11.5.1 计算下列曲面积分.

(1) $\iint_S (x+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(xy+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是以 $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 为顶点的四面体的外表面;

(2) $\iint_S xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + zx\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是由 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的四面体的外侧表面;

(3) $\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧;

(4) $\iint_S xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + zx^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 的外侧;

(5) $\iint_S (x-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧;

(6) $\iint_S (y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z^2+x^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$ 的上侧.

(4) 记 $\boldsymbol{v}=(xy^2, yz^2, zx^2) \implies \nabla\cdot\boldsymbol{v}=y^2+z^2+x^2$, 记 V 是 S 围成的闭区域, 由 Gauss 定理得:

$$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V,$$

记 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$, 则积分区域化为

$$D=\left\{(r,\theta,\varphi)\middle|\,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant\cos\theta\right\},$$

且

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta,\\
\implies \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V &= \iiint_D r^2\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} r^4\,\mathrm{d}r\\
&=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{5}\cos^5\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&=-\frac{2\pi}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\cos^6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\\
&=\frac{\pi}{15}.
\end{aligned}$$

(5) $\nabla\cdot V = 1+1+1=3$

$$\iint_{S+S_1} (x-z)\,dydz+(y-x)\,dzdx+(z-y)\,dxdy = 3\iiint_V dxdydz$$

S_1 ($z=1$ 的上截面)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 3\iiint_V dxdydz - \iint_{S_1}(x-z)\,dydz+(y-x)\,dzdx+(z-y)\,dxdy\\
&=3\iiint_V dxdydz - \iint_{S_1} 1-y\,dxdy\\
&=\frac{3}{2}\pi-\pi\\
&=\frac{1}{2}\pi
\end{aligned}$$

(6) 记 $\boldsymbol{v} = (y^2+z^2, z^2+x^2, x^2+y^2) \implies \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$, 记 V 是由 S 和 $\Sigma: x^2+y^2 \leqslant a^2, z=0$ 围成的区域, 取 Σ 法向为 $(0,0,-1)$, 由 Gauss 定理得:

$$\left(\iint_S + \iint_\Sigma\right)\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = 0 \implies \iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_\Sigma \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\iint_D$ 表示在 Σ 区域内的二重积分.

记 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则积分区域化为 $D' = \{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$, 从而

$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^a r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \left(\frac{1}{4}r^4\Big|_0^a\right)\cdot 2\pi = \frac{\pi a^4}{2}.$$

11.5.2 求引力场 $\boldsymbol{F} = -km\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ 通过下列闭曲面外侧的通量:

(1) 空间中任一包围质量 m (在原点) 的闭曲面;

(2) 空间中任一不包围质量 m 的闭曲面;

(3) 质量 m 在光滑的闭曲面上.

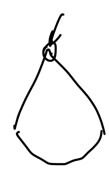
(1) $P = \dfrac{x}{r^3}$ $Q = \dfrac{y}{r^3}$ $R = \dfrac{z}{r^3}$ $S_\varepsilon: x^2+y^2+z^2 = \varepsilon^2$

$$\iint_S \vec{F}\,d\vec{S} + \iint_{S_\varepsilon} \vec{F}\,d\vec{S} = \frac{3r^3 - 3(x^2+y^2+z^2)r}{r^6} = 0$$

$$\iint_S \vec{F}\,d\vec{S} = -\iint_{S_\varepsilon} \vec{F}\,d\vec{S} = -4mk\pi$$

(2) $\iint \vec{F}\,d\vec{S} = 0$

(3) 无法确定，不能同取一半等;



点在平面上不能说明只落入了一半

11.5.3 $P = \dfrac{x}{r^3}$ $Q = \dfrac{y}{r^3}$ $R = \dfrac{z}{r^3}$ $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$$

$$\nabla\cdot V = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0$$

$\therefore \iiint V = 0$ 即 原式 $= 0$

11.5.4 设对于半空间 $x>0$ 内任一的光滑有向封闭曲面 S, 都有

$$\oiint_S xf(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - xyf(x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数, 且 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1$, 求 $f(x)$.

