

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú, Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Para optar por el grado académico de Bachiller en Física

# **Decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica y la Teoría Cuántica de Campos**

AUTOR

Erwin Renzo Franco Diaz

ASESOR

Teófilo Vargas Auccalla

Lima, Perú

Julio 2021

# RESUMEN

Clásicamente, es bien sabido que una partícula que se encuentra en un potencial que cuenta con dos mínimos distintos, es estable en cualquiera de estos. Esto deja de ser cierto al considerar una partícula cuántica puesto que existe una cierta probabilidad de que, si se encuentra inicialmente en el mínimo de mayor energía, decaiga al de menor. Es decir, el potencial cuenta con un falso vacío. En el presente trabajo de investigación se realizará un análisis detallado y sistemático del decaimiento del falso vacío en ausencia de la gravedad. Inicialmente, se estudia este fenómeno en la Mecánica Cuántica, estableciendo su relación con el efecto túnel y la aproximación WKB. Haciendo uso de la integral de camino euclídeana y la aproximación del punto estacionario, se obtiene una expresión analítica para la tasa de decaimiento del falso vacío  $\Gamma$  a primer orden en  $\hbar$ . Posteriormente, se generaliza este formalismo para la Teoría Cuántica de Campos del campo escalar. Se demostrará que, en este caso, el decaimiento del falso vacío tiene como resultado la nucleación y evolución de una burbuja de verdadero vacío en el espaciotiempo de Minkowski.

**Palabras claves:** falso vacío, tasa de decaimiento, bounce, burbuja.

# ABSTRACT

Classically, it is well known that a particle in a potential with two different minima, is stable in any of these. This is no longer true for a quantum particle since there is a certain probability that, if it is initially in the minimum with higher energy, decays into the lower. This means that the potential has a false vacuum. The main objective of this work is to develop a detailed and systematic analysis of false vacuum decay in the absence of gravity. At first, this phenomenon is studied in Quantum Mechanics in order to establish its relation with the tunneling effect and the WKB approximation. Using the euclidean path integral and the stationary point approximation, an analytic expression for the false vacuum decay rate  $\Gamma$  is obtained to first order in  $\hbar$ . Then, this formalism is extended to the Quantum Field Theory of the scalar field. It will be demonstrated that, in this case, false vacuum decay results in the nucleation and evolution of a true vacuum bubble in Minkowski spacetime.

**Keywords:** false vacuum, decay rate, bounce, bubble.

# AGRADECIMIENTOS

Primero, agradecer a mis padres por haber confiado en mí y haberme dado la oportunidad de poder estudiar esta maravillosa carrera, puesto que, sin su apoyo incondicional a lo largo de todos estos años, esto no hubiera sido posible.

Agradecer a mi asesor, el profesor Teófilo Vargas Aucalla, por sus enseñanzas tanto en lo académico como en lo personal, así como por su incansable esfuerzo por el desarrollo de la Física Teórica en el Perú. A su vez, también me gustaría agradecer a los profesores Fulgencio Villegas Silva y Jesús Sánchez Flores por las experiencias y enseñanzas compartidas.

Agradecer a todos los compañeros que tuve el agrado de conocer, gracias a quienes las largas y arduas horas de estudio se hicieron más llevaderas. Si bien no pudimos compartir un salón de clases durante el último año, espero podamos reencontrarnos en un futuro no muy lejano.

Por último, pero no por eso menos importante, agradecer a todas las autoridades, profesores y personal administrativo de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, y en especial de la Facultad de Ciencias Físicas que, a pesar de las grandes dificultades con las que se tienen que enfrentar día a día, hacen todo lo posible para brindar una formación de calidad a todos sus alumnos.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Índice general</b>	<b>IV</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Objetivo . . . . .	2
<b>2. Decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica</b>	<b>4</b>
2.1. Tasa de decaimiento del falso vacío . . . . .	4
2.2. Integral de camino euclídeana . . . . .	6
2.3. Aproximación del punto estacionario . . . . .	8
2.4. Bounce . . . . .	11
2.4.1. Modo cero . . . . .	15
2.4.2. Modo negativo . . . . .	17
2.4.3. Trayectorias con múltiples bounces . . . . .	18
<b>3. Decaimiento del falso vacío en la TCC</b>	<b>21</b>
3.1. Tasa de decaimiento del falso vacío por unidad de volumen . . . . .	21
3.2. Bounces en la Teoría Cuántica de Campos . . . . .	22

