بسم الله الرحمان الرحیم

تمرین کامپیوتری ۲

سیگنال ها و سیستم ها

عرفان باقری سولا

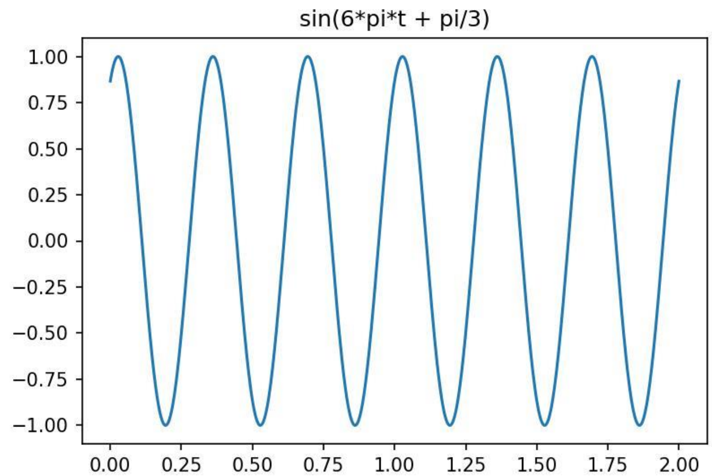
شماره دانشجویی: ۸۱۰۱۹۸۳۶۱

لیست مطالب

سوال ۱

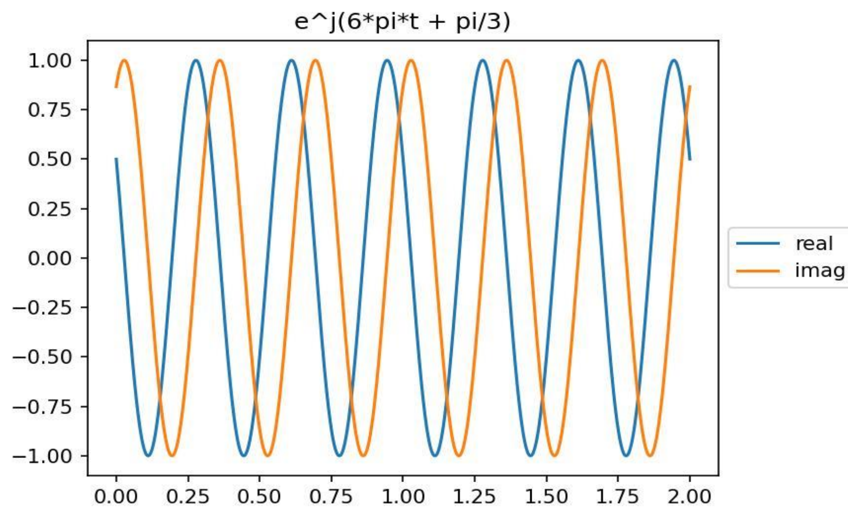
بخش اول (Sine/Complex Sine Waves)

الف)



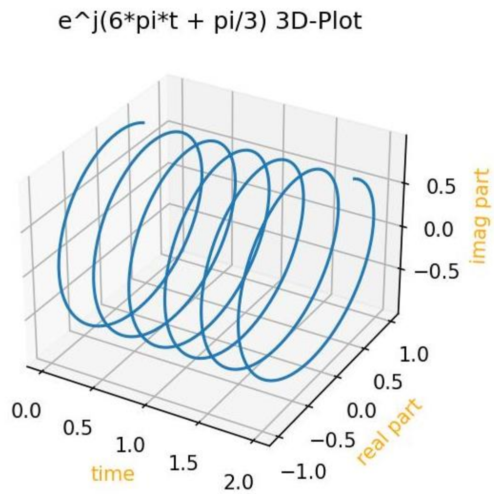
شکل 1-1-1 : نمودار موج سینوسی

ب)



شکل 1-1-2 : نمودار موج سینوسی مختلط

ج)



شکل 1-1-3 : نمودار سه بعدی موج سینوسی مختلط

بخش دوم (Dot/Complex Dot Product)

الف)

می دانیم Correlation Coefficient بین دو متغیر تصادفی به صورت Covariance آن دو تقسیم بر حاصل ضرب انحراف معیار های آن ها می باشد. اگر با دقت به نحوه محاسبه این مقادیر نگاه کنیم، متوجه میشوم این تعریف دقیقا بیانگر رابطه کسینوس زاویه بین دو بردار می باشد. یعنی ضرب داخلی دو بردار X و Y و تقسیم کردن عدد به دست آمده به حاصل ضرب اندازه (نرم) هر یک از بردار ها.

در نتیجه اگر به تنهایی به ضرب داخلی نگاه کنیم، میبینیم که به نوعی یک معیار غیر یکسان سازی شده (Not Normalized) برای محاسبه میزان همبستگی بین دو بردار می باشد. چون این معیار به تنهایی Normalized نیست برای این که عدد دقیق همبستگی را داشته باشیم باید همانطور که قبلا توضیح داده شد با تقسیم آن به حاصل ضرب نرم های هر بردار آن را Normalize کنیم. به طور کلی اگر دامنه بردار ها یکسان باشند، با ثابت نگه داشتن یک بردار، می توان با استفاده از ضرب داخلی میزان همبستگی چند بردار با بردار مورد نظر را مقایسه کرد.

برای مثال در بخش Question1-Part2-A در کد های ضمیمه شده، ابتدا Correlation Coefficient بین دو بردار که از قسمت حقیقی و موهومی سیگنال مختلط بخش قبل به دست آمده اند، محاسبه شده است. سپس ضرب داخلی و ضرب داخلی نرمالایز شده را محاسبه کردیم ایم. مشاهده می شود که ضرب داخلی نرمالایز شده دقیقا با ضریب همبستگی برابر است و همان طور که انتظار داشتیم یک مقدار ناچیز و نزدیک به صفر دارد.

```
correlation coefficient =  0.000864296917770374
dot product =  0.43301270189221475
normalized products =  0.0008651603514699733
```

شکل 1-2-1 : نتایج حاصل

ب)

۱. دو سیگنال دقیقا مشابه هستند و ضرب داخلی آنها عدد ۵۰۱ را حاصل می کند. طبق توضیحات بخش قبل، این حد اکثر مقداری است که ضرب داخلی سیگنال های سینوسی این بخش حاصل خواهند کرد چرا که همبستگی دقیقا برابر ۱ است.

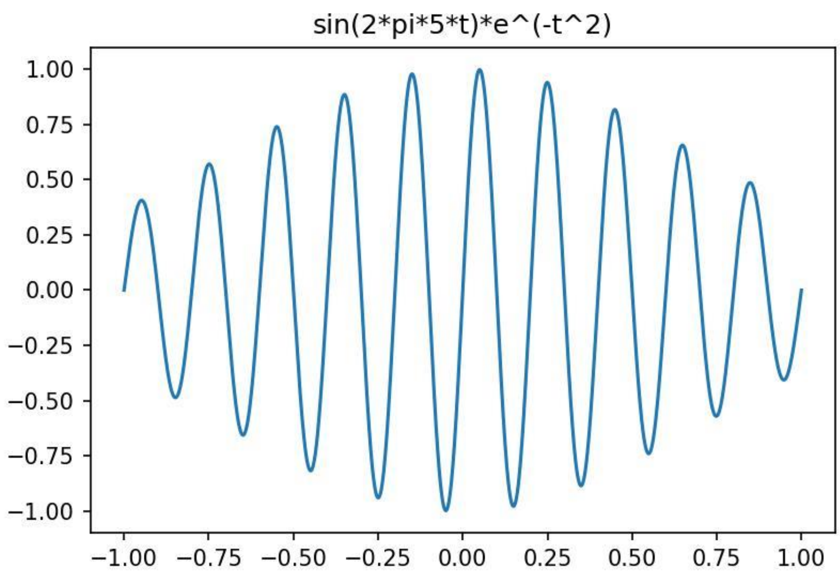
۲. با تغییر فرکانس یکی از دو موج به اندازه 0.5Hz مقدار ضرب داخلی به ۱ کاهش می یابد. این یعنی همبستگی دو سیگنال بسیار کم است و سیگنال ها خیلی متفاوت هستند.

اگر مقدار این تغییر را به 0.35Hz کاهش دهیم، ضرب داخلی تقریبا عدد 111- را حاصل می کند. این یعنی همبستگی دو سیگنال نسبت به حالت قبل کمی بیشتر است ولی این همبستگی در جهت عکس اتفاق می افتد. ولی همچنان با عدد ۵۰۱ فاصله زیادی دارد و این یعنی این دو سیگنال نیز یکی نیستند.

۳. اگر فاز را به اندازه pi/2 تغییر دهیم، ضرب داخلی به صفر می رسد. و اگر به اندازه pi/3 تغییر دهیم ضرب داخلی ۲۵۰ می شود. باز هم دیدیم که هرچه تغییرات بیشتر باشد، ضرب داخلی کمتر می شود که یعنی دو سیگنال هیچ شباهتی ندارند.

