

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú, Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Para optar por el grado académico de Bachiller en Física

**Decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica y
la Teoría Cuántica de Campos**

AUTOR

Erwin Renzo Franco Diaz

ASESOR

Teófilo Vargas Auccalla

Lima, Perú

Abril 2021

RESUMEN

añadir descripcion de capitulos

AGRADECIMIENTOS

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	II
Índice general	II
Índice de figuras	IV
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Planteamiento del problema	1
1.3. Objetivo	2
2. Decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica	3
2.1. Tasa de decaimiento del falso vacío	3
2.2. Integral de camino euclídeana	5
2.3. Aproximación del punto estacionario	7
2.4. Bounce	10
2.4.1. Modo cero	14
2.4.2. Modo negativo	16
2.4.3. Trayectorias con múltiples bounces	17
3. Decaimiento del falso vacío en la TCC	19
3.1. Tasa de decaimiento del falso vacío por unidad de volumen	19
3.2. Bounces en la Teoría Cuántica de Campos	20
3.3. Cálculo de la tasa de decaimiento del falso vacío por unidad de volumen	23

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IV
3.4. El destino del falso vacío	26
4. Conclusiones	28
Bibliografía	30

Índice de figuras

1.1. Potencial con un falso vacío en x_+ [2].	2
2.1. Potencial para el estudio numérico del decaimiento del falso vacío. Cuenta con una región de falso (FV) y verdadero vacío (R), separados por una barrera (B) [10].	4
2.2. Probabilidad de que una partícula permanezca en la región de falso vacío para distintos anchos de verdadero vacío. El eje vertical está en escala logarítmica [10].	5
2.3. Trayectorias clásicas para el decaimiento del falso vacío [5].	11
2.4. Potencial invertido correspondiente al de la figura 1.1 [2].	12
2.5. Bounce [6].	13
2.6. Deformación del contorno de integración al plano complejo [4].	17
3.1. Potencial en el que se encuentra el campo escalar dado por la acción (3.1). Notamos que cuenta con un falso vacío en ϕ_+ [4].	20
3.2. Proceso de nucleación de una burbuja de verdadero vacío [10].	21
3.3. Crecimiento de una burbuja de verdadero vacío en el espacio de Minkowski. En la figura $r = \mathbf{x} $ [7].	27

Dedicado a

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Desde su formulación inicial en la década de 1920, se hizo evidente que la Mecánica Cuántica es una teoría radicalmente distinta al resto de la Física conocida hasta ese entonces. Uno de los ejemplos más sorprendentes de esto es el efecto túnel o tunelamiento. Descubierta inicialmente por George Gamow en 1928 para explicar el decaimiento alfa [1], este fenómeno permite a una partícula atravesar una barrera de potencial, a pesar de que no pueda hacerlo clásicamente por no contar con la energía suficiente.

Una consecuencia importante del efecto túnel es el decaimiento del falso vacío, tema principal a tratar en este trabajo. En este caso, la partícula atraviesa la barrera de potencial a la vez que decae al estado de mínima energía.

El decaimiento del falso vacío tiene implicaciones importantes tanto en la física de partículas como en la cosmología.

1.2. Planteamiento del problema

revisar Consideremos un potencial como el de la figura 1.1 que posee dos mínimos distintos, uno mayor que otro. Clásicamente, ambos puntos son estables. Sin embargo, esta no es la situación a nivel cuántico. Debido al efecto túnel, existe la posibilidad de que una partícula que se encuentre inicialmente en x_+ , atraviese la barrera al estado de menor energía del sistema. Es

por esto que a x_+ se le denomina como falso vacío y a este proceso como decaimiento del falso vacío.

A lo largo del trabajo tomaremos la figura 1.1 como nuestro potencial de referencia.

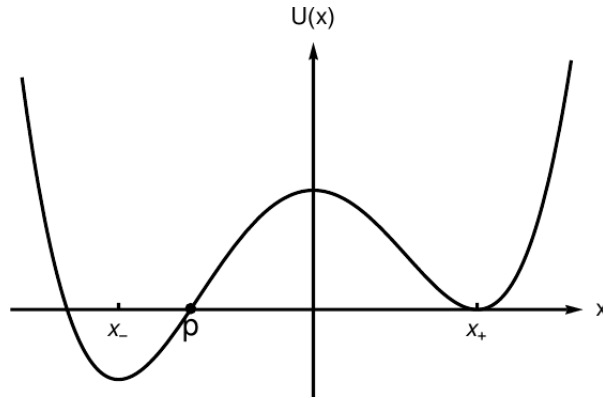


Figura 1.1: Potencial con un falso vacío en x_+ [2].

1.3. Objetivo

El objetivo principal del presente trabajo de investigación es el cálculo de la tasa de decaimiento del falso vacío Γ a primer orden en \hbar . Inicialmente se llevará a cabo en la Mecánica Cuántica haciendo uso de la integral de camino euclídeana y la aproximación del punto estacionario siguiendo el formalismo planteado originalmente por Coleman y Callan [3, 4]. Posteriormente el mismo será extendido a la Teoría Cuántica de Campos del campo escalar donde además se analizará la formación de burbujas de verdadero vacío y su evolución espaciotemporal.

Capítulo 2

Decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica

2.1. Tasa de decaimiento del falso vacío

Un estado concentrado en la región del falso vacío no puede ser un autoestado de energía, puesto que estos, al no poseer dependencia temporal, no pueden decaer [5]. Podríamos expandirlo en una combinación lineal de estos autoestados, pero es más conveniente considerarlo como un estado fundamental metaestable cuya energía adquiere una parte imaginaria debido al tunelamiento [6, 7, 8].

A diferencia de lo que sucede con los autoestados de energía, la evolución temporal del estado metablestable $|\psi\rangle$ no consiste únicamente en la adquisición de una fase [9],

$$e^{iE_0t/\hbar} |\psi\rangle = e^{i\text{Re}(E_0)t/\hbar} e^{\text{Im}(E_0)t/\hbar} |\psi\rangle. \quad (2.1)$$

La parte imaginaria de la energía hace que la probabilidad de que una partícula permanezca en la región del falso vacío, relacionada con la norma del estado metaestable, disminuya exponencialmente en el tiempo

$$P_{\text{FV}}(t) \propto e^{-\Gamma t/\hbar} \quad (2.2)$$

lo que nos permite definir la tasa de decaimiento Γ como

$$\Gamma \equiv -2 \text{Im} \left(\frac{E_0}{\hbar} \right). \quad (2.3)$$

Esta definición considera implícitamente que la parte imaginaria de la energía del estado metaestable es negativa, de tal manera que Γ sea positiva. De no ser así, la probabilidad crecería [9].

Podemos entender cualitativamente este comportamiento estudiando numéricamente la evolución temporal de una función de onda concentrada inicialmente en la región del falso vacío de un potencial sencillo como el de la figura 2.1, y calculando la probabilidad de encontrar a la partícula en esta región luego de un tiempo t . Los resultados de la simulación se presentan en la figura 2.2 para distintos anchos de la región de verdadero vacío [10]. Tal como esperábamos, se observa claramente la dependencia lineal de la probabilidad en escala logarítmica con el tiempo. Notamos además que las tres rectas tienen la misma pendiente, lo cual indica que la forma específica del potencial en la región del verdadero vacío no influye de manera significativa en la dinámica del sistema [7].

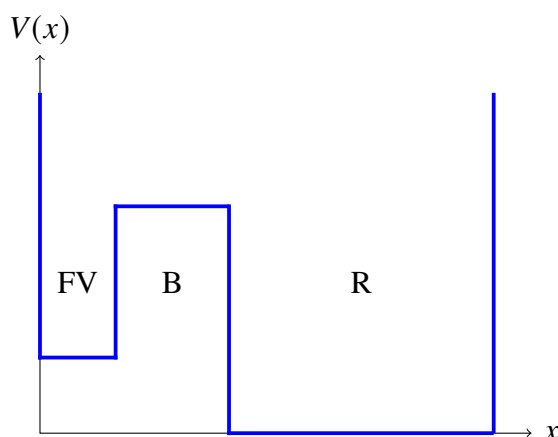


Figura 2.1: Potencial para el estudio numérico del decaimiento del falso vacío. Cuenta con una región de falso (FV) y verdadero vacío (R), separados por una barrera (B) [10].