3.3. Aproximación de la pared delgada . . . . .	25
3.4. Cálculo de la tasa de decaimiento del falso vacío por unidad de volumen . . . .	29
3.5. El destino del falso vacío . . . . .	31
<b>4. Conclusiones</b>	<b>34</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>37</b>

# Índice de figuras

1.1. Potencial con un falso vacío en $x_+$ [13]. . . . .	2
2.1. Potencial para el estudio numérico del decaimiento del falso vacío. Cuenta con una región de falso (FV) y verdadero vacío (R), separados por una barrera (B) [19]. . . . .	5
2.2. Probabilidad de que una partícula permanezca en la región de falso vacío para distintos anchos de verdadero vacío. El eje vertical está en escala logarítmica [19].	6
2.3. Trayectorias clásicas para el decaimiento del falso vacío [14]. . . . .	12
2.4. Potencial invertido correspondiente al de la figura 1.1 [13]. . . . .	13
2.5. Bounce [15]. . . . .	14
2.6. Deformación del contorno de integración al plano complejo [4]. . . . .	18
3.1. Potencial en el que se encuentra el campo escalar dado por la acción (3.1). Notamos que cuenta con un falso vacío en $\phi_+$ [4]. . . . .	22
3.2. Proceso de nucleación de una burbuja de verdadero vacío [19]. . . . .	23
3.3. Potencial $U(\phi)$ en la aproximación de la pared delgada [16]. . . . .	26
3.4. Bounce en la aproximación de la pared delgada. En la figura $r = \rho$ , $\phi_+ = -\varphi_0$ y $\phi_- = \varphi_0$ [17] . . . . .	28
3.5. Crecimiento de las burbujas de verdadero vacío en el espaciotiempo de Minkowski. En la figura, $\varphi_-$ y $\varphi_0$ corresponden al falso y verdadero vacío respectivamente [17]. . . . .	32

*Dedicado a .*



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

Desde su formulación inicial en la década de 1920, se hizo evidente que la Mecánica Cuántica es una teoría radicalmente distinta al resto de la Física conocida hasta ese entonces. Uno de los ejemplos más sorprendentes de esto es el efecto túnel o tunelamiento. Descubierto inicialmente por George Gamow en 1928 para explicar el decaimiento alfa [1], este fenómeno permite a una partícula atravesar una barrera de potencial, a pesar de que no pueda hacerlo clásicamente por no contar con la energía suficiente.

Una consecuencia importante del tunelamiento en la Teoría Cuántica de Campos es el decaimiento del falso vacío, tema a tratar en este trabajo. En este caso, la partícula atraviesa la barrera de potencial para decaer finalmente al estado de mínima energía. El estudio de este fenómeno se inicio con el trabajo de Voloshin et. al. [2], el cual fue extendido y desarrollado en detalle por Coleman y Callan a fines de los años 70 [3, 4]. Posteriormente, Coleman y DeLuccia incluyeron los efectos de la gravedad en su teoría [5] y basándose en esta, Guth propuso un modelo inflacionario del universo que resolvía el enigma de cómo podría haberse expandido extremadamente rápido para luego acercarse a un estado plano [6]. Muchos otros se basaron en este trabajo para encontrar nuevas clases de soluciones al problema, siendo algunos ejemplos notables los de Hawking y Moss [7], Hawking y Turok [8], y Hackworth y Weinberg [9].

