مسئله ۱.

X_i را بدین صورت در نظر می‌گیریم:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{در پرتاب } i \text{ام ۴ بیاید} \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

از آنجایی که توزیع X_i برنولی است، داریم که:

$$E[X_i] = p = \frac{1}{6} \quad , \quad var(X_i) = pq = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

حال Y را بدین صورت فرض می‌کنیم:

$$Y = \sum_{i=1}^{500} X_i$$

$$Var(Y) = 500 \times \frac{5}{36} = \frac{625}{9} = \sigma^2 \Rightarrow \sigma = \frac{25}{3}$$

$$E[Y] = 500 \times \frac{1}{6} = \frac{250}{3}$$

$$Z = \frac{Y - \frac{250}{3}}{\frac{25}{3}} \sim Normal(0,1)$$

$\alpha = 0/05 \Rightarrow P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \quad , \quad z_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$

$z_{0/025} = 1/96$

$\Rightarrow P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \dfrac{Y - \frac{250}{3}}{\frac{25}{3}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$

$\Rightarrow \frac{250}{3} - 1/96 \times \frac{25}{3} \leq Y \leq \frac{250}{3} + 1/96 \times \frac{25}{3}$

$67 \leq Y \leq 99/66$

بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای Y، $[67, 99/66]$ است.

مسئله 2.

الف)

$$L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\theta)$$

$$f_{X_i}(x_i, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 \le x_i \le \theta \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \Rightarrow L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & 1 \le i \le n,\ 0 \le x_i \le \theta \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

حال برای آنکه $\frac{1}{\theta^n}$ بیشینه شود، باید θ کمینه باشد و از آنجاکه x_i ها همگی در بازه $[0, \theta]$ هستند پس

کمترین مقدار θ، ماکسیمم x_i ها است.

$$\hat{\theta} = Max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ب) تخمین گری Unbiased است که $E[\hat{\theta}] = \theta$. حال $E[\hat{\theta}]$ را محاسبه می کنیم:

Y را بدین صورت تعریف می کنیم: $Y = Max(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X_1 \le y, X_2 \le y, \dots, X_n \le y) = P(X_i \le y)^n$$

$$P(X_i \le y) = F_{X_i}(y) = \frac{y-0}{\theta-0} = \frac{y}{\theta}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n \Rightarrow f_Y(y) = \frac{n y^{n-1}}{\theta^n}$$

$$E[\hat{\theta}] = E[Y] = \int_0^\theta y \frac{n y^{n-1}}{\theta^n} dy = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y^n dy = \frac{n}{\theta^n} \times \frac{y^{n+1}}{n+1} \Big]_0^\theta$$

$$\Rightarrow E[\hat{\theta}] = \frac{n}{n+1} \theta \Rightarrow E[\hat{\theta}] \neq \theta$$

پس این تخمین‌گر biased است.

مسئله 3.

برای μ و σ^2 تخمین گر زیر Unbiased هستند.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad , \quad \bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} \Rightarrow E(\bar{S}^2) = \sigma^2$$

$$var(\bar{X}) = E[\bar{X}^2] - E[\bar{X}]^2$$

$$\Rightarrow E[\bar{X}^2] = var(\bar{X}) + E[\bar{X}]^2 \quad , \quad var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \times n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad , \quad E[\bar{X}] = \mu$$

$$\Rightarrow E[\bar{X}^2] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

حال $E[\frac{\bar{S}^2}{n}]$ را به دست می آوریم:

$$E[\frac{\bar{S}^2}{n}] = \frac{1}{n} E[\bar{S}^2] = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E[\bar{X}^2 - \frac{\bar{S}^2}{n}] = E[\bar{X}^2] - E[\frac{\bar{S}^2}{n}] = \mu^2$$

پس $\bar{X}^2 - \frac{\bar{S}^2}{n}$ تخمین گر Unbiased برای μ^2 است و بدین شکل خواهد بود:

$$\hat{\mu}^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

مسئله 4.

الف) تعداد کل بلدرچین ها را N درنظر می گیریم و پیشامد آنکه 2 بلدرچین از 6 بلدرچین علامت دار باشند را X می نامیم. حال داریم که:

$$L(N|X) = \frac{\binom{3}{2}\binom{N-3}{4}}{\binom{N}{6}} = \frac{3 \times \frac{(N-3)!}{4!\,(N-7)!}}{\frac{N!}{6!\,(N-6)!}} = \frac{3\times 6!}{4!} \times \frac{(N-6)!}{(N-7)!} \times \frac{(N-3)!}{N!}$$

$$\Rightarrow L(N|X) = \frac{90(N-6)}{N(N-1)(N-2)}$$

با توجه به عبارت های بالا $N \geq 7$ می باشد.

حال باید مقدار N را طوری بیابیم که MLE بیشینه شود: (از آزمون نسبت بهره می جوییم)

$$\frac{L(N|X)}{L(N-1|X)} = \frac{\cancel{90}(N-6)}{N\cancel{(N-1)}\cancel{(N-2)}} \times \frac{\cancel{(N-1)}\cancel{(N-2)}(N-3)}{\cancel{90}(N-7)} = \frac{N^2-9N+18}{N^2-7N} = 1 + \frac{18-2N}{N^2-7N}$$

با توجه با عبارت بالا، به ازای $N>9$، تابع نزولی می شود، پس کافی است برای پیدا کردن

بیشینه، 3 حالت $N=7$ ، $N=8$ و $N=9$ را در نظر بگیریم:

$$L(N=7 \mid X) = \frac{3}{7} \quad , \quad L(N=8 \mid X) = L(N=9 \mid X) = \frac{15}{28}$$

به دلیل آنکه تخمین گر MLE است، داریم که:

$$\boxed{\hat{N} = 8 \text{ یا } 9}$$

مسئله 5 .

الف)

$$\hat{\eta} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \Rightarrow E[\hat{\eta}] = \sum_{i=1}^{n} E[\alpha_i x_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E[\eta + \varepsilon_i]$$

$$\Rightarrow \boxed{E[\hat{\eta}] = \eta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

$\hat{\eta}$ تخمین‌گر Unbiased است، پس:

$$E[\hat{\eta}] = \eta \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1}$$

$$var(\hat{\eta}) = \sum_{i=1}^{n} var(\alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \, var(\eta + \varepsilon_i) = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2}$$

با روش ضرایب نامعین لاگرانژ کمینه واریانس را با شرط $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ را می‌یابیم:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 \quad , \quad g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1$$

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \lambda g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 2\alpha_i \sigma_i^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \alpha_i = \frac{-\lambda}{2\sigma_i^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{-\lambda}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{-2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

حال α_i را می یابیم:

$$\alpha_i = \frac{-\lambda}{2\sigma_i^2} = \frac{\cancel{2}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_j^2}} \times \frac{1}{\cancel{2}\sigma_i^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_i = \frac{1}{\sigma_i^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_j^2}}}$$

و تخمین گر ما بدین صورت خواهد بود:

$$\boxed{\hat{\eta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_j^2}}}$$