تمرین ۳

۴۰۰۱۰۵۰۱۴

محمدعرفان سلیما

آمار و احتمال مهندسی

مسئله ۱:

X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد هستند پس:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

الف.

$$f_{UV}(u,v) = |\text{Jacoubian}(u,v)|\, f_{XY}(x,y)$$

حال برای ماتریس ژاکوبین، X و Y را برحسب U و V به دست می آوریم:

$$U = X \,,\quad V = \frac{X}{Y} \longrightarrow Y = \frac{X}{V} \longrightarrow Y = \frac{U}{V} \,,\quad y = \frac{u}{v}$$

$$u = x$$

$$\text{Jacoubian}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{v} & \frac{-u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{-u}{v^2}$$

پس

$$f_{UV}(u,v) = \left|\frac{-u}{v^2}\right| f_{XY}(x,y)$$

وچون متغیرها، مستقل هستند، بدین صورت می‌نویسیم:

$$f_{UV}(u,v) = \frac{|u|}{v^2}\, f_X(x) \times f_Y(y)$$

$$= \frac{|u|}{v^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$= \frac{|u|}{v^2} \times \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

$$\longrightarrow \quad f_{UV}(u,v) = \frac{|u|}{v^2} \times \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(u^2+\frac{u^2}{v^2}\right)}$$

ب.

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|}{v^2} \times \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}u^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)}\, du$$

دو تابع $e^{-\frac{1}{2}u^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)}$ و $|u|$ توابع زوج هستند و حاصل ضرب آنها، تابع زوج است پس انتگرال را بازنویسی می‌کنیم:

$$f_V(v) = \frac{2}{2\pi v^2} \int_0^{\infty} u\, e^{-\frac{1}{2}u^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)}\, du$$

حاصل انتگرال را می‌یابیم:

$$f_V(v) = \frac{-1}{-1} \times \frac{1+\frac{1}{v^2}}{1+\frac{1}{v^2}} \times \frac{2}{2\pi v^2} \int_0^\infty u\, e^{-\frac{1}{2}u^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)}\, du$$

$$= \frac{-1}{\pi(1+v^2)} \int_0^\infty -\left(1+\frac{1}{v^2}\right) u\, e^{\boxed{-\frac{1}{2}u^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)} \to z}\, du \quad , dz = -\left(1+\frac{1}{v^2}\right) u\, du$$

$$= \frac{-1}{\pi(1+v^2)} \int e^{z}\, dz = \frac{-1}{\pi(1+v^2)} \times e^{-\frac{1}{2}u^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)} \Big]_0^\infty$$

$$\rightarrow f_V(v) = \frac{-1}{\pi(1+v^2)} \times (0-1) = \frac{1}{\pi(1+v^2)} \rightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow V \sim \text{Cauchy}(0,1)$$

پ.ن: تابع چگالی احتمال برای توزیع کوشی بدین صورت است:

$$f(x; x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi\gamma\left[1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}$$

تمرین ۳ | ۴۰۰۱۰۵۰۱۴ | محمدعرفان سلیما | آمار و احتمال مهندسی

مسئله 3 :

Y_2 و Y_1 دو متغیر تصادفی با توزیع نمایی هستند پس:

$$f_{Y_1}(y_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 y_1} \quad , \quad f_{Y_2}(y_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 y_2}$$

الف.

$$f_{UV}(u,v) = |Jacoubian(u,v)|\, f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2)$$

حال برای ماتریس ژاکوبین، Y_1 و Y_2 را برحسب U و V به دست می آوریم:

$$U = Y_1 \ , \ V = \frac{Y_1}{Y_2} \longrightarrow Y_2 = \frac{Y_1}{V} \longrightarrow Y_2 = \frac{U}{V} \ , \ y_2 = \frac{u}{v}$$

$$u = y_1$$

$$Jacoubian(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial v} \\ \frac{\partial y_2}{\partial u} & \frac{\partial y_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{v} & \frac{-u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{-u}{v^2}$$

پس

$$f_{UV}(u,v) = \left|\frac{-u}{v^2}\right| f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2)$$

