Decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica

Erwin Renzo Franco Diaz

11 de julio de 2020

Introducción

- Consideremos un potencial como el de la figura 1.

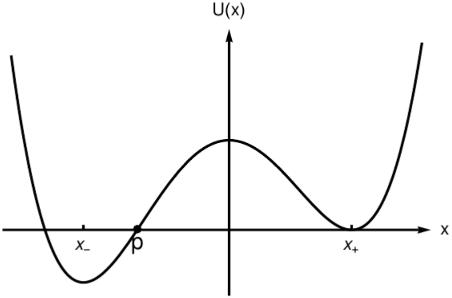

Figura 1: Potencial con un falso vacío

- **Mecánica Clásica:** la partícula es estable en ambos mínimos.
- **Mecánica Cuántica:** si la partícula se encuentra en el mínimo del potencial con mayor energía ($x = x_+$), va a decaer al de menor ($x = x_-$) por tunelamiento $\Rightarrow$ el potencial posee un falso vacío.

Introducción

- Una partícula cuya función de onda se encuentra concentrada en la región del falso vacío no es un autoestado de energía; es un estado metaestable con energía compleja.
- Probabilidad de que la partícula siga en la región del falso vacío luego de un tiempo T

$$P_{\mathrm{FV}}(T) = \int_{\mathrm{FV}} \mathrm{d}x \, |\psi(x,T)|^2 \propto e^{-\Gamma T} \tag{1}$$

donde

$$\Gamma = -2\mathrm{Im}\left(\frac{E_0}{\hbar}\right) \tag{2}$$

es la tasa de decaimiento del estado metaestable.

Aproximación WKB (Semiclásica)

- La tasa de decaimiento es proporcional al coeficiente de transmisión a través de la barrera

$$\Gamma \propto T \propto e^{-B/\hbar}(1+\mathcal{O}(\hbar)) \tag{3}$$

$$\Gamma = Ae^{-B/\hbar}(1+\mathcal{O}(\hbar)) \tag{4}$$

donde

$$B = 2\int_{x_+}^{x_0} dx\sqrt{2m\left(V(x)-E\right)} \tag{5}$$

- Cuando la partícula $(m=1)$ atraviesa la barrera en $x = x_0$, sale con energía cinética nula. Además en $V(x_0) = 0 \rightarrow E = 0$. En (5)

$$B = 2\int_{x_+}^{x_0} dx\sqrt{2V(x)} \tag{6}$$

- Acción
$$S[x(t)] = \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] \tag{7}$$
- Rotación de Wick: $t = -i\tau \rightarrow$ Acción Euclideana
$$S_E[x(\tau)] = \int d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] \tag{8}$$
- Ecuación de movimiento
$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dV(x)}{dx} = -\frac{d(-V(x))}{dx}. \tag{9}$$
Equivalente a una partícula moviéndose en el potencial $-V(x)$ en tiempo real.
- Energía Euclideana
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x) \tag{10}$$

- Solución a (9) con las siguientes condiciones

$$\mathcal{E}_B = 0 \tag{11a}$$

$$\lim_{\tau \to \pm\infty} x_B = x_+ \quad x_B(0) = x_0 \tag{11b}$$

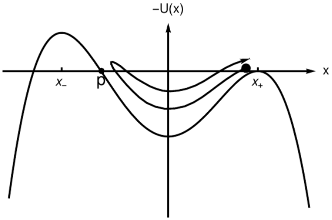

FIGURA 2: Bounce

- En $\tau = 0$: $V(x_0) = 0$. De (11a)

$$\left.\frac{dx_B}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0. \tag{12}$$

- Acción del bounce

$$S_B = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 + V(x_B) \right] \tag{13}$$

- De (11a)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 = V(x_B) \tag{14}$$

- Usando (14) en (13)

$$S_B = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau (2V(x_B)) \tag{15}$$

- El movimiento de la partícula es simétrico.

$$S_B = \int_{-\infty}^{0} d\tau (2V(x_B)) + \int_{0}^{+\infty} d\tau (2V(x_B)) = 2 \int_{-\infty}^{0} d\tau (2V(x_B)) \tag{16}$$

- Haciendo el cambio de variable $\tau \to x_B$. De (14)

$$d\tau = \frac{dx_B}{\sqrt{2V(x_B)}} \tag{17}$$

- Reemplazando (17) en (16)

$$S_B = 2\int_{x_+}^{x_0} dx\sqrt{2V(x)} \tag{18}$$

- Comparando (18) con (6)

$$\boxed{B = S_B} \tag{19}$$

- Amplitud de transición Euclideana (por conveniencia $\tau_f = T/2$ y $\tau_i = -T/2$)

$$I = \langle x_f, T/2 | \, e^{-HT/\hbar} \, | x_i, -T/2 \rangle = N \int \mathcal{D}[x] e^{-S_E/\hbar} \tag{20}$$

- Insertando un conjunto completo de autoestados de energía $\{|n\rangle\}$ en (20)

$$I = \sum_n e^{-E_n T/\hbar} \phi_n^*(x_f, T/2) \phi_n(x_i, -T/2) \tag{21}$$

- En el límite $T \to \infty$, el estado de menor energía domina la integral de camino en (20)

$$\frac{E_0}{\hbar} = - \lim_{T \to \infty} \frac{\ln I}{T} \tag{22}$$

- El cálculo semiclásico de la integral de camino Euclideana en (20) requiere encontrar las soluciones a (9) que cumplan con las condiciones dadas. Estas corresponden a los puntos estacionarios (*saddle point*) de la acción euclideana (13).
- La integral de camino Euclideana se puede aproximar como la suma de las contribuciones de estos puntos.
- Equivalente a la aproximación WKB.