En la misma figura, sin embargo, puede apreciarse que el régimen lineal se mantiene solo durante un cierto intervalo de tiempo. Antes de atravesar la barrera, la función de onda oscila en la región del falso vacío, mientras que, cuando la función de onda ya atravesó la barrera y se encuentra la región del verdadero vacío, rebota con la pared infinita a la derecha y empieza a interactuar consigo misma, dando como resultado efectos no lineales [10]. Estos aspectos deben ser tomados en cuenta al momento de definir Γ de manera precisa [5].

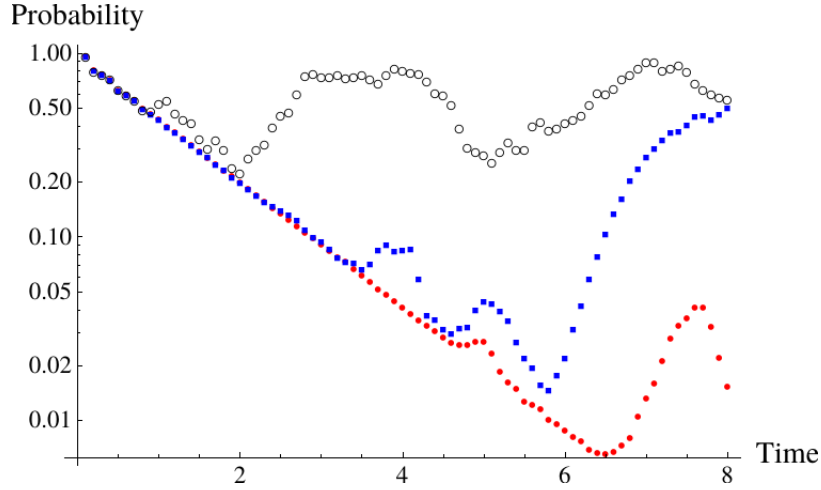


Figura 2.2: Probabilidad de que una partícula permanezca en la región de falso vacío para distintos anchos de verdadero vacío. El eje vertical está en escala logarítmica [10].

Haciendo uso de la aproximación WKB, es posible demostrar que Γ es de la forma [3]

$$\Gamma = Ae^{-B/\hbar}(1 + O(\hbar)), \quad (2.4)$$

donde

$$B = 2 \int_{x_+}^p dx \sqrt{2V(x)}. \quad (2.5)$$

2.2. Integral de camino euclideana

Consideremos una partícula que inicialmente se encuentra en la posición x_i en un tiempo t_i . La amplitud de transición de esta a una posición final x_f en un tiempo t_f está dada por la integral de camino de Feynman ¹ [11]

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x e^{iS[x(t)]/\hbar}, \quad (2.6)$$

donde $S[x(t)]$ es la acción de la partícula que, de la Mecánica Clásica, está dada por ²

$$S[x(t)] = \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right]. \quad (2.7)$$

Una de las dificultades al momento de querer calcular (2.6) se debe al hecho de que está compuesta por una suma de fases complejas oscilatorias, que no necesariamente es convergente.

¹La integral de camino cuenta con una constante de normalización que debe ser elegida adecuadamente. Como no es de interés en este trabajo la asumiremos igual a 1.

²A lo largo de todo el trabajo consideraremos que la partícula es de masa unitaria.

Es por esto que resulta más conveniente trabajar en tiempo imaginario, para lo cual introducimos el tiempo euclideo τ mediante el cambio de variable

$$t = -i\tau, \quad (2.8)$$

también conocido como rotación de Wick [12].

Realizando el cambio de variable (2.8) en la acción (2.7), tenemos

$$S[x(\tau)] = \int d(-i\tau) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d(-i\tau)} \right)^2 - V(x) \right] \quad (2.9)$$

$$= i \int d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] \quad (2.10)$$

$$= iS_E[x(\tau)] \quad (2.11)$$

donde hemos definido la acción euclidea $S_E[x(\tau)]$ como

$$S_E[x(\tau)] \equiv \int d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right]. \quad (2.12)$$

De igual manera, su ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dV(x)}{dx}, \quad (2.13)$$

la cual puede ser interpretada como la ecuación de movimiento en tiempo real para una partícula moviéndose en el potencial invertido $-V(x)$,

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{d(-V(x))}{dx}. \quad (2.14)$$

Por último, en la energía,

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \quad (2.15)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \quad (2.16)$$

$$= -\mathcal{E} \quad (2.17)$$

donde hemos definido la energía euclidea \mathcal{E} como [8]

$$\mathcal{E} \equiv \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x). \quad (2.18)$$

Al reemplazar (2.11) en (2.6), obtenemos la integral de camino euclidea [12]

$$I = \langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = \int \mathcal{D}x e^{-S_E[x(\tau)]/\hbar}, \quad (2.19)$$

donde T es el intervalo de tiempo euclideo que le toma a la partícula ir de x_i a x_f . De esta manera, hemos convertido las fases oscilatorias en (2.6) en exponenciales decaientes que podremos calcular de manera aproximada mediante integrales gaussianas, como se verá en la sección siguiente.

Insertamos una base de autoestados de energía $\{|n\rangle\}$ en (2.19) [3]

$$I = \sum_n e^{-E_n T/\hbar} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle. \quad (2.20)$$

En el límite en el que $T \rightarrow \infty$, la contribución de los términos de orden superior es exponencialmente pequeña, lo que nos permite extraer la energía del estado fundamental³ [5]

$$\frac{E_0}{\hbar} = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln I}{T}. \quad (2.21)$$

Como ya se discutió en la sección anterior, la energía del estado metaestable cuenta con una parte imaginaria, a partir de la cual obtenemos vacío Γ a partir de la ecuación (2.3). A su vez, E_0 está dado por (2.21), por lo que ahora podemos calcular Γ directamente de la integral de camino euclidea (2.19)

$$\Gamma = 2 \operatorname{Im} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln I}{T} \right). \quad (2.22)$$

2.3. Aproximación del punto estacionario

Los casos para los cuales es posible calcular la integral de camino de manera exacta son muy pocos y suelen involucrar técnicas matemáticas sofisticadas [11, 12, 9], por lo que usualmente se tiene que recurrir a métodos aproximados. En nuestro caso, haremos uso de la aproximación del punto estacionario (*saddle point approximation*) para calcular la integral de camino euclidea en (2.22).

Al igual que en el cálculo diferencial, los puntos estacionarios de la acción euclidea $S_E[x(\tau)]$ son aquellos que cumplen con la condición

$$\frac{\delta S_E[x(\tau)]}{\delta x(\tau)} = 0. \quad (2.23)$$

³Asumiendo que los autoestados de energía están normalizados.

Esto no es más que el principio de mínima acción de la Mecánica Clásica, por lo que los puntos estacionarios corresponden a las trayectorias clásicas $x_{cl}(\tau)$, soluciones de la ecuación de movimiento (2.13). Por simplicidad, supondremos que tenemos un único punto estacionario.

Expandiendo $S_E[x(\tau)]$ alrededor de la trayectoria clásica $x_{cl}(\tau)$,

$$x(\tau) = x_{cl}(\tau) + \eta(\tau), \quad (2.24)$$

donde $\eta(\tau)$ es la variación respecto a la trayectoria clásica sujeta a las condiciones de frontera

$$\eta(\tau_i) = \eta(\tau_f) = 0, \quad (2.25)$$

tenemos,

$$S_E[x(\tau)] = S_E[x_{cl}(\tau) + \eta(\tau)] \quad (2.26)$$

$$= S_E[x_{cl}(\tau)] + \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1) \frac{\delta^2 S_E[x_{cl}(\tau)]}{\delta x_{cl}(\tau_1) \delta x_{cl}(\tau_2)} \eta(\tau_2) + O(\eta^3). \quad (2.27)$$

El primer término corresponde a la acción euclídeana clásica S_E^{cl} . Por conveniencia, definimos la variación de segundo orden como

$$S_E^{(2)} \equiv \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1) \frac{\delta^2 S_E[x_{cl}(\tau)]}{\delta x_{cl}(\tau_1) \delta x_{cl}(\tau_2)} \eta(\tau_2). \quad (2.28)$$

El término lineal se cancela por (2.23).

