Notas Falso Vacío

Erwin Renzo Franco Diaz

1. Motivación

- El potencial de Higgs recibe correcciones cuanticas debido a todos los campos con los que se acopla. Esto hace que su constante de acoplamiento se vuelva negativa alrededor de los 10^{11} GeV, volviendo inestable al vacio electrodebil. Los calculos mas recientes sugieren que el tiempo de vida del vacio electrodebil es mayor a la edad del universo, sin embargo, de no ser así podría sugerir nueva fisica mas alla del Modelo Estandar [1].
- El decaimiento del falso vacio se ve afectado por efectos gravitacionles. Por ejemplo, los agujeros negros pueden actuar como centros de nucleacion incrementando la tasa de decaimiento [1].
- El decaimiento del falso vacio tiene muchas otras aplicaciones en estudios fenomenologicos. Un ejemplo importante es la transicion de fase electrodebil durante el enfriamiento del Universo luego del Big Bang. En los modelos mas alla del Modelo Estandar, esta transicion es de primer orden y pde llevar a la nucleacion de burbujas que al colisionar y fusionarse pueden producir ondas gravitacionales, así como jugar un papel fundamental al momento de explicar la asimetria entre materia y antimateria [1].
- Aplicación importante del tunelamiento al proceso de vaporización del agua sobrecalentada [2].

2. Decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica

2.1. Integral de camino euclideana

- Como en la barrera la energia total es menor que el potencial, la energia cinetica seria negativa y la velocidad seria imaginaria, como si fuera la derivada de x respecto a un tiempo imaginario. Esta es la motivacion para aplicar metodos euclideanos [3].
- τ no es un tiempo, sino una parametrizacion particular del camino favorecido para el tunelamiento a través del espacio de configuracion [3].
- En el limite de T grande, I esta dominado por la contribucion de los estados con la menor energia. Entonces, podemos hallar estas energias evaluando la integral de camino para T grande y extrayendo las exponenciales dominantes [3].

2.2. Bounce

- Los puntos estacionarios son soluciones de la ecuación de movimiento para una partícula rodando cuesta abajo por la colina descrita por el potencial invertido $-V(x)$ con las condiciones de frontera de la integral de camino [4].
- El bounce empieza muy lento en x_+. Como el potencial es plano en este punto, se mantiene cerca por un largo tiempo, luego rueda rapidamente hacia p y de regreso, donde se vuelve a quedar cerca de x_+ por un largo tiempo [4].

2.2.1. Modo cero

Denominemos como $x_B(\tau-\tau_0)$ al bounce desplazado cuyo centro se encuentra en τ_0. Este se puede obtener del bounce original centrado en $\tau = 0$ mediante una translación temporal dada por la transformación

$$x_B(\tau-\tau_0) = e^{-\tau_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}} x_B(\tau), \tag{2.1}$$

o de manera infinitesimal

$$x_B(\tau-\tau_0) \approx x_B(\tau) - \tau_0 \frac{\mathrm{d}x_B(\tau)}{\mathrm{d}\tau}. \tag{2.2}$$

Como $x_B(\tau-\tau_0)$ también es una trayectoria clásica es solución de la ecuación de movimiento,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} x_B(\tau-\tau_0) - V'(x_B(\tau-\tau_0)) = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\left(x_B(\tau) - \tau_0\frac{\mathrm{d}x_B(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right) - V'\left(x_B(\tau) - \tau_0\frac{\mathrm{d}x_B(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right) = 0. \tag{2.4}$$

Expandiendo el segundo término a primer orden y reordenando,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 x_B(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} - V'(x_B(\tau))\right) - \tau_0\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} - V''(x_B(\tau))\right)\frac{\mathrm{d}x_B(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{2.5}$$

El primer término se anula puesto que el bounce es solución de la ecuación de movimiento, por lo que volvemos a obtener el resultado de la ecuación (**??**). Con esto, hemos justificado la existencia del modo cero a partir de la simetría del sistema.

Para solucionar el problema al calcular (**??**), reemplazaremos c_0 por una coordenada colectiva relacionada con la simetría, es decir, τ_0. Expandamos la trayectoria alrededor de $x_B(\tau-\tau_0)$

$$x(\tau) = x_B(\tau-\tau_0) + \xi(\tau) \tag{2.6}$$

Aproximando $x_B(\tau-\tau_0)$ por (2.2)

$$x(\tau) \approx x_B(\tau) - \tau_0\frac{\mathrm{d}x_B(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + \xi(\tau) \tag{2.7}$$

Tambien podemos hacerlo alrededor del bounce original $x_B(\tau)$. Separando el modo cero explícitamente

$$x(\tau) = x_B(\tau) + c_0\eta(\tau) + \sum_{\lambda\neq 0} c_\lambda \eta_\lambda(\tau) \tag{2.8}$$

$$= x_B(\tau) + c_0 B^{-1/2}\frac{\mathrm{d}x_B}{\mathrm{d}\tau} + \sum_{\lambda\neq 0} c_\lambda \eta_\lambda(\tau) \tag{2.9}$$

Comparando (2.7) con (2.9) obtenemos el jacobiano del cambio de variable

$$\left|\frac{\mathrm{d}c_0}{\mathrm{d}\tau_0}\right| = B^{1/2} \tag{2.10}$$

Una derivación rigurosa de este resultado se puede hacer usando el truco de Faddeev-Popov [2, 5, 4].

