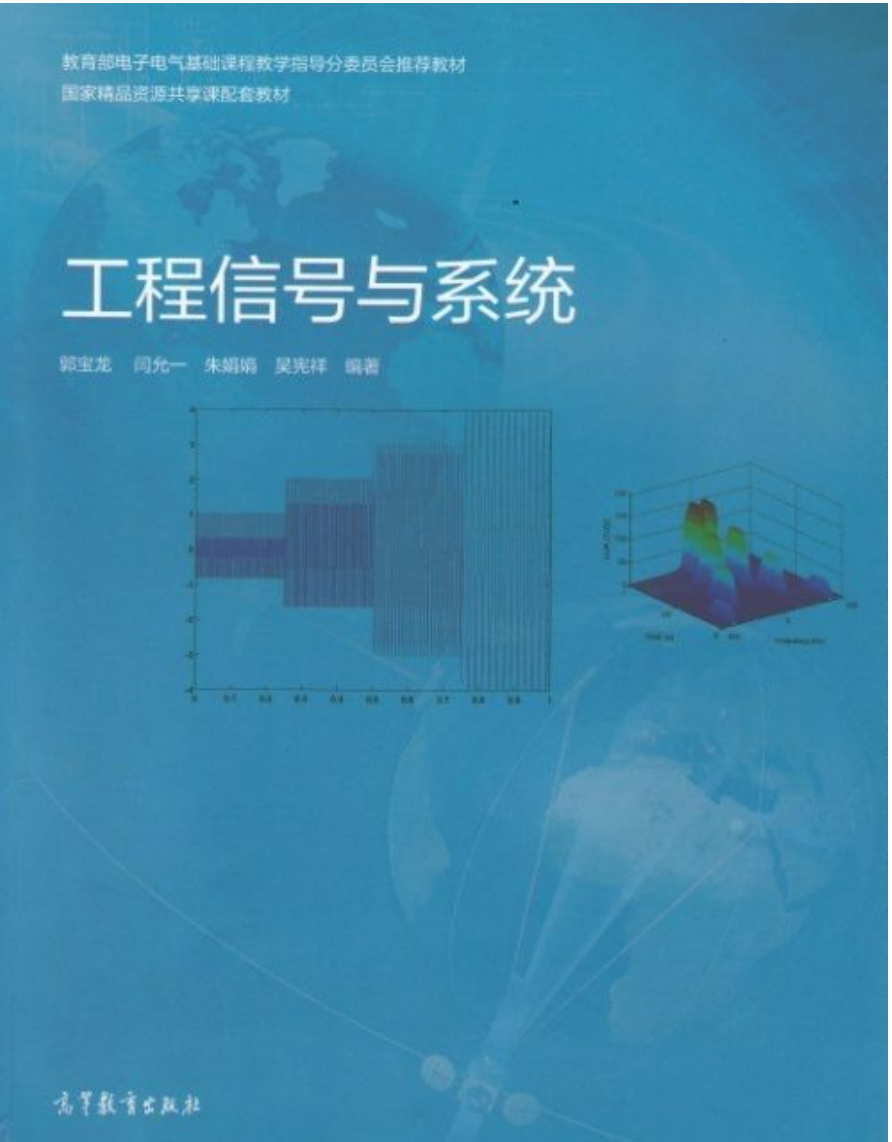


工程信号与系统

西安电子科技大学
Xidian University, Xi'an China

Part 3 系统的状态空间分析

一、系统的状态空间分析法基本概念

1、系统的状态空间描述

状态空间：状态方程+输出方程 。

状态方程：表示系统状态变量与输入之间的关系/方程。对n阶系统，状态方程是由n个一阶微分方程（差分方程）组成的方程组。

输出方程：表示系统输出与输入和状态变量之间的关系/方程。对n阶系统，若有q个输出，输出方程是由q个代数方程组成的方程组。

2、系统状态方程、输出方程的解

A.连续系统： (1)时域解， (2) s 域解；

B.离散系统： (1)时域解， (2) z 域解。

二、状态空间分析法优点

① 提供系统的内部信息，使人们能够比较容易地解决那些与系统内部情况有关的分析设计问题；

② 不仅适用于线性时不变、单输入单输出系统，也适用于非线性时变、随机、多输入多输出系统分析；

③ 规律性强，便于用计算机解决复杂系统的分析设计问题。

知识点K3.01

连续系统状态方程与输出方程

主要内容：

1.状态变量

2.状态方程

3.输出方程

基本要求：

掌握连续系统状态方程、输出方程的基本概念

K3.01 连续系统状态方程与输出方程

(1)初始状态：

定义：连续系统在t_0时刻的状态是最少数目的一组数，知道了这组数和区间$[t_0,t]$上的输入，就可以完全确定系统在t时刻的输出，这组数即为初始状态，表示如下：

$$x_1(t_0), x_2(t_0)\ldots\ldots, x_n(t_0)$$

说明：

(1)电路中，初始时刻t_0的状态通常指电容元件上电压$u_c(t_0)$和电感元件上电流$i_L(t_0)$；

(2)系统状态的数目是一定的，n阶系统有n个初始状态；但状态的选择不唯一。

(2) 状态变量： 表示状态随时间变化的一组变量。

初始状态：$x_1(t_0), x_2(t_0)\ldots\ldots, x_n(t_0)$

状态变量：$x_1(t), x_2(t)\ldots\ldots, x_n(t)$

(3)状态矢量、状态空间：

状态矢量： 由状态变量构成的列矢量***X*(*t*)** 。

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

状态空间： 状态矢量***X*(*t*)** 所在的空间。

(4)状态方程:

描述系统状态与输入关系的一阶微分方程组。

设*n*阶系统有*n*个状态：$x_1, x_2 \cdots, x_n$.

*p*个输入：$f_1, f_2 \cdots, f_p$.

则状态方程一般形式为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}f_1 + b_{12}f_2 + \cdots + b_{1p}f_p \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}f_1 + b_{22}f_2 + \cdots + b_{2p}f_p \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}f_1 + b_{n2}f_2 + \cdots + b_{np}f_p \end{cases}$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}$$

令 $\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \cdots & \dot{x}_n \end{bmatrix}^T$ ，$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_p \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad , \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{n\times p}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{Bf}$$

(5)输出方程：描述系统输出、输入、状态之间关系的代数方程组。

设n阶系统有n个状态：$x_1, x_2 \cdots, x_n$.

p个输入：$f_1, f_2 \cdots, f_p$.

q个输出：$y_1, y_2 \cdots, y_q$.