En comparación con los términos anteriores, el valor de \hbar es pequeño. Esto nos permite ignorar los términos de orden superior en (2.27). Para verlo más claramente, reemplacemos $S_E[x(\tau)]$ en (2.19) por (2.27),

$$I = e^{-S_E^{cl}/\hbar} \int \mathcal{D}\eta e^{-S_E^{(2)}/\hbar + O(\eta^3)}, \quad (2.29)$$

donde, al haber fijado el camino clásico, ahora integramos sobre todas sus variaciones, cambiando la medida de integración. Reescalando $\eta(\tau) \rightarrow \sqrt{\hbar} \eta(\tau)$ ⁴,

$$I = e^{-S_E^{cl}/\hbar} \int \mathcal{D}\eta e^{-S_E^{(2)} + O(\hbar)} \quad (2.30)$$

notamos que los términos de orden superior en (2.27) son de primer orden en \hbar , justificando la aproximación [7]. Esta es la razón por lo que la aproximación del punto estacionario es un

⁴La nueva medida de integración incluye un factor constante que absorbemos en N .

método semiclásico. Será a este orden que calcularemos la tasa de decaimiento del falso vacío Γ .

La derivada funcional de la acción euclideana (2.12) es igual a la ecuación de movimiento (2.13)

$$\frac{\delta S_E[x(\tau)]}{\delta x(\tau_1)} = -\ddot{x}(\tau_1) + V'(\tau_1), \quad (2.31)$$

donde el punto indica la derivada respecto a τ , mientras que la prima indica la derivada respecto a $x(\tau)$. Tomando la derivada funcional de (2.31) y desarrollando

$$\frac{\delta S_E[x(\tau)]}{\delta x(\tau_1) \delta x(\tau_2)} = -\frac{\delta \ddot{x}(\tau_1)}{\delta x(\tau_2)} + \frac{\delta V'(x)}{\delta x(\tau_2)} \quad (2.32)$$

$$= -\frac{d^2}{d\tau_1^2} \left(\frac{\delta x(\tau_1)}{\delta x(\tau_2)} \right) + V''(x) \frac{\delta x(\tau_1)}{\delta x(\tau_2)} \quad (2.33)$$

$$= \left(-\frac{d^2}{d\tau_1^2} + V''(x) \right) \delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (2.34)$$

Reemplazando en (2.28),

$$S_E^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1) \left(-\frac{d^2}{d\tau_1^2} + V''(x_{cl}) \right) \delta(\tau_1 - \tau_2) \eta(\tau_2) \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{2} \int d\tau \eta(\tau) \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \eta(\tau), \quad (2.36)$$

notamos que el cálculo de $S_E^{(2)}$ está íntimamente relacionado con el operador

$$\hat{O} \equiv -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}). \quad (2.37)$$

Introduzcamos una base de autofunciones del operador anterior $\{\eta_i(\tau)\}$ [8]

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \eta_\lambda(\tau) = \lambda \eta_\lambda(\tau), \quad (2.38)$$

tal que podemos expandir $\eta(\tau)$ en función de esta

$$\eta(\tau) = \sum_\lambda c_\lambda \eta_\lambda(\tau). \quad (2.39)$$

Como la base es completa y ortonormal,

$$\int d\tau \eta_{\lambda'}(\tau) \eta_\lambda(\tau) = \delta_{\lambda'\lambda}. \quad (2.40)$$

Insertando (2.39) en (2.36) y usando (2.38) y (2.40),

$$S_E^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau \left(\sum_{\lambda'} c_{\lambda'} \eta_{\lambda'}(\tau) \right) \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \left(\sum_\lambda c_\lambda \eta_\lambda(\tau) \right) \quad (2.41)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda} \lambda c'_{\lambda} c_{\lambda} \int d\tau \eta'_{\lambda}(\tau) \eta_{\lambda}(\tau) \quad (2.42)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda} \lambda c'_{\lambda} c_{\lambda} \delta_{\lambda'\lambda} \quad (2.43)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \lambda c_{\lambda}^2. \quad (2.44)$$

Al momento de reemplazar (2.44) en (2.29), pasamos a integrar sobre todos los coeficientes $\{c_{\lambda}\}$, por lo que elegimos como medida de integración

$$\mathcal{D}\eta = \prod_{\lambda} \frac{dc_{\lambda}}{\sqrt{2\pi\hbar}}, \quad (2.45)$$

donde incluimos los factores $\sqrt{2\pi\hbar}$ por conveniencia. Tomando todo esto en cuenta, (2.29) se reduce a un producto de integrales gaussianas cuyo resultado es conocido y fácil de calcular

$$I \approx e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \int \prod_{\lambda} \frac{dc_{\lambda}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\sum_{\lambda} \lambda c_{\lambda}^2/2\hbar} \quad (2.46)$$

$$= e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \prod_{\lambda} \int \frac{dc_{\lambda}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\lambda c_{\lambda}^2/2\hbar} \quad (2.47)$$

$$= e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \prod_{\lambda} \lambda^{-1/2}. \quad (2.48)$$

El producto de los autovalores en el último término de (2.48) no es más que la determinante de \hat{O} . Con esto, la amplitud de transición en la aproximación del punto estacionario está dada por

$$I = e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{\text{cl}}) \right) \right]^{-1/2} (1 + \mathcal{O}(\hbar)). \quad (2.49)$$

Cabe resaltar que esta aproximación es de primer orden en \hbar . En caso la acción euclídeana cuente con múltiples puntos estacionarios, debemos sumar la contribución de cada uno.

En la derivación anterior hemos supuesto implícitamente que todos los autovalores de \hat{O} son positivos. De no ser así, (2.49) falla y tendríamos que tratar por separado aquellos autovalores que no cumplan con esta condición, resultando en factores adicionales. Como veremos en las secciones siguientes, este es el caso para el decaimiento del falso vacío.

2.4. Bounce

Como se discutió en la sección inicial de este capítulo, la tasa de decaimiento del falso vacío está relacionada con la probabilidad de que una partícula permanezca en la región del

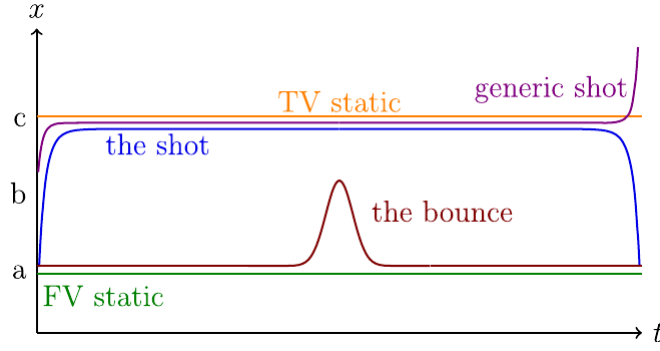


Figura 2.3: Trayectorias clásicas para el decaimiento del falso vacío [5].

falso vacío del potencial. Es por esto que las trayectorias clásicas, necesarias para calcular la amplitud de transición en la aproximación del punto estacionario usando la ecuación (2.49), deben empezar y terminar en dicha región. Es decir, $x_i = x_f = x_+$.

Las trayectorias clásicas deben ser entonces las soluciones de la ecuación de movimiento (2.13) con las condiciones de frontera [3]

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} x(\tau) = x_+. \quad (2.50)$$

Las trayectorias clásicas obtenidas no serán las exactas, pero son buenas aproximaciones, especialmente a medida que tomamos intervalos de tiempo euclideo cada vez mayores, que es el límite en el que estamos interesados finalmente [7, 4]. Por conveniencia, tomaremos $\tau_i = -T/2$ y $\tau_f = T/2$, tal que cuando necesitemos considerar el intervalo de tiempo euclideo finito este sea igual a T .

