11.9.1 求第一型曲线积分 $I=\int_L z\,\mathrm{d}s$, 其中 L 是曲面 $x^2+y^2=z^2$ 与 $y^2=ax$ $(a>0)$ 交线上从点 $(0,0,0)$ 到 $(a,a,a\sqrt{2})$ 的弧段.

解 曲线上一点

$$(x,y,z)=(at^2,at,\sqrt{a^2t^2+a^2t^4}),$$

$$\Longrightarrow \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}=\sqrt{(2at)^2+a^2+\left(a\frac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2(8t^4+9t^2+2)}{1+t^2}},$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow I&=\int_0^1\sqrt{a^2t^2(1+t^2)\cdot\frac{a^2(8t^4+9t^2+2)}{1+t^2}}\,\mathrm{d}t\\&=a^2\int_0^1 t\sqrt{8t^4+9t^2+2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{256}(-72\sqrt{2}+200\sqrt{19}+17\sqrt{2}\ln(25-4\sqrt{38})).\end{aligned}$$

11.9.2 设 $a,b,c>0$. 求由曲线 $L:\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^n\left(\frac{y}{b}\right)^n$ 围成的区域 D 的面积 S.

令 $t=\dfrac{\left(\frac{y}{b}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)}=\dfrac{ay}{bx}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{act^n}{1+t^{2n+1}}\\ y=\dfrac{bct^{n+1}}{1+t^{2n+1}}\end{cases}$, $t\in[0,+\infty)$

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx\\&=\frac{abc^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}dt\\&=\frac{abc^2}{2(2n+1)}\end{aligned}$$

11.9.3 求平面上两个椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\quad (a>b>0)$$

内部公共区域的面积.

解 记 D 是由 $y=x, y=0, \dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 在第一象限内围成的区域, 由对称性知,

$$\begin{aligned}\sigma &= 8\sigma(D)=8\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\left(b\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}-y\right)\mathrm{d}y\\ &\xlongequal{y=a\sin\theta} 8ab\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\arctan\frac{b}{a}}-8\cdot\frac{1}{2}y^2\Bigg|_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\\ &= 4ab\arctan\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

11.9.4 (Poisson 公式) 设 $S: x^2+y^2+z^2=1$, $f(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 求证:

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,\mathrm{d}t.$$

提示 (1) 考虑 $F(x,y,z)=ax+by+cz$ 的等值面.

证明 (1) 考虑 $F(x,y,z)=ax+by+cz$ 的等值面 $\mathit{\Pi}(t): ax+by+cz=\sqrt{a^2+b^2+c^2}t$ $(t\in[-1,1])$, 注意到 $\mathit{\Pi}(t), \mathit{\Pi}(t+\mathrm{d}t)$ 在球面上截下的面积为

$$\mathrm{d}S=2\pi\sqrt{1-t^2}\cdot 1\,\mathrm{d}\theta,$$

其中 $\sin\theta=t\ \left(\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right)\implies \cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}t\implies \mathrm{d}S=2\pi\,\mathrm{d}t$, 从而

$$\int_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\cdot 2\pi\,\mathrm{d}t=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,\mathrm{d}t.$$

11.9.5 设 $S(t)$ 是平面 $x+y+z=t$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 截下的部分, 且

$$F(x,y,z)=1-(x^2+y^2+z^2).$$

求证: 当 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时, 有

$$\iint_{S(t)}F(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.$$

提示 (1) 注意 F 在球面上的取值.

证明 (1) 构造矢量场 $\boldsymbol{F}$, 使得 $|\boldsymbol{F}|=F$, 且其方向与 S 的法向 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ 相反. 因此, 设

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\frac{F(x,y,z)}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$

从而

$$\iint_S F\,\mathrm{d}S=-\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

从而

$$\iint_S F\,\mathrm{d}S = -\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

注意到, $\iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=0$, 其中 Σ 为球面被平面截下的上半部分, 法向朝外.

又

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2x-2y-2z),$$

记 V 是由 S 和 Σ 围成的区域, 由 Gauss 定理得:

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S+\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}V.$$

考虑 $f(x,y,z)=x+y+z$ 的等值面 $\Pi(r): x+y+z=r\ (-\sqrt{3}\leqslant r\leqslant\sqrt{3})$.

易知, $\Pi(r),\Pi(r+\mathrm{d}r)$ 与球面所围成的体积为

$$\mathrm{d}V = \pi\left(1-\frac{r^2}{3}\right)\mathrm{d}\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right),$$

其中 $d=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$ 为 $\Pi(r)$ 到球心的距离.