则输出方程的一般形式为：

$$
\begin{cases}
y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}f_1 + d_{12}f_2 + \cdots + d_{1p}f_p \\
y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}f_1 + d_{22}f_2 + \cdots + d_{2p}f_p \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
y_q = c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \cdots + c_{qn}x_n + d_{q1}f_1 + d_{q2}f_2 + \cdots + d_{qp}f_p
\end{cases}
$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}$$

令 $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \cdots y_q \end{bmatrix}^T$ ，$C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}_{q\times n}$ ，$D = \begin{bmatrix} d_{ij} \end{bmatrix}_{q\times p}$

则

$$\boldsymbol{Y = CX + Df}$$

知识点K3.02

连续系统状态方程的建立-由RLC电路

主要内容：

RLC电路状态方程的建立方法

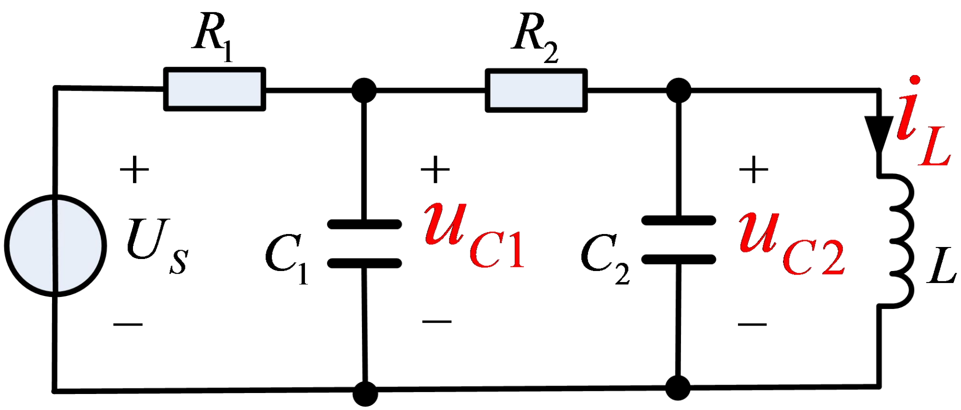
基本要求：

掌握RLC电路状态变量的选择方法和状态方程/输出方程的建立方法

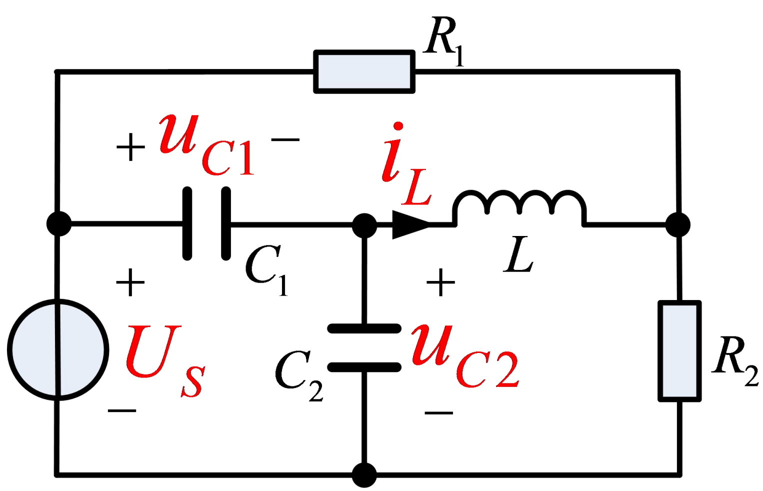
K3.02 连续系统状态方程的建立-由RLC电路

(1)状态变量的选取: 一般选电容电压和电感电流。

例1

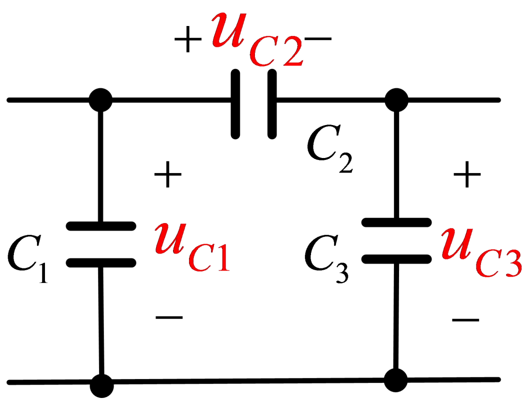


选择u_{c1}、u_{c2}、i_L为状态变量



选择:u_{c1}、i_L 或者 u_{c2}、i_L为状态变量

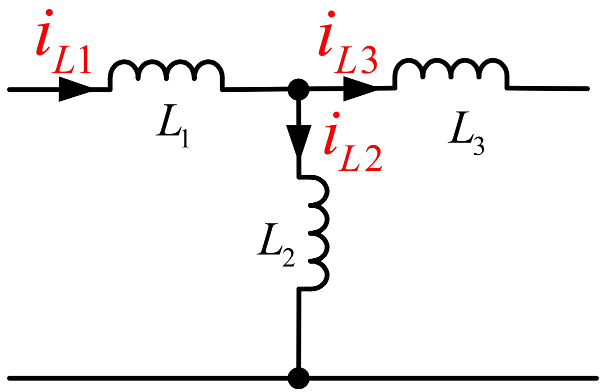
连续系统状态方程的建立-由RLC电路

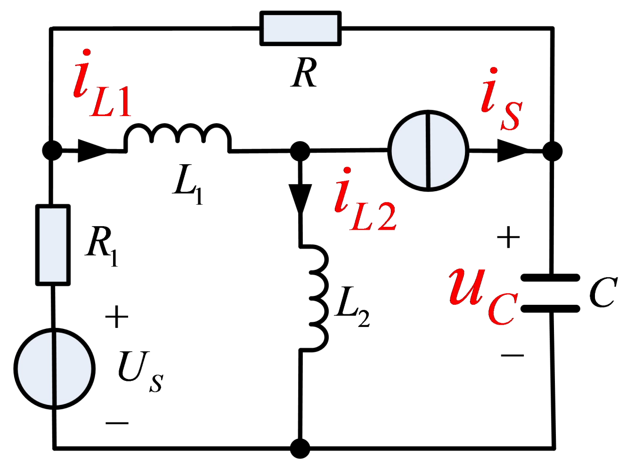


(1)u_{c1}、u_{c2}

(2)u_{c2}、u_{c3}

(3)u_{c1}、u_{c3}为状态变量





(1) i_{L1}、i_{L2}

(2) i_{L1}、i_{L3}

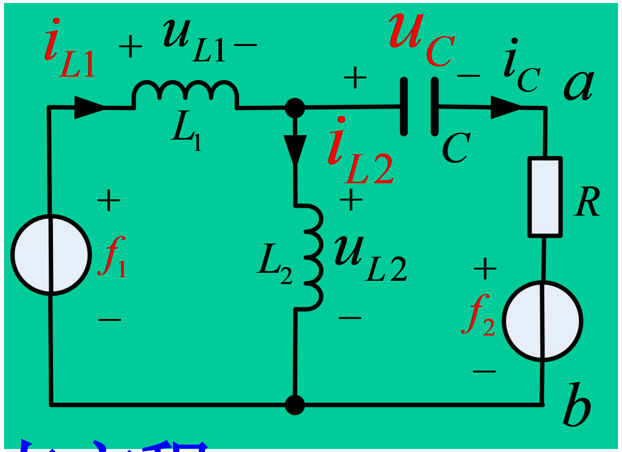
(3) i_{L2}、i_{L3} 为状态变量

(1)u_c、i_{L1}

(2)u_c、i_{L2} 为状态变量

（2）直观编写法步骤：

例2



状态变量：

$$x_1 = i_{L1}, x_2 = i_{L2}, x_3 = u_C$$

输出变量：

$$y_1 = u_{L2} \quad , y_2 = u_{ab}$$

列状态方程：

第一步:关于 $L_1\dot{x}_1, L_2\dot{x}_2$ (电感电压)列KVL方程：

$$L_1\dot{x}_1 = u_{L1} = f_1 - x_3 - R(x_1 - x_2) - f_2 = -Rx_1 + Rx_2 - x_3 + f_1 - f_2$$

$$L_2\dot{x}_2 = u_{L2} = x_3 + R(x_1 - x_2) + f_2 = Rx_1 - Rx_2 + x_3 + f_2$$

第二步:关于 $C\dot{x}_3$ (电容电流)列KCL方程：

$$C\dot{x}_3 = i_C = x_1 - x_2$$

连续系统状态方程的建立-由RLC电路

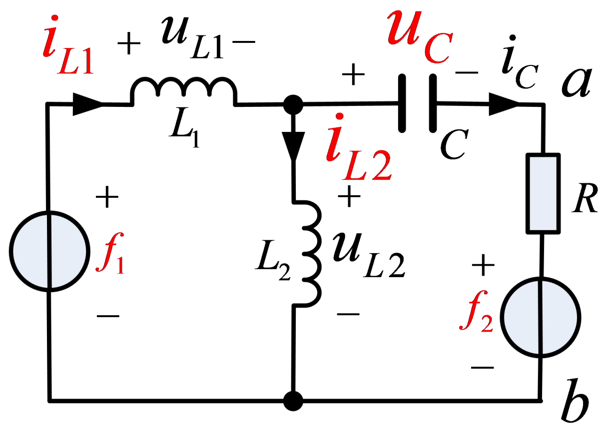
