

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú, Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Para optar el Grado Académico de Bachiller en Física

**Decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica y
la Teoría Cuántica de Campos**

AUTOR

Erwin Renzo Franco Diaz

ASESOR

Teófilo Vargas Auccalla

Lima, Perú

2021

RESUMEN

zdlkjgblkjgblsjkgnlsjkg

AGRADECIMIENTOS

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	II
Índice general	II
Índice de figuras	III
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Planteamiento del problema	1
2. Decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica	3
2.1. Tasa de decaimiento	3
2.2. Integral de camino euclídeana	5
2.3. Aproximación de punto estacionario	8
2.4. Bounce	11
2.5. Modo zero	12
2.6. Modo negativo	12
2.7. Contribución multibounce	12
3. Conclusiones	13
Bibliografía	14

Índice de figuras

1.1. Potencial con un falso vacío en x_+ [2].	2
2.1. Potencial para el estudio numérico del decaimiento del falso vacío. Cuenta con una región de falso (FV) y verdadero (R) vacío, así como una barrera (B). . . .	4
2.2. Probabilidad de que una partícula permanezca en la región de falso vacío para distintos anchos de verdadero vacío. El eje vertical está en escala logarítmica [7].	5
2.3. Potencial invertido [2].	12

Dedicado a

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Desde su formulación inicial en la década de 1920, se hizo evidente que la Mecánica Cuántica es una teoría radicalmente distinta al resto de la Física conocida hasta ese entonces. Uno de los ejemplos más sorprendentes de esto es el efecto túnel o tunelamiento. Descubierto inicialmente por George Gamow en 1928 para explicar el decaimiento alfa [1], este fenómeno permite a una partícula atravesar una barrera de potencial, a pesar de que no pueda hacerlo clásicamente por no contar con la energía suficiente.

Una consecuencia importante del efecto túnel es el decaimiento del falso vacío, tema principal a tratar en este trabajo. En este caso, la partícula atraviesa la barrera de potencial a la vez que decae al estado de mínima energía.

El decaimiento del falso vacío tiene implicaciones importantes tanto en la física de partículas como en la cosmología.

1.2. Planteamiento del problema

Consideremos un potencial como el de la figura 1.1 que posee dos mínimos distintos, uno mayor que otro. Clásicamente, cualquiera de estos puntos es estable. Sin embargo, esta no es la situación a nivel cuántico. Debido al efecto túnel, existe la posibilidad de que una partícula que se encuentre inicialmente en el falso vacío, atraviese la barrera reapareciendo por x_0 al estado

de menor energía del sistema. Es por esto que a x_+ se le denomina como falso vacío y a este proceso como decaimiento del falso vacío.

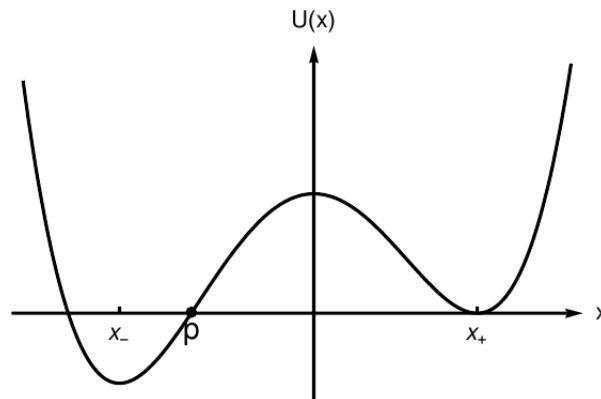


Figura 1.1: Potencial con un falso vacío en x_+ [2].

Haciendo uso de la aproximación WKB, se demuestra que Γ es de la forma [8]

$$\Gamma = Ae^{-B}(1 + O(\hbar)) \quad (1.1)$$

donde **completar**

$$B = \int dx \sqrt{V} \quad (1.2)$$

Capítulo 2

Decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica

2.1. Tasa de decaimiento

Un estado concentrado en la región del falso vacío no puede ser un autoestado de energía, puesto que estos, al no poseer dependencia temporal, no pueden decaer [3]. Podríamos expandirlo en una combinación lineal de estos autoestados, pero es más conveniente considerarlo como un estado metaestable cuya energía adquiere una parte imaginaria debido al tunelamiento [4, 5].