El decaimiento del falso vacío encuentra importantes aplicaciones en diversas áreas de la Física, principalmente en la física de altas energías. En la cosmología, cumple un papel esencial

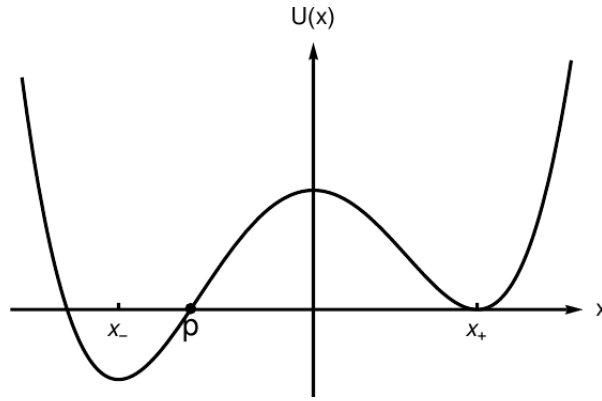


Figura 1.1: Potencial con un falso vacío en  $x_+$  [13].

en diversos modelos de inflación en el Universo temprano [10]. El hecho de que el Universo tenga un tiempo de vida finita, da pie a la posibilidad de que al momento de expandirse y enfriarse, se haya establecido en el falso vacío [3]. Por otro lado, las mediciones más recientes del vacío electrodébil, relacionado con el potencial de Higgs, parecen indicar que este es metaestable antes que estable [11]. A su vez, los últimos cálculos realizados tiempo de vida sugieren que es mayor que la edad del Universo, reforzando el escenario metaestable [12]. Por último, el decaimiento del falso vacío también tiene aplicaciones en la teoría de cuerdas, la física estadística y la física de la materia condensada por ejemplo, en superconductividad [16]

El decaimiento del falso vacío puede verse afectado por efectos gravitacionales. Por ejemplo, los agujeros negros pueden actuar como centros de nucleación incrementando la tasa de decaimiento. De igual manera, puede ser una fuente de ondas gravitacionales y efectos más allá del Modelo Estándar de partículas elementales [13].

## 1.2. Objetivo

Consideremos un potencial como el de la figura 1.1 que posee dos mínimos distintos, uno mayor que otro. Clásicamente, ambos puntos son estables. Sin embargo, esta no es la situación a nivel cuántico. Debido al efecto túnel, existe la posibilidad de que una partícula que se encuentre inicialmente en  $x_+$ , atraviese la barrera al estado de menor energía del sistema. Es por esto que a  $x_+$  se le denomina como falso vacío y a este proceso como decaimiento del falso vacío. A lo largo del trabajo tomaremos la figura 1.1 como nuestro potencial de referencia.

El objetivo principal del presente trabajo de investigación es el cálculo de la tasa de decaimiento del falso vacío  $\Gamma$  a primer orden en  $\hbar$ . Inicialmente se llevará a cabo en la Mecánica Cuántica haciendo uso de la integral de camino euclidea y la aproximación del punto estacionario siguiendo el formalismo planteado originalmente por Coleman y Callan [3, 4]. Posteriormente el mismo será extendido a la Teoría Cuántica de Campos del campo escalar donde además se analizará la formación de las burbujas de verdadero vacío y su evolución espaciotemporal haciendo uso de la aproximación de la pared delgada.

## Capítulo 2

# Decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica

### 2.1. Tasa de decaimiento del falso vacío

Un estado concentrado en la región del falso vacío no puede ser un autoestado de energía, puesto que estos, al no poseer dependencia temporal, no pueden decaer [14]. Podríamos expandirlo en una combinación lineal de estos autoestados, pero es más conveniente considerarlo como un estado fundamental metaestable cuya energía adquiere una parte imaginaria debido al tunelamiento [15, 16, 17].

A diferencia de lo que sucede con los autoestados de energía, la evolución temporal del estado metablestable  $|\psi\rangle$  no consiste únicamente en la adquisición de una fase [18],

$$e^{iE_0t/\hbar} |\psi\rangle = e^{i\text{Re}(E_0)t/\hbar} e^{\text{Im}(E_0)t/\hbar} |\psi\rangle. \quad (2.1)$$

La parte imaginaria de la energía hace que la probabilidad de que una partícula permanezca en la región del falso vacío, relacionada con la norma del estado metaestable, disminuya exponencialmente en el tiempo

$$P_{\text{FV}}(t) \propto e^{-\Gamma t/\hbar} \quad (2.2)$$

lo que nos permite definir la tasa de decaimiento  $\Gamma$  como

$$\Gamma \equiv -2 \text{Im} \left( \frac{E_0}{\hbar} \right). \quad (2.3)$$

Esta definición considera implícitamente que la parte imaginaria de la energía del estado metaestable es negativa, de tal manera que  $\Gamma$  sea positiva. De no ser así, la probabilidad crecería [18].

