11.4.1 计算下列第二型曲面积分.

(1) $\iint_S (x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧;

(2) $\iint_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是柱面 $x^2+z^2=R^2$ 在 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 两卦限内被平面 $y=0$ 及 $y=h$ 所截下部分的外侧;

(3) $\iint_S xy^2z^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的 $x\leqslant 0$ 的部分, 远离球心一侧;

(4) $\iint_S yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$, S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半部分 $(z\geqslant 0)$ 并取外侧;

(5) $\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分, 远离原点的一侧;

(6) $\iint_S (y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧;

(7) $\iint_S xz^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x^2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+y^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是通过上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧;

(8) $\iint_S f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+g(y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $f(x),g(y),h(z)$ 为连续函数, S 为直角平行六面体 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c$ 的外侧.

(1) 原式 $=\iiint_V 1\,dxdydz = \frac{4}{3}\pi abc$ (椭球体体积)

(2) 曲面上任意一点 $(x,y,z)=(R\cos\theta, y, R\sin\theta)$ $\left(0\leqslant y\leqslant h, -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,y)}=\begin{vmatrix}-R\sin\theta & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-R\sin\theta,$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \iint_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^h\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin\theta\cos\theta\cdot y\cdot R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}y\\ &= R^3\int_0^h y\,\mathrm{d}y\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}(\sin\theta)\\ &= R^3\cdot\frac{1}{2}h^2\cdot\left(\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{1}{3}R^3h^2.\end{aligned}$$

(3) $y=r\cos\theta$ $z=r\sin\theta$ $X=-\sqrt{R^2-r^2}$ $(0<r<R, 0<\theta<2\pi)$

原式 $=\iint_D xy^2z^2 \dfrac{-1}{\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}}\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,dydz$

$=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,r^5\,dr$

$=\frac{8}{105}R^7\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$

$=\frac{2\pi}{105}R^7$

(4) 记 $(x,y,z)=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\right)$.

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}-\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta\\ 0 & -\sin\theta\sin\varphi\end{vmatrix}=\sin^2\theta\sin\varphi,$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\iint_S yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cdot\sin^2\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,\mathrm{d}(\sin\theta)\\&=\left(\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\left(\frac{1}{4}\sin^4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\\&=\frac{1}{4}\pi.\end{aligned}$$

(5) 原式 $=2\iiint\limits_V x+y+z\,dxdydz=2\int_0^1 dz\int_0^{1-z}dy\int_0^{1-z-y}dx\ x+y+z$

$=2\int_0^1 dz\int_0^{1-z}dy\ \frac{(1-z-y)^2}{2}+(y+z)(1-z-y)=\int_0^1 dz\int_0^{1-z}dy\ 1-(y+z)^2$

$=\int_0^1 dz\ (1-z)-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}z^3=\int_0^1 dz\ \frac{2}{3}-z+\frac{1}{3}z^3=\frac{1}{4}$

(6) 记 $(x,y,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,r)$ $(0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, 取其法向量 $\boldsymbol{n}=(r\cos\theta,r\sin\theta,-r)$, 则

$$\begin{aligned}&(y-z,z-x,x-y)\cdot\boldsymbol{n}=2r^2(\sin\theta-\cos\theta),\\\Longrightarrow&\iint_S(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^2(\sin\theta-\cos\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\&=2\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}(\sin\theta-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=2\left(\frac{1}{3}r^3\Big|_0^1\right)\left((-\cos\theta-\sin\theta)\Big|_0^{2\pi}\right)\\&=0.\end{aligned}$$

$\begin{cases}z=0\\x^2+y^2=a\end{cases}$ 上面积分

(7) 原式 $+\ 0=\iiint\limits_{V\text{上半球}}x^2+y^2+z^2\,dxdydz$ $\quad x=r\sin\theta\cos\varphi\quad y=r\sin\theta\sin\varphi\ .\ z=r\cos\theta$

$=\int_0^a dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\ r^4\sin\theta=2\pi\frac{a^2}{5}$

(8) 先计算

$$\iint_S f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

显然, 上述积分只在

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z)|x=0, 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c\}, \quad \Sigma_2 = \{(x,y,z)|x=a, 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c\}$$

两个面上值不为零, 从而

$$\begin{aligned}\iint_S f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_{\Sigma_1} f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma_2} f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= -f(0)\iint_{D_1}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + f(a)\iint_{D_2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= (f(a)-f(0))bc,\end{aligned}$$

其中 $\iint_{D_1}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \iint_{D_2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 分别表示在 Σ_1, Σ_2 上的二重积分.

同理可计算得:

$$\iint_S g(y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = (g(b)-g(0))ca, \quad \iint_S h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (h(c)-h(0))ab,$$

$$\Longrightarrow \iint_S f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + g(y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= (f(a)-f(0))bc + (g(b)-g(0))ca + (h(c)-h(0))ab.$$

□

11.4.2 求场 $\boldsymbol{v} = (x^3 - yz)\boldsymbol{i} - 2x^2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 通过长方体 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c$ 的外侧表面 S 的通量.

解 记 D_1 是长方体在 Oyz 平面内的面, D_2 是其对面, 类似地定义 D_3, D_4, D_5, D_6. 易知,

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S &= -\iint_{D_1}(-yz)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{D_2}(a^3-yz)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &\quad -\iint_{D_3} 0\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \iint_{D_4}(-2x^2\cdot b)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\ &\quad -\iint_{D_5} 0\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_6} c\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= a^3\iint_{D_1}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 2b\iint_{D_4} x^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + c\iint_{D_6}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= a^3bc - 2bc\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^a + cab = \frac{1}{3}a^3bc + abc.\end{aligned}$$