A diferencia de lo que sucede con los autoestados de energía, la evolución temporal del estado metaestable ya no consiste únicamente en la adquisición de una fase [6]

$$e^{iEt/\hbar} |\psi\rangle = e^{i \operatorname{Re}(E)t/\hbar} e^{\operatorname{Im}(E)t/\hbar} |\psi\rangle. \quad (2.1)$$

La parte imaginaria de la energía hace que la probabilidad de que una partícula permanezca en la región del falso vacío, relacionada con la norma del estado metaestable, disminuya exponencialmente en el tiempo

$$P_{\text{FV}}(t) \propto e^{-\Gamma t/\hbar}, \quad (2.2)$$

lo que nos permite definir la tasa de decaimiento Γ como

$$\Gamma = -2 \operatorname{Im} \left(\frac{E}{\hbar} \right). \quad (2.3)$$

Esta definición considera implícitamente que la parte imaginaria de la energía del estado metaestable es negativa, de tal manera que Γ sea positiva. De no ser así, la probabilidad (2.2) crecería, en lugar de decaer, exponencialmente [6].

Podemos entender cualitativamente este comportamiento estudiando numéricamente la evolución temporal de una función de onda concentrada inicialmente en la región del falso vacío de un potencial sencillo como el de la figura 2.1, y calculando la probabilidad de encontrar a la partícula en esta región luego de un tiempo t . Los resultados de la simulación se presentan en la figura 2.2 para distintos anchos de la región de verdadero vacío. Tal como esperábamos, se observa claramente la dependencia lineal de la probabilidad en escala logarítmica con el tiempo. Notamos además que las tres rectas tienen la misma pendiente, lo cual indica que la forma específica de la parte derecha del potencial no influye de manera significativa en la dinámica del sistema [5].

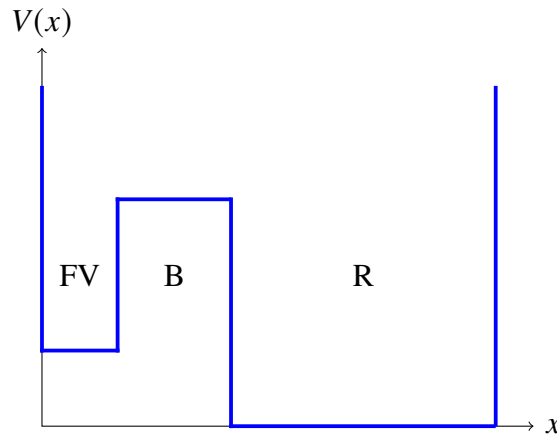


Figura 2.1: Potencial para el estudio numérico del decaimiento del falso vacío. Cuenta con una región de falso (FV) y verdadero (R) vacío, así como una barrera (B).

En la misma figura, sin embargo, puede apreciarse que el régimen lineal se mantiene solo durante un cierto intervalo de tiempo. Antes de atravesar la barrera, la función de onda oscila en la región del falso vacío. Por otro lado, cuando la función de onda ya atravesó la barrera y se encuentra la región del verdadero vacío, rebota con la pared derecha y empieza a interactuar consigo misma, dando como resultado efectos no lineales [7]. Estos aspectos deben ser tomados en cuenta al momento de definir Γ de manera precisa [3].

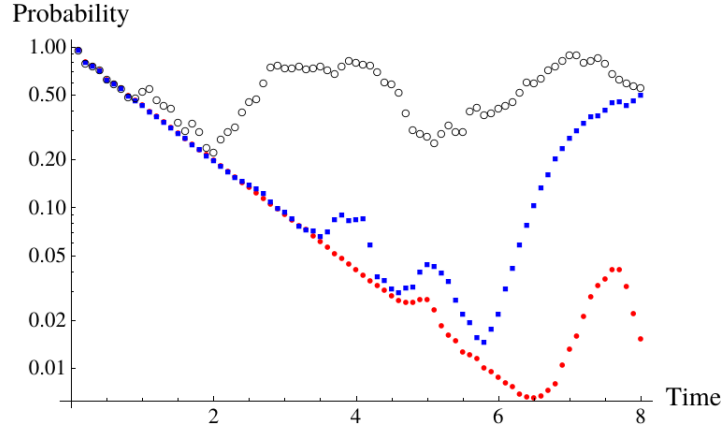


Figura 2.2: Probabilidad de que una partícula permanezca en la región de falso vacío para distintos anchos de verdadero vacío. El eje vertical está en escala logarítmica [7].