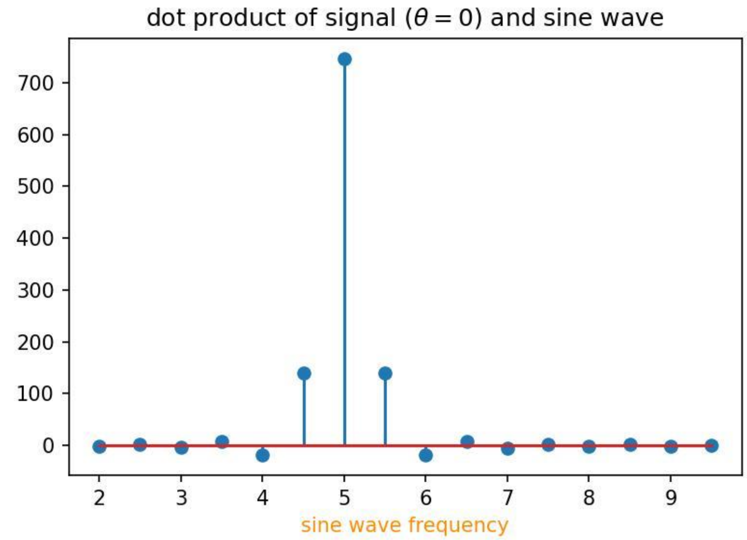
ج)

۱. رسم سیگنال



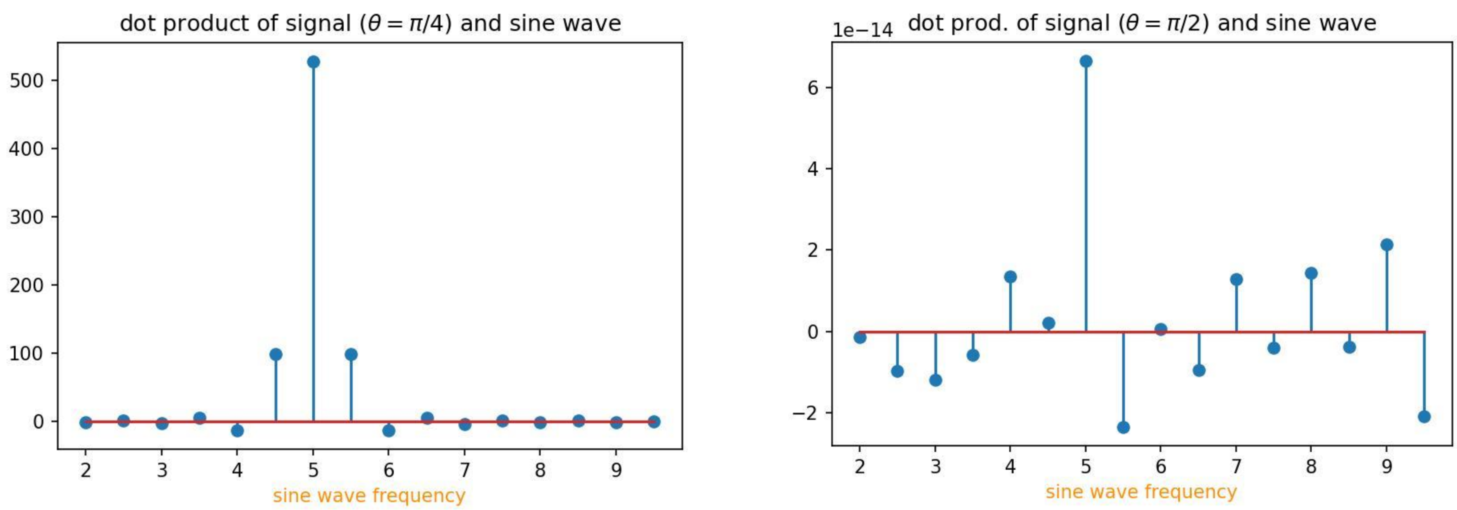
شکل 1-2-2 : شکل موج سیگنال با ضابطه مورد نظر

۲. حاصل ضرب داخلی سیگنال های سینوسی با فرکانس های داده شده در سیگنال f(t) که نمودار آن پیشتر رسم شده است. مشاهده می کنیم که بیشترین مقدار در فرکانس 5Hz حاصل شده چرا که بخش سینوسی سیگنال اصلی فرکانسی با همین مقدار داشت.



شکل 1-2-3 : ضرب داخلی سیگنال و موج های سینوسی

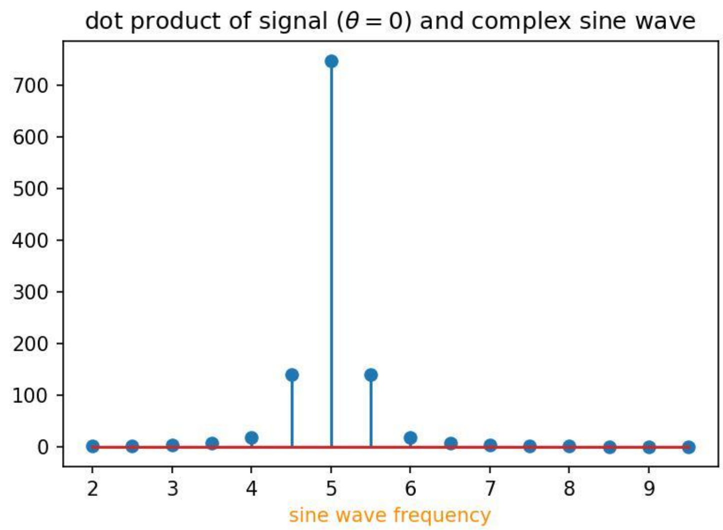
۳. برای فاز pi/4 هنوز هم بیشترین مقدار در 5Hz به دست آمده ولی مقدار ضرب داخلی کمتر شده که اگر معیار سیگنال سینوسی حقیقی باشد یعنی همبستگی کمتر شده در صورتی که فقط فاز را تغییر داده ایم. اگر فاز را به pi/2 برسانیم کلا مشاهده می کنیم که نتایج به هیچ وجه قابل اطمینان نیستند و ضرب داخلی اعداد بسیار کوچکی را حاصل می کند در صورتی که انتظار داشتیم باز هم در 5Hz به بیشترین مقدار برسیم. (این اتفاق به این دلیل است که طبق مشاهدات قبل اختلاف فاز های pi/2 بین دو سیگنال سینوسی هم فرکانس، علی رغم یکسان بودن فرکانس اصلی، باعث صفر شدن ضرب داخلی می شود). پس در کل مشکل ضرب داخلی فعلی تاثیر پذیری از اختلاف فاز است و نمی تواند معیار خوبی برای سنجش فرکانس یک سیگنال باشد.



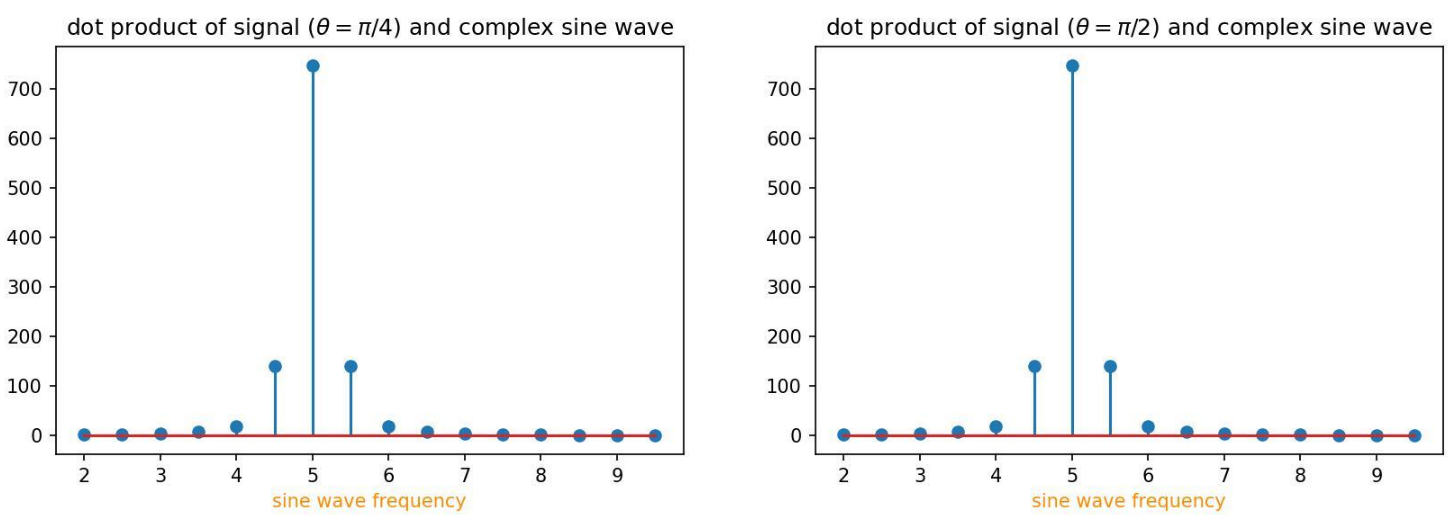
شکل 1-2-4 : ضرب داخلی برای فاز های مختلف

د)

۱. مشاهده می کنیم که اگر سیگنال سینوسی مختلط برای ضرب داخلی استفاده کنیم، دیگر با تغییر فاز سیگنال اصلی نتایج ما تغییر نمی کنید. این یعنی ضرب داخلی مستقل از فاز و فقط وابسته به فرکانس سیگنال مورد مطالعه خواهد شد.

