مسئله ۱.

X_i هارا ساعت مطالعه درنظر می‌گیریم و حال $\bar{X}$ و $\bar{S}^2$ را می‌یابیم: $n=4$

$$\bar{X} = \frac{5+7+8+10}{4} = 7{,}5$$

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{25}{4}\right) = \frac{13}{3}$$

الف)

$$Z = \frac{\mu-\bar{X}}{\frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}} \sim Normal(0,1) \quad , \quad Z = \frac{\mu-7{,}5}{\sqrt{\frac{13}{3}}} \times 2$$

حال بازه اطمینان 95 درصدی را می‌یابیم:

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \quad , \quad \alpha = 0{,}05 \, , \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \quad , \quad 1-\alpha = 0{,}95$$

$$\Rightarrow P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le 2\,\frac{\mu-\bar{X}}{\sqrt{\frac{13}{3}}} \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow 7{,}5 - \frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{13}{3}}\times 1{,}96 \le \mu \le 7{,}5 + \frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{13}{3}}\times 1{,}96 \Rightarrow 5{,}45 \le \mu \le 9{,}54$$

بازه اطمینان 95 درصدی برای μ (میانگین درس خواندن ممدآقا)، $[5{,}45, 9{,}54]$ است.

ب) فرض صفر (H_0) و فرض جایگزین (H_1) را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

H_0: ساده بودن امتحان به شرط آنکه $4 = \mu$.

H_1: خلاف H_0.

از آنجایی که $4 = \mu$ در بازه اطمینان 95 درصدی قرار ندارد پس فرض صفر رد می‌شود.

مسئله 2.

الف) X_i را پرتاب سکه در مرحله i ام درنظر می گیریم:

X از توزیع دوجمله ای پیروی می کند: $X = \sum_{i=1}^{n=81} X_i$

$$E[X] = np = 81p \quad , \quad var(X) = npq = 81p(1-p)$$

$$Z = \frac{X - 81p}{\sqrt{81p(1-p)}} \sim Normal(0,1)$$

فرض صفر (H_0) و فرض جایگزین (H_1) را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$H_0 : p = \frac{1}{2} \quad , \quad H_1 : p \neq \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 0/05 \Rightarrow P(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le Z \le Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha \quad , \quad Z_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

$$Z_{0/025} = 1/96$$

$$\Rightarrow P(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{X - 81p}{\sqrt{81p(1-p)}} \le Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$p=\frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow \frac{81}{2}-\frac{9}{2}\times 1{,}96 \le X \le \frac{81}{2}+\frac{9}{2}\times 1{,}96 \Rightarrow \boxed{31{,}68 \le X \le 49{,}32}$$

از آنجایی که $k=27$ در بازه اطمینان ۹۵ درصدی $[31{,}68 , 49{,}32]$ قرار ندارد، پس فرض صفر را رد می‌کنیم.

ب) مانند بخش قبل به ازای $n=16$، بازه اطمینان ۹۵ درصدی را می‌یابیم: (سکه سالم $\Leftarrow p=\frac{1}{2}$)

$$\alpha=0{,}05 \Rightarrow P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \quad , \quad z_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

$$z_{0{,}025} = 1{,}96$$

$$\Rightarrow P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{X-16p}{\sqrt{16p(1-p)}} \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{4{,}08 \le X \le 11{,}92}$$

از آنجا که تعداد دیرتاب عددی صحیح است، پس:

$$\boxed{k_1 = 5} \quad , \quad \boxed{k_2 = 11}$$

مسئله 3.

الف)

از آنجایی که ۷۰ درصد اقساط مد نظر است ، فرض صفر و فرض جایگزین بدین صورت تعریف می‌شوند:

$H_0 : \mu \geq 3{,}5$

$H_1 : \mu < 3{,}5$

ب)

$$\bar{X} = \frac{140 + 200 + 900 + 1280 + 700}{1000} = 3{,}22$$

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{1000} (\bar{X} - X_i)^2 = 1{,}49$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\bar{S}^2}{n}}} \Rightarrow Z = \sqrt{1000} \times \frac{3{,}22 - 3{,}5}{\sqrt{1{,}49}} = -7{,}24 \Rightarrow Z \sim T(999)$$

حال p-value را محاسبه می‌کنیم:

$$p\text{-value} = P(t_{999} \leq -7{,}24) = 4{,}471 \times 10^{-13}$$

ج)

$t_{999}(\frac{5}{100}) = -1.64$

از آنجا که $-7.24 < -1.64$، پس در rejection region قرار گرفته است،

پس فرض صفر رد می‌شود.

