تمرین ۲ | ۴۰۰۱۰۵۰۱۴ | محمدعرفان سلیما | آمار و احتمال مهندسی

مسئله ۱:

الف) تابع چگالی احتمال این ویژگی را دارد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

حال c را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ce^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^{0} ce^{-|x|} dx + \int_{0}^{\infty} ce^{-|x|} dx$$

$$= c\int_{-\infty}^{0} e^{x} dx + c\int_{0}^{\infty} e^{-x} dx$$

$$= ce^{x}\Big]_{-\infty}^{0} - ce^{-x}\Big]_{0}^{\infty} = c-(-c) = 2c$$

$$\Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

ب)

$$E(X^{2n}) = (2n)!$$

$$E(X^{2n}) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-|x|}\, dx$$

x^{2n} و $e^{-|x|}$ هر دو، تابع زوج هستند پس $x^{2n} e^{-|x|}$ تابعی زوج است و انتگرال را بدین صورت می‌نویسیم:

$$E(X^{2n}) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} 2x^{2n} e^{-|x|}\, dx = \int_{-\infty}^{0} x^{2n} e^{x}\, dx$$

این انتگرال را به روش جزء به جزء بازگشتی حل می‌کنیم:

مشتق		انتگرال
x^{2n}	$+$	e^x
$2n\,x^{2n-1}$	$-$	e^x
$2n(2n-1)\,x^{2n-2}$	$+$	e^x
$\vdots$		$\vdots$
$(2n)!\,x^0$	$+$	e^x

$$E(X^{2n}) = \int_{-\infty}^{0} x^{2n} e^{x}\, dx$$

$$= e^{x}\left(x^{2n} - 2n\,x^{2n-1} + 2n(2n-1)\,x^{2n-2} - \dots + (2n)!\,x^{0}\right)\Big]_{-\infty}^{0}$$

$$E(X^{2n}) = (2n)! - 0 = (2n)!$$

$$E(X^{2n+1}) = 0$$

$$E(X^{2n+1}) = c\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} e^{-|x|}\,dx$$

x^{2n+1} تابعی فرد و $e^{-|x|}$ تابعی زوج است و می‌دانیم که حاصل ضرب یک تابع زوج و یک تابع فرد، تابعی فرد خواهد بود.

پس $x^{2n+1} e^{-|x|}$ تابعی فرد است.

این تابع واگرا نیست (به دلیل داشتن $e^{-|x|}$)، پس انتگرال تابع در بازه متقارن نسبت به مبدأ برابر ۰ خواهد شد.

پس:

$$E(X^{2n+1}) = c\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^{2n+1} e^{-|x|}}_{\text{تابع فرد}}\,dx = 0$$

آمار و احتمال مهندسی	محمدعرفان سلیما	۴۰۰۱۰۵۰۱۴	تمرین ۲

مسئله 2 : احتمال برنده شدن با خرید هر بلیط برابر $p = \frac{10^2}{10^6} = 10^{-4}$ و همچنین توزیع هندسی است.

الف) احتمال برنده نشدن در هر بار خرید برابر است با $1 - P$.

پس احتمال برنده شدن پس از خرید ۱۰۰ بلیط بدین صورت محاسبه می‌شود

p (برنده شدن با خرید ۱۰۰ بلیط) $= 1 - (1-P)^{100} = 1 - (1 - 10^{-4})^{100} \simeq 0/009950 \simeq 0/995\,\%$

ب) همانطور که در بخش الف دیدیم، احتمال برنده شدن با خرید n بلیط

برابر است با $1 - (1-P)^n$.

$$1 - (1-P)^n \geq \frac{95}{100} \longrightarrow (1-P)^n \leq \frac{5}{100}$$

$$\xrightarrow{\log} n \log\left(\frac{9999}{10^4}\right) \leq \log\left(\frac{5}{100}\right)$$

$$\longrightarrow n \times (-0.0000434316) \leq -1.3010299$$

$$\longrightarrow n \geq \frac{1.3010299}{0.0000434316} \longrightarrow n \geq 29956$$

ج)

$$P(X=k) = (1-P)^{k-1} P$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-P)^{k-1} P$$

$$= P \sum_{k=1}^{\infty} k(1-P)^{k-1}$$

$$= P\left(\frac{-d}{dP} \sum_{k=1}^{\infty} (1-P)^{k}\right)$$

$$= P\left(\frac{-d}{dP} \frac{1-P}{P}\right)$$

$$= P\left(\frac{d}{dP}\left(1-\frac{1}{P}\right)\right) = P \times \frac{1}{P^2} = \frac{1}{P}$$

پس امید ریاضی تعداد بلیط هایی که باید بخرد تا برنده شود برابر است با :

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^{4}$$

مسئله 3 :