从而

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{\sqrt{3}}\iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}V &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\int_t^{\sqrt{3}} r\cdot\pi\left(1-\frac{r^2}{3}\right)\mathrm{d}\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)\\
&= -\frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{12}r^4\right)\bigg|_t^{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2,
\end{aligned}$$

故

$$\iint_S F\,\mathrm{d}S = -\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2,\quad |t|\leqslant\sqrt{3}.$$

11.9.6 设 $f(t)$ 在 $|t|\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 上连续. 证明:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)\,\mathrm{d}t.$$

提示 先用球坐标变换, 再运用 **Poisson 公式** (见习题 11.9.4).

证明 记 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$, 则

$$\begin{aligned}
&\iiint_V f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
=&\iiint_{V'} f(a\sin\theta\cos\varphi+b\sin\theta\sin\varphi+c\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\
=&\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\iint_{S'} f(a\sin\theta\cos\varphi+b\sin\theta\sin\varphi+c\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\
=&\frac{1}{3}\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S,
\end{aligned}$$

其中 S,S' 均表示球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

由 **Poisson 公式**得: 上式

$$=\frac{1}{3}\cdot 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)\,\mathrm{d}t.$$

11.9.7 设 $f(x,y)$ 在 $\overline{B}_R(\boldsymbol{P}_0)$ 上有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

求证: 对 $0\leqslant r\leqslant R$, 有

$$f(\boldsymbol{P}_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\boldsymbol{P}_0=(x_0,y_0)$, $L=\partial B_r(\boldsymbol{P}_0)$ 是以 $\boldsymbol{P}_0$ 为圆心, r 为半径的圆.

证明 记

$$g(r)=\frac{1}{2\pi r}\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

作换元 $x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta$, 则由习题 10.5.9 **证明** (3)中的性质知,

$$\begin{aligned}g(r)&=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)r\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta,\\g'(r)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi r}\oint_L\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

记

$$P=-\frac{\partial f}{\partial y},\quad Q=\frac{\partial f}{\partial x}\implies\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,$$

由 Green 公式知,

$$g'(r)=\frac{1}{2\pi r}\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$

其中 $D=\{(x,y)\big|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant r^2\}$.

故 $g(r)$ 为常数, 从而

$$g(r)=g(0)\implies f(\boldsymbol{P}_0)=\frac{1}{2\pi r}\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

11.9.8 设 $f(x,y,z)$ 在 $\overline{B}_R(\boldsymbol{P}_0)$ 上有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0.$$

求证: 对 $0\leqslant r\leqslant R$, 有

$$f(\boldsymbol{P}_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $S=\partial B_r(\boldsymbol{P}_0)$ 是以 $\boldsymbol{P}_0$ 为球心, r 为半径的球面.

证明：记 $g(r)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S f(x,y,z)ds$

作换元： $x=x_0+r\sin\varphi\cos\theta$

$y=y_0+r\sin\varphi\sin\theta$

$z=z_0+r\cos\varphi$

$$g(r)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{D'} f(x_0+r\sin\varphi\cos\theta,y_0+r\sin\varphi\sin\theta,z_0+r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,d\varphi d\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint_{D'} f(x_0+r\sin\varphi\cos\theta,y_0+r\sin\varphi\sin\theta,z_0+r\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi d\theta$$

$$g'(r)=\frac{1}{4\pi}\iint_{D'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\varphi\right)\sin\varphi\,d\varphi d\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\varphi\right)ds$$

$$=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S\frac{\partial f}{\partial x}dydz+\frac{\partial f}{\partial y}dzdx+\frac{\partial f}{\partial z}dxdy$$ ， S 为 $\partial B_r(P_0)$, 取外侧.

由 Gauss

$$\Rightarrow g'(r)=\frac{1}{4\pi r^2}\iiint_V\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dV=0$$ ， V 为 $B_r(P_0)$

故 $g(r)$ 为常数，从而

$$g(r)=g(0)=f(P_0)=\frac{1}{2\pi r}\iint_S f(x,y,z)ds$$

11.9.9 设 D 是平面上光滑封闭曲线 L 所围成的区域, $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

求证:

(1) 若 $f(x,y)$ 不是常数, 则它在 $\overline{D}$ 上的最大值和最小值都只能在 L 上取到.

(2) 当 $f(x,y)$ 在 L 上恒为零时, 它在 D 上也恒为零.

提示 考虑**习题 11.9.7**的结论.

