

姓名: _____

学号: _____

学院: _____

年级: _____

上海科技大学

2021–2022 学年第 2 学期期末考试卷

开课单位: 数学科学研究所

授课教师: 朱佐农, 姚成建, 孙伟, 陈克应

考试科目: 数学分析 II

课程序号: GEMA1010

考生须知:

1. 请严格遵守考场纪律, 禁止任何形式的作弊行为。
2. 参加闭卷考试的考生, 除携带必要考试用具外, 书籍、笔记、掌上电脑和其他电子设备等物品一律按要求放在指定位置。
3. 参加开卷考试的考生, 可以携带教师指定的材料独立完成考试, 但不准相互讨论, 不准交换材料。

考试成绩录入表:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	总分
计分										
复核										

评卷人签名:

复核人签名:

日期:

日期:

分数: _____

页码: _____ 1 _____

1. (12 分) 判断题 (对的写 T, 错的写 F)

- () (1) 设函数 $f(x, y)$ 在开区域 D 内存在两个偏导数。如果偏导数 $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ 在 D 内连续, 那么 f 在 D 内可微。
- () (2) 设函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数。如果积分 $\int_0^{\infty} |f(x)|dx$ 收敛, 那么 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛。
- () (3) 设 $V \subset \mathbb{R}^3$ 是开区域, $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ 是 V 上的光滑向量场。若 \mathbf{v} 满足 $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, 那么 \mathbf{v} 是保守场。
- () (4) 设 $F(x, y)$ 是一个光滑函数。若 $F(x, y) = 0$ 恰表示了一条自相交的曲线, 那么在曲线交点处 $F(x, y)$ 的偏导数一定为 0。
- () (5) 连通集一定是道路连通集。
- () (6) 无穷多个开集的交集仍是开的。

分数: _____

页码: 2

2. (10 分) 判断下列反常积分的收敛性:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6} \ln \left(1 - \frac{\sin^6 x}{6} \right) dx.$$

分数: _____

页码: 3

3. (10 分) 已知 $A(1, 0, a)$, $B(2, 3, 1)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(6, 6, 6)$ 在一个平面上, 求 a 的值。

分数: _____

页码: _____4_____

4. (10 分) 计算积分

$$\iiint_V |z| dx dy dz, \quad V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3.$$

分数: _____

页码: 5

5. (10 分) 由下列方程组求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{dz}{dx}$.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

(答案化简为最简形式)

分数: _____

页码: 6

6. (10 分) 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上将函数

$$f(x) = \sin^3 x$$

展开成 Fourier 级数。

分数: _____

页码: 7

7. (10 分) 已知 f 是以 2π 为周期的, 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积且绝对可积函数。假设存在某个正整数 $n \geq 1$, 使得 f 的 Fourier 级数第 n 余弦项 $\cos nx$ 的系数 $a_n = 1$ 。求证: $\sup_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x)| \geq \frac{\pi}{4}$ 。

分数: _____

页码: _____ 8 _____

8. (10 分) 求下列曲面积分

$$\iint_{\Sigma} (x^3 + y^3) dydz + (6x^3 + 3x^2y) dzdx - 6x^2z dx dy,$$

其中 Σ 是双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ($0 \leq z \leq \sqrt{3}$) 外侧。

分数: _____

页码: _____ 9

9. (18 分) 平面区域 D 是闭的有界 Jordan 可测区域, 测度非零。假设 f, g 是 D 上的 (Riemann) 可积函数, 正实数 p, q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。

(1) (5 分) 利用 Lagrange 乘数法证明, 对于任意非负实数 x, y , 有

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

(2) (5 分) 求证: 以下不等式中的积分有意义, 且不等式成立

$$\iint_D fg \, dxdy \leq \left(\iint_D |f|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_D |g|^q dxdy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

(3) (5 分) 利用 (2) 中的不等式证明: 极限 $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\iint_D |f|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$ 存在。

(4) (3 分) 请问 $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\iint_D |f|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$ 是否等于 $\sup_D |f|$? 证明您的判断。