2.2. Integral de camino euclideana

El objetivo principal de este trabajo es calcular Γ a primer orden en \hbar para el estado metaestable de menor energía. Para esto se hará uso de la integral de camino euclideana y la aproximación de punto estacionario siguiendo el formalismo establecido por Coleman y Callan [8, 9].

Consideremos una partícula que inicialmente se encuentra en la posición x_i en un tiempo t_i . La amplitud de transición de esta a una posición final x_f en un tiempo t_f está dada por la integral de camino de Feynman [10]

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}x e^{iS[x(t)]/\hbar}, \quad (2.4)$$

donde $S[x(t)]$ es la acción de la partícula que, de la Mecánica Clásica, sabemos que es está dada por ¹

$$S[x(t)] = \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] \quad (2.5)$$

y N es una constante de normalización que se debe elegir convenientemente, pero que no será de interés en este trabajo.

Una de las dificultades al momento de querer calcular (2.4) se debe al hecho de que está compuesta por una suma de fases complejas oscilatorias, que no necesariamente va a converger. Es por esto que resulta más conveniente trabajar en tiempo imaginario, para lo cual introducimos

¹A lo largo de todo el trabajo consideraremos que la partícula es de masa unitaria.

el tiempo euclideo τ mediante el cambio de variable

$$t = -i\tau, \quad (2.6)$$

también conocido como rotación de Wick [11]. τ es un parámetro real.

Aplicando el cambio de variable (2.6) en la acción (2.5), tenemos

$$S[x(\tau)] = \int d(-i\tau) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d(-i\tau)} \right)^2 - V(x) \right] \quad (2.7)$$

$$= -i \int d\tau \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x) \right] \quad (2.8)$$

$$= i \int d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] \quad (2.9)$$

$$= iS_E[x(\tau)] \quad (2.10)$$

donde hemos definido la acción euclidea $S_E[x(\tau)]$ como

$$S_E[x(\tau)] \equiv \int d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right]. \quad (2.11)$$

Haciendo de igual manera en la ecuación de movimiento

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dV(x)}{dx} \quad (2.12)$$

$$\frac{d^2x}{d(-i\tau)^2} = -\frac{dV(x)}{dx} \quad (2.13)$$

$$-\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{dV(x)}{dx}, \quad (2.14)$$

obtenemos la correspondiente para $S_E[x(\tau)]$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dV(x)}{dx}. \quad (2.15)$$

Podemos entender esta ecuación como la ecuación de movimiento en tiempo real para una partícula moviéndose en el potencial invertido $-V(x)$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{d(-V(x))}{dx}. \quad (2.16)$$

Por último, en la energía,

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \quad (2.17)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d(-i\tau)} \right)^2 + V(x) \quad (2.18)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \quad (2.19)$$

$$= -\mathcal{E} \quad (2.20)$$

donde hemos definido la energía euclídeana \mathcal{E} como [12]

$$\mathcal{E} = \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x) \quad (2.21)$$

Al reemplazar (2.10) en la integral de camino (2.4), obtenemos la integral de camino euclídeana [11]

$$I = \langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = N \int \mathcal{D}x e^{-S_E[x(\tau)]/\hbar}, \quad (2.22)$$

donde T es el intervalo de tiempo euclídeano que le toma a la partícula ir de x_i a x_f . De esta manera, hemos convertido las fases oscilatorias en (2.4) en exponenciales decaientes que podremos calcular de manera aproximada mediante integrales gaussianas, como se verá en la sección siguiente.

Insertamos una base de autoestados de energía $\{|n\rangle\}$ en (2.22) [8]

$$I = \sum_n e^{-E_n T/\hbar} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle, \quad (2.23)$$

donde $\phi_n(x) = \langle x | n \rangle$ es la función de onda del autoestado de energía $|n\rangle$. En el límite $T \rightarrow \infty$, que es en el que estamos interesados finalmente, la contribución de los términos de orden superior es exponencialmente pequeña, lo que nos permite extraer la energía del estado fundamental² [3]

$$\frac{E_0}{\hbar} = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln I}{T}. \quad (2.24)$$

Como ya se discutió en la sección anterior, la energía del estado metaestable cuenta con una parte imaginaria, a partir de la cual obtenemos la tasa de decaimiento del falso vacío Γ usando (2.3). A su vez, E_0 está dado por (2.24), por lo que ahora podemos calcular Γ directamente de la integral de camino euclídeana (2.22)

$$\Gamma = 2 \operatorname{Im} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln I}{T} \right). \quad (2.25)$$

²Asumiendo que los autoestados de energía están normalizados.