$\mu = 3 \quad , \sigma^2 = 9 \rightarrow \sigma = 3$

Z را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow Z = \frac{X-3}{3} \Rightarrow Z \sim N(0,1)$$

الف)

$$P(X>2) = P(3Z+3>2)$$
$$= P(Z > \frac{-1}{3})$$
$$= 1 - P(Z \le \frac{-1}{3})$$
$$= 1 - \Phi(\frac{-1}{3}) \qquad (\Phi(-x) = 1 - \Phi(x))$$

$$\Rightarrow P(X>2) = \Phi(\frac{1}{3})$$

ب)

$$P(-1<Y<3) = P(-1<5-X<3)$$
$$= P(2<X<6)$$
$$= P(2<3Z+3<6) = P(\frac{-1}{3}<Z<1)$$
$$= \Phi(1) - \Phi(\frac{-1}{3})$$

ج)

$$P(X>4 \mid Y<2) = P(X>4 \mid X>3)$$

$$= \frac{P(X>4, X>3)}{P(X>3)} = \frac{P(X>4)}{P(X>3)} = \frac{P(Z>\frac{1}{3})}{P(Z>0)}$$

$$= \frac{1-P(Z\leq \frac{1}{3})}{1-P(Z\leq 0)} = \frac{1-\Phi(\frac{1}{3})}{1-\Phi(0)}$$

مسئله 4:

الف)

هفته اول
هفته دوم

$$E(X) = E(\omega_1) + E(\omega_2) = \lambda + \lambda = 2\lambda = 4 = \lambda'$$

حال توزیع پواسونی با پارامتر $\lambda' = 4$ داریم و می دانیم

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda'} \lambda'^{k}}{k!} = \frac{e^{-4} \times 4^{k}}{k!}$$

حال احتمال مورد نظر را محاسبه می کنیم:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$$

$$= 1 - (e^{-4} + 4e^{-4} + 8e^{-4})$$

$$= 1 - 13e^{-4} = 0/76189$$

ب) t را برحسب هفته در نظر می‌گیریم و اگر هر هفته را n قسمت کنیم، در هر هفته n رویداد خواهیم داشت.

برای روی ندادن پیشامد، باید تمامی tn رخداد انجام نشوند. $P(X \leq t) = 1 - P(X > t)$

احتمال رخ دادن هر رخداد $\frac{\lambda}{n}$ است. $= 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{tn}$

از ریاضی ۱ می‌دانیم که $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$

پس n را به بی‌نهایت میل می‌دهیم:

$$\lim_{n \to \infty} 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{tn} = 1 - \lim_{n \to \infty} \Big(\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}}\Big)^t = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F_t(t) = 1 - e^{-\lambda t} \Longrightarrow f_t(t) = \frac{dF_t(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\xRightarrow{\lambda = 2} f_t(t) = 2e^{-2t}$$

پس توزیع احتمال زمان بدین صورت خواهد بود:

$$f_t(t) = \begin{cases} 2e^{-2t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

مسئله 5 : تابع توزیع چگالی Y بدین صورت است:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ f_X(y) & 0 \le y < \frac{\lambda}{2} \\ 1 - F_X(\frac{\lambda}{2}) & y = \frac{\lambda}{2} \\ 0 & y > \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = -e^{-\lambda t}\Big]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$1 - F_X(\frac{\lambda}{2}) = 1 - 1 + e^{-\lambda(\frac{\lambda}{2})} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \lambda e^{-\lambda y} & 0 \le y < \frac{\lambda}{2} \\ e^{-\frac{\lambda^2}{2}} & y = \frac{\lambda}{2} \\ 0 & y > \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

$$CDF = F_Y(y) = \int f_Y(y)\, dy$$

حال تابع CDF را محاسبه می‌کنیم:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & 0 \le y < \frac{\lambda}{2} \\ 1 & y \ge \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

$$0 \le y < \frac{\lambda}{2} : F_Y(y) = \int_0^y \lambda e^{-\lambda y} dy = -e^{-\lambda y}\Big]_0^y = 1 - e^{-\lambda y}$$

$$y \ge \frac{\lambda}{2} : \left(\lim_{y \to (\frac{\lambda}{2})^-} F_Y(y)\right) + f_Y\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}} + e^{-\frac{\lambda^2}{2}} = 1$$

مسئله 6: اگر X تعداد مسیرهای طی شده از ۱ تا n و X_i تعداد مسیرهای طی شده از i تا $i+1$ باشد، بدین صورت خواهیم داشت که:

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

طبق قضیه خطی بودن امید ریاضی:

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

هر X_i از توزیع هندسی پیروی می‌کند که $P = \frac{1}{2^i}$ است پس:

$$E(X_i) = \frac{1}{P} = 2^i$$ (در جزوه اثبات شده)

$$E(X) = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n$$

$$\Rightarrow E(X) = 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 2$$