第三步:消去除了状态变量和输入以外的其它变量，把状态方程整理成标准形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R}{L_1}x_1 + \dfrac{R}{L_1}x_2 - \dfrac{1}{L_1}x_3 + \dfrac{1}{L_1}f_1 - \dfrac{1}{L_1}f_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{R}{L_2}x_1 - \dfrac{R}{L_2}x_2 + \dfrac{1}{L_2}x_3 + \dfrac{1}{L_2}f_2 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{1}{C}x_1 - \dfrac{1}{C}x_2 \end{cases}$$

矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L_1} & \dfrac{R}{L_1} & -\dfrac{1}{L_1} \\ \dfrac{R}{L_2} & -\dfrac{R}{L_2} & \dfrac{1}{L_2} \\ \dfrac{1}{C} & \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_1} & -\dfrac{1}{L_1} \\ 0 & \dfrac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

连续系统状态方程的建立-由RLC电路



状态变量:

$$x_1 = i_{L1},\ x_2 = i_{L2},\ x_3 = u_C$$

输出变量:

$$y_1 = u_{L2} \quad ,y_2 = u_{ab}$$

列输出方程:

$$\begin{cases} y_1 = u_{L2} = L_2\dot{x}_2 = Rx_1 - Rx_2 + x_3 + f_2 \\ y_2 = u_{ab} = i_c R + f_2 = Rx_1 - Rx_2 + f_2 \end{cases}$$

矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -R & 1 \\ R & -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

知识点K3.03

连续系统状态方程的建立-由微分方程

主要内容：

由微分方程建立连续系统状态方程的方法

基本要求：

掌握由微分方程建立连续系统状态方程/输出方程的方法

K3.03 连续系统状态方程的建立-由微分方程

例1 已知系统方程为

$$y'''(t)+a_2y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_0f(t)$$

列出系统的状态方程和输出方程。

解:（1） 选择状态变量: $x_1=y$ ， $x_2=y'$， $x_3=y''$

（2） 状态方程:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-a_0x_1-a_1x_2-a_2x_3+b_0f\end{cases}$$

（3） 输出方程: $y=x_1$

（4）矩阵形式：

状态方程：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ b_0\end{bmatrix}f$$

输出方程：

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

连续系统状态方程的建立-由微分方程

例2 已知微分方程，列出系统状态方程和输出方程。

$$y'''(t)+a_2y''(t)+a_1y''(t)+a_0y(t)=b_1f'(t)+b_0f(t)$$

解:（1）选择状态变量:

引入$q(t)$: $q'''(t)+a_2q''(t)+a_1q'(t)+a_0q(t)=f(t)$ (1)

(1)式代入原方程得: $y(t)=b_1q'(t)+b_0q(t)$ (2)

令 $x_1=q$， $x_2=q'$， $x_3=q''$

（2）状态方程:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-a_0x_1-a_1x_2-a_2x_3+f\end{cases}$$