- La acción Euclideana es estacionaria para la trayectoria clásica

$$\frac{\delta S_E[x_{\text{cl}}]}{\delta x(\tau)} = 0. \tag{23}$$

- Expandiendo la acción alrededor de la trayectoria clásica

$$x(\tau) = x_{\text{cl}}(\tau) + \eta(\tau), \quad \eta(\tau_i) = \eta(\tau_f) = 0 \tag{24}$$

$$\begin{aligned} S_E[x] &= S_E[x_{\text{cl}}(\tau) + \eta(\tau)] \\ &= S_E[x_{\text{cl}}(\tau)] + \frac{1}{2}\iint d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1)\frac{\delta^2 S_E[x_{\text{cl}}]}{\delta x_{\text{cl}}(\tau_1)\delta x(\tau_2)_{\text{cl}}}\eta(\tau_2) \\ &\quad + \mathcal{O}(\eta^3) \\ &\approx S_E^{\text{cl}} + S_E^{(2)}[\eta(\tau)] \end{aligned} \tag{25}$$

- Usando (25) en (20)

$$I \approx N e^{-S_E^{\mathrm{cl}}/\hbar} \int \mathcal{D}[x] e^{-S_E^{(2)}/\hbar} \tag{26}$$

- Para calcular $S_E^{(2)}$ partimos de (13) y tomamos las derivadas funcionales

$$\frac{\delta^2 S_E[x_{cl}]}{\delta x_{\mathrm{cl}}(\tau_1)\delta x_{\mathrm{cl}}(\tau_2)} = \left(-\frac{d}{d\tau_1} + V''(x_{\mathrm{cl}}(\tau_1))\right)\delta(\tau_1 - \tau_2) \tag{27}$$

donde la prima denota la derivada respecto a $x(\tau)$.

- Reemplazando (27) en (25) y aplicando el delta de Dirac

$$S_E^{(2)} = \frac{1}{2}\int d\tau \eta(\tau)\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{\mathrm{cl}})\right)\eta(\tau) \tag{28}$$

- Introducimos un conjunto completo ortonormal de autofunciones del operador en (28)

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2}+V''(x_{\rm cl})\right)\eta_\lambda(\tau)=\lambda\eta_\lambda(\tau) \tag{29}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} d\tau\eta_i(\tau)\eta_j(\tau)=\delta_{ij} \tag{30}$$

- Descomponemos $\eta(\tau)$ en función de estas autofunciones

$$\eta(\tau)=\sum_\lambda a_\lambda\eta_\lambda(\tau) \tag{31}$$

- Usando (29), (30) y (31) en (28)

$$S_E^{(2)}=\frac{1}{2}\sum_\lambda \lambda a_\lambda^2 \tag{32}$$

- Haciendo el cambio de variable $x(\tau) \to \eta(\tau)$ con la medida

$$\mathcal{D}[\eta] = \prod_{\lambda} \frac{da_\lambda}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tag{33}$$

(se incluye el factor de $\sqrt{2\pi\hbar}$ por conveniencia).

- Reemplazando (32) y (33) en (26), y desarrollando

$$I = N e^{-S_E^{\mathrm{cl}}/\hbar} \prod_{\lambda} \lambda^{-1/2} \tag{34}$$

- $\prod_\lambda \lambda^{-1/2}$ es el determinante del operador en (29) por ser el producto de sus autovalores.

$$\boxed{I = N e^{-S_E^{\mathrm{cl}}/\hbar} \left[\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{\mathrm{cl}})\right)\right]^{-1/2}} \tag{35}$$

- Existen algunos problemas con (35)
  - Es real, por lo que la energía asociada no tiene parte imaginaria.
  - Es válida solo cuando los autovalores son no negativos.
- En el decaimiento del falso vacío $x_i = x_f = x_+$.
- Existen 3 soluciones que cumplen con (11): la solución constante $x(\tau) = x_+$, el bounce (de los cuales hay múltiples) y el shot. Solo se consideran las contribuciones de las dos primeras soluciones puesto que el shot da la energía del estado fundamental global y no la del falso vacio.

