8.1.4 证明: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

证明 (1) 由向量运算的行列式表示, 得:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix},\quad \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\end{vmatrix},\quad \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix},$$

其中

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{vmatrix}b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\end{vmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{vmatrix}c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix},$$

由行列式的性质知, 上述 3 个行列式的值相等, 故

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

证明 (2) 考虑混合向量积的几何意义.

注意到, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 所张成的平行六面体的体积, 其体积不变, 故

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

8.1.6 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 的单位向量, 试求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ 的值.

解 将 $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 代入得:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=-2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

又 $\boldsymbol{c}$ 是单位向量 $\Longrightarrow (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=1 \Longrightarrow \boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1 \Longrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}$ 代入上式得:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}.$$

8.1.7 若向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$, 向量 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$, 求两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角.

解 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角为 $\theta(\in[0,\pi])$.

(I) 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中存在 $\boldsymbol{0}$ 向量, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 夹角为任意值.

(II) 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均不为 $\boldsymbol{0}$, 由题意得:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0,\\(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}7\boldsymbol{a}^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15\boldsymbol{b}^2=0,\\7\boldsymbol{a}^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{b}^2=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{15}{16}\boldsymbol{b}^2-\frac{7}{16}\boldsymbol{a}^2=\frac{7}{30}\boldsymbol{a}^2+\frac{8}{30}\boldsymbol{b}^2\Longrightarrow\begin{cases}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,\\\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}|^2}=\frac{1}{2}\Longrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}.$$

8.1.8 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直, 且 $|\boldsymbol{a}|=3, |\boldsymbol{b}|=4$, 试计算:

(1) $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$;

(2) $|(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|$.

解 (1) 由向量叉乘的分配律得:

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\\ \Longrightarrow\ &|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=2|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|=24.\end{aligned}$$

(2) 同理可得:

$$\begin{aligned}&(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=-5\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\\ \Longrightarrow\ &|(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|=5|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=60.\end{aligned}$$

8.1.10 已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 试证: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

证明 由 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 得:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}&=\boldsymbol{b}\times(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}&=(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\\ &\Longrightarrow\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

8.1.12 求证: $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$.

证明 (1) 记 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta(\in[0,\pi])$. 由 $\begin{cases}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta,\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta\end{cases}$ 得:

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta)=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.$$

提示 (2) 运用**习题** 8.1.4**中向量的混合积**的性质及**二重向量积**的性质.

证明 (2) 由 $\begin{cases}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}\end{cases}$ 得:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))\cdot\boldsymbol{a}\\ &=((\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.\end{aligned}$$

8.1.14

$a-b=(4,-6,12)$, $|a-b|=14$

$\cos\alpha = \dfrac{4}{|a-b|\times 1} = \dfrac{2}{7}$ (与 (1,0,0) 求夹角)

$\cos\beta = -\dfrac{3}{7}$ $\cos\gamma = \dfrac{6}{7}$

8.1.17 已知 $\overrightarrow{OA} = 2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}, \overrightarrow{OB} = 3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}, \overrightarrow{OC} = 4\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$, 问 A, B, C 三点是否共线?

解 (1) 注意到, 取 $t=-1$, 满足: $\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$, 故 A, B, C 三点共线. □

解 (2) 注意到, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}, \overrightarrow{AC} = 2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k} \implies \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{0}$, 故 A, B, C 三点共线. □

8.1.18

(1) -6 (2) -61

8.1.19

(1) 38 (2) 7 (3) -184 (4) 9

8.1.22 已知向量 $\boldsymbol{a} = (3,-1,-2)$ 和 $\boldsymbol{b} = (1,2,-1)$, 试求下列向量积的坐标:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$; (2) $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

解 (1)

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (3,-1,-2)\times(1,2,-1) = (5,1,7).$$

(2)

$$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 4\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (20,4,28).$$

8.1.23

$S_0 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = 14$

8.1.25

用 $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$ 判断

(1) $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ 共面

(2) $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} \neq 0$, 不共面

8.1.29 在 Oyz 平面上求一点 P, 使它与三已知点 $A(3,1,2), B(4,-2,-2), C(0,5,1)$ 等距离.

提示 考虑线段的中垂面.