解 记 $\boldsymbol{v}=(xf(x),-xyf(x),-\mathrm{e}^{2x}z) \implies \nabla\cdot\boldsymbol{v}=xf'(x)+(1-x)f(x)-\mathrm{e}^{2x}$, 记 V 是 S 围成的闭区域, 由 Gauss 定理得:

$$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V=0,$$

由 V 的任意性知, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$ 对 $x>0$ 恒成立, 即

$$xf'+(1-x)f-\mathrm{e}^{2x}=0.$$

考虑上述微分方程对应的齐次线性方程的解 f_{h}.

$$xf'+(1-x)f=0 \implies \frac{\mathrm{d}f}{f}=\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \implies \ln|f|=x-\ln x+C_1$$

$$f_{\mathrm{h}}=\pm\mathrm{e}^{x-\ln x+C_1}=\frac{C\mathrm{e}^x}{x},\quad C\in\mathbb{R}.$$

下面考虑原非齐次线性方程的特解 $f_{\mathrm{p}}=\dfrac{C(x)\mathrm{e}^x}{x}$, 代入原方程得:

$$x\cdot C'(x)\frac{\mathrm{e}^x}{x}=\mathrm{e}^{2x} \implies C'(x)=\mathrm{e}^x \implies C(x)=\mathrm{e}^x \implies f_{\mathrm{p}}=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x},$$

故原方程的通解为

$$f(x)=f_{\mathrm{h}}+f_{\mathrm{p}}=\frac{\mathrm{e}^x(C+\mathrm{e}^x)}{x}=\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{x}+\frac{(C+1)\mathrm{e}^x}{x},$$

注意到,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(C+1)\mathrm{e}^x}{x}=\lim_{x\to0^+}f(x)-\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{x}=1-1=0,$$

而 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 不存在, 故 $C+1=0 \implies C=-1 \implies f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{x}$. □

11.5.5 证明任意光滑闭曲面 S 围成的立体体积可以表成

$$V=\frac{1}{3}\oiint_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中积分沿 S 的外侧进行.

证明 记 $\boldsymbol{v}=(x,y,z) \implies \nabla\cdot\boldsymbol{v}=3$, 记 D 是由 S 围成的区域, 由 Gauss 定理得:

$$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_D \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V=3\iiint_D \mathrm{d}V=3V \implies V=\frac{1}{3}\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

11.5.6 证明 Archimedes 原理: 物体 V 全部浸入液体中所受的浮力等于物体同体积的液体的重量.

提示 设液体的密度为常数 ρ, 给出物体表面每一小块 $\mathrm{d}S$ 所受到的压力, 通过积分计算 ∂V 的压力.

参考 数学分析教程 12.4.**例 3**. → 本页右下角

11.5.7 设 $\boldsymbol{c}$ 是常向量, S 是任意的光滑闭曲面, 证明:

$$\iint_S \cos(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S = 0,$$

其中 $(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}})$ 表示向量 $\boldsymbol{c}$ 与曲面法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角.

证明 记 V 是 S 所围成的区域, 取 $\boldsymbol{n}$ 是曲面的单位法向量, 由 Gauss 定理得:

$$\iint_S \cos(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S = \iint_S \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iint_S \nabla\cdot\boldsymbol{c}\,\mathrm{d}V = 0.$$

□

11.5.8 设 L 是 xy 平面上光滑的简单闭曲线, 逆时针方向, 立体 V 是柱体, 它以 L 为准线, 以 L 在 xy 平面内所围平面区域 D 为底, 侧面是母线平行于 z 轴的柱面, 高为 1, 试写出向量场 $\boldsymbol{v} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 在 V 上的 Gauss 公式, 并由此来证明 Green 公式.

$$\iint v\,\mathrm{d}s = \iiint\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \overset{z\in[0,1]}{=} \iint\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

视作线积分后再乘以高度1,

$$\iint v\,\mathrm{d}s = \iint P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j\;\mathrm{d}s$$

$$= \iint P(x,y)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q(x,y)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$$