مسئله 4.

الف)

X_iها از توزیع برنولی پیروی می کنند:

$$\bar{X} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i$$

فرض صفر و فرض جایگزین بدین شکل است:

$H_0 : \mu = 0/1$

$H_1 : \mu \neq 0/1$

$$P(\text{reject} \mid \mu = \tfrac{1}{10}) = P\left(\sum_{i=1}^{5} X_i > 1 \mid \mu = \tfrac{1}{10}\right)$$

$$= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{5} X_i = 0 \mid \mu = \tfrac{1}{10}\right) - P\left(\sum_{i=1}^{5} X_i = 1 \mid \mu = \tfrac{1}{10}\right)$$

$$= 1 - \left(1 - \tfrac{1}{10}\right)^5 - \binom{5}{4}\left(1 - \tfrac{1}{10}\right)^4\left(\tfrac{1}{10}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = 0/08146$$

ب)

$$P(\text{reject} \mid p = \frac{2}{10}) = P(\sum_{i=1}^{5} X_i > 1 \mid p = \frac{2}{10})$$

$$= 1 - P(\sum_{i=1}^{5} X_i = 0 \mid p = \frac{2}{10}) - P(\sum_{i=1}^{5} X_i = 1 \mid p = \frac{2}{10})$$

$$= 1 - (1 - \frac{2}{10})^5 - \binom{5}{4}(1 - \frac{2}{10})^4 (\frac{2}{10})$$

$$\Rightarrow P(\text{reject} \mid p = 0/2) = 0/26272$$

مسئله 5.

الف)

فرض صفر و فرض جایگزین به صورت زیر است:

H_0 : نمرات ترم های مجازی با حضوری تفاوت قابل توجهی ندارد.

H_1 : نمرات ترم های مجازی با حضوری تفاوت قابل توجهی دارد.

X_1: حضوری ، X_2: مجازی

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\bar{s}_1^2 + \bar{s}_2^2}{n}}} \sim T_{2(n-1)}$$

μ_1 و μ_2 برای دو ترم حضوری و مجازی در نظر می گیریم و در فرض جایگزین منظور آن است که μ_1 و μ_2 اختلاف چشمگیر داشته باشند و دو حالت پیش می آید ($\mu_2 < \mu_1$ یا $\mu_1 < \mu_2$) ،

پس آزمون دوطرفه است.

ب)

$\bar{X}_1 = 14{,}75 \quad , \quad \bar{S}_1^2 = 3{,}928$

$\bar{X}_2 = 17{,}875 \quad , \quad \bar{S}_2^2 = 1{,}5536$

$$\Rightarrow t = \sqrt{8} \times \frac{14{,}75 - 17{,}875}{\sqrt{3{,}928 + 1{,}5536}} = -3{,}77$$

حال p-value را محاسبه می‌کنیم:

$p\text{-value} = 2 \times P(t_{14} \leq -3{,}77) = 0{,}002 04$

از آنجا که $p\text{-value} < 0{,}05$ ، پس فرض صفر با سطح اهمیت 5 درصد رد می‌شود.

مسئله 6.

برای آنکه از مربع کای استفاده کنیم، امید ریاضی هر یک را می‌یابیم و X_i ، $0 \le i \le 3$ به معنای تعداد 6 است و $O(X_i)$ به معنای تعداد مشاهده‌ی آن می‌باشد:

$$E[X_0] = 100 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 57{,}87 \quad , \quad O(X_0) = 47$$

$$E[X_1] = 100 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \binom{3}{1} \times \left(\frac{1}{6}\right) = 34{,}72 \quad , \quad O(X_1) = 35$$

$$E[X_2] = 100 \times \left(\frac{5}{6}\right) \times \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 6{,}94 \quad , \quad O(X_2) = 15$$

$$E[X_3] = 100 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0{,}46 \quad , \quad O(X_3) = 3$$

$$X^2 = \sum_{i=0}^{3} \frac{(O(X_i) - E[X_i])^2}{E[X_i]} \simeq 25{,}42 \sim X^2_{(3)}$$

$$P\_value = 1 - P_{\chi^2_{(3)}}(x \leq 25{,}42) = 1{,}26 \times 10^{-5}$$

از آنجا که $p\_value < 0{,}05$، پس فرض عادلانه بودن با سطح اهمیت 5 درصد رد می‌شود.