解 过 AB 中点 $M_1\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ 且法向量方向为 $\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{AB}=(1,-3,-4)$ 的平面方程为

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)-3\left(y+\frac{1}{2}\right)-4z=0, \tag{8.1}$$

过 AC 中点 $M_2\left(\frac{3}{2},3,\frac{3}{2}\right)$ 且法向量方向为 $\boldsymbol{n}_2=\overrightarrow{AC}=(-3,4,-1)$ 的平面方程为

$$-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+4(y-3)-\left(z-\frac{3}{2}\right)=0, \tag{8.2}$$

Oyz 平面方程为

$$x=0, \tag{8.3}$$

联立式 (8.1)(8.2)(8.3) 得: $P(0,1,-2)$. □

8.2

8.2.4

(1) $\frac{2}{2}=\frac{-3}{-3}=\frac{5}{5}$ 平行　用法向量判断

(2) $4\cdot 2+2\cdot 1+(-4)\cdot 2\neq 0$. 相交但不垂直

(3) 重合

(4) $3\cdot 1+(-1)\cdot 9+(-2)(-3)=0$, 垂直

8.2.5 求通过点 $M(3,-1,1)$ 且同时垂直于两个平面 $2x-z+1=0$ 和 $y=0$ 的平面方程.

解 两平面法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(2,0,-1), \boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$, 从而要求的平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(1,0,2)$, 又其通过点 $M(3,-1,1)$, 故方程为 $(x-3)+2(z-1)=0$, 即 $x+2z-5=0$. □

8.2.7

(1) $\vec{n}_1=(2,-1,1)$ $\vec{n}_2=(1,1,2)$ $\cos\theta=\frac{2-1+2}{3\times 5}=\frac{1}{2}$. $\theta=\frac{\pi}{3}$

(2) $\vec{n}_1=(2,1,2)$ $\vec{n}_2=(3,-4,0)$ $\cos\theta=\frac{2}{15}$, $\theta=\arccos\frac{2}{15}$

8.2.8

(1) 1, (2) 3

8.2.9

(1) $\frac{21}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}} = 3$ (2) $\frac{9+\frac{21}{2}}{\sqrt{2^2+1+2^2}} = \frac{13}{2}$

8.2.11 求与两平面 $x+y-2z-1=0$ 和 $x+y-2z+3=0$ 等距离的平面.

解 注意到两平面的法向量均为 $\boldsymbol{n}=(1,1,-2)$, 取点 $A(1,0,0)$, $B(-3,0,0)$ 分别位于两平面上, 则等距平面过 AB 中点 $M(-1,0,0)$, 法向量同为 $\boldsymbol{n}$, 故其平面方程为 $(x+1)+y-2z=0$, 即 $x+y-2z+1=0$. □

8.2.13

由对称性知, 可设其为 (a,a,a).

由 $a=\frac{13a-11}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3-\sqrt{3}}$ 即为 $\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}}, \frac{1}{3-\sqrt{3}}, \frac{1}{3-\sqrt{3}}\right)$

8.2.14

(2) 过 $(0,2,-1)$ 的面: $6(x-0)+3(y-2)+2(z+1)=0$

得 $6x+3y+2z-4=0$

$\frac{12+(-20)}{2}=-4$, 平面应为 $6x+3y+2z-20=0$

(4) 设平面法向量为 $\boldsymbol{n}$, 则其与 Oxy 平面 $z=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_0=(0,0,1)$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 不妨设 $\boldsymbol{n}=(x,y,1):=\overrightarrow{OP}$, 从而点 P 必在 $z=1$ 平面上, 以 $M(0,0,1)$ 为圆心, $r=\sqrt{3}$ 为半径的圆上 ($\tan\angle MOP=\frac{PM}{MO}=\tan\frac{\pi}{3} \implies r=PM=\sqrt{3}$). 故重设 $\boldsymbol{n}=(r\cos\theta, r\sin\theta, 1)$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$. 平面过 $M(0,0,1)$, 故其方程为 $\sqrt{3}\cos\theta x+\sqrt{3}\sin\theta y+(z-1)=0$, 将 $N(3,0,0)$ 代入得: $3\sqrt{3}\cos\theta-1=0 \implies \cos\theta=\frac{1}{3\sqrt{3}}, \sin\theta=\pm\frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}}$. 故平面方程为 $\frac{1}{3}x\pm\frac{\sqrt{26}}{3}y+z-1=0$, 即 $x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0$. □

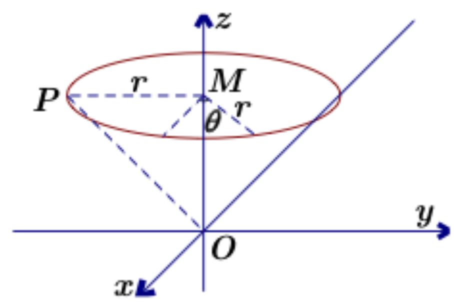

Figure 8.1 习题 8.2.14(4)