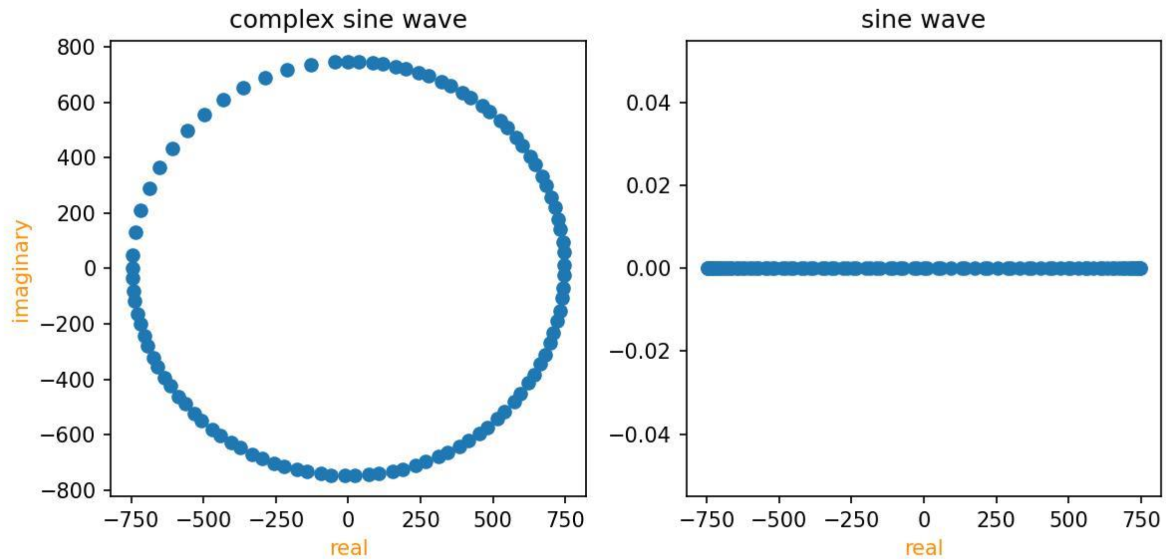


شکل 1-2-5 : ضرب داخلی سیگنال و موج های سینوسی مختلط



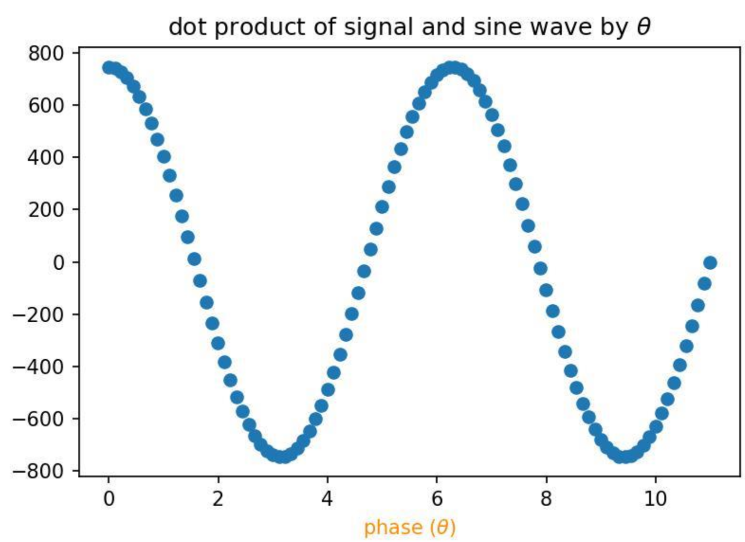
شکل 1-2-6 : ضرب داخلی برای فاز های مختلف

۲. واضح است که با تغییر مقدار فاز، اندازه ضرب داخلی برای سیگنال های سینوسی مختلط همیشه یکسان است ولی برای سیگنال های سینوسی هرچند که فرکانس ثابت است، ضرب داخلی تغییر می کند.



شکل 1-2-7 : ضرب داخلی طی تغییرات فاز

برای درک بهتر چگونگی رفتار سیگنال سینوسی حقیقی در ضرب داخلی، نمودار زیر را نیز رسم میکنیم و میبینیم که مقدار این ضرب داخلی علاوه بر فرکانس، کاملا تابعی از فاز نیز می باشد.



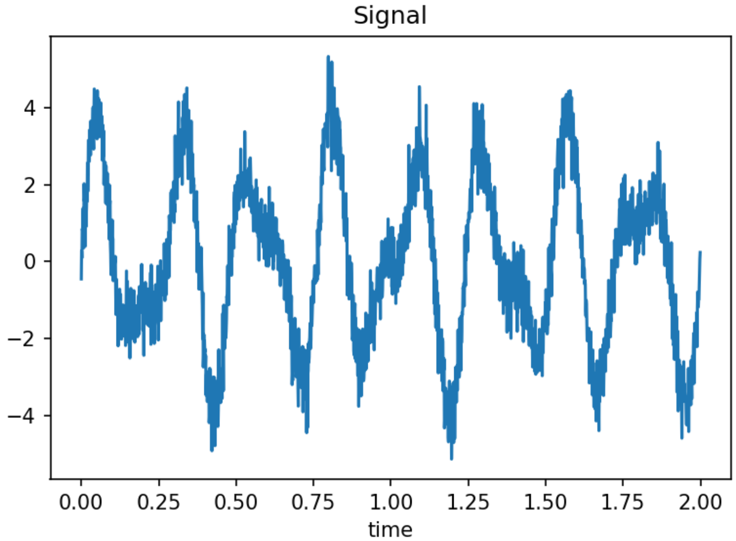
شکل 1-2-8 : ضرب داخلی سیگنال با موج سینوسی حقیقی بر حسب فاز

سوال ۲

بخش اول (نکات)

الف)

۱. با توجه به بازه سیگنال و طول ۲۰۰۰ تایی آن، فرکانس نمونه برداری 1000Hz می باشد.



شکل 2-1-1 : نمودار سیگنال در حوزه زمان

۲. فرکانس Nyquist نشان دهنده حداقل فرکانس مورد نیاز برای نمونه برداری از یک سیگنال می باشد به طوری که بتوان با نمونه ها، سیگنال اصلی را به طور کامل بازسازی کرد.

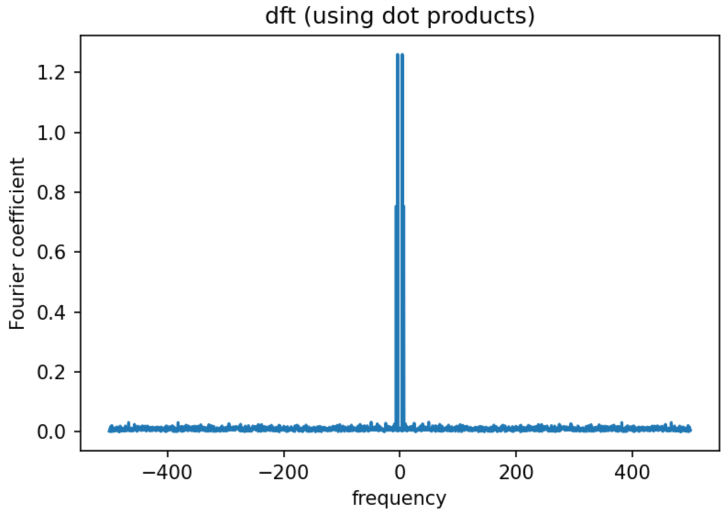
به بیان دیگر چون فرکانس نمونه برداری در اینجا 1000Hz می باشد، در نتیجه حداکثر بازه فرکانسی که می توان به طور کامل آن را نمونه برداری کرد برابر [-500Hz, +500Hz] می باشد.

۳. همانطور که ذکر شد محدوده فرکانسی پس از نمونه برداری هم شامل محدوده مثبت و هم شامل محدوده منفی از دامنه فرکانسی میباشد. به همین دلیل هنگام ضرب داخلی یا باید از حداکثر فرکانس در محدوده منفی تا حداکثر فرکانس در محدوده مثبت موج سینوسی بسازیم یا اینکه از ۰ تا فرکانس نمونه برداری این کار را انجام دهیم و سپس با توجه به اینکه تبدیل فوریه سیگنال های گسسته متناوب میباشد، ضرایب به دست آمده از فرکانس های بالاتر از فرکانس Nyquist را به سمت فرکانس های منفی شیفت دهیم. همچنین هنگام تبدیل سیگنال از دامنه فرکانس به دامنه زمان باید از منفی فرکانس هایی که هنگام تبدیل سیگنال از دامنه زمان به دامنه سیگنال استفاده کرده بودیم، استفاده کنیم.

برای اینکه ضرایب به دست آمده از تبدیل فوریه گسسته را تصحیح بکنیم، باید آن ها را به تعداد نمونه ها تقسیم کنیم چرا که در حالت گسسته به جای انتگرال گیری، از جمع استفاده می کنیم و باید اثر آن را از بین ببریم.

بخش دوم (پیاده سازی)

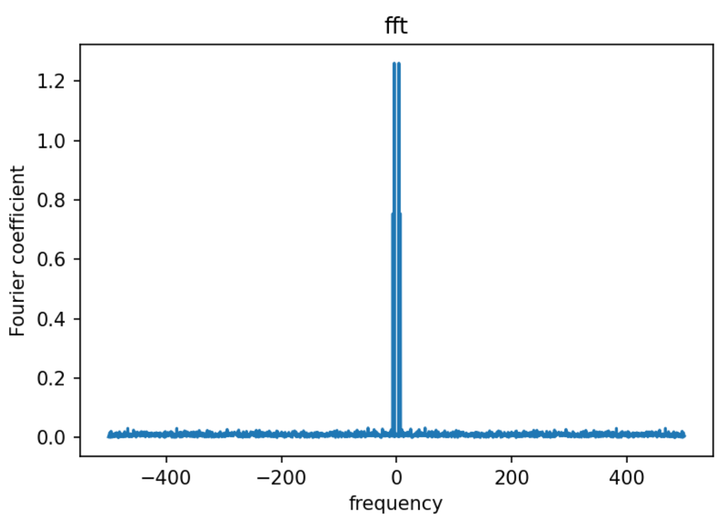
الف)



شکل 2-2-1 : ضرایب فوریه سیگنال توسط ضرب داخلی (روش دستی)

ب)