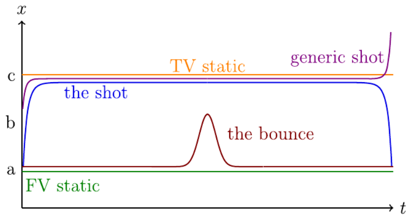

Figura 3: Soluciones a las ecuaciones de movimiento Euclideana

Modo Cero

- Derivando (9) respecto a τ

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{\mathrm{cl}})\right)\frac{dx_B}{d\tau} = 0 \tag{36}$$

$\rightarrow dx_B/d\tau$ es un modo cero del operador.

- Normalizando esta autofunción

$$x^{(0)}(\tau) = B^{-1/2}\frac{dx_B}{d\tau} \tag{37}$$

- La presencia de este modo cero se debe a la invariancia ante translaciones temporales del centro del bounce. Una variación de la forma $\delta\eta(\tau) \propto x^{(0)}(\tau)$ no cambia $S_E^{(2)}$.

Modo Cero

- Si se integra el modo cero de la misma manera que el resto de autovalores no negativos, la integral en (26) diverge.
- Para integrar el modo cero introducimos la coordenada colectiva τ_0 que corresponde al centro del bounce. Expandiendo la trayectoria usando esta nueva coordenada

$$x(\tau) = x_B(\tau - \tau_0) + \eta(\tau - \tau_0) \tag{38}$$

$$x(\tau + \tau_0) = x_B(\tau) + \eta(\tau) = x_B(\tau) + \sum_\lambda a_\lambda \eta_\lambda(\tau) \tag{39}$$

- Separando a_0 en (31) y usando (38)

$$a_0(\tau_0) = \int_{-T/2}^{T/2} d\tau x(\tau + \tau_0) x_0(\tau) \tag{40}$$

Modo Cero

- Derivando (40) respecto a τ_0

$$\frac{da_0}{d\tau_0} = \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \frac{dx(\tau+\tau_0)}{d\tau_0} x_0(\tau) = \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \frac{dx(\tau+\tau_0)}{d\tau} x_0(\tau) \quad (41)$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \left(\frac{dx_B(\tau)}{d\tau_0} + \sum_\lambda a_\lambda \frac{d\eta_\lambda(\tau)}{d\tau} \right) x_0(\tau) \quad (42)$$

$$\approx \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \frac{dx_B(\tau)}{d\tau_0} x^{(0)}(\tau) \quad (43)$$

$$= B^{1/2} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau x_0^2(\tau) \quad (44)$$

$$= B^{1/2} \quad (45)$$

($x_0(\tau)$ esta normalizado)

Modo Cero

- Haciendo el cambio de variable $a_0 \to t_0$ en (33) y desarrollando

$$I_1 = \left(\frac{B}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} \left[\det{}' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{\rm cl})\right)\right]^{-1/2} T e^{-B/\hbar} \qquad (46)$$

donde $\det'$ indica que no se considera el modo cero en la determinante (se elige la normalización de tal manera que $N = 1$ en (26)). El subíndice indica que esta contribución corresponde a la de un único bounce.

Modo Negativo

- De (12) notamos que $x_0(\tau)$ tiene un nodo. Sabemos (por ejemplo) de la ecuación de Schrödinger que la autofunción correspondiente a la energía fundamental no tiene nodos. Eso implica que el operador en (35) posee una autofunción con autovalor negativo $\rightarrow$ modo negativo.
- Al igual que el modo cero, el modo negativo hace que la integral en (26) diverga. En este caso para realizar la integración se introduce un parámetro en la acción y se hace la continuación analítica del contorno de integración al plano complejo.
- Esto da como resultado un factor de $i/2$ en (46)

$$I_1 = \frac{i}{2}\left(\frac{B}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}\left[\det{}'\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{\text{cl}})\right)\right]^{-1/2} T e^{-B/\hbar} \tag{47}$$

donde $\det'$ indica ahora que solo se consideran los autovalores mayores que cero.

- En (20) se debe considerar la contribución de un número arbitrario de bounces.
- Definiendo

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{B}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}\left[\frac{\det'\left(-\frac{d^2}{d\tau^2}+V''(x_{\mathrm{cl}})\right)}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega^2\right)}\right]^{-1/2} \tag{48}$$

donde $\omega^2 = V''(x_+)$podemos escribir la contribución de un número arbitrario de bounces como

$$I_n = \frac{1}{n!}\left(iKTe^{-B}\right)^n I_0 \tag{49}$$

donde I_0 es la contribución de la solución constante y se incluye factor de $n!$ debido a que los bounces son indistinguibles.

Contribución de Múltiples Bounces

- Sumando todas las contribuciones

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} I_n = I_0 \exp\left\{\left(iKTe^{-B/\hbar}\right)\right\} \tag{50}$$

- Finalmente, reeemplazando (50) en (22) y luego en (2) (I_0 no posee parte imaginaria)

$$\boxed{\Gamma = \left(\frac{B}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}\left[\frac{\det'\left(-\frac{d^2}{d\tau^2}+V''(x_{\text{cl}})\right)}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega^2\right)}\right]^{-1/2} e^{-B/\hbar}\left(1+\mathcal{O}(\hbar)\right)}. \tag{51}$$