Podemos entender cualitativamente este comportamiento estudiando numéricamente la evolución temporal de una función de onda concentrada inicialmente en la región del falso vacío de un potencial sencillo como el de la figura 2.1, y calculando la probabilidad de encontrar a la partícula en esta región luego de un tiempo  $t$ . Los resultados de la simulación se presentan en la figura 2.2 para distintos anchos de la región de verdadero vacío [19]. Tal como esperábamos, se observa claramente la dependencia lineal de la probabilidad en escala logarítmica con el tiempo. Notamos además que las tres rectas tienen la misma pendiente, lo cual indica que la forma específica del potencial en la región del verdadero vacío no influye de manera significativa en la dinámica del sistema [16].

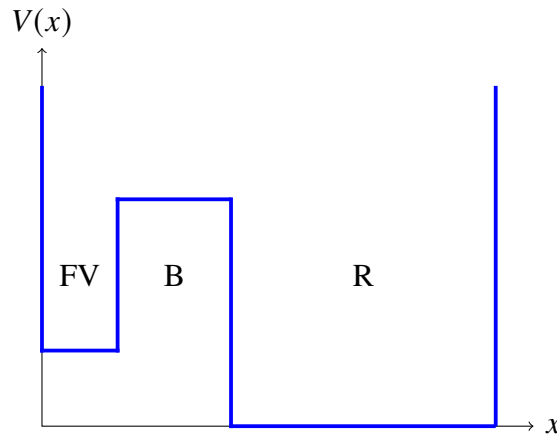


Figura 2.1: Potencial para el estudio numérico del decaimiento del falso vacío. Cuenta con una región de falso (FV) y verdadero vacío (R), separados por una barrera (B) [19].

En la misma figura, sin embargo, puede apreciarse que el régimen lineal se mantiene solo durante un cierto intervalo de tiempo. Antes de atravesar la barrera, la función de onda oscila en la región del falso vacío, mientras que, cuando la función de onda ya atravesó la barrera y se encuentra la región del verdadero vacío, rebota con la pared infinita a la derecha y empieza a interactuar consigo misma, dando como resultado efectos no lineales [19]. Estos aspectos deben ser tomados en cuenta al momento de definir  $\Gamma$  de manera precisa [14].

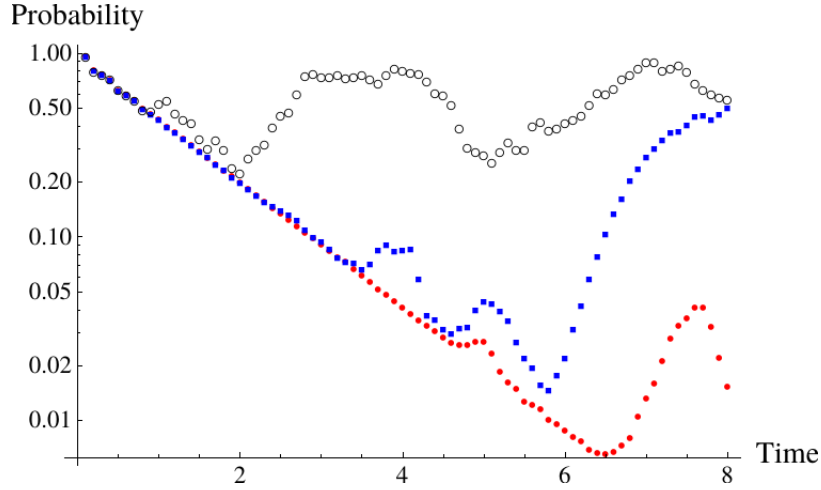


Figura 2.2: Probabilidad de que una partícula permanezca en la región de falso vacío para distintos anchos de verdadero vacío. El eje vertical está en escala logarítmica [19].