去掉 $\int \mathrm{d}z$: $= \oint P(x,y)\,\mathrm{d}y - Q(x,y)\,\mathrm{d}x$

$$\therefore \oint P(x,y)\,\mathrm{d}y - Q(x,y)\,\mathrm{d}x = \iint\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$-Q = P_1,\quad P = Q_1$

$$\oint P_1(x,y)\,\mathrm{d}x + Q_1(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即为 Green 公式

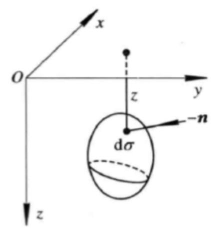


图 12.11

例 3 证明 Archimedes(阿基米德,公元前 287～前 212)原理:物体全部浸入液体中所受的浮力等于与物体同体积液体的重量.

证明 取坐标系如图 12.11 所示. 设液体的密度为 ρ,那么物体表面一小块面积 $\mathrm{d}\sigma$ 所受到的压力大小是 $\rho gz\mathrm{d}\sigma$,方向是 $-\boldsymbol{n}$,这里 $\boldsymbol{n}$ 是物体表面的单位外法向量. 设 $\boldsymbol{n} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$,作为物体 V 的表面的曲面记为 Σ,那么整个物体受到的压力 $\boldsymbol{F}$ 是

$$-\int_\Sigma \rho gz\cos\alpha\,\mathrm{d}\sigma\boldsymbol{i} - \int_\Sigma \rho gz\cos\beta\,\mathrm{d}\sigma\boldsymbol{j} - \int_\Sigma \rho gz\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma\boldsymbol{k}.$$

由 Gauss 定理,可得

$$\int_\Sigma \rho gz\cos\alpha\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_V \frac{\partial(\rho gz)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,$$

$$\int_\Sigma \rho gz\cos\beta\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_V \frac{\partial(\rho gz)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,$$

$$\int_\Sigma \rho gz\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_V \frac{\partial(\rho gz)}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \rho g\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho g\mu(V).$$

11.5.9 计算下列曲线积分.

(1) $\oint_L y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, L 是顶点为 $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 的三角形边界, 从原点看去, L 沿顺时针方向;

(2) $\oint_L (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$, L 是圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$ $(a>0, h>0)$ 的交线, 从 x 轴的正方向看来, L 沿逆时针方向;

(3) $\oint_L (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$, L 是平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}a$ 与立方体 $0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant a$ 表面的交线从 z 轴正向看来, L 沿逆时针方向;

(4) $\oint_L y^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y + xz\,\mathrm{d}z$, L 是圆柱面 $x^2+y^2=2y$ 与平面 $y=z$ 的交线, 从 z 轴正向看来, L 沿逆时针方向;

(5) $\oint_L (y^2-y)\,\mathrm{d}x + (z^2-z)\,\mathrm{d}y + (x^2-x)\,\mathrm{d}z$, L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, L 的方向与 z 轴正向成右手系;

(6)

(2) 原式 $= \iint (-1-1)\,dy\,dz + (-1-1)\,dz\,dx + (-1-1)\,dx\,dy$

$= -2\iint dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy = -2(a^2\pi + ah\pi)$

(3) 记 $\boldsymbol{v} = (y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2) \implies \nabla\times\boldsymbol{v} = -2(y+z, z+x, x+y)$, 记 S 是平面与立方体的截面, 法向 $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 由 Stokes 定理得:

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = -\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S = -\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}a\cdot\sigma(S) = -\frac{9}{2}a^3,$$

其中已用到 $\sigma(S) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\cdot 6 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

(4) 原式 $= \iint_S 0\,dy\,dz - z\,dz\,dx + (y-2y)\,dx\,dy = \iint_S -z\,dz\,dx - y\,dx\,dy = 0$

(5) 记 $\boldsymbol{v} = (y^2-y, z^2-z, x^2-x) \implies \nabla\times\boldsymbol{v} = (-(2z-1), -(2x-1), -(2y-1))$, 记 S 是球面与平面的截面, 法向 $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 由 Stokes 定理得:

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S -(2(x+y+z)-3)\,\mathrm{d}S = \sqrt{3}\iint_S \mathrm{d}S = \sqrt{3}\pi a^2.$$

(6) 记 $\boldsymbol{v} = (y^2-z^2, 2z^2-x^2, 3x^2-y^2) \implies \nabla\times\boldsymbol{v} = (-2y-4z, -2z-6x, -2x-2y)$, 记 S 是平面内 L 围成的区域, 法向 $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 由 Stokes 定理得:

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S (-8x-4y-6z)\,\mathrm{d}S = \iint_D (-2x+2y-12)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 D 是 Oxy 平面内 $|x|+|y|=1$ 围成的区域.