（3）输出方程: $y=b_1x_2+b_0x_1$

（4）矩阵形式：

状态方程：
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}f$$

输出方程：
$$y=\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

知识点K3.04

连续系统状态方程的建立-由框图/流图

主要内容：

1.由框图/流图建立连续系统状态方程的方法

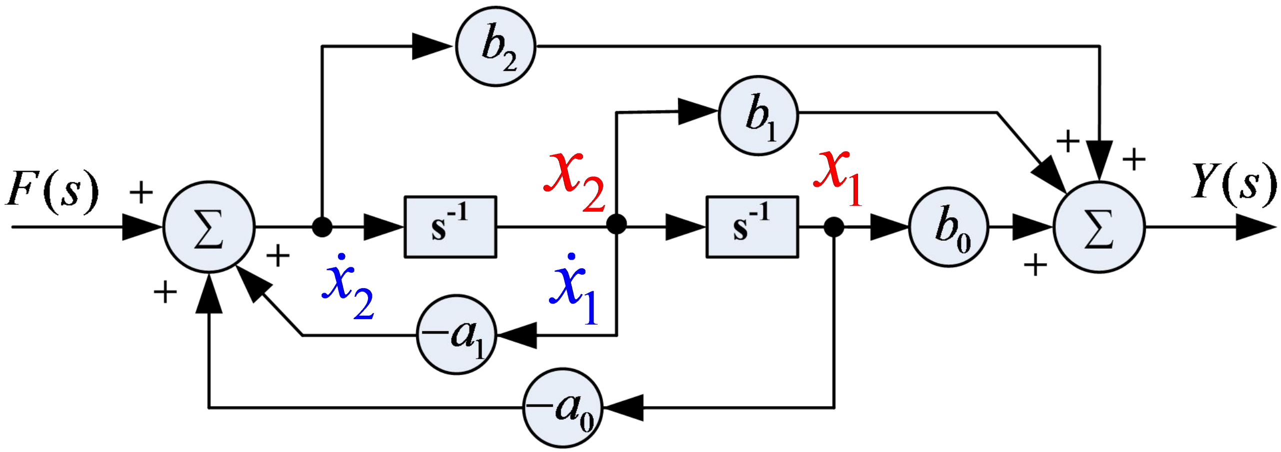
2.利用Matlab建立状态方程

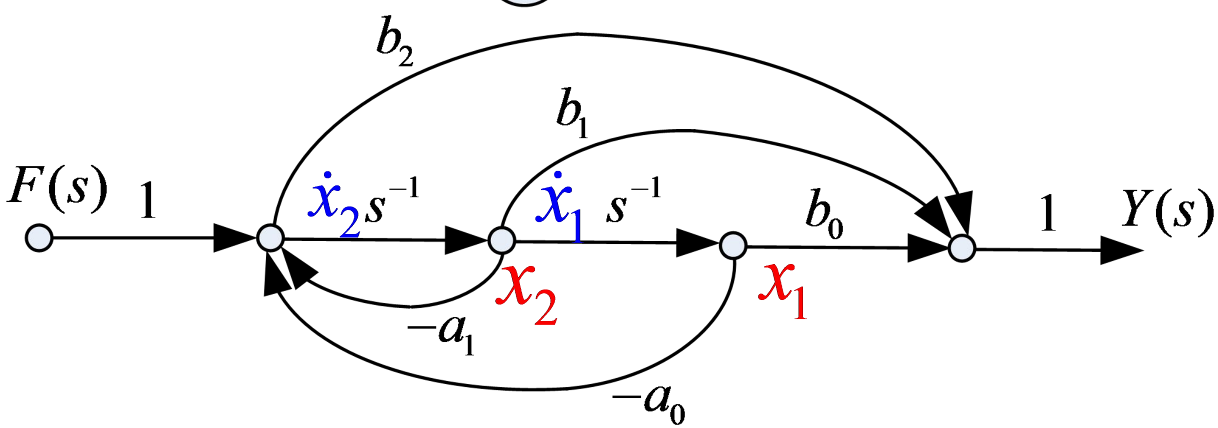
基本要求：

掌握由框图/流图方程建立连续系统状态方程/输出方程的方法

K3.04 连续系统状态方程的建立-由框图/流图

例1 LTI系统框图和流图如图，列状态方程和输出方程。





解:((1))选状态变量： 选<u>积分器输出</u>为状态变量，如图。

连续系统状态方程的建立-由框图/流图

(2) 状态方程：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + f \end{cases}$$

(3) 输出方程：

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2(-a_0 x_1 - a_1 x_2 + f)$$

$$= (b_0 - a_0 b_2) x_1 + (b_1 - a_1 b_2) x_2 + f$$

(4) 矩阵形式：

状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f$$

输出方程：

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_2 & b_1 - a_1 b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + f$$

连续系统状态方程的建立-利用Matlab

MATLAB提供了一个tf2ss函数，它能把描述系统的微分方程转化为等价的状态空间方程，调用形式如下：

[A, B, C, D]=tf2ss(num, den)

其中，num、den分别表示系统函数H(s)的分子和分母项式；A、B、C、D分别为状态空间方程的系数矩阵。

例2 已知系统函数为

$$H(s)=\frac{1}{s^2+5s+10}$$

利用Matlab建立系统的状态空间方程。

连续系统状态方程的建立-利用Matlab

解：% 详见扩展资源F8001

```
b = [0 0 1];
a = [1 5 10];
[A,B,C,D]=tf2ss(b,a)
```

状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f$$

输出方程：

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

%运行可得

```
A =
   -5   -10
    1     0
B =
    1
    0
C =
    0     1
D =
    0
```

知识点K3.05

离散系统状态方程和输出方程

主要内容：

1.状态变量

2.状态方程

3.输出方程

基本要求：

掌握离散系统状态方程和输出方程的基本概念

K3.05 离散系统状态方程和输出方程

(1)初始状态：

定义：离散系统在k_0时刻的状态是最少数目的一组数，知道了这组数和区间$[k_0,k]$上的输入，就可以完全确定系统在k时刻的输出，该组数即为初始状态，表示为：

$$x_1(k_0), x_2(k_0)......, x_n(k_0)$$

说明：

(1) 系统状态的数目是一定的，n阶系统有n个初始状态；

(2) 设初始时刻k_0=0，对n阶系统，初始状态通常为：

$$y(-1), y(-2), ..., y(-n)$$

离散系统状态方程和输出方程

(2) 状态变量： 表示状态随时间变化的一组变量。

初始状态：$x_1(k_0), x_2(k_0)\ldots\ldots, x_n(k_0)$

状态变量：$x_1(k), x_2(k)\ldots\ldots, x_n(k)$

(3) 状态矢量、状态空间：

状态矢量：由状态变量构成的列矢量***X*(*k*)**。

$$\boldsymbol{X}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

状态空间：状态矢量***X*(*k*)** 所在的空间。

(4)状态方程：

描述状态与输入关系的一阶前向差分方程组。

一般形式：n阶系统，n个状态，p个输入。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$X(k+1) \qquad A \qquad X(k) \qquad B \qquad f(k)$$