En la figura 2.3 se encuentran ilustradas las trayectorias clásicas a considerar. La primera es la solución trivial $x_{FV}(\tau)$ (*FV static* en la figura 2.3) en la que la partícula permanece en el falso vacío para todo τ ,

$$x_{FV}(\tau) = x_+. \quad (2.51)$$

Como $V(x_+) = 0$ y la solución es constante, $S_E[x_{FV}(\tau)] = 0$ y su contribución a la amplitud de transición I_0 es simplemente

$$I_0 = \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \right]^{-1/2}, \quad (2.52)$$

donde hemos definido

$$\omega^2 \equiv V''(x_+). \quad (2.53)$$

De igual manera, su energía euclidea también es nula.

Analizando el potencial invertido de la figura 2.4 notamos que es posible encontrar trayectorias clásicas no triviales que atraviesen la barrera del potencial original. Consideremos una partícula que inicia su movimiento en x_+ . Como el potencial es plano alrededor de este punto, permanece ahí por un largo tiempo, para luego recorrer rápidamente el pozo de potencial invertido hasta llegar al punto de retorno p en un tiempo finito. La invarianza de la acción euclidea ante inversiones temporales nos permite extender esta trayectoria de vuelta a x_+ [6]. Si $\tau_i = -\infty$ y $\tau_f = +\infty$, obtenemos el bounce ⁵ $x_B(\tau)$ [3]. Su comportamiento se encuentra ilustrado en las figuras 2.3 y 2.5.

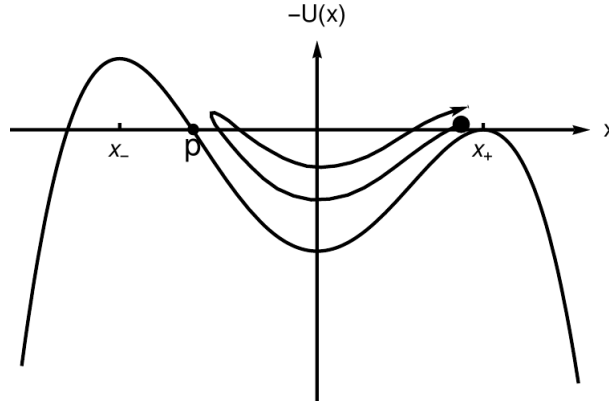


Figura 2.4: Potencial invertido correspondiente al de la figura 1.1 [2].

Aprovechando el hecho de que el bounce es invariante ante translaciones temporales, posicionemos su centro, correspondiente al instante en el que la partícula llega a p , en $\tau = 0$ [3]. La partícula se detiene en ese punto, por lo que

$$\left. \frac{dx_B}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (2.54)$$

Como $V(p) = 0$, la energía euclidea del bounce también es nula debido al principio de conservación de la energía. De la definición en (2.18), tenemos que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 = V(x_B). \quad (2.55)$$

La acción euclidea del bounce está dada por

$$S_E[x_B(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 + V(x_B) \right]. \quad (2.56)$$

⁵Mantendremos el nombre en l idioma original por ser el término comúnmente usado en la literatura.

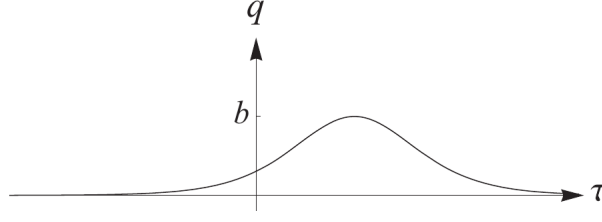


Figura 2.5: Bounce [6].

Si dividimos la integral en $\tau = 0$,

$$S_E[x_B(\tau)] = \int_{-\infty}^0 d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 + V(x_B) \right] + \int_0^{+\infty} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 + V(x_B) \right]. \quad (2.57)$$

y hacemos $\tau \rightarrow -\tau$ en la segunda integral, ambos términos son iguales. Esto es una consecuencia directa de la invariancia de la acción euclídeana ante inversiones temporales, relacionada también con la simetría del bounce. Si además usamos la ecuación (2.55), podemos reducir la acción (2.56) a

$$S_E[x_B(\tau)] = 2 \int_{-\infty}^0 d\tau \, 2V(x_B). \quad (2.58)$$

Por último, realicemos el cambio variable $\tau \rightarrow x_B$ [8]. Despejando $dx_B/d\tau$ en la ecuación (2.55),

$$\frac{dx_B}{d\tau} = \sqrt{2V(x_B)} \quad (2.59)$$

$$d\tau = \frac{dx_B}{\sqrt{2V(x_B)}}. \quad (2.60)$$

Reemplazando esta última en la ecuación (2.58) con los límites de integración correspondientes,

$$x_B(-\infty) = x_+, \quad x_B(0) = p, \quad (2.61)$$

obtenemos finalmente

$$S_E[x_B(\tau)] = 2 \int_{x_+}^p dx \sqrt{2V(x)}, \quad (2.62)$$

donde hemos omitido el subíndice al ya no ser necesario. Notamos que la acción euclídeana del bounce es igual al coeficiente B en la ecuación (2.5),

$$B = S_E[x_B(\tau)]. \quad (2.63)$$

Al momento de calcular la contribución del bounce a la amplitud de transición, no podemos hacer uso de la fórmula en (2.49) directamente debido a que, en este caso, \hat{O} cuenta con autovalores que no son positivos. En las secciones a continuación, se discutirán las complicaciones que esto conlleva y cómo solucionarlas.

2.4.1. Modo cero

Por construcción, el bounce es una solución de la ecuación de movimiento (2.13),

$$\frac{d^2 x_B}{d\tau^2} - V'(x_B) = 0. \quad (2.64)$$

Al derivar la ecuación anterior respecto a τ ,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{d^2 x_B}{d\tau^2} - V'(x_B) \right) = 0 \quad (2.65)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right) - V''(x_B) \frac{dx_B}{d\tau} = 0 \quad (2.66)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} - V''(x_B) \right) \frac{dx_B}{d\tau} = 0, \quad (2.67)$$

se muestra claramente que \hat{O} cuenta con un autovector cuyo autovalor es igual a cero. Por esta razón decimos que \hat{O} cuenta con un modo cero.

Los autovalores de \hat{O} deben estar estandarizados. De (2.56) y usando (2.55), tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 = B, \quad (2.68)$$

de tal manera que el modo cero $x_0(\tau)$, proporcional a $dx_B/d\tau$, está dado por

$$x_0(\tau) = B^{-1/2} \frac{dx_B}{d\tau}. \quad (2.69)$$

Como ya se ha comentado anteriormente, el modo cero representa un problema al momento de calcular la contribución del bounce a la amplitud de transición. Para verlo explícitamente, retornemos a la ecuación (2.48), en la que expresamos la amplitud de transición como un producto de integrales gaussianas, y separemos la integral respecto al coeficiente c_0 correspondiente al modo cero,

$$\int \frac{dc_0}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (2.70)$$

Puesto que $\lambda = 0$, hemos perdido el amortiguamiento exponencial relacionado con c_0 por lo que (2.70), es divergente.

La existencia de un modo cero está siempre relacionada con una simetría del sistema [12]. En este caso, es debido a la simetría de la acción euclídeana ante traslaciones temporales [4]. Si bien, por conveniencia, fijamos el centro del bounce en $\tau = 0$, bien podríamos haberlo hecho en cualquier otro instante de tiempo euclídeano. Esto significa que existe un conjunto de bounces,

cuyos centros están localizados a lo largo de todo el intervalo de tiempo euclideo, que también son soluciones de la ecuación de movimiento y por lo tanto, también contribuyen a la amplitud de transición. Este es el origen de la divergencia [9].