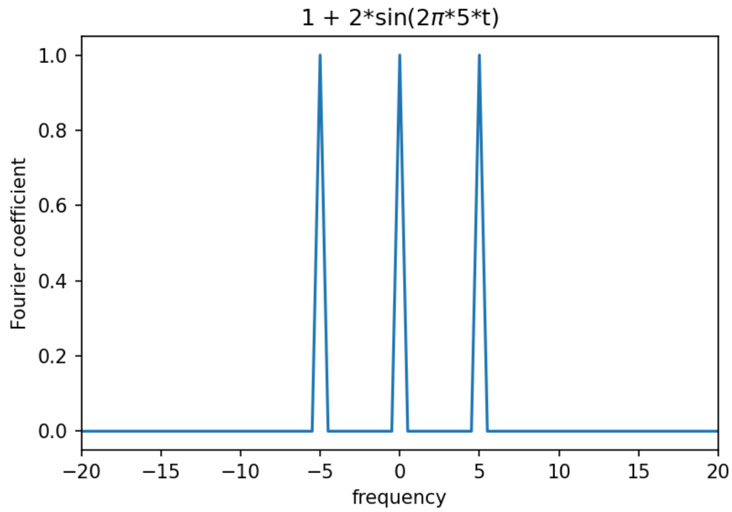
۱. استفاده از توابع کتابخانه scipy برای محاسبه ضرایب سری فوریه (و سپس تصحیح ضرایب)



شکل 2-2-2 : ضرایب فوریه سیگنال به کمک تابع fft

۲. محاسبه ضرایب فوریه سیگنال سینوسی ذکر شده و تصحیح آن

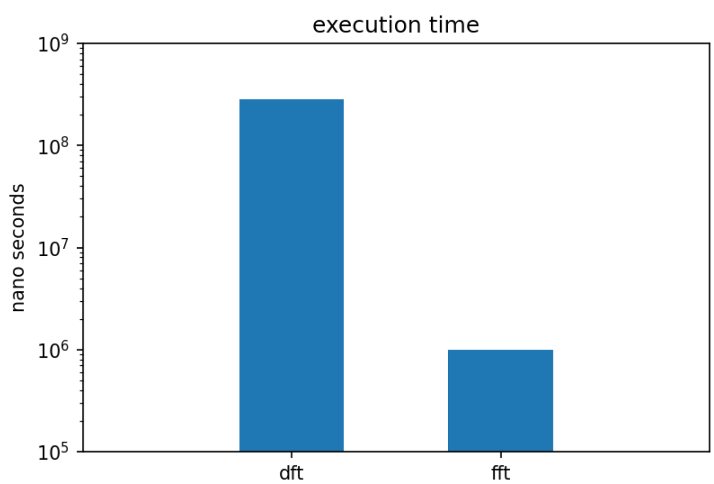
چون اینجا فقط اندازه ضرایب را نمایش می دهیم، در هر دو فرکانس 5+ و 5- ضرایب فوریه ۱ هستند. پس در کل ضرایب فوریه پس از تصحیح، همان طور که انتظار داشتیم مقدار درستی دارند و مشکلی وجود ندارد.



شکل 2-2-3 : ضرایب فوریه سیگنال

ج)

الگوریتم fft هنگام محاسبه ضرایب فوریه، قبل از انجام محاسبات ورودی هارا با ترتیب خاصی مرتب می کند و سپس محاسبات ریاضی را انجام می دهد. در نتیجه با این کار سرعت الگوریتم به مقدار قابل توجهی افزایش می یابد به طوری که پیچیدگی آن از مرتبه (O(n log(n می باشد در صورتی که پیچیدگی الگوریتم dft (ضریب داخلی ساده به همان صورتی که ما پیاده سازی کرده ایم) از مرتبه (O(n^2 می باشد. (در این سوال الگوریتم fft تقریبا ۲۵۰ برابر سریع تر عمل کرده)



شکل 2-2-4 : مقایسه سرعت اجرای دو الگوریتم fft و dft

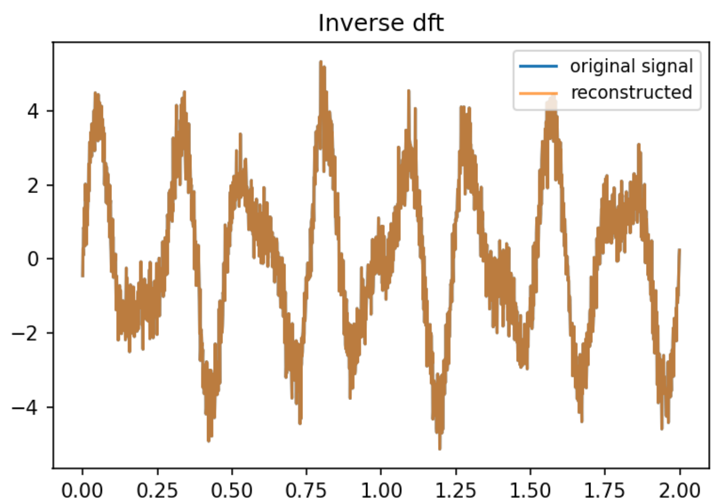
```
speed_up = dft_execution_time/fft_execution_time
print("fft speed-up = {:.0f}".format(speed_up))
```

```
fft speed-up = 283
```

سوال ۳

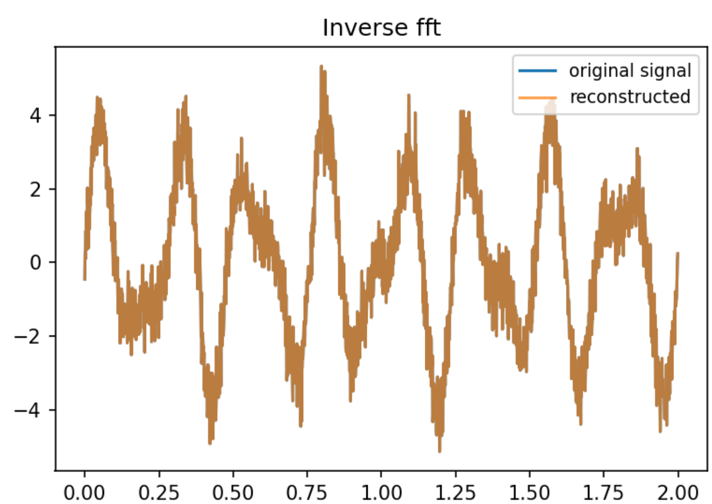
الف)

مشاهده می کنیم که سیگنال اصلی (رنگ آبی) و سیگنال بازیابی شده (رنگ نارنجی) کاملا بر هم منطبق هستند.



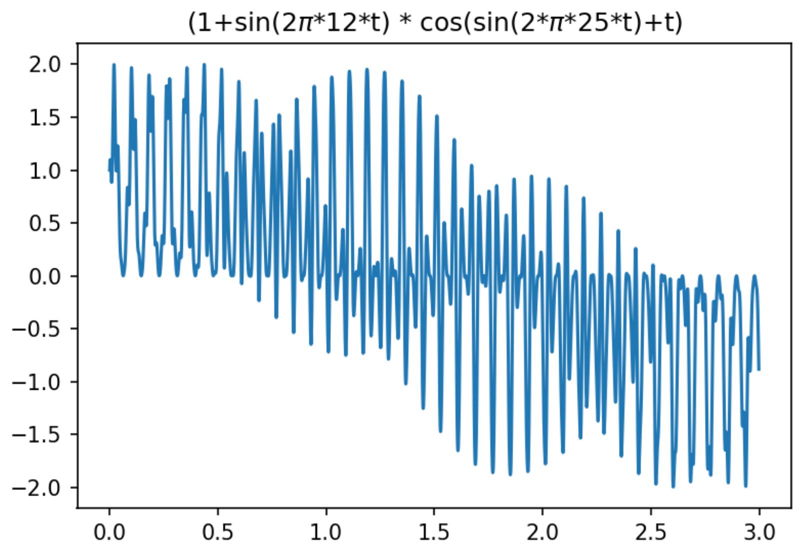
شکل 3-1 : سیگنال اصلی و سیگنال بازیابی شده

ب)



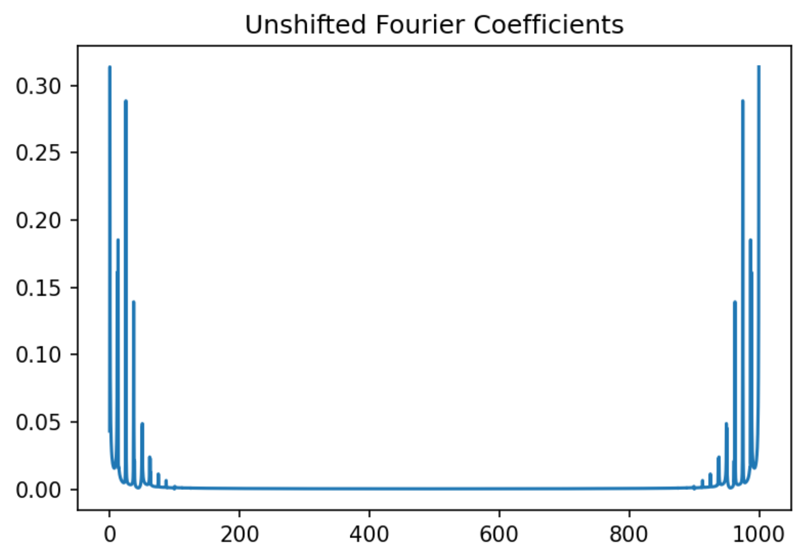
شکل 3-2 : سیگنال اصلی و سیگنال بازیابی شده با تابع ifft

ج)



