مسئله ۱:

الف) L_i به معنای شکست در مرحله i ام و C به معنای توانا بودن است.

حال احتمال توانا بودن به شرط شکست در مرحله ۱ و 2 را محاسبه می کنیم:

$$P(C \mid L_1, L_2) = \frac{P(C) \times P(L_1, L_2 \mid C)}{P(L_1, L_2)}$$

با استفاده از قانون احتمال کل $P(L_1, L_2)$ را محاسبه می کنیم:

$$P(L_1, L_2) = P(L_1, L_2 \mid T) \times P(T) + P(L_1, L_2 \mid T') \times P(T')$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{42}{100}$$

$$\Longrightarrow P(C \mid L_1, L_2) = \frac{\frac{4}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10}}{\frac{42}{100}} = \frac{3 \times 3 \times 4}{42 \times 10} = \frac{3}{35}$$

و همچنین نتیجه می شود که $P(c' | L_1, L_2) = \frac{32}{35}$

حال احتمال مورد نظر را به دست می آوریم (قانون احتمال کل):

$$P(L_3) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{35} + \frac{8}{10} \times \frac{32}{35} = \frac{265}{350} = \frac{53}{70}$$

ب) W_i به معنای پیروزی در مرحله i ام است.

و احتمال توانا بودن را مانند بخش قبل به دست می آوریم:

$$P(C \mid \underbrace{(L_2, W_1) \text{ یا } (W_2, L_1)}_{D}) = \frac{2 \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{10}}{2\left(\frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{6}{10}\right)} = \frac{7}{15}$$

احتمال کل

$$P(C \mid D) = \frac{7}{15} \Longrightarrow P(C' \mid D) = \frac{8}{15}$$

حال احتمال مورد نظر را به دست می آوریم (قانون احتمال کل):

$$P(L_3) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{15} + \frac{8}{10} \times \frac{8}{15} = \frac{85}{150} = \frac{17}{30}$$

ج) مانند بخش های قبل عمل می کنیم:

$$P(C \mid W_2, W_1) = \frac{\frac{4}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10}}{\frac{4}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{2}{10}} = \frac{49}{55}$$

احتمال کل

و همچنین نتیجه می شود $P(C' \mid W_2, W_1) = \frac{6}{55}$

حال احتمال مورد نظر را به دست می آوریم (قانون احتمال کل):

$$P(L_3) = \frac{3}{10} \times \frac{49}{55} + \frac{8}{10} \times \frac{6}{55} = \frac{195}{550} = \frac{39}{110}$$

مسئله 2 :

تابعی به صورت $D(n)$ تعریف می کنیم که برابر است با تعداد پریش های جایگشت های n تایی.

و با استفاده از اصل شمول و عدم شمول $D(n)$ را محاسبه می کنیم:

$$D(n) = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

$$D(n) = n! - \frac{\overbrace{n(n-1)!}^{n!}}{1!} + \frac{\overbrace{n(n-1)\,(n-2)!}^{n!}}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

$$D(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

$$\boxed{D(n) = n!\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right)}$$

حال برای محاسبه $f(n,r)$ بدین صورت عمل می‌کنیم که ابتدا r نقطه انتخاب کرده و در تعداد پریش $(n-r)$ ضرب می‌کنیم.

$$f(n,r) = \binom{n}{r} \times D(n-r)$$

$$f(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \times (n-r)! \left(1 + \sum_{i=1}^{n-r} \frac{(-1)^i}{i!}\right)$$

$$f(n,r) = \frac{n!}{r!} \left(1 + \sum_{i=1}^{n-r} \frac{(-1)^i}{i!}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n,r)}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{r!\,n!} \left(1 + \sum_{i=1}^{n-r} \frac{(-1)^i}{i!}\right) = \frac{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}}{r!}$$

حال سری زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = -\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$$

