مسئله ۱:

الف)
$$Cov(X,Y|Z) = E[(X-E[X|Z])(Y-E[Y|Z])|Z]$$

$$= E[(XY-XE[Y|Z]-YE[X|Z]+E[X|Z]E[Y|Z])|Z] =$$

$$= E[XY|Z]-E[XE[Y|Z]|Z]-E[YE[X|Z]|Z]+E[(E[X|Z]E[Y|Z])|Z]$$

در عبارت دوم از آنجا که $E[Y|Z]$ تابعی از Z است پس: $E[XE[Y|Z]|Z]=E[X|Z]E[Y|Z]$

برای سایر عبارت ها به همین شکل ادامه می دهیم.

$$= E[XY|Z]-E[X|Z]E[Y|Z]-\cancel{E[Y|Z]E[X|Z]}+\cancel{E[X|Z]E[Y|Z]}$$

$$Cov(X,Y|Z) = E[XY|Z]-E[X|Z]E[Y|Z]$$

ب)
$$Cov(X,Y) = E[XY]-E[X]E[Y]$$

مجدد از قانون کل امید ریاضی بهره می جوییم:

$$Cov(X,Y) = E[E[XY|Z]]-E[E[X|Z]]E[E[Y|Z]]$$

از نتیجه بخش الف استفاده می کنیم:

$$Cov(X,Y) = E[Cov(X,Y|Z) + E[X|Z]E[Y|Z]] - E[E[X|Z]]E[E[Y|Z]]$$

$$= E[Cov(X,Y|Z)] + E[\underbrace{E[X|Z]}_{A}\underbrace{E[Y|Z]}_{B}] - E[\underbrace{E[X|Z]}_{A}]E[\underbrace{E[Y|Z]}_{B}]$$

با تغییر متغیر برای شهود بهتر در می یابیم که :

$$E[E[X|Z]E[Y|Z]] - E[E[X|Z]]E[E[Y|Z]] = Cov(E[X|Z], E[Y|Z])$$

پس نتیجه می شود که :

$$Cov(X,Y) = E[Cov(X,Y|Z)] + Cov(E[X|Z], E[Y|Z])$$

ج)

$$var(X|Y) = E[(X - E[X|Y])^2 | Y]$$

$$= E[X^2|Y] - 2(E[X|Y])^2 + (E[X|Y])^2$$

$$= E[X^2|Y] - (E[X|Y])^2$$

$$\xrightarrow{E} E[var(X|Y)] = E[X^2] - E[(E[X|Y])^2] \quad (1)$$

$$\operatorname{var}(E[X|Y]) = E[(E[X|Y])^2] - \underbrace{E[E[X|Y]]^2}_{(E[X])^2} \quad ②$$

رابطه ① و ② را جمع می‌کنیم:

$$\operatorname{var}(E[X|Y]) + E[\operatorname{var}(X|Y)] = E[X^2] - E[X]^2 = \operatorname{var}(X)$$

و همچنین از طریق زیر اثبات می‌شود:

در تساوی بخش ب به‌جای X و Y، X و به‌جای Z، Y قرار می‌دهیم:

و می‌دانیم که $\operatorname{Cov}(X,X) = \operatorname{Var}(X)$ ، $\operatorname{Cov}(X,X|Y) = \operatorname{var}(X|Y)$

پس نتیجه می‌شود که:

$$\operatorname{var}(X) = E[\operatorname{var}(X|Y)] + \operatorname{Cov}(E[X|Y], E[X|Y])$$

$$\longrightarrow \operatorname{var}(X) = E[\operatorname{var}(X|Y)] + \operatorname{var}(E[X|Y])$$

مسئله 2:

$$Y=\sum_{i=1}^{50} X_i \approx \text{Normal} \quad , \quad \frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \approx N(0,1) \Rightarrow Z=\frac{Y-100}{5\sqrt{2}} \approx N(0,1)$$

$$P(90<Y<110)=P\left(\frac{90-100}{5\sqrt{2}}<Z<\frac{110-100}{5\sqrt{2}}\right)=P(-\sqrt{2}<Z<\sqrt{2})$$

$$=\Phi(\sqrt{2})-\Phi(-\sqrt{2})=2\Phi(\sqrt{2})-1\simeq 0/8427$$

مسئله 3:

الف)

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x P(X=x) \geq \sum_{x=1}^{k} x P(X=x)$$

از آنجا که $x < k$ و P نزولی است، پس $P(X=x) > P(X=k)$. حال داریم که:

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x P(X=x) \geq \sum_{x=1}^{k} x P(X=x) \geq \sum_{x=1}^{k} x P(X=k)$$

$$\sum_{x=1}^{k} x P(X=k) = P(X=k) \sum_{i=1}^{k} x = \frac{k(k+1)}{2} P(X=k)$$

$$\rightarrow E[X] \geq \frac{k(k+1)}{2} P(X=k) \rightarrow P(X=k) \leq \frac{2}{k(k+1)} E[X] \leq \frac{2}{k^2} E[X]$$

$$\rightarrow P(X=k) \leq \frac{2E[X]}{k^2}$$

ب) مانند بخش قبل، از آنجا که $x \leq k$ و f نزولی است، پس $f(k) \leq f(x)$

$$E[X] = \int_0^{\infty} x f(x)\, dx \geq \int_0^{k} x f(x)\, dx \geq \int_0^{k} x f(k)\, dx$$

$$\int_0^k x f(k)\, dx = f(k) \int_0^k x\, dx = f(k) \times \frac{x^2}{2}\Big]_0^k = f(k) \times \frac{k^2}{2}$$

$$\longrightarrow E[X] \geq \frac{k^2}{2} f(k) \longrightarrow f(k) \leq \frac{2E[X]}{k^2}$$

$$\longrightarrow \boxed{f(x) \leq \frac{2E[X]}{x^2}}$$

مسئله 4:

اگر X_i را خطای عدد i ام در نظر بگیریم، موارد زیر را داریم:

$$Y = \sum_{i=1}^{50} X_i \quad , \quad E[X_i] = \mu = \frac{a+b}{2} = 0 \quad , \quad var(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12} = \sigma^2$$

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{50} X_i}{\frac{1}{\sqrt{12}} \times \sqrt{50}} = \frac{\sqrt{6}}{5} \sum_{i=1}^{50} X_i = \frac{\sqrt{6}}{5} Y \quad \sim Normal(0,1)$$

$$P(|Y| > 3) = 1 - P(|Y| < 3) = 1 - P(-3 < Y < 3)$$

$$= 1 - P\left(-\frac{3}{5}\sqrt{6} < \frac{\sqrt{6}}{5} Y < \frac{3}{5}\sqrt{6}\right) = 1 - P\left(-\frac{3\sqrt{6}}{5} < Z < \frac{3\sqrt{6}}{5}\right)$$

$$= 1 - \left(\Phi\left(\frac{3\sqrt{6}}{5}\right) - \Phi\left(-\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)\right) = 2 - 2\Phi\left(\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)$$

$$= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{-3\sqrt{6}}{5}\right) \simeq 0.1416$$

مسئله 5:

با استفاده از قضیه حد مرکزی داریم که:

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad , \mu = ? \quad , \sigma = 2$$

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{2\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0,1)$$

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right| < \frac{1}{2}\right) = P\left(-\frac{1}{2} < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu < \frac{1}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\times \frac{\sqrt{n}}{2}} P\left(\frac{-\sqrt{n}}{4} < Y < \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\right)$$

$$\longrightarrow 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - 1 \geq 0/95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) \geq 0/975$$

$$\Rightarrow n \geq 61/463 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \geq 62$$

حداقل باید 62 بار الگوریتم را اجرا کنیم.

مسئله 6:

$$var(X) = E[X^2] - \cancel{E[X]}^2 = E[X^2] = \sigma^2$$

$$\forall b>0 : P(X \geq a) = P(X+b \geq a+b) \leq P((X+b)^2 \geq (a+b)^2)$$

طبق نامساوی مارکوف : $P(X \geq a) \leq P((X+b)^2 \geq (a+b)^2) \leq \dfrac{E[(X+b)^2]}{(a+b)^2}$

$$\longrightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E[X^2] + \cancel{2bE[X]} + b^2}{(a+b)^2}$$

$$\longrightarrow P(x \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + b^2}{(a+b)^2}$$

برای آنکه $\dfrac{\sigma^2+b^2}{(a+b)^2}$ کران بهتری دهد باید مینیمم باشد و با مشتق مقدار b را می یابیم:

$$\frac{d}{db}\frac{\sigma^2+b^2}{(a+b)^2} = \frac{2b(a+b)^2 - 2(a+b)(\sigma^2+b^2)}{(a+b)^4} = 0$$

$$\Rightarrow 2ba + \cancel{2b^2} - 2\sigma^2 - \cancel{2b^2} = 0 \Rightarrow \boxed{b = \frac{\sigma^2}{a}}$$

$$\rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{a^2}}{\left(a + \frac{\sigma^2}{a}\right)^2} = \frac{\frac{\sigma^2(a^2 + \sigma^2)}{a^2}}{\frac{(a^2 + \sigma^2)^2}{a^2}} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

$$\rightarrow \boxed{P(X \geq a) \leq \frac{\operatorname{var}(X)}{\operatorname{var}(X) + a^2}}$$