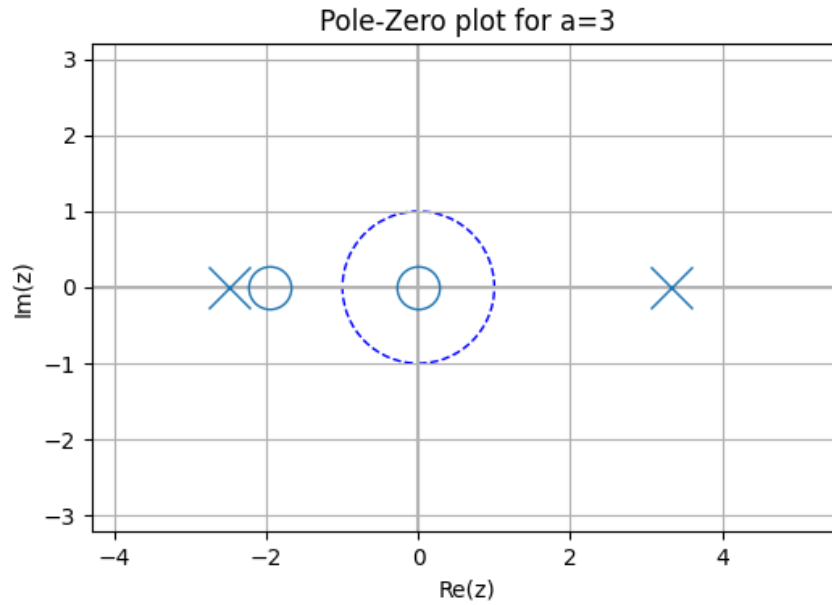
$$\begin{aligned} ! \quad n_4[2] &= -1 - j6 & n_4[3] &= 5 - j7 \\ n_4[4] &= 7 - j2 & n_4[5] &= 2 - j3 \end{aligned}$$



شکل ۴-۱: نمایش صفر و قطب در حوزه  $Z$



شکل ۴-۲: نمایش صفر و قطب در حوزه  $Z$



شکل ۳-۳-۴: نمایش صفر و قطب در حوزه  $Z$

با توجه به این نمودار ها چون همیشه ناحیه همگرایی ما به سمت بیرون است، متوجه می شویم که به ازای هیچکدام از  $a$  ها سیگنال دارای تبدیل فوریه نیست. همچنین به خاطر بزرگ تر بودن اندازه، همیشه قطب مربوط به  $a+1/3$  مرز ناحیه مجاز  $Z$  را مشخص می کند. همچنین فارغ از مقدار  $a$ ، همیشه یک صفر در مبدا قرار دارد.

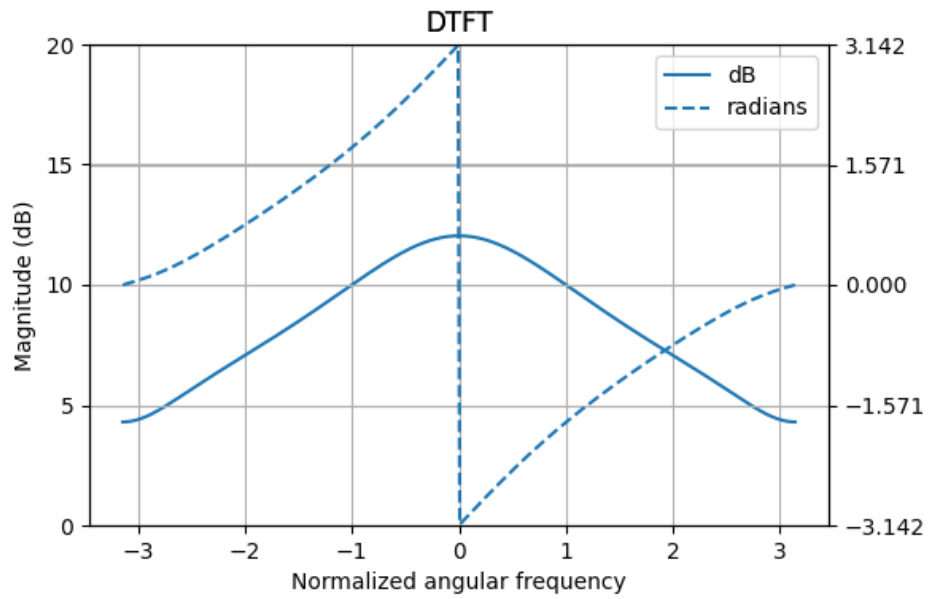
(ب)

محاسبه تبدیل  $Z$  سیگنال به صورت تئوری:

$$a^n u[n] = n a^n u[n]$$

$$Z \{ a^n u[n] \} = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$$

$$\Rightarrow Z \{ n a^n u[n] \} = -z \frac{d}{dz} \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{a z^{-1}}{(1 - a z^{-1})^2}$$

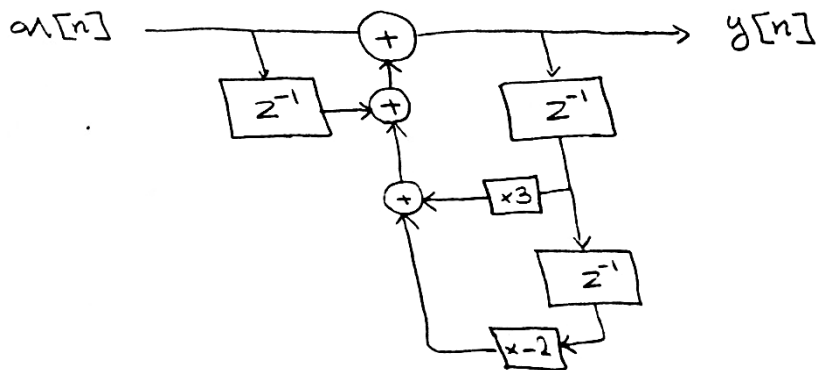


شکل ۴-۳-۴: اندازه و فاز DTFT برای  $a=3$  بر حسب Normalized Angular Frequency

## سوال ۵

(۵)

رسم بلوک دیاگرام به صورت تئوری



شکل ۵-۱: بلوک دیاگرام سیستم تفاضلی

محاسبه پاسخ سیستم به ورودی داده شده در  $n=1,2,3$  به صورت تئوری:

$$u[n] = 0 \quad y[n] = 0 \quad n < 0$$

$$u[0] = 1 \Rightarrow y[0] = \underbrace{u[0]}_{\cdot} + \underbrace{u[-1]}_{\cdot} - \underbrace{2y[-2]}_{\cdot} + \underbrace{3y[-1]}_{\cdot}$$

$$y[0] = \boxed{1}$$

$$u[1] = 2 \quad u[2] = 4 \quad u[3] = 8 \quad \dots$$

$$y[1] = u[1] + u[0] - 2y[0] + 3y[-1]$$

$$= 2 + 1 + 0 + 3 = \boxed{6}$$

$$y[2] = u[2] + u[1] - 2y[1] + 3y[0]$$

$$= 4 + 2 - 2 \times 6 + 3 \times 1 = \boxed{22}$$

$$y[3] = u[3] + u[2] - 2y[2] + 3y[1]$$

$$= 8 + 4 - 2 \times 22 + 3 \times 6 = \boxed{66}$$