و می‌دانیم که:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

اگر $x=-1$ باشد، آنگاه:

$$\frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$$

پس

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = -1 + \frac{1}{e}$$

و حاصل حد را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n,r)}{n!} = \frac{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}}{r!} = \frac{1 + \frac{1}{e} - 1}{r!} = \frac{1}{er!}$$

مسئله 3:

الف) اگر از صفر شروع کنیم و با یک متحرک پس از N حرکت به خانه X برسیم و سپس با متحرک دیگر به خانه صفر بازگردیم، دنباله ای از L و R به طول $2N$ خواهیم داشت که تعداد L و R آن برابر است.
چون R و L احتمال برابری دارند پس احتمال تشکیل این دنباله $\left(\frac{1}{2}\right)^{2N}$ خواهد بود و تعداد دنباله های مورد نظر برابر خواهد بود با $\binom{N}{N}\binom{2N}{N} = \binom{2N}{N}$. پس احتمال اینکه بعد از N قدم این دو متحرک در محل یکسانی باشند برابر است با:

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2N}\binom{2N}{N} = \frac{\binom{2N}{N}}{4^N}$$

ب) استدلال این بخش نیز مانند بخش قبل است. حرکت راست و بالا را

حرکت A و حرکت چپ و پایین را حرکت B می‌نامیم.

طبق استدلال بخش قبل تعداد حرکت A برابر است با تعداد حرکت B

که برابر است با N و باید تعداد حرکت راست و چپ برابر باشند

(حرکت بالا و پایین به صورت یکتا مشخص می‌شوند.)

پس کل حالات برابر است با:

$$\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}\binom{N}{i}=\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}\binom{N}{N-i}=\binom{2N}{N}$$

بالا و پایین و چپ و راست هرکدام احتمال $\frac{1}{4}$ دارند، پس احتمال مورد نظر بدین صورت

است:

جنبش حرکت A

$$P(B)=\left(\frac{1}{4}\right)^{2N}\times\binom{2N}{N}\times\binom{2N}{N}=\frac{\binom{2N}{N}^2}{16^N}$$

مسئله 4 : اگر ستار بخواهد برنده شود، آخرین حرف خارج شده برای گولگوش یا معین خواهد بود. پس طبق همین دو حالت، احتمال برنده شدن ستار را می یابیم.

حالت اول: حرف آخر برای گولگوش:

کل حروف با تکرار 13 تا ست، پس از 12 تای باقیمانده 4 حرف برای گولگوش خواهد بود و در 8 جایگاه باقیمانده، حرف آخر برای معین است پس از 7 حرف باقیمانده 3 حرف برای معین انتخاب می شود پس تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{12}{4}\binom{7}{3} \times 4! \times 4! \times \underbrace{\frac{5!}{2!2!}}_{\text{جایگشت های هر اسم}} = 11 \times 9 \times 5 \times 7 \times 5 \times 4! \times 4! \times 30$$

حالت دوم: حرف آخر برای معین:

$$\binom{12}{3}\binom{8}{4} \times 4! \times 4! \times \underbrace{\frac{5!}{2!2!}}_{\text{جایگشت های هر اسم}} = 2 \times 11 \times 10 \times 2 \times 7 \times 5 \times 4! \times 4! \times 30$$

و کل جایگشت ها برابر است با : $\frac{13!}{2!\,2!}$ (جایگشت باتکرار)

پس احتمال مورد نظر برابر است با :

$$P(\text{برنده شدن شمار}) = \frac{11 \times 5 \times 7 \times 5 \times 4! \times 4! \times 30 (9+8)}{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2}$$

$$= \frac{17 \times 5}{13 \times 2 \times 9} = \frac{85}{234}$$

مسئله 5:

الف) دنباله E_n را افزایشی فرض می‌کنیم، F_n را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$F_1 = E_1 \quad \text{و} \quad F_n = E_n \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right)' = E_n E'_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