Al hacer el cambio de variable, integramos sobre un intervalo de timepo euclideano finito, de $-T/2$ a $T/2$. La contribución del bounce a la amplitud de transición es entonces

$$I_1 = e^{-B/\hbar}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{B}{\sqrt{2\pi\hbar}}\right)^{1/2}\mathrm{d}\tau_0 \prod_{\lambda\neq 0}\int \frac{\mathrm{d}c_\lambda}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\lambda c_\lambda^2/2\hbar} \tag{2.11}$$

$$= \left(\frac{B}{\sqrt{2\pi\hbar}}\right)^{1/2}\left[\det{}'\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} + V''(x_B)\right)\right]^{-1/2} T e^{-B/\hbar} \tag{2.12}$$

donde la prima en la determinante significa que se ha excluido el autovalor igual a cero.

2.2.2. Modo negativo

- Consideremos un secuencia de caminos parametrizados por una variable α. La solución trivial $x(\tau) = x_+$ corresponde a $\alpha = 0$ y el bounce a $\alpha = 1$. A medida que α crece a valores mayores a 1, el bounce se deforma y una parte de la trayectoria se encuentra en la zona del verdadero vacío, haciendo que la acción se vuelva cada vez más negativa [2].
- S tiene un máximo en $\alpha = 1$. El modo negativo es proporcional a la curvatura negativa en el máximo [2]. Como es único, la determinante del resto de autovalores es positiva y no influencia el proceso de continuación analítica.
- Para calcular Γ tenemos que modificar la integral de camino para que sea a través del contorno de máximo descenso que pasa por el FV, evitando el shot. La parte imaginario a través de este contorno es igual a 1/2 la parte imaginaria a lo largo del contorno de máximo descenso que pasa por el bounce [4].
- La parte imaginaria que buscamos viene de aplicar el método de máximo descenso a la acción euclideana a lo largo de la familia de trayectorias que pasan por el punto estacionario del FV [4].

2.3. Multibounce

- Debido a la invariancia ante translaciones temporales en el caso $T \to \infty$ existe una familia de configuraciones dependientes de un parámetro que corresponden a bounces ocurriendo en todo tiempo en $\tau_0 \in [-T/2, T/2]$. Su acción es exponencialmente cerca a S_B. Su degeneración es T. También existen n bounces separados por un tiempo con acción exponencialmente cerca a nS_B . Su degeneración es $T^n/n!$ al ser análogos a partículas identicas [6].

3. Decaimiento del falso vacío en la Teoría Cuántica de Campos

- La ocurrencia de los modos cero esta asociado con el hecho de que el centro del bounce puede localizarse en cualquier punto del espaciotiempo euclideano [5].

3.1. Thin-wall approximation

Consideremos el potencial

$$U(\phi) = U_0(\phi) + \frac{\epsilon}{2a}(\phi - a). \tag{3.1}$$

$U_0(\phi)$ es un potencial simétrico con 2 mínimos iguales tal que

$$U_0(-\phi) = U_0(\phi) \tag{3.2}$$

$$U_0(\pm a) = 0 \tag{3.3}$$

$$U_0'(\pm a) = 0 \tag{3.4}$$

$$U_0''(\pm a) = \omega^2 \tag{3.5}$$

En este caso $\phi_{\mathrm{FV}} = -a$ y $\phi_{\mathrm{TV}} = a$

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\rho} + \frac{\epsilon}{2a} = U'(\phi). \tag{3.6}$$

El último término se desprecia debido a que es de orden ϵ.

Puesto que la diferencia entre los mínimos es tan pequeña, puede que una partícula que empiece su movimiento cerca a a no pueda llegar a $-a$ debido al término de fricción. Es por esto que el movimiento debe ocurrir para $\rho = R$ muy grande, de tal manera que el termino de fricción se puede ignorar

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\rho^2} = U'(\phi). \tag{3.7}$$

Notamos que esta ecuación es de la forma de la ecuación de movimiento del bounce en la Mecánica Cuántica. Para solucionar la ecuación hacemos uso del hecho de que la energía euclideana es igual a 0, es decir,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\rho}\right)^2 - U(\phi) = 0. \tag{3.8}$$

Despejando e integrando obtenemos la solución

$$\rho - R = \int \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{U_0(\phi)}}. \tag{3.9}$$

De acuerdo con las condiciones de frontera y la imagen del bounce construida anteriormente, sabemos que para $r << R$, $\phi = \phi_{\mathrm{TV}}$ mientras que para $r >> R$, $\phi = \phi_{\mathrm{TV}}$. Juntando todo esto obtenemos al bounce en la aproximación de la pared delgada

$$\phi_B(\rho) = \begin{cases} \phi_{\mathrm{TV}} & r << R \\ \phi & \\ \phi_{\mathrm{FV}} & r >> R \end{cases} \tag{3.10}$$

4. Conclusiones

- Si bien hemos podido calcular la tasa de decaimiento del falso vacío para el campo escalar haciendo uso de la integral de camino euclideana y la aproximación de punto estacionario, tal como lo propusieron Callan y Coleman, aún quedan ciertas ambigüedades conceptuales ser resueltas. Por ejemplo, ¿como entender el tunelamiento, un proceso dinámico, a partir de una ecuación estática? ¿Cómo puede tener la energía del estado metaestable una parte imaginaria sin estar en contradicción con la hermiticidad? ¿Es posible entender el tunelamiento usando la integral de camino en tiempo real? [1]

Referencias

[1] Ai, W.-Y. (2019). *Aspects of false vacuum decay* (Tesis doctoral).

[2] Kleinert, H. (2009). *Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets*. World scientific.

[3] Weinberg, E. J. (2012). *Classical solutions in quantum field theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics*. Cambridge University Press.

[4] Andreassen, A., Farhi, D., Frost, W. & Schwartz, M. D. (2017). Precision decay rate calculations in quantum field theory. *Physical Review D*, *95*(8), 085011.

[5] Rubakov, V. (2009). *Classical theory of gauge fields*. Princeton University Press.

[6] Paranjape, M. (2017). *The theory and applications of instanton calculations*. Cambridge University Press.