و چون متغیرها، مستقل هستند، بدین صورت می نویسیم:

$$f_{UV}(u,v) = \frac{|u|}{v^2} f_{Y_1}(y_1) \times f_{Y_2}(y_2)$$

$$= \frac{|u|}{v^2} \lambda_1 e^{-\lambda_1 y_1} \times \lambda_2 e^{-\lambda_2 y_2}$$

$$= \frac{|u|}{v^2} \lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 u + \lambda_2 \frac{u}{v})}$$

$$\longrightarrow \boxed{f_{UV}(u,v) = \frac{|u|}{v^2} \lambda_1 \lambda_2 e^{-u(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{v})}}$$

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|}{v^2} \lambda_1 \lambda_2 e^{-u(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{v})} du$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{v^2} \int_0^{\infty} u e^{-u(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{v})} du$$

با جزء به جزء انتگرال را حل می کنیم:

$$f(u) = u \ , \ f'(u) = 1$$

$$g'(u) = e^{-u(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{v})} \ , \ g(u) = \frac{-e^{-u(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{v})}}{\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{v}}$$

$$\int f g' = fg - \int f' g$$

$$\int_0^\infty u e^{-u(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v})} du = \frac{-u e^{-u(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v})}}{\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v}} - \int_0^\infty \frac{-e^{-u(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v})}}{\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v}}$$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{-u e^{-u(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v})}}{\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v}} = \frac{-1}{\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v}} \lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^{u(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v})}} \overset{HoP}{=} \frac{-1}{\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v}} \lim_{u\to\infty} \frac{1}{(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v}) e^{u(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v})}} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{-u e^{-u(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v})}}{\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v}} = 0$$

$$\int_0^\infty u e^{-u(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v})} du = -\int_0^\infty \frac{-e^{-u(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v})}}{\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v}} = \int_0^\infty \frac{e^{-u(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v})}}{\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v}}$$

$$= -\frac{e^{-u(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v})}}{(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v})^2}\Bigg|_0^\infty = 0 - \left(\frac{-1}{(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v})^2}\right) = \frac{1}{(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{v})^2}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$f_V(v) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\cancel{v^2}} \times \frac{\cancel{v^2}}{(v\lambda_1+\lambda_2)^2} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(v\lambda_1+\lambda_2)^2}$$

V همان $\frac{Y_1}{Y_2}$ است و f_V تابع چگالی احتمال است.

حال تابع توزیع تجمعی را می‌یابیم:

$$F_V(v) = \int_{-\infty}^{v} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(v\lambda_1 + \lambda_2)^2}\, dv = \int_{0}^{v} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(v\lambda_1 + \lambda_2)^2}\, dv$$

$$= \frac{-\lambda_2}{v\lambda_1 + \lambda_2}\Bigg|_0^v = \frac{-\lambda_2}{v\lambda_1 + \lambda_2} - \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_2}\right)$$

$$= 1 - \frac{\lambda_2}{v\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{v\lambda_1}{v\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$\rightarrow F_V(v) = \frac{v\lambda_1}{v\lambda_1 + \lambda_2}$$

ب.

$$P(Y_1 < Y_2) = P\left(\frac{Y_1}{Y_2} < 1\right) = F_V(1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

مسئله 4 :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow X \sim binomial(n,p)$$

$$E[X] = np \qquad Var[X] = np(1-p)$$

پس Z بدین صورت است :

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$M_Z(t) = E[e^{tZ}] = \sum_z e^{tz} P(z) = \sum_{x=0}^{n} e^{\frac{t(x-np)}{\sqrt{np(1-p)}}} P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} e^{\frac{t(x-np)}{\sqrt{np(1-p)}}} \times \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= e^{\frac{-npt}{\sqrt{np(1-p)}}} \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \times \left(e^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}}\right)^x p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= e^{\frac{-npt}{\sqrt{np(1-p)}}} \times \left(p e^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}} + (1-p)\right)^n$$

$$\longrightarrow M_Z(t) = e^{\frac{-npt}{\sqrt{np(1-p)}}} \left(p\left(e^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}} - 1\right) + 1\right)^n$$

مسئله 5 :