Analíticamente, una traslación temporal es equivalente a realizar la siguiente transformación,

$$x_B(\tau - \tau_0) = e^{-\tau_0 \frac{d}{d\tau}} x_B(\tau). \quad (2.71)$$

Al efectuar esta transformación, desplazamos al bounce de tal manera que su centro se encuentra ahora en τ_0 . Como se discutió anteriormente, $x_B(\tau - \tau_0)$ también es solución de la ecuación de movimiento (2.13),

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x_B(\tau - \tau_0) - V'(x_B(\tau - \tau_0)) = 0. \quad (2.72)$$

Consideremos una transformación infinitesimal,

$$x_B(\tau - \delta\tau_0) \approx x_B(\tau) - \frac{dx_B}{d\tau} \delta\tau_0, \quad (2.73)$$

en (2.72),

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \left(x_B(\tau) - \frac{dx_B}{d\tau} \delta\tau_0 \right) - V' \left(x_B(\tau) - \frac{dx_B}{d\tau} \delta\tau_0 \right) = 0. \quad (2.74)$$

Expandiendo el segundo término a primer orden en τ_0 y reordenando,

$$\left(\frac{d^2 x_B(\tau)}{d\tau^2} - V'(x_B) \right) - \left(\frac{d^2}{d\tau^2} - V''(x_B) \right) \frac{dx_B}{d\tau} \delta\tau_0 = 0. \quad (2.75)$$

El primer término se anula debido a que el bounce es solución de la ecuación de movimiento, por lo que obtenemos nuevamente el resultado en la ecuación (2.67),

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} - V''(x_B) \right) \frac{dx_B}{d\tau} = 0. \quad (2.76)$$

Con esto, hemos demostrado la existencia del modo cero a partir de la simetría del sistema ante traslaciones temporales.

Veamos ahora cómo solucionar el problema de la divergencia en el cálculo de la contribución del bounce a la amplitud de transición. Para esto es necesario reemplazar c_0 por una coordenada colectiva relacionada con la simetría correspondiente del sistema. En nuestro caso, debemos hacer uso de τ_0 [6, 7].

Consideremos la expansión de la trayectoria $x(\tau)$ alrededor del bounce

$$x(\tau) = x_B(\tau) + c_0 B^{-1/2} \frac{dx_B}{d\tau} + \sum_{\lambda \neq 0} c_\lambda \eta_\lambda(\tau). \quad (2.77)$$

La variación de la trayectoria debido a un cambio infinitesimal en c_0 está dado por

$$B^{-1/2} \frac{dx_B}{d\tau} \delta c_0. \quad (2.78)$$

Comparando (2.78) con (2.73), notamos que el primero es equivalente a la variación de la trayectoria debido a un desplazamiento infinitesimal del centro del bounce $\delta\tau_0$ igual a

$$\delta\tau_0 = -B^{-1/2} \delta c_0. \quad (2.79)$$

Tenemos entonces que, al realizar el cambio de variable de c_0 a τ_0 a primer orden en \hbar , la contribución del bounce a la amplitud de transición I_1 adquiere un factor adicional de $B^{1/2}$ ⁶ [12, 9].

Con esto, e integrando sobre el intervalo de tiempo euclideo finito $\tau_0 \in [-T/2, T/2]$,

$$I_1 = e^{-B/\hbar} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau_0 \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \prod_{\lambda \neq 0} \int \frac{dc_\lambda}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\lambda c_\lambda^2/2\hbar} \quad (2.80)$$

$$= \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} T e^{-B/\hbar} \prod_{\lambda \neq 0} \int \frac{dc_\lambda}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\lambda c_\lambda^2/2\hbar}, \quad (2.81)$$

hemos resuelto el problema de la divergencia relacionada a la existencia del modo cero. Sin embargo, aún no podemos terminar con el cálculo debido a que existe otra fuente de divergencia aún más grave: \hat{O} cuenta con un autovalor negativo en su espectro, el cual se discutirá en la sección a continuación.

2.4.2. Modo negativo

Al analizar la forma de la ecuación (2.38),

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \eta_\lambda(\tau) = \lambda \eta_\lambda(\tau), \quad (2.82)$$

notamos inmediatamente su similaridad con la ecuación de Schrödinger. Como el modo cero es proporcional a $dx_B(\tau)/d\tau$, de acuerdo con la ecuación (2.54), posee un nodo en $\tau = 0$ por lo que no puede ser el autoestado de menor autovalor. Esto implica la existencia de un único autovector sin nodos cuyo autovalor es negativo. Por esta razón, decimos que \hat{O} cuenta con un único modo negativo además del modo cero ya estudiado [4]. Tal como sucedía con este último,

⁶Una derivación detallada de este resultado requiere el uso del truco de Faddeev-Popov [9, 8, 5].

la integral respecto al coeficiente c_{-1} en la ecuación (2.48), correspondiente al modo negativo,

$$\int \frac{dc_{-1}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{|\lambda_{-1}|c_{-1}^2/2\hbar}, \quad (2.83)$$

también es divergente.

El hamiltoniano es un operador hermítico cuyos autovalores son todos reales, mientras que la energía del estado metaestable cuenta con una parte imaginaria, por lo que claramente no pertenece al espectro del hamiltoniano [7]. Este es el origen de la divergencia en (2.83). Para solucionar este problema es necesario definir la amplitud de transición mediante continuación analítica. Siguiendo el trabajo de Callan y Coleman [4], se deforma el contorno de integración a lo largo del plano complejo tal como se muestra en la figura 2.6 ⁷, por lo que la contribución del bounce a la amplitud de transición está dada por

$$I_1 = \frac{i}{2} \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_B) \right) \right]^{-1/2} T e^{-B/\hbar} \quad (2.84)$$

donde la prima en la determinante indica que se ha excluido el autovalor igual a cero.

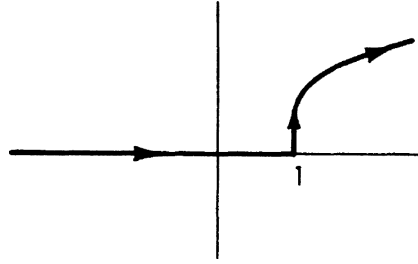


Figura 2.6: Deformación del contorno de integración al plano complejo [4].

2.4.3. Trayectorias con múltiples bounces

Como vimos en la sección 2.4.1, el bounce no es único y existen otras trayectorias clásicas que también contribuyen a la amplitud de transición. De igual manera, debemos considerar la contribución de aquellas trayectorias que cuenten con un número arbitrario de bounces consecutivos lo suficientemente separados, aunque no sean soluciones exactas de la ecuación de movimiento [6].

Por comodidad, reescribamos I_1 en función de I_0 ,

$$I_1 = iKT e^{-B/\hbar} I_0 \quad (2.85)$$

⁷Una discusión detallada de la continuación analítica puede encontrarse en [5, 7]

donde hemos definido

$$K \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[\frac{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_B) \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right]^{-1/2}. \quad (2.86)$$

por comodidad. De esta forma la elección de los subíndices queda justificada puesto que indican el número de bounces con los que cuenta una trayectoria dada.

Generalizando (2.85), tenemos que la contribución de una trayectoria que cuenta con n bounces a la amplitud de transición I_n está dada por

$$I_n = \frac{\left(iKT e^{-B/\hbar} \right)^n}{n!} I_0 \quad (2.87)$$

donde incluimos el factor de $n!$ debido a que los bounces son equivalentes y por lo tanto intercambiables entre sí.