8.2.15

(2) $a=(1,1,-2)$ $b=(1,2,-1)$ $a\times b=(3,-1,1)$

即 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$

8.2.16

$a=(2,3,-1)$, $b=(3,-5,2)$ $a\times b=(1,-7,-19)$

代入 $y=0$ 得其过 $(1,0,-2)$

即 $\begin{cases} x=1+t \\ y=-7t \\ z=-2-19t \end{cases}$

8.2.18

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{2\pi}{3}$

8.2.20

~~垂直田合~~

(1) $(1,0,-1)$, (2) $(-2,-1,5)$

8.2.21

(1) $\varphi=\arcsin\frac{3}{133}$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 与 $(6,15,-10)$ 求夹角

(2) $\varphi=0$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ 与 $(1,-1,-1)$ 求夹角

8.2.23 证明下列各组直线是异面直线, 并求它们的距离 (即两直线公垂线之长).

(1) $\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ 和 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$;

(2) $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x+2y-z-2=0, \\ x+2y+2z+4=0. \end{cases}$

证明 (1) 两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1=(4,-3,1), \boldsymbol{v}_2=(-2,9,2), \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=(-15,-10,30)$, 两直线分别过点 $A(9,-2,0), B(0,-7,2)$, 记 $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{AB}=(-9,-5,2)$.

由向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{u}$ 张成的平行六面体的体积为

$$V=|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{u}|=|(-15,-10,30)\cdot(-9,-5,2)|=245>0,$$

故两直线为异面直线. 下面计算其公垂线之长.

公垂线方向为 $\boldsymbol{v}=(-15,-10,30)$, 长度为

$$d=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{245}{35}=7.$$

(2) 两平面 $x+y-z-1=0, 2x+y-z-2=0$ 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,-1), \boldsymbol{n}_2=(2,1,-1) \implies$ 其交线的方向向量为 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(0,-1,-1)$, 且过点 $A(1,0,0)$;

同理可得, 平面 $x+2y-z-2=0, x+2y+2z+4=0$ 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}_1=(1,2,-1), \boldsymbol{m}_2=(1,2,2) \implies$ 其交线的方向向量为 $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2=(6,-3,0)$, 且过点 $B(0,0,-2)$.

记 $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{AB}=(-1,0,-2), \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=(-3,-6,6)$. 由向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{u}$ 张成的平行六面体的体积为

$$V=|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{u}|=|(-3,-6,6)\cdot(-1,0,-2)|=9>0,$$

故两直线为异面直线. 下面计算其公垂线之长.

公垂线方向为 $\boldsymbol{v}=(-3,-6,6)$, 长度为

$$d=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{9}{9}=1.$$

8.2.24

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (1,-8,-13)$ 与 $(1,2,3)$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -8 & -13 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (2,-16,10)$ 且 其过 $(0,0,-1)$

得: $x-8y+5z+5=0$

8.2.25

$(3,2,-1)$，$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1,3,5)$ 两者叉乘

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (13,-14,11)$ 且过 $(1,3,-2)$

得：$13x-14y+11z+51=0$

8.2.27

过 $(-1,2,0)$ 垂线为 $\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t+2 \\ z=-t \end{cases}$ 代入 $x+2y-z+1=0$ 得

$t-1+4t+4+t+1=0$ 得 $t=\frac{-2}{3}$，即 $(-\frac{5}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

8.2.31

代入后解方程即可，$\lambda=2$，$x-y-z-2=0$

8.2.32

解　所求直线 l 与两直线 l_1、l_2 相交，则直线 l 分别与两直线 l_1、l_2 共面，不妨记这两平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$.

直线 l_1 的对称式方程为 $\frac{x}{1}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+3}{2}$，可看出直线 l_1 过点 $M_1(0,5,-3)$，方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(1,3,2)$，这样 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{s}_1\times\overrightarrow{AM_1}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}=9(2,0,-1)$；

直线 l_2 的对称式方程为 $\frac{x}{1}=\frac{y+7}{4}=\frac{z-10}{5}$，可看出直线 l_2 过点 $M_2(0,-7,10)$，方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(1,4,5)$，这样 $\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{s}_2\times\overrightarrow{AM_2}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & -12 & 19 \end{vmatrix}=4(34,-1,-6)$.

故 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 34 & -1 & -6 \end{vmatrix}=-(1,22,2)$，所求直线为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y-5}{22}=\frac{z+9}{2}.$$

8.2.33

取直线上两点 $(0,2,1),(0,1,0)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t+2 \\ z = t+1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = t \\ y = t+1 \\ z = t \end{cases}$$ 与 $x+y+z=0$ 求交得

$(-1,1,0)$, $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, 其确定直线 $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -t+1 \\ z = -t \end{cases}$