王柯皓

2021533025

1. (1) T　　(2) T　　(3) F

(4) T　　(5) F　　(6) F

2. 令 $F(t)=\int_0^t \ln(1-\frac{\sin^6 x}{6})dx$

则 $F(t)$ 作为 t 的函数在 $[0,+\infty)$ 上有界.

再令 $g(x)=\frac{1}{x^6}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调.

且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

∴根据 Dirichlet 定理.

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^6}\ln(1-\frac{\sin^6 x}{6})dx$ 收敛.

3. ∵ A, B, C, D 在同一平面上

∴ 直线 AB、CD 共面.

令 $\vec{AB}=(1,3,1-a)$　$\vec{CD}=(7,4,5)$

则 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1-a \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0$　解得 $a=-7$

王 柯 皓

2021533025

4. 令 $x = r\sin\theta\cos\varphi \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad z = r\cos\theta$

则 $\iiint_V |z|\,dxdydz = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\sqrt{3}} r^3\,dr\int_0^{2\pi} d\varphi$

$= 2\cdot \sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\sqrt{3}}\cdot 2\pi$

$= 2\times 1\times\frac{9}{4}\times 2\pi$

$= 9\pi.$

5. 把 $z = 1-x-y$ 代入上式

得 $1-3x-3y+3x^2+3y^2+3xy=0$

令上式 $= F(x,y)$.

则 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{-3+6x+3y}{-3+6y+3x} = -\frac{2x+y-1}{2y+x-1}$

同理. 把 $y=1-x-z$ 代入上式

得 $1-3x-3z+3x^2+3z^2+3xz=0.$

同求 $\frac{dz}{dx}$ 得到 $\frac{dz}{dx} = -\frac{2x+z-1}{2z+x-1}$

6. $a_n = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3x\sin nx\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3\sin t-4\sin 3t)\sin nx\,dx$

$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}$

王柯皓

2021533025

7. $\exists\, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = 1$

即 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \pi$

反证：假设 $\sup\limits_{-\pi\le x\le\pi} |f(x)| < \frac{\pi}{4}$

则 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx < \frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos nx|\, dx$

$$= \begin{cases} 0 & (n\text{为偶数}) \\ \frac{\pi}{n} & (n\text{为奇数}) \end{cases}$$

$\because n \ge 1$ $\therefore$ 不存在 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \pi$.

这与题设矛盾

$\therefore \sup\limits_{-\pi\le x\le\pi} |f(x)| \ge \frac{\pi}{4}$

8. 增加平面 $z=0$ 和 $z=\sqrt{3}$ 使其成为闭区域

运用Gauss定理.

原式 $= \iiint_V \nabla\cdot\vec{v}\, dV = \iiint_V (x^3+y^3, 6x^3+3x^2y, -6x^2z)\cdot(0,0,1)\, dxdydz$

$$= \iiint_V -6x^2 z\, dxdydz.$$

令 $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z.$

原式 $= -6\int_1^2 r^4 \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos^2\theta\, d\theta \int_1^{\sqrt{3}} z\, dz$

$$= -6\cdot\frac{1}{5}r^5\Big|_1^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\cdot \frac{1}{2}z^2\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$= 6\cdot\frac{1}{5}\cdot 31\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{62}{5}$$

王柯储

2021533025

9. (1). $F(x,y) = xy - (\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q)$

$F'_x = y - x^{p-1} = 0$

$F'_y = x - y^{q-1} = 0$

又 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

∴可解得 $p = q = 2$

$$\therefore F_{max}(x,y) = xy - (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2)$$

$$\le xy - 2\sqrt{\frac{1}{4}x^2y^2}$$

$$= 0$$

$\therefore xy - (\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q) \le 0$ 即 $xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$

(2).

(3)

(4) 等于