2.3. Aproximación de punto estacionario

Los casos para los cuales es posible calcular la integral de camino de manera exacta son muy pocos y suelen involucrar técnicas matemáticas sofisticadas [10, 11, 6], por lo que usualmente se tiene que recurrir a métodos aproximados. En nuestro caso, haremos uso de la aproximación de punto estacionario (*saddle point approximation*) para calcular la integral de camino euclídeana I en (2.22).

Al igual que en el cálculo diferencial, los puntos estacionarios de la acción euclídeana $S_E[x(\tau)]$ son aquellos que cumplen con la condición

$$\frac{\delta S_E[x(\tau)]}{\delta x(\tau)} = 0. \quad (2.26)$$

Esto no es más que el principio de mínima acción de la Mecánica Clásica, por lo que los puntos estacionarios corresponden a las trayectorias clásicas $x_{cl}(\tau)$, soluciones de la ecuación de movimiento (2.15). Por simplicidad, supondremos que tenemos un único punto estacionario.

Expandiendo $S_E[x(\tau)]$ como una serie de Taylor alrededor de la trayectoria clásica $x_{cl}(\tau)$

$$x(\tau) = x_{cl}(\tau) + \eta(\tau), \quad (2.27)$$

donde $\eta(\tau)$ es la variación respecto a la trayectoria clásica con las condiciones de frontera

$$\eta(\tau_i) = \eta(\tau_f) = 0, \quad (2.28)$$

tenemos

$$S_E[x(\tau)] = S_E[x_{cl}(\tau) + \eta(\tau)] \quad (2.29)$$

$$= S_E[x_{cl}(\tau)] + \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1) \frac{\delta^2 S_E[x_{cl}(\tau)]}{\delta x_{cl}(\tau_1) \delta x_{cl}(\tau_2)} \eta(\tau_2) + O(\eta^3). \quad (2.30)$$

El primer término corresponde a la acción euclídeana clásica S_E^{cl} . Por conveniencia, definimos la variación de segundo orden como

$$S_E^{(2)} \equiv \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1) \frac{\delta^2 S_E[x_{cl}(\tau)]}{\delta x_{cl}(\tau_1) \delta x_{cl}(\tau_2)} \eta(\tau_2). \quad (2.31)$$

El término lineal se cancela por (2.26), debido a que la trayectoria clásica es un punto estacionario de la acción.

En comparación con los términos anteriores, el valor de \hbar es pequeño. Esto nos permite ignorar los términos de orden superior en (2.30). Para verlo más claramente, reemplacemos $S_E[x(\tau)]$ en la integral de camino euclideana (2.22) por (2.30),

$$I = N e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \int \mathcal{D}\eta e^{-S_E^{(2)}/\hbar + O(\eta^3)}, \quad (2.32)$$

donde, al haber fijado el camino clásico, ahora integramos sobre todas sus variaciones, cambiando la medida de integración. Escalando $\eta(\tau) \rightarrow \sqrt{\hbar}\eta(\tau)$ ³,

$$I = N e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \int \mathcal{D}\eta e^{-S_E^{(2)} + O(\hbar)} \quad (2.33)$$

notamos que los términos de orden superior en (2.30) son de primer orden en \hbar , justificando la aproximación [5]. Esta es la razón por lo que la aproximación de punto estacionario es un método semiclásico. Será a este orden que calcularemos la tasa de decaimiento del falso vacío Γ .

La derivada funcional de la acción euclideana (2.11) es igual a la ecuación de movimiento (2.15)

$$\frac{\delta S_E[x(\tau)]}{\delta x(\tau_1)} = -\ddot{x}(\tau_1) + V'(\tau_1), \quad (2.34)$$

donde el punto indica la derivada respecto al tiempo euclideo τ , mientras que la prima indica la derivada respecto a la posición $x(\tau)$. Tomando la derivada funcional de (2.34) y desarrollando

$$\frac{\delta S_E[x(\tau)]}{\delta x(\tau_1) \delta x(\tau_2)} = -\frac{\delta \ddot{x}(\tau_1)}{\delta x(\tau_2)} + \frac{\delta V'(x)}{\delta x(\tau_2)} \quad (2.35)$$

$$= -\frac{d^2}{d\tau_1^2} \left(\frac{\delta x(\tau_1)}{\delta x(\tau_2)} \right) + V''(x) \frac{\delta x(\tau_1)}{\delta x(\tau_2)} \quad (2.36)$$

$$= \left(-\frac{d^2}{d\tau_1^2} + V''(x) \right) \delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (2.37)$$