Con esto, solo nos queda sumar cada una de las contribuciones a la amplitud de transición,

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \quad (2.88)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(iKT e^{-B/\hbar} \right)^n}{n!} I_0 \quad (2.89)$$

$$= I_0 \exp \left(iKT e^{-B/\hbar} \right) \quad (2.90)$$

y reemplazarlo en la ecuación (2.22)

$$\Gamma = 2 \operatorname{Im} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(I_0 \exp \left(iKT e^{-B/\hbar} \right) \right)}{T} \right) \quad (2.91)$$

$$= 2 \operatorname{Im} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln I_0}{T} + iK e^{-B/\hbar} \right) \right) \quad (2.92)$$

$$= 2K e^{-B/\hbar}, \quad (2.93)$$

de donde obtenemos finalmente que la tasa de decaimiento del falso vacío a primer orden en \hbar está dada por

$$\Gamma = \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[\frac{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_B) \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right]^{-1/2} e^{-B/\hbar} (1 + O(\hbar)). \quad (2.94)$$

Notamos que la expresión anterior es de la forma dada en la ecuación (2.4), tal como esperábamos. Contamos ahora con una expresión analítica para la constante A que, junto con la exponencial, representan el carácter no perturbativo del decaimiento del falso vacío [6].

Capítulo 3

Decaimiento del falso vacío en la Teoría Cuántica de Campos

3.1. Tasa de decaimiento del falso vacío por unidad de volumen

Consideremos el campo escalar $\phi(x)$ cuya acción $S[\phi(x)]$ está dada por

$$S[\phi(x)] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - U(\phi) \right] \quad (3.1)$$

donde el potencial $U(\phi)$ está dado en la figura 3.1. Cuenta con dos mínimos ϕ_- y ϕ_+ , de los cuales este último es un falso vacío por lo que, al igual que en la Mecánica Cuántica, esperamos que, si la configuración inicial del campo es ϕ_+ , exista una cierta probabilidad de que pueda decaer a ϕ_- por tunelamiento. Resulta conveniente añadirle una constante de tal manera que $U(\phi_+) = 0$ y la energía del campo en el falso vacío sea finita [5].

A pesar de esto, la energía del campo en el verdadero vacío es infinita debido a que $U(\phi_-)$ es distinto de cero e integramos sobre todo el espacio [7]. De la misma manera, la barrera de potencial a través de la cual se debe dar el tunelamiento, también es infinita, por lo que el decaimiento del falso vacío solo puede darse en ciertas regiones del espacio. Es por esto que la cantidad físicamente relevante a calcular es la tasa de decaimiento del falso vacío por unidad de volumen Γ/V [6] de la forma

$$\frac{\Gamma}{V} = A e^{-B/\hbar} (1 + O(\hbar)), \quad (3.2)$$

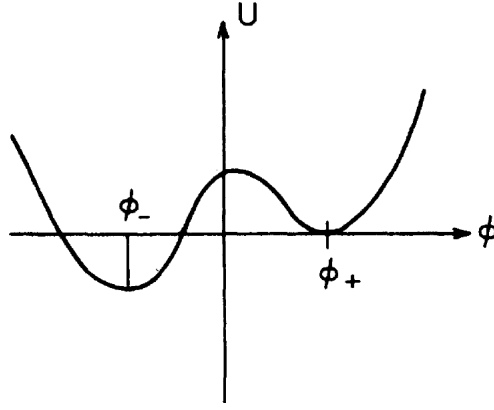


Figura 3.1: Potencial en el que se encuentra el campo escalar dado por la acción (3.1). Notamos que cuenta con un falso vacío en ϕ_+ [4].

donde A y B son coeficientes a determinar mediante la extensión del formalismo desarrollado en el capítulo anterior a la Teoría Cuántica de Campos del campo escalar.

3.2. Bounces en la Teoría Cuántica de Campos

Si bien al momento de calcular Γ/V haremos uso del formalismo desarrollado en el capítulo anterior, previamente debemos plantear el problema clásico correspondiente con sus respectivas condiciones de frontera y encontrar las configuraciones clásicas del campo que no son más que las soluciones a la ecuación de movimiento.

Al aplicar el cambio de variable a tiempo imaginario (2.8) en la acción (3.1) tenemos que $\phi = \phi(\mathbf{x}, \tau)$ ¹ y su acción euclídeana $S_E[\phi(\tau, \mathbf{x})]$ está dada por

$$S_E[\phi(\tau, \mathbf{x})] = \int d\tau d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + U(\phi) \right] \quad (3.3)$$

junto con la ecuación de movimiento correspondiente

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2 \right) \phi = U'(\phi), \quad (3.4)$$

donde la prima indica la derivada respecto a $\phi(\mathbf{x}, \tau)$.

Como estamos interesados en las configuraciones clásicas, debemos establecer las condiciones de frontera adecuadas para la ecuación de movimiento (3.4). Sabemos que la solución no trivial relevante en el decaimiento del falso vacío es el bounce [3]. Es decir, buscamos una

¹A partir de ahora trabajaremos exclusivamente en tiempo euclídeano.

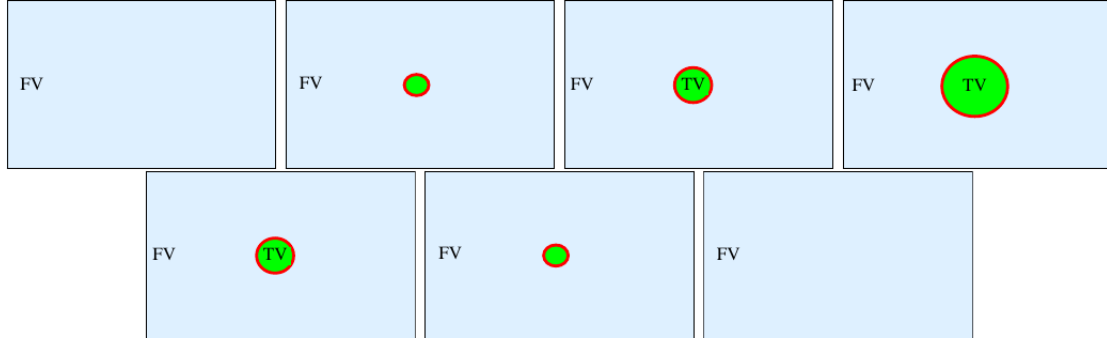


Figura 3.2: Proceso de nucleación de una burbuja de verdadero vacío [10].

configuración que parta de ϕ_+ , atraviese la barrera hasta llegar al punto de retorno y finalmente, regrese de vuelta a ϕ_+ . De esta manera, podemos trasladar todas las consideraciones estudiadas anteriormente en la Mecánica Cuántica a la Teoría Cuántica de Campos del campo escalar.

Tenemos entonces la primera condición de frontera

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \phi(\mathbf{x}, \tau) = \phi_+, \quad (3.5)$$

la cual establece que el campo permanece en el falso vacío durante un tiempo euclideo lo suficientemente largo antes y después de atravesar la barrera. Cabe resaltar que este comportamiento simétrico es debido al hecho de que la acción es invariante ante inversiones temporales. Como hemos establecido la condición de frontera (3.5) para un tiempo euclideo que tiende al infinito, podemos fijar el instante en el que el campo llega al punto de retorno en $\tau = 0$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad (3.6)$$

de tal manera que la energía cinética del campo sea igual a cero una vez que haya cruzado la barrera. Por último, la acción del bounce debe ser finita. Caso contrario, el coeficiente B en la ecuación (3.2), se anularía [13]. Como $U(\phi_+) = 0$,

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \pm\infty} \phi(\mathbf{x}, \tau) = \phi_+, \quad (3.7)$$

el campo se encuentra en el falso vacío a grandes distancias [10].

Analicemos cualitativamente el comportamiento del bounce. Inicialmente, el campo se encuentra en el falso vacío a lo largo de todo el espacio. En un cierto instante de tiempo euclideo y en una cierta región del espacio, el campo decae al verdadero vacío mientras que lejos de este, permanece inafectado. Es decir, aparece una burbuja de verdadero vacío que

empieza a crecer hasta alcanzar su tamaño máximo en $\tau = 0$, a partir del cual se encoge hasta desaparecer, regresando finalmente a la configuración inicial. Todo este proceso se ilustra en la figura (3.2) y es análogo al proceso de nucleación de burbujas de vapor en la Mecánica Estadística [3].