矩阵形式： $\boldsymbol{X}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(k)$

(5)输出方程： 描述系统输出、输入、状态之间关系的代数方程组。

一般形式： n阶系统，n个状态，p个输入，q个输出。

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_q(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$Y(k) \qquad C \qquad X(k) \qquad D \qquad f(k)$$

$$\boldsymbol{Y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(k)$$

知识点K3.06

离散系统状态方程的建立

主要内容:

1. 由差分方程建立离散系统状态方程的方法
2. 由框图流图建立离散系统状态放的方法

基本要求:

1. 掌握由差分方程建立离散系统状态方程/输出方程的方法
2. 掌握由框图流图建立离散系统状态方程/输出方程的方法

K3.06 离散系统状态方程的建立

例1 已知系统方程如下，列状态方程和输出方程。

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_0y(k-2)=bf(k)$$

解：(1) 状态变量选择：

令 $x_1(k)=y(k-2)$ ， $x_2(k)=y(k-1)$

(2) 状态方程：

$$\begin{cases} x_1(k+1)=x_2(k) \\ x_2(k+1)=-a_0x_1(k)-a_1x_2(k)+bf(k) \end{cases}$$

(3) 输出方程：

$$y(k)=-a_0x_1(k)-a_1x_2(k)+bf(k)$$

(4) 矩阵形式：

状态方程：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} f(k)$$

输出方程：

$$y(k) = \begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + b\, f(k)$$

离散系统状态方程的建立

例2： 已知系统方程如下，列系统状态方程和输出方程。

$$y(k+2)+a_1y(k+1)+a_0y(k)=bf(k)$$

解：

(1) 状态变量选择：

令 $x_1(k)=y(k)$ ， $x_2(k)=y(k+1)$

(2) 状态方程：

$$\begin{cases} x_1(k+1)=x_2(k) \\ x_2(k+1)=-a_0x_1(k)-a_1x_2(k)+bf(k) \end{cases}$$

(3) 输出方程：

$$y(k)=x_1(k)$$

例3： 已知系统方程如下，列状态方程和输出方程。

$$y(k+2)+a_1y(k+1)+a_0y(k)=b_2f(k+2)+b_1f(k+1)+b_0f(k)$$

解：

(1)状态变量的选择：

引入 $q(k)$： $q(k+2)+a_1q(k+1)+a_0q(k)=f(k)$

代入原系统差分方程，可得：

$$y(k)=b_2q(k+2)+b_1q(k+1)+b_0q(k)$$

令 $x_1(k)=q(k)$ ， $x_2(k)=q(k+1)$

离散系统状态方程的建立

(2) 状态方程：

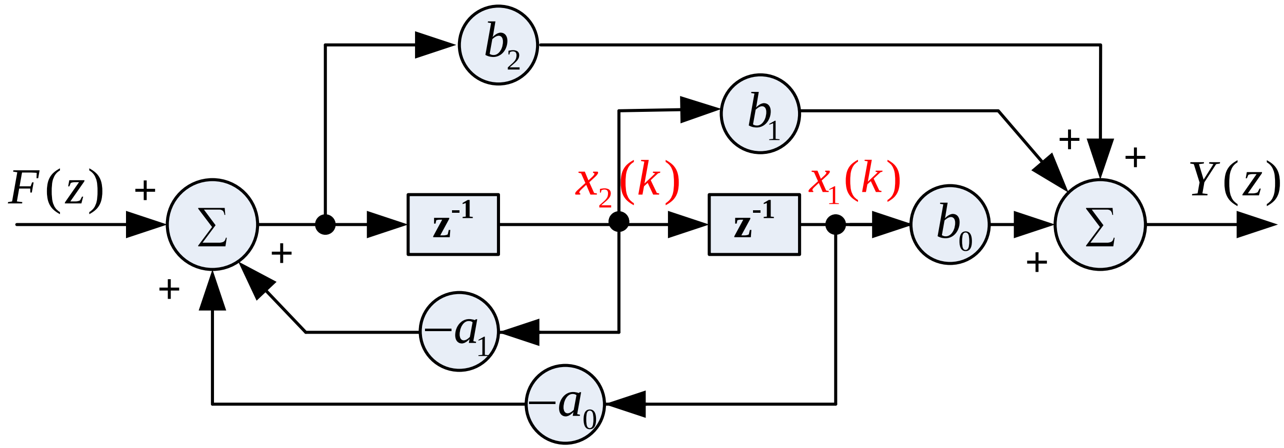
$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = -a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) + f(k) \end{cases}$$

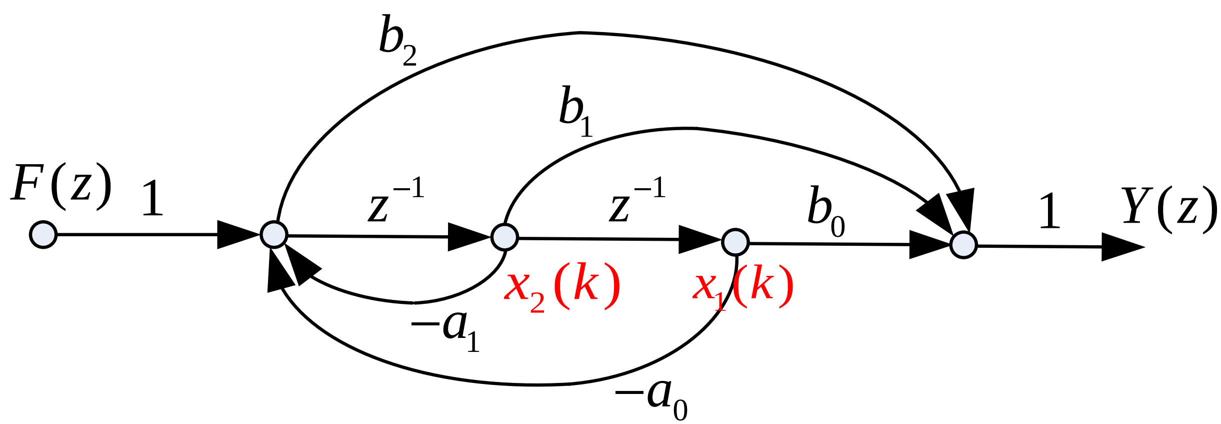
(3) 输出方程：

$$\begin{aligned} y(k) &= b_2 q(k+2) + b_1 q(k+1) + b_0 q(k) \\ &= b_2[-a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) + f(k)] + b_1 x_2(k) + b_0 x_1(k) \\ &= (b_0 - a_0 b_2) x_1(k) + (b_1 - a_1 b_2) x_2(k) + b_2 f(k) \end{aligned}$$