Reemplazando en (2.31)

$$S_E^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1) \left(-\frac{d^2}{d\tau_1^2} + V''(x_{\text{cl}}) \right) \delta(\tau_1 - \tau_2) \eta(\tau_2) \quad (2.38)$$

$$= \frac{1}{2} \int d\tau \eta(\tau) \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{\text{cl}}) \right) \eta(\tau), \quad (2.39)$$

notamos que el cálculo de $S_E^{(2)}$ está íntimamente relacionado con el operador

$$-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{\text{cl}}). \quad (2.40)$$

³La nueva medida de integración incluye un factor constante que absorbemos en N .

Introduzcamos una base de autofunciones del operador (2.40) $\{\eta_i(\tau)\}$

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl})\right)\eta_\lambda(\tau) = \lambda\eta_\lambda(\tau), \quad (2.41)$$

tal que podemos expandir las variaciones respecto a la trayectoria clásica $\eta(\tau)$ en función de esta

$$\eta(\tau) = \sum_\lambda c_\lambda \eta_\lambda(\tau). \quad (2.42)$$

Como la base es completa y ortonormal,

$$\int d\tau \eta_{\lambda'}(\tau) \eta_\lambda(\tau) = \delta_{\lambda'\lambda}. \quad (2.43)$$

Insertando (2.42) en (2.39) y usando (2.41) y (2.42),

$$S_E^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau \left(\sum_{\lambda'} c_{\lambda'} \eta_{\lambda'}(\tau) \right) \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \left(\sum_\lambda c_\lambda \eta_\lambda(\tau) \right) \quad (2.44)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\lambda'} \sum_\lambda \lambda c'_\lambda c_\lambda \int d\tau \eta'_\lambda(\tau) \eta_\lambda(\tau) \quad (2.45)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\lambda'} \sum_\lambda \lambda c'_\lambda c_\lambda \delta_{\lambda'\lambda} \quad (2.46)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_\lambda \lambda c_\lambda^2. \quad (2.47)$$

Al momento de reemplazar la expresión anterior en la amplitud (2.32), pasamos a integrar sobre todos los coeficientes $\{c_\lambda\}$, por lo que elegimos como medida de integración

$$\mathcal{D}\eta = \prod_\lambda \frac{dc_\lambda}{\sqrt{2\pi\hbar}}. \quad (2.48)$$

donde incluimos el factor $\sqrt{2\pi\hbar}$ por conveniencia. Este solo afecta a la constante de normalización N .

Con esto, hemos aproximado la amplitud (2.32) como un producto de integrales gaussianas

$$I \approx N e^{-S_E^{cl}/\hbar} \int \prod_\lambda \frac{dc_\lambda}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\sum_\lambda \lambda c_\lambda^2/2\hbar} \quad (2.49)$$

cuyo resultado es conocido y fácil de calcular

$$I \approx N e^{-S_E^{cl}/\hbar} \int \prod_\lambda \frac{dc_\lambda}{\sqrt{2\pi\hbar}} \prod_\lambda e^{-\lambda c_\lambda^2/2\hbar} \quad (2.50)$$

$$\approx N e^{-S_E^{cl}/\hbar} \prod_\lambda \int \frac{dc_\lambda}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\lambda c_\lambda^2/2\hbar} \quad (2.51)$$

$$\approx N e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \prod_{\lambda} \lambda^{-1/2}. \quad (2.52)$$

La multiplicación de los autovalores en el último término es igual a la determinante del operador (2.40). Con esto, tenemos finalmente la integral de camino euclídeana en la aproximación de punto estacionario

$$I = N e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{\text{cl}}) \right) \right]^{-1/2} (1 + O(\hbar)). \quad (2.53)$$

Cabe resaltar que esta aproximación es de primer orden en \hbar . En caso la acción euclídeana tenga múltiples puntos estacionarios, se debe sumar la contribución de cada uno.