شکل 3-3-1 : نمودار سیگنال در حوزه زمان

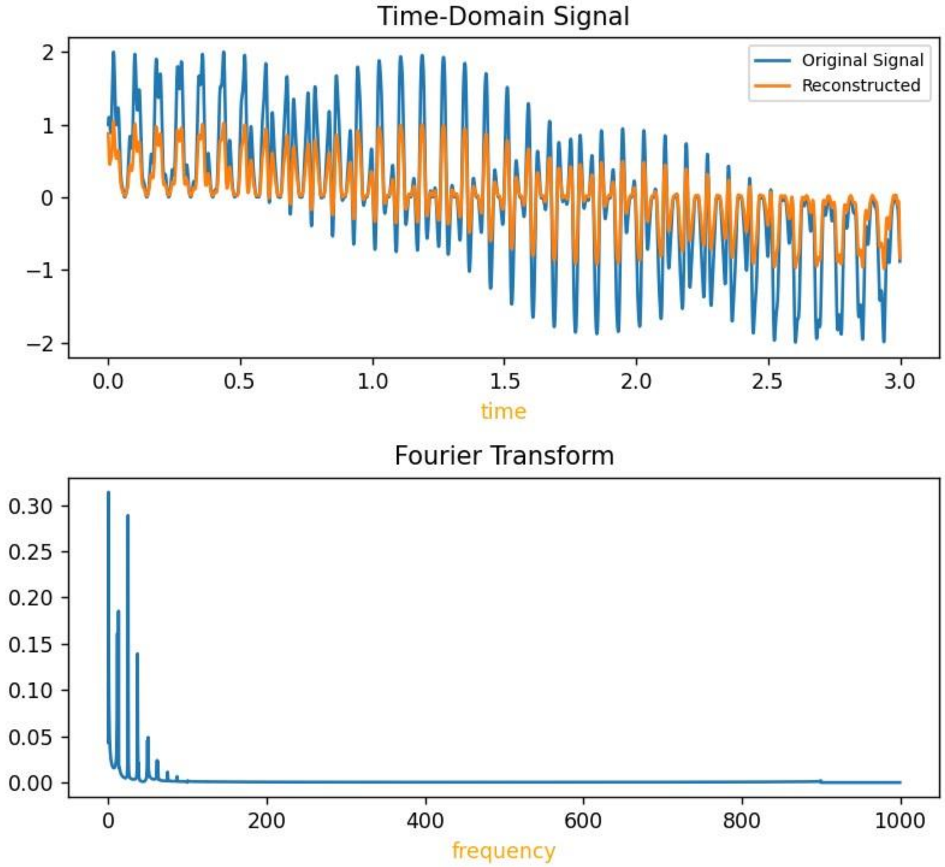
۱. محاسبه ضرایب فوریه با ضرب داخلی



شکل 3-3-2 : ضرایب فوریه شیفت نشده سیگنال

۲. بازیابی سیگنال

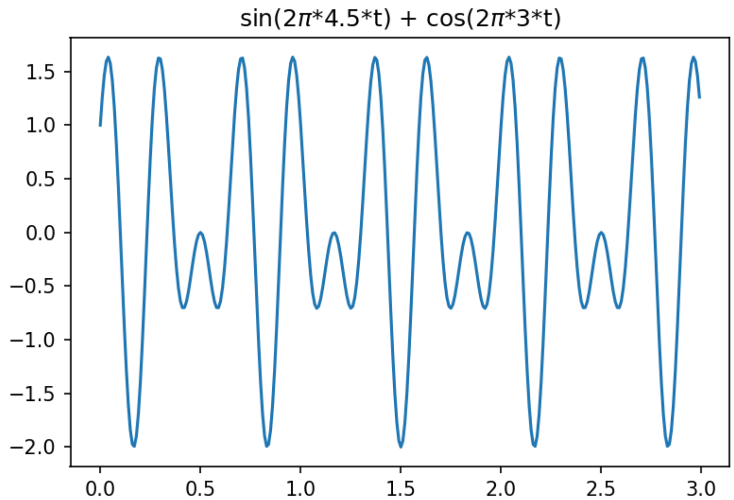
بازیابی سیگنال در طول زمان به طور جداگانه در فایل real-time.py انجام شده و در پروژه ضمیمه شده است. در ادامه یک shot از آن را مشاهده می کنیم.



شکل 3-3-3 : بازیابی پویای سیگنال از روی ضرایب سری فوریه در یک shot

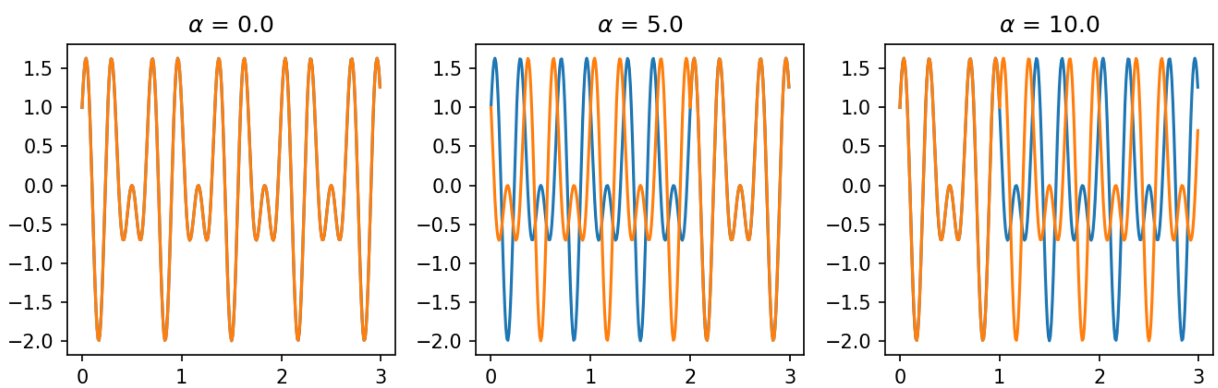
در ژوپیتر نوت بوک به دلیل عدم استفاده از کتابخانه های گرافیکی امکان نمایش بازیابی به صورت پویا میسر نبود و به همین خاطر فقط نتیجه نهایی سیگنال بازیابی شده در آنجا نمایش داده شده است ولی همان طور که گفته شد قطعه کد این بخش در یک فایل جداگانه قرار دارد که با اجرای می توان بازیابی را به صورت پویا مشاهده کرد.

د)



شکل 3-4-1 : نمودار سیگنال ساخته شده در حوزه زمان

در ادامه مشاهده می کنیم که سیگنال های بازیابی شده برای مقادیر غیر صفر آلفا با سیگنال اصلی متفاوت است.

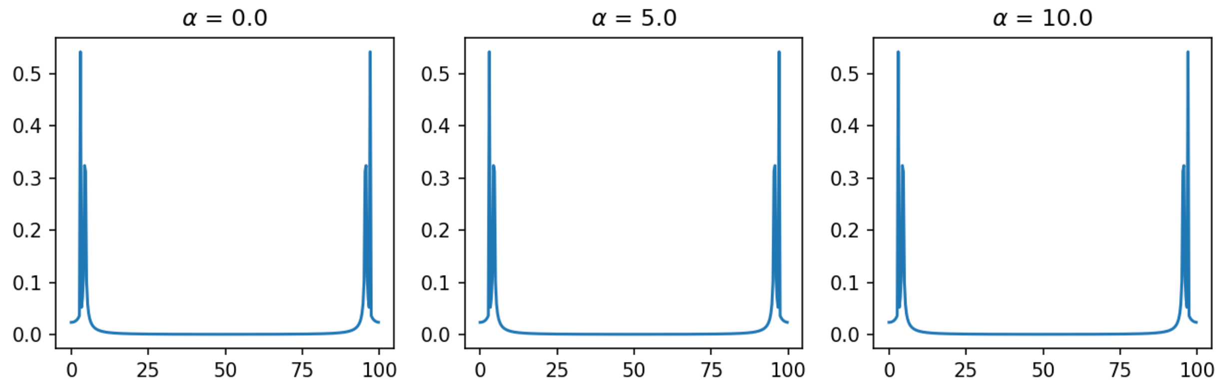


شکل 3-4-2 : سیگنال های بازیابی شده برای مقادیر مختلف آلفا

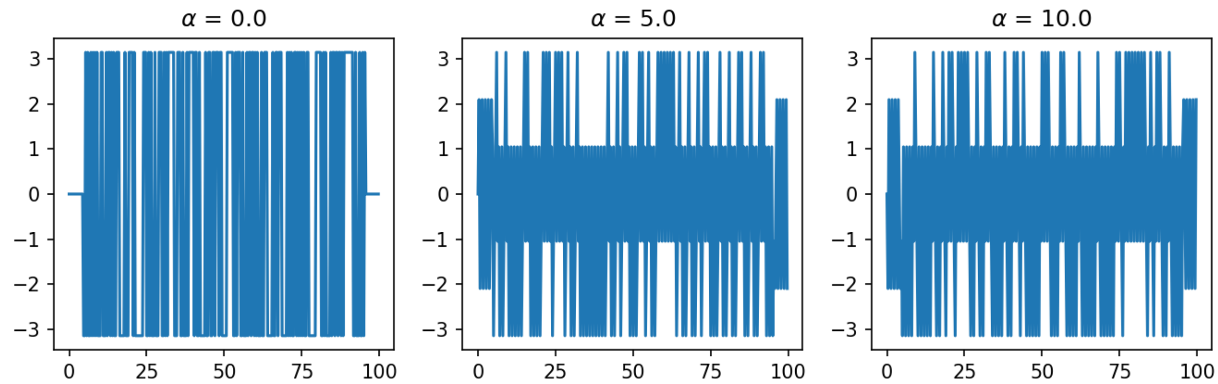
در ادامه دلیل این تفاوت را بررسی خواهیم کرد.