Como es de esperarse, la ecuación de movimiento (3.4) cuenta con una solución trivial que, de acuerdo con la condición de frontera en (3.5), está dada por

$$\phi_{\text{FV}}(\mathbf{x}, \tau) = \phi_+. \quad (3.8)$$

Las ecuación de movimiento (3.4), las condiciones de frontera (3.5) y (3.7) y la interpretación del bounce como una burbuja de verdadero vacío, sugieren asumir que este último cuenta con una simetría $O(4)$, es decir, es invariante ante rotaciones del espaciotiempo euclideo o esféricamente simétrico [6]. Para una gran cantidad de potenciales, esto siempre es posible [14].

Introduzcamos la distancia euclidea

$$\rho^2 \equiv \mathbf{x}^2 + \tau^2 \quad (3.9)$$

de tal manera que, de acuerdo con lo establecido anteriormente, $\phi = \phi(\rho)$. Resulta conveniente renombrar las coordenadas espaciotemporales euclideas como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\tau = x_4$ de tal manera que podemos expresar ρ y la ecuación de movimiento (3.4) de forma compacta como

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \quad (3.10)$$

y

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 \phi(\rho)}{\partial x_i^2} = U'(\phi) \quad (3.11)$$

respectivamente. Con esto, procederemos a desarrollar las derivadas en el lado izquierdo de la ecuación de movimiento (3.11) para obtener la correspondiente a $\phi(\rho)$.

Haciendo uso de la regla de la cadena,

$$\frac{\partial \phi(\rho)}{\partial x_i} = \frac{d\phi}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}. \quad (3.12)$$

donde $i = 1, 2, 3, 4$. Derivemos la ecuación (3.10) respecto a x_i para obtener la derivada de ρ respecto a x_i ,

$$2\rho \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 2x_i \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\rho}. \quad (3.14)$$

Al reemplazarla en la ecuación (3.12),

$$\frac{\partial \phi(\rho)}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho}. \quad (3.15)$$

De igual manera,

$$\frac{\partial^2 \phi(\rho)}{\partial x_i^2} = \frac{x_i}{\rho} \frac{d^2 \phi}{d\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x_i}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) \frac{d\phi}{d\rho} \quad (3.16)$$

$$= \frac{x_i^2}{\rho^2} \frac{d^2 \phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x_i^2}{\rho^2} \right) \frac{d\phi}{d\rho}. \quad (3.17)$$

Por último, al sumar las segundas derivadas y simplificar, obtenemos finalmente la ecuación de movimiento

$$\frac{d^2 \phi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} = U'(\phi). \quad (3.18)$$

Las condiciones de frontera (3.5) y (3.7) se reducen a

$$\lim_{\rho \rightarrow \pm\infty} \phi(\rho) = \phi_+. \quad (3.19)$$

Con la finalidad de evitar que las soluciones cuenten con una singularidad en el origen, requerimos que [3]

$$\left. \frac{d\phi}{d\rho} \right|_0 = 0. \quad (3.20)$$

Podemos interpretar la ecuación de movimiento (3.18) como la de una partícula con “posición” ϕ y “tiempo” ρ moviéndose en el potencial $-U(\phi)$ bajo la acción de una fuerza de fricción cuyo coeficiente de amortiguamiento ² es inversamente proporcional al “tiempo” [6]. Es posible demostrar la existencia de una solución a esta ecuación que satisfaga las condiciones de frontera (3.19) y (3.20) mediante un argumento *overshoot-undershoot* y la continuidad de las condiciones iniciales [3].

3.3. Cálculo de la tasa de decaimiento del falso vacío por unidad de volumen

Habiendo obtenido las configuraciones clásicas relevantes en el decaimiento del falso vacío, procedemos al cálculo de la tasa de decaimiento del falso vacío por unidad de volumen Γ/V .

²Coeficiente de Stokes.

Siguiendo el formalismo de Coleman y Callan, partimos de la amplitud de transición

$$I = \langle \phi_f | e^{-HT/\hbar} | \phi_i \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi(\mathbf{x},\tau)]/\hbar}, \quad (3.21)$$

donde ϕ_i y ϕ_f son las configuraciones inicial y final del campo respectivamente y T es el intervalo de tiempo euclideo. A partir de este obtendremos Γ/V que, de acuerdo con la ecuación (2.22), está relacionado con la amplitud de transición como

$$\frac{\Gamma}{V} = 2 \operatorname{Im} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln I}{T} \right). \quad (3.22)$$

De acuerdo con la condición de frontera (3.5), $\phi_i = \phi_f = \phi_+$.

En la aproximación del punto estacionario, la amplitud de transición a primer orden en \hbar está dada por

$$I = e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \left[\det \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + U''(\phi_{\text{cl}}) \right) \right]^{-1/2} (1 + \mathcal{O}(\hbar)), \quad (3.23)$$

donde ϕ_{cl} es la configuración clásica del campo correspondiente al punto estacionario de la acción euclidea y $S_E^{\text{cl}} = S[\phi_{\text{cl}}(\mathbf{x}, \tau)]$ es su acción euclidea. En caso cuente con múltiples puntos estacionarios, debemos sumar la contribución de cada uno.

Tal como vimos en el capítulo anterior, las configuraciones clásicas a considerar son la trivial, el bounce o burbuja así como las configuraciones que cuenten con múltiples bounces. Nuevamente volveremos a encontrarnos con los mismo problemas al momento de calcular la contribución del bounce a la amplitud de transición, los cuales tendrán que ser tratadas independientemente.

De acuerdo con la ecuación (3.23), la contribución de la configuración trivial ϕ_{FV} a la amplitud de transición I_0 no es más que

$$I_0 = \left[\det \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + \omega^2 \right) \right]^{-1/2}, \quad (3.24)$$

donde $\omega^2 \equiv U''(\phi_+)$. De igual manera, esperaríamos que la contribución del bounce $\phi_B(\mathbf{x}, \tau)$ a la amplitud de transición I_1 este dada por

$$I_1 = e^{-B/\hbar} \left[\det \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + U''(\phi_B) \right) \right]^{-1/2}, \quad (3.25)$$

donde $B = S[\phi_B(\mathbf{x}, \tau)]$ es la acción euclidea del bounce. Sin embargo, sabemos que esta expresión no es la correcta puesto que no todos los autovalores del operador

$$\hat{O} = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + U''(\phi_B) \quad (3.26)$$

son positivos.

Las burbujas de falso vacío pueden aparecer en cualquier región del espacio, es decir, son invariantes ante traslaciones espaciales [3]. Además, aunque fijamos el instante en el que el campo llega al punto de retorno en $\tau = 0$, bien podríamos haberlo hecho en cualquier otro instante de tiempo euclideo. Ambas observaciones indican que el bounce es invariante ante traslaciones espaciotemporales en el espaciotiempo euclideo. Esto significa que, al igual que lo que ocurría con el bounce en la Mecánica Cuántica, el operador \hat{O} cuenta con modos ceros. Nuevamente, esto es un reflejo de la simetría del sistema. En esta ocasión, tendremos cuatro modos ceros

$$\phi_0^i(\mathbf{x}, \tau) = \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{-1/2} \frac{\partial \phi_B}{\partial x_i}, \quad (3.27)$$

donde $i = 1, 2, 3, 4$. Al integrar sobre el centro de la burbuja a lo largo de una cierta región del espaciotiempo euclideo, I_1 adquiere el siguiente factor

$$\left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^2 VT. \quad (3.28)$$

Es posible demostrar que el operador \hat{O} cuenta con único modo negativo [3, 15]. Para solucionar este problema, hacemos la continuación analítica de la integral de camino euclidea (3.23) deformando el contorno de integración a la parte superior del plano complejo. Como resultado, I_1 obtiene un factor de adicional de $i/2$, por lo que la contribución del bounce a la amplitud de transición es en realidad

$$I_1 = e^{-B/\hbar} \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^2 VT \left[\det' \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + U''(\phi_B) \right) \right]^{-1/2}, \quad (3.29)$$

donde la prima en la determinante indica que se ha excluido el autovalor igual a cero.