En la derivación anterior hemos supuesto implícitamente que todos los autovalores del operador (2.40) son positivos y distintos de cero. De no ser así, tendríamos que tratar cada uno de estos por separado, resultando en factores adicionales en la ecuación (2.53). Como veremos en las siguientes secciones, este es justamente el caso para el decaimiento del falso vacío.

2.4. Bounce

Como se discutió en la sección inicial de este capítulo, la tasa de decaimiento del falso vacío Γ está relacionada con la probabilidad de que una partícula permanezca en la región del falso vacío del potencial. Es por esto que, las trayectorias clásicas, necesarias para calcular la amplitud I dada por la ecuación (2.53) en la aproximación de punto estacionario, deben empezar y terminar en dicha región.

Tomando como referencia la figura 1.1, las trayectorias clásicas deben ser las soluciones de la ecuación de movimiento (2.15) con las condiciones de frontera [8]

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} x(\tau) = x_+. \quad (2.54)$$

Las trayectorias clásicas obtenidas no serán las exactas, pero son buenas aproximaciones, especialmente a medida que tomamos intervalos de tiempo euclídeano T cada vez mayores, que es el límite en el que estamos interesados al final [5, 9].

Notamos rápidamente que tenemos una primera trayectoria clásica en la que la partícula permanece en el falso vacío todo el tiempo. Llamaremos a esta solución

$$x_{\text{FV}}(\tau) = x_+ \quad (2.55)$$

es la solución trivial de (2.15) que cumple (2.54).

Analizando el potencial invertido de la figura

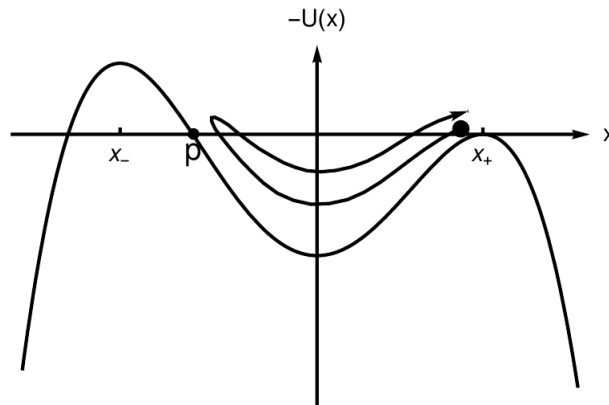


Figura 2.3: Potencial invertido [2].

2.5. Modo zero

2.6. Modo negativo

Normalmente, la amplitud no contiene una parte imaginaria. Sin embargo, por continuación analítica adquiere una.

2.7. Contribución multibounce

Capítulo 3

Conclusiones

Si bien hemos podido calcular la tasa de decaimiento Γ para el decaimiento del falso vacío, quedan varias preguntas conceptuales que no podrán ser abordadas en este trabajo y que tampoco se discuten a profundidad en la literatura consultada. Por ejemplo, la hermiticidad

Bibliografía

- [1] Gamow, G. (1928). The quantum theory of nuclear disintegration. *Nature*, 122(3082), 805-806.
- [2] Ai, W.-Y. (2019). *Aspects of false vacuum decay* (Tesis doctoral).
- [3] Andreassen, A., Farhi, D., Frost, W. & Schwartz, M. D. (2017). Precision decay rate calculations in quantum field theory. *Physical Review D*, 95(8), 085011.
- [4] Weinberg, E. J. (2012). *Classical solutions in quantum field theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics*. Cambridge University Press.
- [5] Paranjape, M. (2017). *The theory and applications of instanton calculations*. Cambridge University Press.
- [6] Kleinert, H. (2009). *Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets*. World scientific.
- [7] Masoumi, A. (2013). *Topics in vacuum decay* (Tesis doctoral). arXiv: 1505.06397 [hep-th]
- [8] Coleman, S. (1977). Fate of the false vacuum: Semiclassical theory. *Physical Review D*, 15(10), 2929.
- [9] Callan Jr, C. G. & Coleman, S. (1977). Fate of the false vacuum. II. First quantum corrections. *Physical Review D*, 16(6), 1762.
- [10] Feynman, R. P., Hibbs, A. R. & Styer, D. F. (2010). *Quantum mechanics and path integrals*. Courier Corporation.
- [11] Das, A. (2006). *Field Theory: A Path Integral Approach* (2.^a ed.). World Scientific Lecture Notes In Physics. World Scientific Publishing Company.
- [12] Rubakov, V. (2009). *Classical theory of gauge fields*. Princeton University Press.