طبق قانون کل امید ریاضی $E[X] = E[E[X|Y]]$

وهمچنین نتیجه می‌شود که $E[XY] = E[XE[Y|X]]$

پس از فرض سؤال نتایج زیر حاصل می‌شود :

$E[X] = E[A]$ و $E[Y] = E[B]$

$E[XY] = E[XB] = E[YA]$

حال از سمت چپ عبارت به سمت راست آن می‌رسیم :

$Cov(X + A, Y + B) - Cov(A,B)$

$= E[XY + XB + AY + AB] - E[X+A]E[Y+B] - (E[AB] - E[A]E[B])$

$= E[XY] + E[XB] + E[AY] + E[AB] - (E[X] + E[A])(E[Y] + E[B])$

$- E[AB] + E[A]E[B]$

$$= E[XY] + E[XB] + E[AY] + \cancel{E[AB]} - E[X]E[Y] - E[X]E[B] - E[A]E[Y] - \cancel{E[A]E[B]} - \cancel{E[AB]} + \cancel{E[A]E[B]}$$

و با استفاده از نتایجی که در صفحه قبل گرفتیم:

$$Cov(X+A, Y+B) - Cov(A,B) = 3E[XY] - 3E[X]E[Y]$$

$$= 3(\underbrace{E[XY] - 3E[X]E[Y]}_{Cov(X,Y)})$$

$$Cov(X+A, Y+B) - Cov(A,B) = \underbrace{3Cov(X,Y)}_{\text{طرف راست تساوی}}$$

پس رابطه مورد نظر، اثبات شد.

مسئله 6:

الف.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$$

$$\rightarrow f_X(x) = \int_0^{1-x} \frac{1}{2}\, dy + \int_{1-x}^{1} \frac{3}{2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2} y \Big|_0^{1-x} + \frac{3}{2} \Big|_{1-x}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}(1-x) + \frac{3}{2}(1-1+x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x$$

$$\rightarrow f_X(x) = x + \frac{1}{2}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

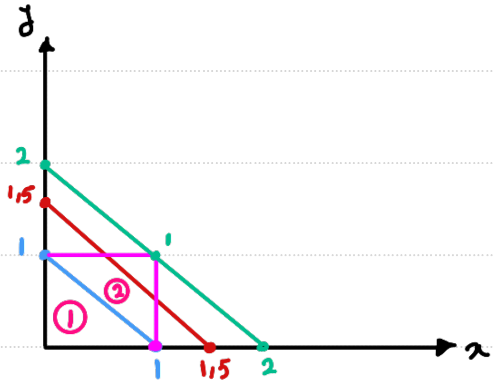
ب.

$$P(X+Y\le \tfrac{3}{2}) = \iint_{x+y\le \frac{3}{2}} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$P(X+Y\le \tfrac{3}{2}) = P(X+Y\le 1) + P(X+Y\le \tfrac{3}{2}, X+Y\ge 1)$$

$$= \iint_{x+y\le 1} \tfrac{1}{2}\,dx\,dy + \iint_{\substack{x+y\le \frac{3}{2}\\ x+y\ge 1}} \tfrac{3}{2}\,dx\,dy$$

حال با رسم، به جواب می‌رسیم:



$$P(X+Y\le 1) = \tfrac{1}{2} S_{①} = \tfrac{1}{4}$$

$$P(X+Y\le \tfrac{3}{2}, X+Y\ge 1) = \tfrac{3}{2} S_{②} = \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{4}\times\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{9}{16}$$

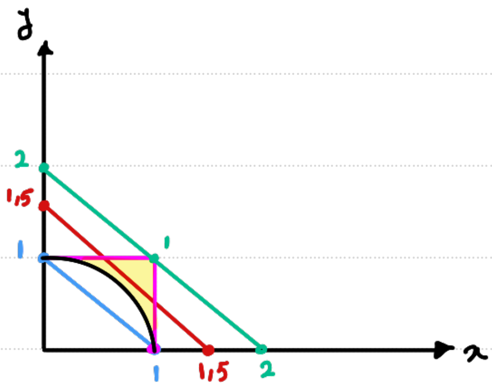
پس در نهایت احتمال برابر خواهد بود با:

$$P(X+Y\le \tfrac{3}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = \frac{13}{16}$$