证明 (1) 用反证法. 假设 $\exists \boldsymbol{x}_0 \in D^\circ$, 使得 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处取得最值, 不妨设为最大值. 即

$$f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{x}_0), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \overline{D},$$

又 $\boldsymbol{x}_0 \in D^\circ$, 从而 $\exists r_0 > 0$, 使得对 $\forall 0 < r \leqslant r_0$, 有 $\overline{B}_r(\boldsymbol{x}_0) \subset \overline{D}$, 从而 f 在 $L(r) = \partial \overline{B}_r(\boldsymbol{x}_0)$ 上的平均值

$$\frac{1}{2\pi r} \oint_{L(r)} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s \leqslant f(\boldsymbol{x}_0),$$

另一方面, 由 $\nabla^2 f = 0$ 及**习题 11.9.7**的结论, 我们有

$$\frac{1}{2\pi r} \oint_{L(r)} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s = f(\boldsymbol{x}_0),$$
$$\Longrightarrow f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial \overline{B}_r(\boldsymbol{x}_0), \quad \forall 0 < r \leqslant r_0,$$
$$\Longrightarrow f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \overline{B}_{r_0}(x_0),$$

从而 $\forall \boldsymbol{x} \in \overline{B}_{r_0}(x_0)$ 也是最大值点.

现在考虑任一条过 $\boldsymbol{x}_0$ 的直线 l.

记

$$D_\varepsilon = \left\{ \boldsymbol{x} \in \overline{D} \middle| \rho(\boldsymbol{x}, \partial D) > \varepsilon, 0 < \varepsilon < r_0 \right\}, \quad l_\varepsilon = l \cap \overline{D_\varepsilon},$$

由上述定义易知, $\forall \boldsymbol{x} \in l_\varepsilon$, 有 $\overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \subset \overline{D}$.

以 $\boldsymbol{x}_0$ 为圆心, ε 为半径作圆 $\overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$ 交 l 于 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1'$, 则 $\forall \boldsymbol{x} \in \overline{\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_1'}$, 有 $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$, 且 $\boldsymbol{x}$ 为最大值点; 再分别以 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1'$ 为圆心, ε 为半径作圆 $\overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_1), \overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_1')$ 交 l 于 $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2', \cdots$, 如此下去, 可以作 $N < \infty$ 个 (有限个) 圆, 使得

$$l_\varepsilon \subset \left(\bigcup_{i=1}^{N} (\overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_i) \cup \overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_i')) \right) \cup \overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0) \implies f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0), \quad \forall \boldsymbol{x} \in l_\varepsilon,$$

又由 ε 的任意性, 令 $\varepsilon \to 0$, 由 $f \in C(\overline{D})$ 知,

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0), \quad \forall \boldsymbol{x} \in l \cap \overline{D},$$

再由 l 的任意性知,

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \overline{D},$$

即 $f(\boldsymbol{x})$ 为常数, 这与题设条件矛盾, 故假设不成立, $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上的最大值和最小值都只能在 L 上取到.

(2) 假设 $f(x,y)$ 不恒为零, 即 $f(x,y)$ 不是常数, 由 (1) 的结论知, 其最大值 M 和最小值 m 都只能在 ∂D 上取得, 从而 $M = m = C \implies f(x,y) = C$ 为常数. □

另证 我们参照**习题** 11.3.7(1)的做法.

记 $\boldsymbol{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta),\boldsymbol{n}=(\cos\beta,-\cos\alpha)$ 分别是曲线 L 的单位切向量和单位外法向量, 一方面,

$$\oint_L f\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s=f\Big|_{\partial D}\cdot\oint_L\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s=0,$$

另一方面, 由 Green 公式, 我们有

$$\begin{aligned}
\oint_L f\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s&=\oint_L f\left[(f_x',f_y')\cdot(\cos\beta,-\cos\alpha)\right]\mathrm{d}s\\
&=\oint_L f(f_x'\cos\beta-f_y'\cos\alpha)\,\mathrm{d}s\\
&=\oint_L(-ff_y'\,\mathrm{d}x+ff_x'\,\mathrm{d}y)\\
&=\iint_D\left[((f_x')^2+ff_{xx}'')+((f_y')^2+ff_{yy}'')\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\iint_D[f(f_{xx}''+f_{yy}'')+(f_x')^2+(f_y')^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\iint_D({f_x'}^2+{f_y'}^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geqslant 0,
\end{aligned}$$

从而

$${f_x'}^2+{f_y'}^2\equiv 0\implies f_x'=f_y'\equiv 0\implies f(x,y)=\mathrm{Const.},\quad (x,y)\in D.$$