离散系统状态方程的建立

例4 系统框图、流图如图，列状态方程和输出方程。





解:(1)选状态变量： 选差分器输出为状态变量，如图；

离散系统状态方程的建立

(2) 状态方程：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = -a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) + f(k) \end{cases}$$

(3) 输出方程：

$$\begin{aligned} y(k) &= b_0 x_1(k) + b_1 x_2(k) + b_2[-a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) + f(k)] \\ &= (b_0 - a_0 b_2) x_1(k) + (b_1 - a_1 b_2) x_2(k) + b_2 f(k) \end{aligned}$$

(4) 矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_2 & b_1 - a_1 b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + b_2 f(k)$$

知识点K3.07

Ch.8.2, 8.3

系统状态方程的变换域求解

主要内容：

1. 连续系统状态方程的 *s* 域求解
2. 离散系统状态方程的 *z* 域求解

基本要求：

1.掌握连续系统状态方程/输出方程的 *s* 域求解方法

2.掌握离散系统状态方程/输出方程的 *z* 域求解方法

1. 连续系统状态方程的s域求解

状态方程： $\dot{X}(t) = AX(t) + Bf(t)$

根据单边拉氏变换的时域微分性质， 两边取拉氏变换：

$$sX(s) - X(0\_) = AX(s) + BF(s)$$

$$sX(s) - AX(s) = X(0\_) + BF(s)$$

$$(sI - A)X(s) = X(0\_) + BF(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} X(0\_) + (sI - A)^{-1} BF(s)$$

$$= \underbrace{\Phi(s)X(0\_)}_{X_{zi}(s)} + \underbrace{\Phi(s)BF(s)}_{X_{zs}(s)} \qquad \Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

$$X_{zi}(s) = \mathscr{L}[X_{zi}(t)] \qquad X_{zs}(s) = \mathscr{L}[X_{zs}(t)]$$

$$X(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = \mathscr{L}^{-1}[X_{zi}(s)] + \mathscr{L}^{-1}[X_{zs}(s)]$$

系统状态方程的变换域求解

输出方程：$Y(t)=CX(t)+Df(t)$

两边取拉普拉斯变换：$Y(s)=CX(s)+DF(s)$

代入 $X(s)=\Phi(s)X(0\_)+\Phi(s)BF(s)$

$$Y(s)=C\Phi(s)X(0\_)+[C\Phi(s)B+D]F(s)$$

$$=\underbrace{C\Phi(s)X(0\_)}_{Y_{zi}(s)}+\underbrace{H(s)F(s)}_{Y_{zs}(s)}$$

$$H(s)=C\Phi(s)B+D=\mathscr{L}[h(t)]$$

$$Y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\mathscr{L}^{-1}[Y_{zi}(s)]+\mathscr{L}^{-1}[Y_{zs}(s)]$$

连续系统状态方程、输出方程的s域求解步骤:

(1) 状态方程 s 域求解:

Step1: 求 $\Phi(s)=(sI-A)^{-1}$;

Step2: 求 $X_{zi}(s)=\Phi(s)X(0_-)$;

Step3: 求 $X_{zs}(s)=\Phi(s)BF(s)$;

Step4: 求 $X(s)=X_{zi}(s)+X_{zs}(s)$;

Step5: 求 $X(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]$.

(2)输出方程 s 域求解:

Step1: 求 $\Phi(s) = (sI - A)^{-1};$

Step2: 求 $Y_{zi}(s) = C\Phi(s)X(0_{-});$

Step3: 求 $H(s) = C\Phi(s)B + D;$

Step4: 求 $Y_{zs}(s) = H(s)F(s);$

Step5: 求 $Y_{zi}(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y_{zi}(s)]$

$$Y_{zs}(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y_{zs}(s)];$$

Step6: 求 $Y(t) = Y_{zi}(t) + Y_{zs}(t).$

2. 离散系统状态方程的z域求解

状态方程: $X(k+1) = AX(k) + Bf(k)$

根据单边 z 变换的左移性质，两边取 z 变换:

$$zX(z) - zX(0) = AX(z) + BF(z)$$

$$(zI - A)X(z) = zX(0) + BF(z)$$

$$X(z) = (zI - A)^{-1} zX(0) + (zI - A)^{-1} BF(z)$$

$$= \underbrace{\Phi(z)X(0)}_{X_{zi}(z)} + \underbrace{z^{-1}\Phi(z)BF(z)}_{X_{zs}(z)} \qquad \Phi(z) = (zI - A)^{-1} z$$

$$X(k) = \mathscr{Z}^{-1}[X(z)] = \mathscr{Z}^{-1}[X_{zi}(z)] + \mathscr{Z}^{-1}[X_{zs}(z)]$$

系统状态方程的变换域求解

输出方程：$Y(k)=CX(k)+Df(k)$

方程两边取单边 z 变换，得：

$$Y(z)=CX(z)+DF(z)$$

把 $X(z)$ 代入上式，得：

$$Y(z)=C\Phi(z)X(0)+[Cz^{-1}\Phi(z)B+D]F(z)$$

$$=\underbrace{C\Phi(z)X(0)}_{Y_{zi}(z)}+\underbrace{H(z)F(z)}_{Y_{zs}(z)}$$

$$H(z)=Cz^{-1}\Phi(z)B+D=\mathscr{Z}[h(k)]$$

$$Y(k)=\mathscr{Z}^{-1}[Y(z)]=Y_{zi}(k)+Y_{zs}(k)$$

系统状态方程的变换域求解

离散系统状态方程、输出方程的 z 域求解步骤:

(1)状态方程z域求解:

Step1: 求 $\Phi(z)=(zI-A)^{-1}z;$

Step2: 求 $X_{zi}(z)=\Phi(z)X(0);$

Step3: 求 $X_{zs}(z)=z^{-1}\Phi(z)BF(z);$

Step4: 求 $X(z)=X_{zi}(z)+X_{zs}(z);$

Step5: 求 $X(k)=\mathscr{Z}^{-1}[X(z)].$

(2)输出方程 z 域求解:

Step1: 求 $\Phi(z)=(zI-A)^{-1}z;$

Step2: 求 $Y_{zi}(z)=C\Phi(z)X(0);$

Step3: 求 $H(z)=Cz^{-1}\Phi(z)B+D;$

Step4: 求 $Y_{zs}(z)=H(z)F(z);$

Step5: 求 $Y_{zi}(k)=\mathscr{Z}^{-1}[Y_{zi}(z)]$

$$Y_{zs}(k)=\mathscr{Z}^{-1}[Y_{zs}(z)];$$

Step6: 求 $Y(k)=Y_{zi}(k)+Y_{zs}(k).$

知识点K3.08

利用MATLAB求解系统状态方程

主要内容：

利用Matlab求解系统状态方程

基本要求：

了解利用Matlab求解系统状态方程的方法

一、利用MATLAB求解连续系统状态方程

例1 已知系统状态方程和输出方程分别如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

系统输入为：$f(t) = t\varepsilon(t)$

初始状态：$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

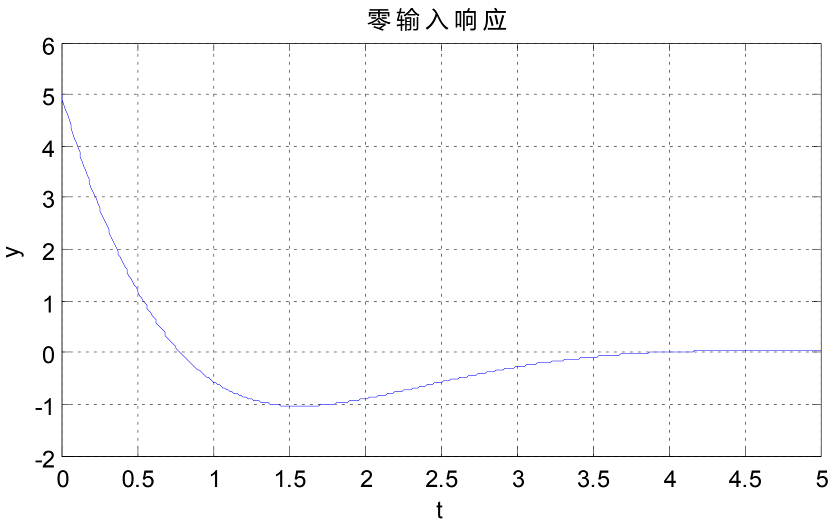
求系统的零输入响应和零状态响应。

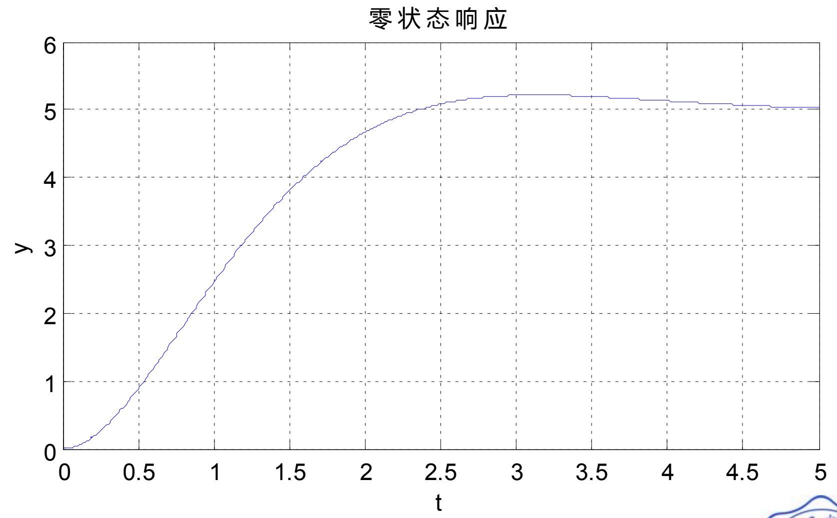
利用MATLAB求解系统状态方程

解：

```
%求零输入响应
A=[-2 -2;1 0];  B=[10;0];C=[1 0];D=[0];
v0=[5;0]                    %初始状态
t=0:.01:5;
X=[0*ones(size(t))]'; %零输入
[y,v]=lsim(A,B,C,D,X,t,v0);
%计算和绘制任意输入下的激励
plot(t,y);grid;xlabel('t');ylabel('y');
title('零输入响应');

%求零状态响应
v0=[0;0];                   %零初始状态
X=[1*t]';                   %输入激励为t
[y,v]=lsim(A,B,C,D,X,t,v0);
plot(t,y);grid;xlabel('t');ylabel('y');
title('零状态响应');
```





二、利用MATLAB求解离散系统状态方程

例2 已知系统状态方程和输出方程分别如下：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1.9021 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[f(k) \right]$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

系统输入为：$f(k) = \varepsilon(k)$

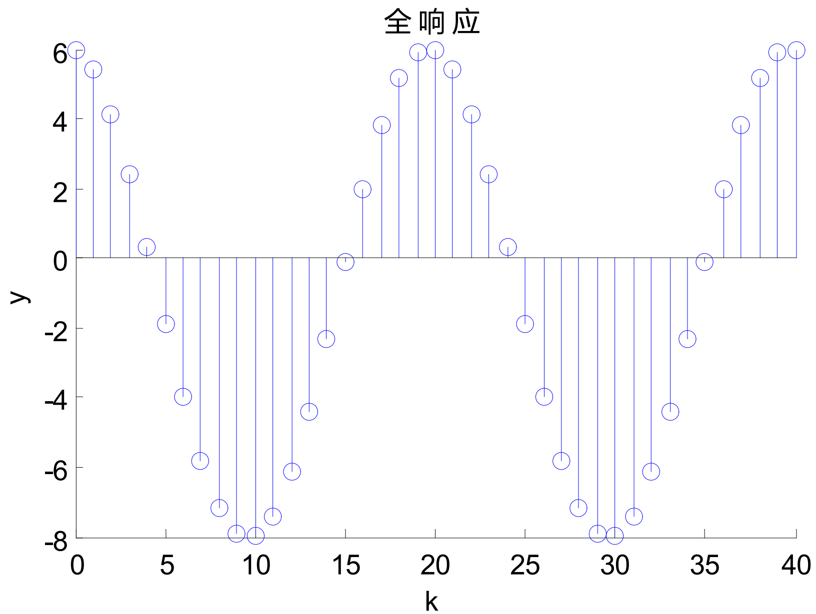
初始状态为：$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -4 \end{bmatrix}$