صعودی بودن

F_n، بخشی از E_n است که در E_i $(i<n)$ قرار ندارد

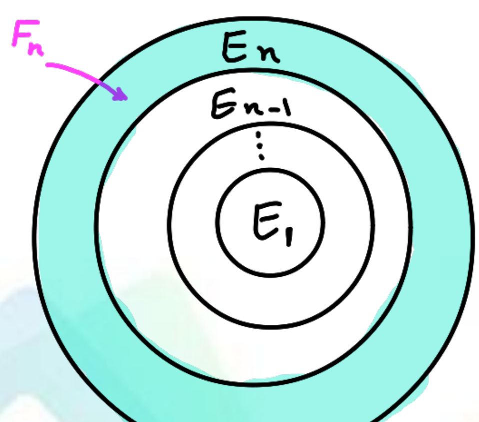
پس $F_i \cap F_j = \emptyset$ $(i \neq j)$.

درواقع F_iها دو به دو ناسازگارند پس برای هر $n \geq 1$ روابط زیر برقرار است:

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

و

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$



حال روابط زیر را می نویسیم:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right)$$

$$P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(F_i)$$

$$\longrightarrow P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$$

$$\longrightarrow P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

حال دنباله E_n را b هستی فرض می کنیم، پس E_n' یک دنباله افزایشی است.

و می دانیم که $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i'\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n')$ و طبق دمورگان می توان بدین صورت نوشت:

$$P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)'\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n')$$

$$\xrightarrow{P(A)+P(A')=1} 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

$$\rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} P(E_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)$$

کاهشی بودن

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} P(E_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right)$$

ب) در ابتدا اثبات می کنیم که : $\lim_{n\to\infty} \frac{P(C_{n+1})}{P(C_n)} = 0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + \sum_{i=n}^{\infty} x_i$$

حال حد عبارت را زمانی که $n \to \infty$ حساب می کنیم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} x_i$$

و از آنجایی که می دانیم $\sum_{i=1}^{\infty} x_i < \infty$ پس نتیجه می شود:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} x_i = 0$$

اثبات به اتمام رسید.

و نتیجه می‌شود که از جمع دنباله‌ها از یک جایی به بعد برابر ۰ است و چون احتمال بزرگتر مساوی ۰ است از یک جایی به بعد دنباله‌های $C_{n+1} - C_n$ ۰ می‌شوند.

$$P\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} C_k}_{D_n}\Big) = P\Big(\lim_{i\to\infty} \underbrace{\bigcap_{n=0}^{i} D_n}_{E_i}\Big)$$

و می‌توان نتیجه گرفت که E_i کاهشی است.

و از نتیجه بخش قبل استفاده می‌کنیم:

$$P\big(\lim_{i\to\infty} E_i\big) = \lim_{i\to\infty} P(E_i) = \lim_{i\to\infty} P\Big(\underbrace{\bigcup_{k=i}^{\infty} C_k}_{F_j}\Big)$$

و می‌توان نتیجه گرفت که F_j افزایشی است.

$$\lim_{i\to\infty} P\Big(\bigcup_{k=i}^{\infty} C_k\Big) = \lim_{i\to\infty} P\big(\lim_{j\to\infty} F_j\big)$$

$$= \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} P(D_j)$$

$$= \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} P\Big(\bigcup_{k=i}^{j} C_k\Big)$$

حال $\bigcup_{k=1}^{j} C_k$ را بازنویسی کنیم:

$$\bigcup_{k=1}^{j} C_k = C_i \cup C_{i+1} \cup \dots \cup C_j$$
$$= C_i \cup (C_{i+1} - C_i) \cup \dots \cup (C_j - C_{j-1})$$

$$P(\bigcup_{k=i}^{j} C_k) \leq P(C_i) + \sum_{k=i}^{j-1} P(C_{k+1} - C_k)$$

$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} P(\bigcup_{k=i}^{j} C_k) \leq \lim_{i\to\infty} P(C_i) + \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} \sum_{k=i}^{j-1} P(C_{k+1} - C_k)$$

$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} P(\bigcup_{k=i}^{j} C_k) \leq 0$$

و همچنین طبق اصول احتمال، احتمال هر رویدادی بزرگتر مساوی ۰ است.