و برای $P(X^2+Y^2\geq 1)$ داریم که:

$$P(X^2+Y^2\geq 1)=\iint \frac{3}{2}\,dx\,dy$$

و مجدد با رسم، به جواب می‌رسیم:



$$P(X^2+Y^2\geq 1)=\frac{3}{2}\left(1-\frac{\pi\times 1^2}{4}\right)\simeq 0/3219027$$

تمرین ۳

۴۰۰۱۰۵۰۱۴

محمدعرفان سلیما

آمار و احتمال مهندسی

مسئله ۶:

الف)

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i , \sum_{j=1}^{n} X_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(Cov(X_i, X_i) + \sum_{j:j\neq i} Cov(X_i, X_j)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum Cov(X_i, X_j)$$

$$\rightarrow \boxed{Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\sigma^2 + 2\binom{n}{2}\eta}$$

ب. مانند بخش قبل عمل می کنیم:

و Y_m بدین صورت تعریف شده است: $Y_m = Y_m + Y_{m+1} + Y_{m+2}$

$$Cov(Y_m , Y_{m+j}) = \sum_{i=m}^{m+2}\sum_{k=m+j}^{m+j+2} Cov(X_i, X_k)$$

حال روی j حالت بندی می کنیم:

$$j=0:\ \mathrm{Cov}(Y_m, Y_{m+j}) = \sum_{i=m}^{m+2}\sum_{k=m}^{m+2} \mathrm{Cov}(X_i, X_k)$$

$$= 3\,\underset{i=k}{\mathrm{var}(X_i, X_k)} + \underset{i\neq k}{\left[\binom{3}{1}\binom{3}{1} - 3\right]} \mathrm{Cov}(X_i, X_k)$$

$$= \boxed{3\sigma^2 + 6\eta}$$

$$j=1:\ \mathrm{Cov}(Y_m, Y_{m+j}) = \sum_{i=m}^{m+2}\sum_{k=m+1}^{m+3} \mathrm{Cov}(X_i, X_k)$$

$$= 2\,\underset{i=k}{\mathrm{var}(X_i, X_k)} + \underset{i\neq k}{\left[\binom{3}{1}\binom{3}{1} - 2\right]} \mathrm{Cov}(X_i, X_k)$$

$$= \boxed{2\sigma^2 + 7\eta}$$

$$j=2:\ Cov(Y_m, Y_{m+j}) = \sum_{i=m}^{m+2}\sum_{k=m+2}^{m+4} Cov(X_i, X_k)$$

$$= 1\,\underbrace{var(X_i, X_k)}_{i=k} + \left[\binom{3}{1}\binom{3}{1} - 1\right]\underbrace{Cov(X_i, X_k)}_{i\neq k}$$

$$= \sigma^2 + 8\eta$$

$$j\geq 3:\ Cov(Y_m, Y_{m+j}) = \sum_{i=m}^{m+2}\sum_{k=m+j}^{m+j+2} Cov(X_i, X_k)$$

$$= 0\,\underbrace{var(X_i, X_k)}_{i=k} + \left[\binom{3}{1}\binom{3}{1} - 0\right]\underbrace{Cov(X_i, X_k)}_{i\neq k}$$

$$= 0\sigma^2 + 9\eta = 9\eta$$

پس $Cov(Y_m, Y_{m+j})$ بدین صورت است: (صفحه بعد)

$$\mathrm{Cov}(Y_m, Y_{m+j}) = \begin{cases} 3\sigma^2 + 6\eta & j=0 \\ 2\sigma^2 + 7\eta & j=1 \\ \sigma^2 + 8\eta & j=2 \\ 9\eta & j \geq 3 \end{cases}$$

همانطور که گفته شد، متغیرهای تصادفی، مستقل هستند پس

$$\underset{i \neq k}{\mathrm{Cov}(X_i, X_k) = 0}$$

پس جواب برابر است با:

$$\mathrm{Cov}(Y_m, Y_{m+j}) = \begin{cases} 3\sigma^2 & j=0 \\ 2\sigma^2 & j=1 \\ \sigma^2 & j=2 \\ 0 & j \geq 3 \end{cases}$$