Por último, consideremos las configuraciones que cuentan con un número arbitrario de n bounces lo suficientemente separados. Siguiendo el análisis realizado en el capítulo anterior, sabemos que, al sumar todas las contribuciones de estas configuraciones, la amplitud de transición (3.23) está dada por

$$I = I_0 \exp \left(iKVT e^{-B/\hbar} \right), \quad (3.30)$$

donde

$$K \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^2 \left[\frac{\det' \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + U''(\phi_B) \right)}{\det \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + \omega^2 \right)} \right]^{-1/2}. \quad (3.31)$$

Finalmente, reemplazando la amplitud de transición (3.30) en la ecuación (3.22), obtenemos la tasa de decaimiento del falso vacío por unidad de volumen Γ/V a primer orden en \hbar

$$\frac{\Gamma}{V} = \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^2 \left[\frac{\det' \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + U''(\phi_B) \right)}{\det \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + \omega^2 \right)} \right]^{-1/2} e^{-B/\hbar} (1 + O(\hbar)). \quad (3.32)$$

3.4. El destino del falso vacío

Analicemos la evolución de una burbuja de verdadero vacío en el espaciotiempo de Minkowski. Al cruzar la barrera de potencial a través de un salto cuántico en $t = 0$, el campo emerge en el punto de retorno en la configuración más probable, es decir,

$$\phi(\mathbf{x}, t = 0) = \phi_B(\mathbf{x}, \tau = 0), \quad (3.33)$$

debido a que el bounce es la configuración que cuenta con la menor acción euclídeana [8]. Además,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}(\mathbf{x}, t = 0) = 0, \quad (3.34)$$

y a partir de este instante, el campo evoluciona de acuerdo con la ecuación de movimiento clásica [4]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 \right) \phi(\mathbf{x}, t) = -U'(\phi(\mathbf{x}, t)). \quad (3.35)$$

Tenemos entonces que en $t = 0$, se materializa una burbuja de verdadero vacío de radio R . Cuando $U(\phi_+) - U(\phi_-)$ es pequeña en comparación con la altura de la barrera de potencial (*thin-wall approximation*), la burbuja está separada del exterior, que aún se encuentra en el falso vacío, por una delgada barrera.

Para obtener $\phi(\mathbf{x}, t)$ hacemos el cambio de variable $\tau = it$ en la ecuación (3.10) para pasar del tiempo euclídeano al del espacio de Minkowski. Definamos

$$r^2 \equiv \mathbf{x}^2 - t^2, \quad (3.36)$$

de tal manera que al hacer la continuación analítica del bounce al campo en el espacio de Minkowski tenemos que este último está dado por

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(r = \sqrt{\mathbf{x}^2 - t^2}) = \phi_B(\rho = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \tau^2}). \quad (3.37)$$

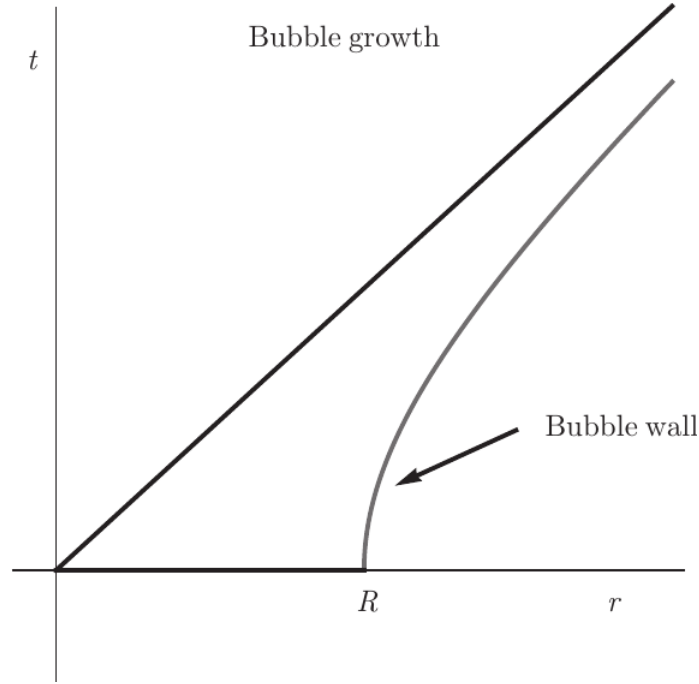


Figura 3.3: Crecimiento de una burbuja de verdadero vacío en el espacio de Minkowski. En la figura $r = |\mathbf{x}|$ [7].

Puesto que r es positivo, esta solución solo está definida fuera del cono de luz. Para obtener la solución dentro del cono de luz habría que resolver la ecuación de movimiento (3.35) [6].

La simetría $O(4)$ del bounce se ha convertido entonces en una simetría $O(3, 1)$. Esto significa que la evolución de la burbuja será la misma para cualquier observador inercial [3]. A medida que la burbuja se expande, su pared traza la hipérboloide

$$\mathbf{x}^2 - t^2 = R^2. \quad (3.38)$$

tal como se puede apreciar en la figura (3.3). Es decir, la burbuja crece a una velocidad que se aproxima a la velocidad de la luz asintóticamente. Si R es microscópico, del orden de 10^{-10} , esto es prácticamente instantáneo de tal manera que si una burbuja se está acercando, no sabremos en qué momento nos golpeó [7]. Dentro de la burbuja solo queda el verdadero vacío inalterado.

Capítulo 4

Conclusiones

Si bien hemos podido calcular la tasa de decaimiento Γ para el decaimiento del falso vacío, quedan varias preguntas conceptuales que no podrán ser abordadas en este trabajo de investigación y que tampoco se discuten a profundidad en la literatura consultada. Por ejemplo, la hermiticidad

Por último, pero no por eso menos importante, el presente trabajo de investigación representa una pequeña contribución a la literatura en español sobre el decaimiento del falso vacío y espero puede ser utilizada como referencia en investigaciones futuras.

Bibliografía

- [1] Gamow, G. (1928). The quantum theory of nuclear disintegration. *Nature*, 122(3082), 805-806.
- [2] Ai, W.-Y. (2019). *Aspects of false vacuum decay* (Tesis doctoral).
- [3] Coleman, S. (1977). Fate of the false vacuum: Semiclassical theory. *Physical Review D*, 15(10), 2929.
- [4] Callan Jr, C. G. & Coleman, S. (1977). Fate of the false vacuum. II. First quantum corrections. *Physical Review D*, 16(6), 1762.
- [5] Andreassen, A., Farhi, D., Frost, W. & Schwartz, M. D. (2017). Precision decay rate calculations in quantum field theory. *Physical Review D*, 95(8), 085011.
- [6] Weinberg, E. J. (2012). *Classical solutions in quantum field theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics*. Cambridge University Press.
- [7] Paranjape, M. (2017). *The theory and applications of instanton calculations*. Cambridge University Press.
- [8] Rubakov, V. (2009). *Classical theory of gauge fields*. Princeton University Press.
- [9] Kleinert, H. (2009). *Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets*. World scientific.
- [10] Masoumi, A. (2013). *Topics in vacuum decay* (Tesis doctoral). arXiv: 1505.06397 [hep-th]
- [11] Feynman, R. P., Hibbs, A. R. & Styer, D. F. (2010). *Quantum mechanics and path integrals*. Courier Corporation.
- [12] Das, A. (2006). *Field Theory: A Path Integral Approach* (2.^a ed.). World Scientific Lecture Notes In Physics. World Scientific Publishing Company.

- [13] Lee, W. & Lee, C. H. (2005). The fate of the false vacuum in Einstein gravity theory with nonminimally-coupled scalar field. *International Journal of Modern Physics D*, 14(06), 1063-1073.
- [14] Coleman, S., Glaser, V. & Martin, A. (1978). Action minima among solutions to a class of Euclidean scalar field equations. *Communications in Mathematical Physics*, 58(2), 211-221.
- [15] Coleman, S. (1988). Quantum tunneling and negative eigenvalues. *Nuclear Physics B*, 298(1), 178-186.