求系统的全响应。

利用MATLAB求解系统状态方程

解：

```
A=[0 1;-1 1.9021];B=[1;0];C=[-1 1];D=[0];     %各系数矩阵
k=0:1:40;
%求全响应
v0=[-10;-4];                                  %初始状态
X=[1*ones(size(k))]';                         %输入阶跃函数
[y,v]=dlsim(A,B,C,D,X,v0);                    % 调用函数求解响应
stem(k,y);xlabel('k');ylabel('y');title('全响应');
```



知识点K3.09 Ch.8.4

系统函数矩阵与系统稳定性分析

主要内容：

1.连续系统系统函数矩阵与系统稳定性

2.离散系统系统函数矩阵与系统稳定性

3.利用MATLAB计算系统函数

基本要求：

掌握利用系统函数矩阵判断连续/离散系统稳定性的方法

K3.09系统函数矩阵与系统稳定性分析

1.连续系统稳定性判别:

(1) 利用R-H准则判断n阶系统的稳定性:

$$H(s)=C\Phi(s)B+D=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$H(s)$的分母为$|sI-A|$,为s的n次多项式，可表示为;

$$|sI-A|=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0$$

Step1:对$|sI-A|$，进行R-H排列;

Step2:根据R-H准则判别系统的稳定性。

(2) 利用矩阵A的特征方程判断系统稳定性:

若矩阵A的特征方程$|\lambda I-A|=0$的根全部在s左半开平面，则连续系统稳定。

2.离散系统稳定性判别:

(1) 利用朱里准则判断n阶系统的稳定性:

$$H(z)=Cz^{-1}\Phi(z)B+D=C(zI-A)^{-1}B+D$$

$H(z)$的分母为$|zI-A|$,为z的n次多项式，可表示为;

$$|zI-A|=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$$

Step1:对$|zI-A|$进行朱里排列;

Step2:根据朱里准则判别系统的稳定性。

(2) 利用矩阵A的特征方程判断系统稳定性:

若矩阵A的特征方程$|\lambda I-A|=0$的根全部在z单位圆内，则离散系统稳定。

3. 利用MATLAB求解系统函数矩阵

利用MATLAB提供的函数ss2tf，可以由状态空间方程计算系统函数矩阵$H(s)$，调用形式如下：

```
[num, den]=ss2tf(A, B, C, D, k)
```

其中，A、B、C、D分别表示状态空间方程的系数矩阵；k表示由函数ss2tf计算的与第k个输入相关的系统函数，即$H(s)$的第k列。num表示$H(s)$第k列的m个元素的分子多项式，den表示$H(s)$公共的分母多项式。

例1 已知某连续时间系统的状态方程和输出方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

利用Matlab求该系统的系统函数矩阵H(s)。

解：

```
A=[2 3;0 -1];B=[0 1;1 0];C=[1 1;0 -1];D=[1 0;1 0];
%调用函数计算系统函数
[num1,den1]=ss2tf(A,B,C,D,1)
[num2,den2]=ss2tf(A,B,C,D,2)
```

系统函数矩阵与系统稳定性分析

%运行可得

```
num1 =
     1     0    -1
     1    -2     0
den1 =
     1    -1    -2
```

```
num2 =
     0     1     1
     0     0     0
den2 =
     1    -1    -2
```

系统函数矩阵$H(s)$为:

$$H(s)=\frac{1}{s^2-s-2}\begin{bmatrix} s^2-1 & s+1 \\ s^2-2s & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s-2} & \dfrac{1}{s-2} \\ \dfrac{s}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

知识点K3.10

Ch.8.5

线性系统的可控制性和可观测性

主要内容：

1.状态的可控制性和可观测性

2.系统的可控制性

3.可控性矩阵和可观测性矩阵

基本要求：

1.掌握可控性和可观性的基本概念

2.掌握判定方法

K3.10 线性系统的可控制性和可观测性

卫星发射过程中，在规定时间内，通过一定的激励，对卫星的初始状态不断调整，直至入轨、定位等，这就要求卫星的状态必须完全可控制的。

在调整过程中，需要确定位置、速度、加速度等状态，但实际只能观测到火箭在空间中的位置，而不能直接观测到速度和加速度。所以需要通过观测结果来推算出系统的状态。这就要求研究系统是否可以通过观测某些输出来确定状态。

线性系统的可控制性和可观测性

1.状态的可控制性

定义：如果系统在某种初始状态$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$下，可以通过施加一定的激励信号$\boldsymbol{f}(t)$控制，使得系统经过一段时间以后，在任意指定时刻T的状态为零状态，即$\boldsymbol{x}(T)=0$，则称$\boldsymbol{x}_0$为系统的可控制状态。

2.系统的可控制性

$$\text{状态空间}\begin{cases}\text{可控制状态空间（由所有可控制状态组成）}\\ \text{不可控制状态空间（由所有不可控制状态组成）}\end{cases}$$

分类：完全可控制系统；部分可控制系统；完全不可控制系统。

系统的可控制性反映了状态可由输入控制的能力，在现代控制工程中，以状态方程来描述系统，目的就是控制系统状态，以达到理想的输出。

系统可控的含义：通过一定的激励，可以使得系统从任意的初始状态（不一定是零状态）过渡到任意的另一个状态。

系统可控的判定：对于比较复杂的系统，需要判断**可控性矩阵**来进行判定。

定义：可控性矩阵Mc

$$M_C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

系统满足可控性的充要条件：可控性矩阵Mc满秩。

例1： 系统 $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t) + f(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + f(t) \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$M_C = [B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Mc的行列式等于零，不是满秩阵，故系统不可控。

3. 系统的可观测性

定义：系统在给定控制后，对于任意初始时刻t_0，在有限时间$T>t_0$内，根据t_0到T的系统输出的测量值，能唯一确定系统在t_0时刻的状态，则称系统完全可观；若只能确定部分起始状态，则称系统不完全可观。

系统的可观性指的是系统的输出量对状态变量的反映能力，通过可观性矩阵来进行判定。

定义：可观测性矩阵Mo

$$M_O = [C, CA, CA^2, \ldots, CA^{n-1}]^T$$

系统满足可观性的充要条件：可观性矩阵Mo满秩。

例2：判断系统的可观性。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} f(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t)$$

解：

$$C = [1 \quad 2 \quad 3]$$

$$CA = [-7 \quad -10 \quad -3]$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 49 & 50 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & -10 & -3 \\ 49 & 50 & 3 \end{bmatrix}$$

M_O满秩阵，故系统是可观的。