همان طور که در شکل 3-4-3 می بینیم، بزرگی تبدیل فوریه برای تمام مقادیر آلفا یکسان است ولی با این حال مقادیر غیر صفر آلفا نمی توانند سیگنال اصلی را به درستی بازیابی کنند.

دلیل این اتفاق تفاوت نمودار زاویه تبدیل های فوریه به ازای آلفا های غیر صفر است (چون تبدیل فوریه یک عدد مختلط است و فقط بزرگی آن اهمیت ندارد) که در شکل 3-4-4 قابل مشاهده است. در نتیجه به لزوم نرمالایز کردن پارامتر زمان هنگام محاسبه تبدیل فوریه یک سیگنال پی میبریم که باید بین ۰ و ۱ باشد. در غیر این صورت تبدیل فوریه به درستی محاسبه نخواهد شد.

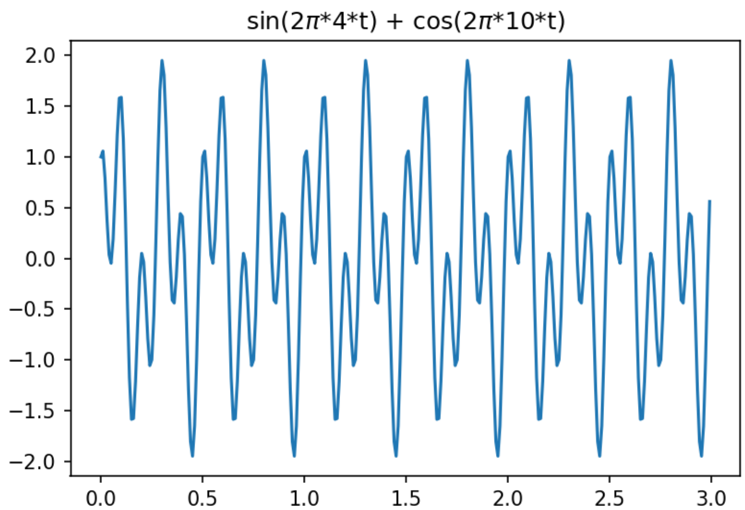


شکل 3-4-3 : بزرگی (Amplitude) تبدیل فوریه برای آلفا های مختلف

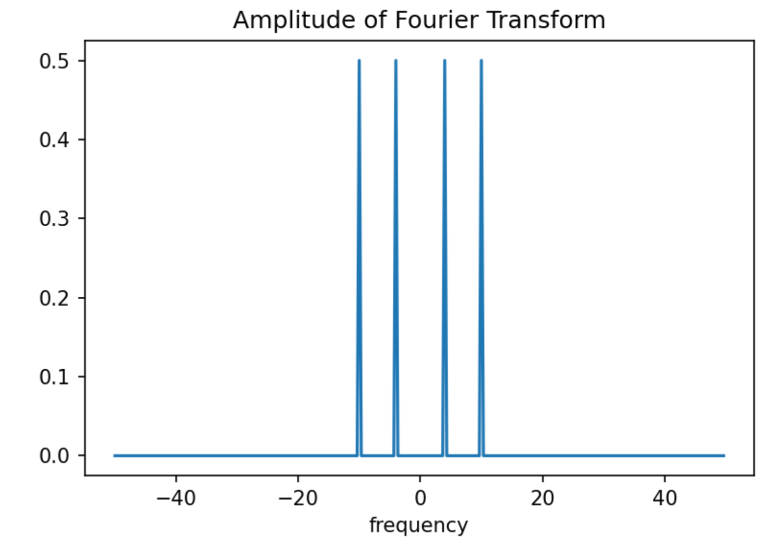


شکل 3-4-4 : زاویه (Angle) تبدیل فوریه برای آلفا های مختلف

۵)

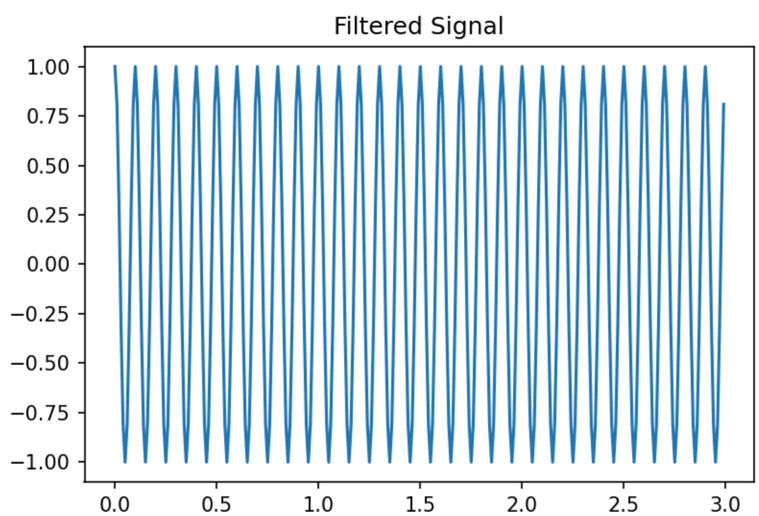


شکل 3-5-1 : نمودار سیگنال اولیه در حوزه زمان



شکل 3-5-2 : تبدیل فوریه سیگنال اولیه

در ادامه با حذف ضرایب مربوط به فرکانس 4Hz از تبدیل فوریه، ضرایب جدید را به حوزه زمان برده و رسم میکنیم. (البته باید توجه کنیم که فرکانس های مربوطه در هر دو سمت مثبت و منفی محور فرکانس را حذف کنیم)

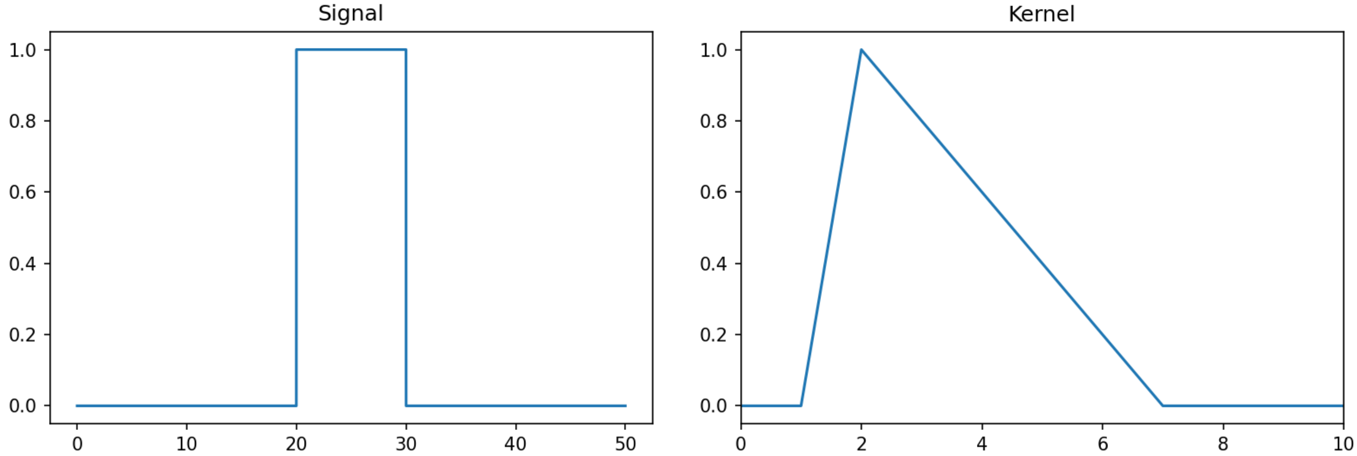


شکل 3-5-3 : سیگنال فیلتر شده

میبینیم که فقط سیگنال مربوط به فرکانس 10Hz باقی مانده است و اثری از فرکانس های دیگر نیست.

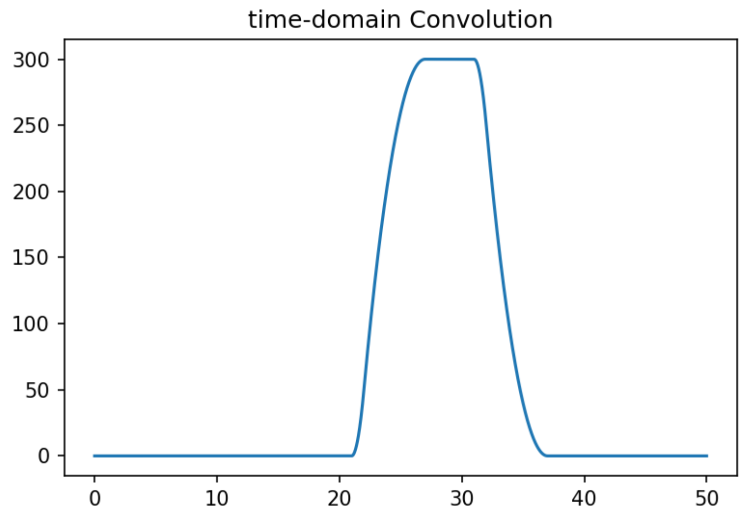
سوال ۴

محاسبه کانولوشن در حوزه فرکانسی

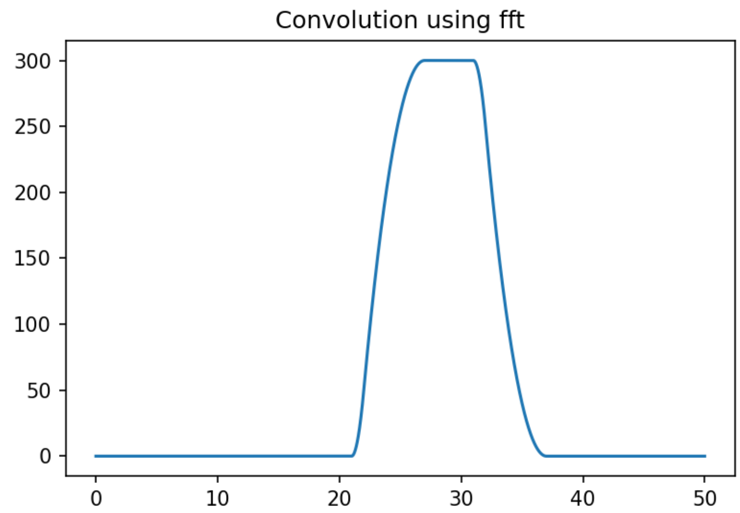


شکل 4-1-1 : نمودار سیگنال و کرنل مورد نظر

در ادامه به دو روش کانولوشن سیگنال و کرنل را محاسبه می کنیم. مشاهده می کنیم که نتیجه حاصل در هر دو حالت همان طور که انتظار داشتیم یکسان می باشد.