注意到, $f(x,y) = -2x+2y$ 满足 $f(-x,-y) = -f(x,y)$, 由对称性知,

$$\iint_D (-2x+2y)\,\mathrm{d}\sigma = 0 \implies \iint_D (-2x+2y-12)\,\mathrm{d}\sigma = -12\iint_D \mathrm{d}\sigma = -12\sigma(D) = -24.$$

11.5.10 在积分 $\oint_L x^2y^3\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z$ 中, 路径 L 是 Oxy 平面上正向的圆 $x^2+y^2=R^2, z=0$; 利用 Stokes 公式化曲线积分为以 L 为边界所围区域 S 上的曲面积分.

(1) S 取 Oxy 平面上的圆面 $x^2+y^2\leqslant R^2$;

(2) S 取半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, 结果相同吗?

解 记 $\boldsymbol{v}=(x^2y^3,1,z)\implies\nabla\times\boldsymbol{v}=(1,0,-3x^2y^2)$.

(1) S 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$, 由 Stokes 定理得:

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\iint_S -3x^2y^2\,\mathrm{d}S,$$

记 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则积分区域化为 $D=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant R,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$, 从而

$$\begin{aligned}\iint_S -3x^2y^2\,\mathrm{d}S&=\iint_D -3r^4\sin^2\theta\cos^2\theta\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=-3\int_0^R r^5\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2\mathrm{d}\theta\\&=-3\cdot\frac{1}{6}R^6\cdot\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{8}R^6.\end{aligned}$$

(2) S 的单位法向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{R}(x,y,z)$, 由 Stokes 定理得:

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\frac{1}{R}\iint_S(x-3x^2y^2z)\,\mathrm{d}S,$$

记 $x=R\sin\theta\cos\varphi, y=R\sin\theta\sin\varphi, z=R\cos\theta$, 则积分区域化为

$$D=\left\{(\theta,\varphi)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\right\},$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\iint_S(x-3x^2y^2z)\,\mathrm{d}S&=\frac{1}{R}\iint_D(R\sin\theta\cos\varphi-3R^5\sin^4\theta\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos\theta)\cdot R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\&=-3R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\,\mathrm{d}(\sin\theta)\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=-3R^6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{8}R^6,\end{aligned}$$

其中已用到

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\iint_D R^3\sin^2\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi&=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\left(\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)=0.\end{aligned}$$

由上述讨论知, 不论 S 的选取如何, 积分结果均相同.

11.5.11 证明: 常向量场 $\boldsymbol{c}$ 沿任意光滑闭曲线的环量等于 0.

证明 注意到, $\nabla\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 记 S 是任意光滑闭曲线围成的曲面, 由 Stokes 定理得:

$$\oint_L \boldsymbol{c}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{c}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0.$$

11.5.12 求向量场 $\boldsymbol{v}=(y^2+z^2)\boldsymbol{i}+(z^2+x^2)\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$ 沿曲线 L 的环量. 其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=R^2\ (z\geqslant 0)$ 与 $x^2+y^2=Rx$ 的交线, 从 x 轴正向看来, L 沿逆时针方向.

解 记 $\boldsymbol{v}=(y^2+z^2,z^2+x^2,x^2+y^2)\implies\nabla\times\boldsymbol{v}=2(y-z,z-x,x-y)$, 记 S 为球面被柱面所截得的截面, 其单位法向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{R}(x,y,z)$, 由 Stokes 定理得:

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\frac{2}{R}\iint_S\left(\sum_{\text{cyc}}x(y-z)\right)\mathrm{d}S=0.$$