数分QUIZ　2022/6/9

Name______________　　　　　　Number______________

1. (15 points) 设空间曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

计算曲线积分

$$\int_L (x+y-2z)^2 \mathrm{d}s$$

2. (15 points) 设定向曲面S为曲面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$在$x\circ y$ 平面上方的外侧，计算曲面积分

$$\iint_S \left(3x^2+z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-(6xy+y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(3y^2-1\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

3. (15 points) 在变力 $\vec{F}=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上位于第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$。问 ξ,η,ζ 取何值时，力 $\vec{F}$ 所作的功W最大？

4. (15 points) 设有函数列 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$，其中 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k\sin kx}{2^{\frac{k}{2}}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$

(1) 证明在 $(-\infty,+\infty)$上，$S_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin nx}{2^{\frac{n}{2}}}$。

(2) 证明 $\max\limits_{x\in\mathbf{R}}|f(x)|\geq\sqrt{3}$

5. (15 points) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-1}{2}x & 0\le x\le 1\\ \frac{\pi-x}{2} & 1\le x\le \pi\end{cases}$

(1) 证明 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx \quad (0\le x\le \pi)$

(2) 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 以及 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}$ 的和

6. (15 points) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数。令

$$F(t)=\int_0^1 \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x$$

讨论函数 $F(t)$ 的连续性

7. (15 points) 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可微，$f'(x)$ 可积，且当 $x \to +\infty$ 时，$f(x)$ 单调递减趋于0，而广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。试判断 $\displaystyle\int_a^{+\infty} xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 的收敛性，并证明你的结论。

8. (15 points) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且平方可积。令 $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$。证明 $\frac{g(x)}{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上平方可积，且 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \le 4\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$