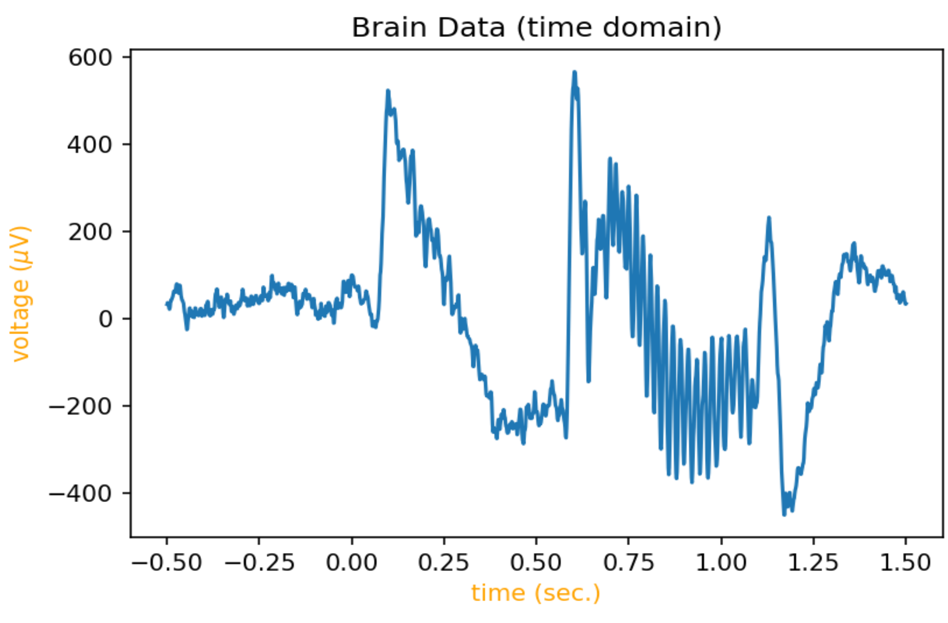
شکل 4-1-2 : محاسبه کانولوشن با تابع np.convolve



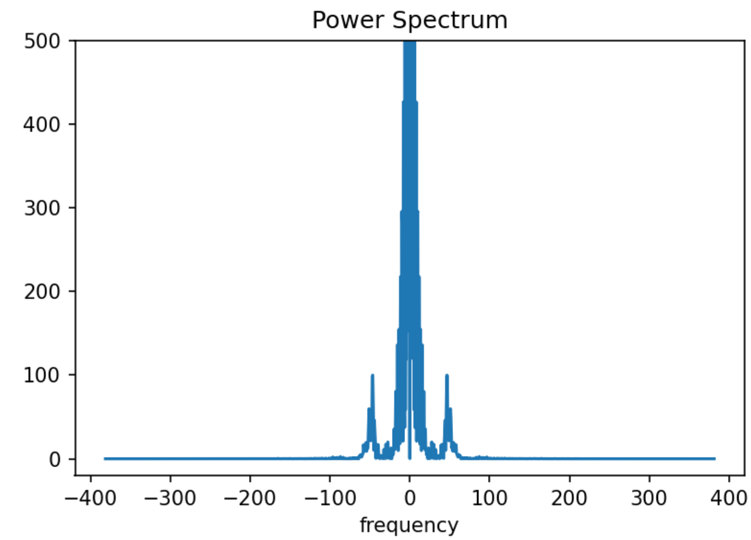
شکل 4-1-3 : محاسبه کانولوشن به کمک تبدیل فوریه

فیلتر کردن سیگنال در یک بعد (Narrow band Temporal Filtering)

الف)

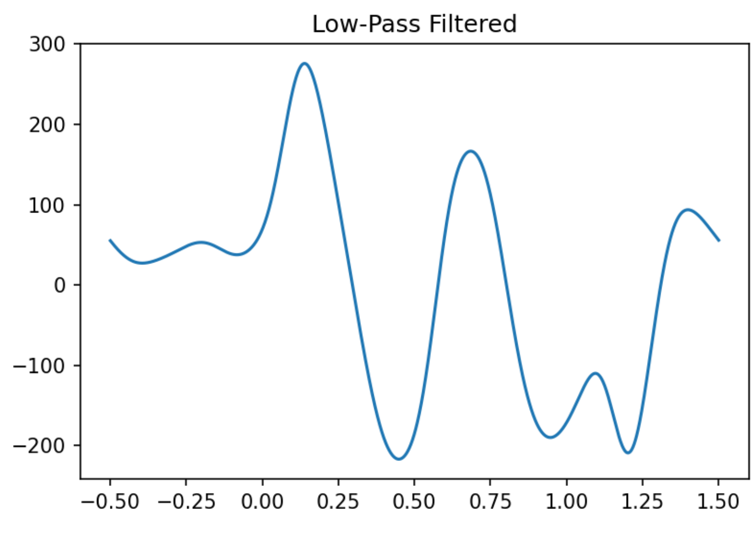


شکل 4-2-1 : نمودار سیگنال (ولتاژ بر حسب زمان)



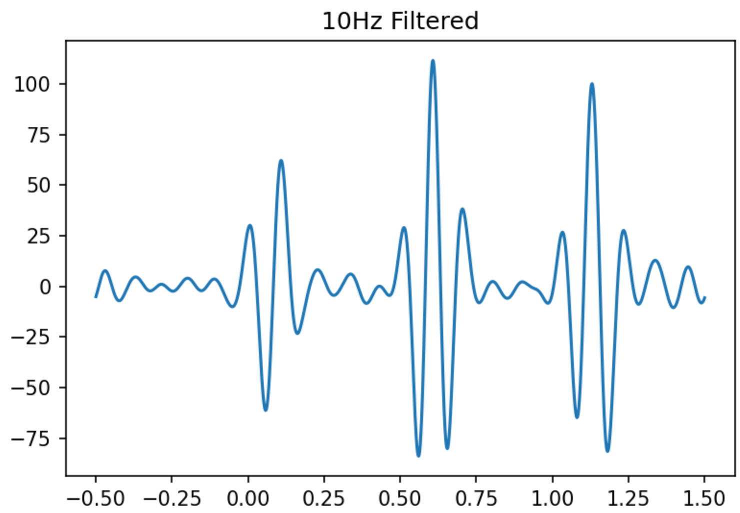
شکل 4-2-2 : نمودار spectrum سیگنال مغز در حوزه فرکانس

ابتدا سیگنال را برای فرکانس انتخابی 0Hz با تابع گوسی فیلتر می کنیم که در حقیقت یک فیلتر پایین گذر خواهد بود (شکل 4-2-3).



شکل 4-2-3 : سیگنال فیلتر شده با فیلتر گوسی پایین گذر (فرکانس انتخابی 0Hz)

سپس برای بار دوم سیگنال 10Hz را برای فیلتر کردن انتخاب میکنیم و تابع گوسی شیفت یافته را در ضرایب فوریه ضرب می کنیم. (شکل 4-2-4)



شکل 4-2-4 : سیگنال فیلتر شده با فیلتر گوسی شیفت یافته (فرکانس 10Hz)

ب)

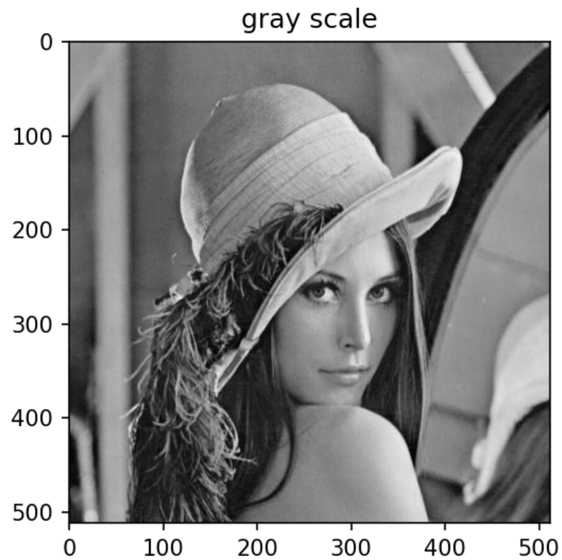
از نمودار spectrum متوجه می شویم که که فرکانس های نزدیک تر به صفر توان بزرگ تری از سیگنال را تشکیل می دهند. به همین خاطر است که پس از اعمال فیلتر های بخش قبل و بازیابی سیگنال های به دست آمده، دامنه سیگنالی که از فیلتر 0Hz به دست آمده بود بیشتر از دامنه سیگنال به دست آمده از سیگنال 10Hz می شود. اگر فرکانس های خیلی بالاتر را فیلتر می کردیم این دامنه کمتر و کمتر می شد ولی برای قابل مشاهده بودن نمودار در اینجا سیگنال 10Hz را انتخاب کردیم تا فرکانس آن برای تشخیص درستی فیلتر به راحتی قابل تشخیص باشد.