در نتیجه

$$\boxed{P(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k) = 0}$$

مسئله 6: در کل $\binom{n+1}{2}$ عدد داریم و بزرگترین عدد در سطر آخر قرار دارد

و اعداد را در سطر آخر به $n! \times \binom{\binom{n+1}{2}-1}{n-1}$ طریق می چینیم و حال مسئله با بازگشتی را حل می کنیم:

$$f(n) = \underbrace{\binom{\binom{n+1}{2}-1}{n-1} \times n!}_{g(n)} \times f(n-1)$$

$$g(n) = \overset{n}{\cancel{n!}} \times \frac{\left(\frac{(n+2)(n-1)}{2}\right)!}{\cancel{(n-1)!}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!} = n \times \frac{\left(\frac{(n+2)(n-1)}{2}\right)!}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!}$$

و اگر رابطه بازگشتی را تا $f(1)=1$ ادامه دهیم به عبارت زیر می رسیم:

$$f(n) = g(n) \times g(n-1) \times g(n-2) \dots \times g(2)$$

$$f(n) = 2 \times \frac{\cancel{2!}}{1!} \times 3 \times \frac{\cancel{5!}}{\cancel{3!}_{\,3}} \times 4 \times \frac{9!}{\cancel{6!}_{\,6}} \times \cdots \times n \times \frac{\left(\frac{(n+2)(n-1)}{2}\right)!}{\left(\cancel{\frac{n(n-1)}{2}}\right)!_{\,n(n-1)}}$$

$$\rightarrow f(n) = \underbrace{2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n}_{n!} \times \underbrace{\frac{1}{1} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \cdots \times \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}}}_{h(n)}$$

$$\frac{1}{h(n)} = \binom{2}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{4}{2} \times \cdots \times \binom{n}{2}$$

$$= \frac{2 \times 1}{2} \times \frac{3 \times 2}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} \times \cdots \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n! \times (n-1)!}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow f(n) = n! \times \frac{2^{n-1}}{n! \times (n-1)!} \times \left(\frac{n^2+n-2}{2}\right)! = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \times \left(\frac{n^2+n-2}{2}\right)!$$

پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{\frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \times \left(\frac{n^2+n}{2} - 1\right)!}{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)!} = \frac{2^{n-1}}{(n-1)! \times \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{2^{n-1} \times 2}{(n-1)!\, n\, (n+1)}$$

$$\rightarrow \boxed{P(A) = \frac{2^{n}}{(n+1)!}}$$

مسئله 7:

الف) باید اثبات کنیم که $N_n \leq 2^n - 2N_{n-1} - \cdots - 2^{n-1}N_1$.

چون N_iها بزرگتر مساوی ۰ هستند پس به این نتیجه می‌رسیم که
$N_n \leq 2^n$ (2^n برابر است با تعداد رشته‌های دودویی n بیتی)

و همچنین $2N_{n-1}$ رشته n بیتی که N_{n-1} رشته $n-1$ بیتی از F، پیشوند آن خواهند بود که در تناقض با فرض سؤال است.

پس در واقع خواهیم داشت که $N_n \leq 2^n - 2N_{n-1}$ و همینطور می‌توان ادامه داد تا به عبارت اول سؤال برسیم.

اگر یکی از رشته‌های حذف شده در $2^i N_{n-i}$ و یکی از رشته‌ها حذف شده در $2^j N_{n-j}$ تکراری باشند ($j \neq i$)، در نتیجه یکی از رشته‌ها پیشوند دیگری است. پس حکم برقرار است.

$$N_n \leq 2^n - 2N_{n-1} - \cdots - 2^{n-1} N_1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} N_i \leq 2^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{2^n}{2^i} N_i \leq 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{2^i} \leq 1}$$