فیلتر کردن عکس در دو بعد (Image Filtering 2D)

شکل 4-3-1 : تصویر مورد استفاده در پردازش به صورت RGB

Low Pass Filtering

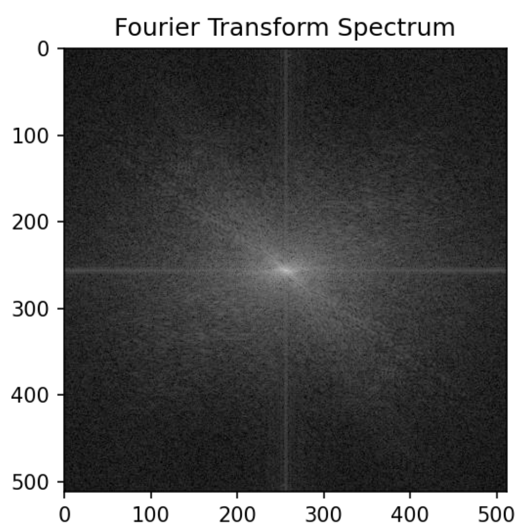
الف)



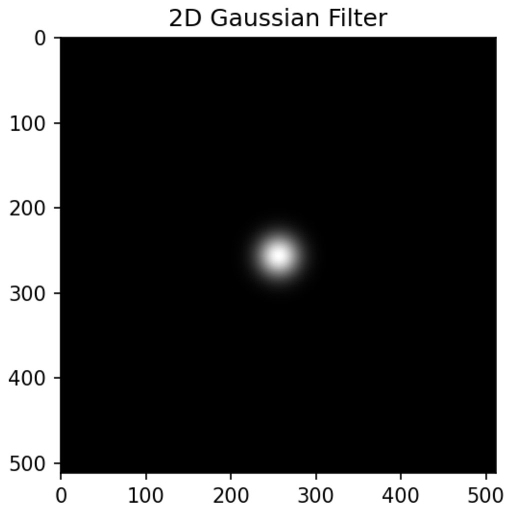
شکل 4-3-2 : عکس سیاه و سفید

ب)

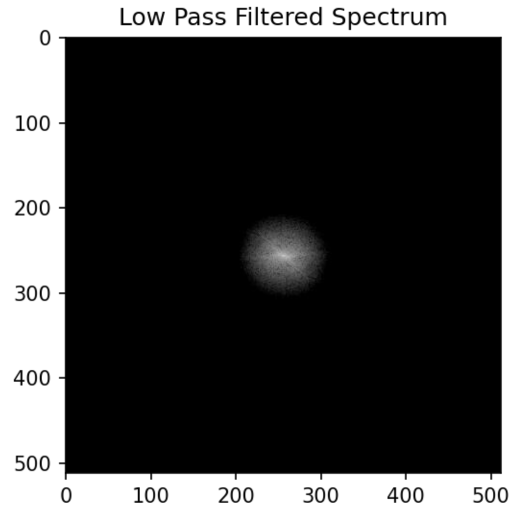
در اینجا انتظار داریم که اعدادنزدیک به صفر به صورت رنگ سیاه و اعداد بزرگ تر (نزدیک به ۲۵۵) به رنگ سفید نمایش داده شوند. ولی چون از تابع log برای نمایش spectrum استفاده می کنیم، واضح است که مقادیر کوچک و نزدیک به صفر اعداد منفی بزرگی تولید خواهند کرد که تصویر را بر هم خواهد زد. به همین منظور در این سوال قبل از نمایش spectrum به کمک تابع تابع لگاریتمی، همواره مقادیر بین صفر و ۱ را با عدد ۱ جایگزین می کنیم تا تصویر بهتری را ملاحظه کنیم.



شکل 4-3-3 : Spectrum تبدیل فوریه دو بعدی (fft2)

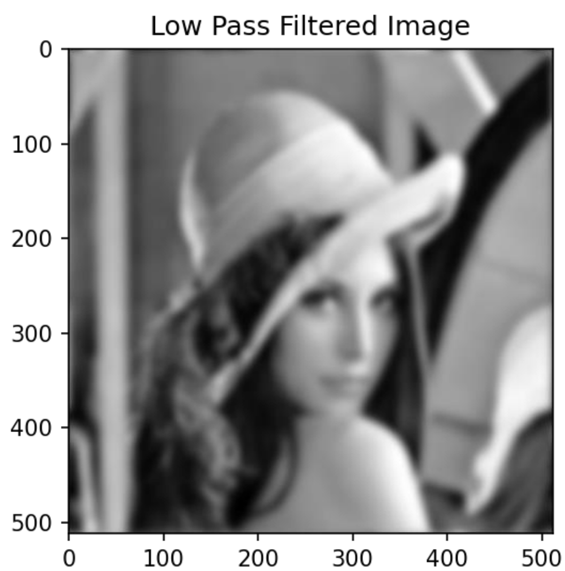


شکل 4-3-4 : فیلتر گوسی در دو بعد (پایین گذر)

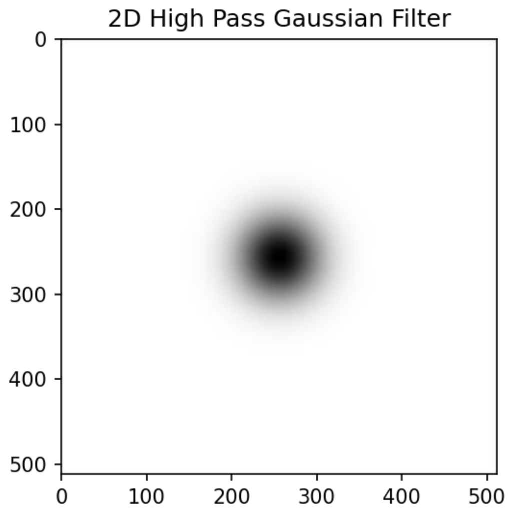


شکل 5-3-4 : Spectrum ضرایب فوریه فیلتر شده (پایین گذر)

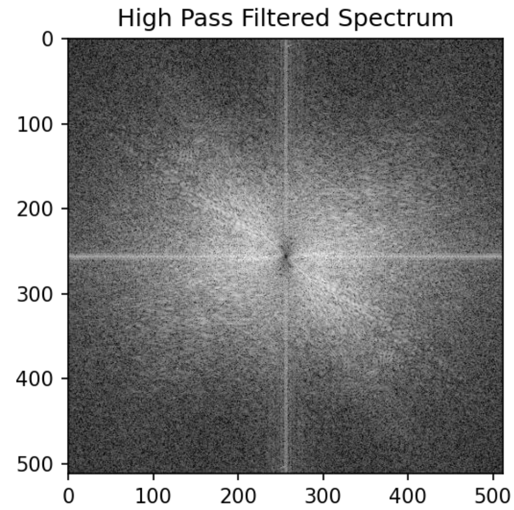
در نهایت تصویر سیاه و سفید فیلتر شده (پایین گذر) را از روی ضرایب فوریه فیلتر شده رسم می کنیم.



شکل 6-3-4 : تصویر سیاه و سفید فیلتر شده (پایین گذر)

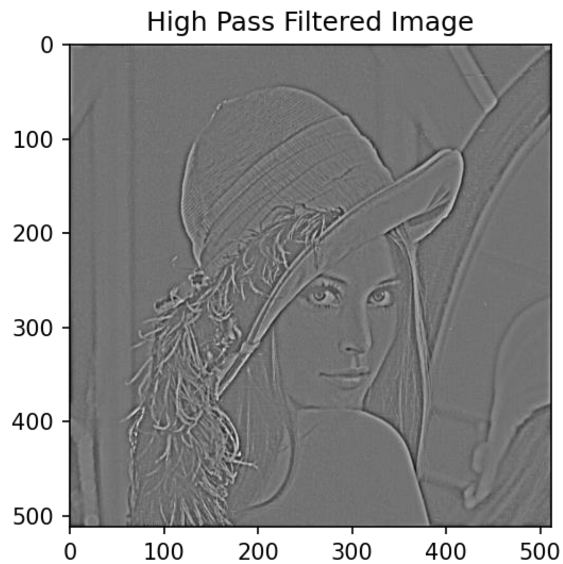


شکل 4-3-7 : فیلتر گوسی در دو بعد (بالا گذر)



شکل 4-3-8 : Spectrum ضرایب فوریه فیلتر شده (بالا گذر)

در نهایت تصویر سیاه و سفید فیلتر شده (بالا گذر) را از روی ضرایب فوریه فیلتر شده رسم می کنیم.



شکل 4-3-9 : تصویر سیاه و سفید فیلتر شده (بالا گذر)

توجیه ویژگی های Low Pass Filtering

وقتی از فیلتر پایین گذر استفاده می کنیم، فرکانس های پایین رد شده ولی فرکانس های بالاتر حذف می شوند. این یعنی تغییرات ناگهانی پیکسل ها را نادیده می گیریم و تغییرات کلی تر و آرام تر را نگه می داریم. در نتیجه تصویر حاصل تار می شود و جزئیات آن حذف می شود.

توجیه ویژگی های High Pass Filtering

اینبار برعکس حالت قبل، فرکانس های بالا رد می شوند ولی فرکانس های پایین دور ریخته می شوند. در نتیجه تغییرات ناگهانی پیکسل ها بیشتر مورد توجه قرار میگیرد و لبه های اشکال بیشتر به چشم می آیند در صورتی که کلیات تصویر را از دست می دهیم.