Haciendo uso de la aproximación WKB, es posible demostrar que  $\Gamma$  es de la forma [3]

$$\Gamma = Ae^{-B/\hbar}(1 + O(\hbar)), \quad (2.4)$$

donde

$$B = 2 \int_{x_+}^p dx \sqrt{2V(x)}. \quad (2.5)$$

## 2.2. Integral de camino euclideana

Consideremos una partícula que inicialmente se encuentra en la posición  $x_i$  en un tiempo  $t_i$ . La amplitud de transición de esta a una posición final  $x_f$  en un tiempo  $t_f$  está dada por la integral de camino de Feynman <sup>1</sup> [20]

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x e^{iS[x(t)]/\hbar}, \quad (2.6)$$

donde  $S[x(t)]$  es la acción de la partícula que, de la Mecánica Clásica, está dada por <sup>2</sup>

$$S[x(t)] = \int dt \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right]. \quad (2.7)$$

Una de las dificultades al momento de querer calcular (2.6) se debe al hecho de que está compuesta por una suma de fases complejas oscilatorias, que no necesariamente es convergente.

<sup>1</sup>La integral de camino cuenta con una constante de normalización que debe ser elegida adecuadamente. Como no es de interés en este trabajo la asumiremos igual a 1.

<sup>2</sup>A lo largo de todo el trabajo consideraremos que la partícula es de masa unitaria.

Es por esto que resulta más conveniente trabajar en tiempo imaginario, para lo cual introducimos el tiempo euclideo  $\tau$  mediante el cambio de variable

$$t = -i\tau, \quad (2.8)$$

también conocido como rotación de Wick [21].

Realizando el cambio de variable (2.8) en la acción (2.7), tenemos

$$S[x(\tau)] = \int d(-i\tau) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d(-i\tau)} \right)^2 - V(x) \right] \quad (2.9)$$

$$= i \int d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] \quad (2.10)$$

$$= iS_E[x(\tau)] \quad (2.11)$$

donde hemos definido la acción euclidea  $S_E[x(\tau)]$  como

$$S_E[x(\tau)] \equiv \int d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right]. \quad (2.12)$$

De igual manera, su ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dV(x)}{dx}, \quad (2.13)$$

la cual puede ser interpretada como la ecuación de movimiento en tiempo real para una partícula moviéndose en el potencial invertido  $-V(x)$ ,

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{d(-V(x))}{dx}. \quad (2.14)$$

Por último, en la energía,

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \quad (2.15)$$

$$= -\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \quad (2.16)$$

$$= -\mathcal{E} \quad (2.17)$$

donde hemos definido la energía euclidea  $\mathcal{E}$  como [17]

$$\mathcal{E} \equiv \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x). \quad (2.18)$$

Al reemplazar (2.11) en (2.6), obtenemos la integral de camino euclidea [21]

$$I = \langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = \int \mathcal{D}x e^{-S_E[x(\tau)]/\hbar}, \quad (2.19)$$

donde  $T$  es el intervalo de tiempo euclideo que le toma a la partícula ir de  $x_i$  a  $x_f$ . De esta manera, hemos convertido las fases oscilatorias en (2.6) en exponenciales decaientes que podremos calcular de manera aproximada mediante integrales gaussianas, como se verá en la sección siguiente.

Insertamos una base de autoestados de energía  $\{|n\rangle\}$  en (2.19) [3]

$$I = \sum_n e^{-E_n T/\hbar} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle. \quad (2.20)$$

En el límite en el que  $T \rightarrow \infty$ , la contribución de los términos de orden superior es exponencialmente pequeña, lo que nos permite extraer la energía del estado fundamental<sup>3</sup> [14]

$$\frac{E_0}{\hbar} = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln I}{T}. \quad (2.21)$$

Como ya se discutió en la sección anterior, la energía del estado metaestable cuenta con una parte imaginaria, a partir de la cual obtenemos vacío  $\Gamma$  a partir de la ecuación (2.3). A su vez,  $E_0$  está dado por (2.21), por lo que ahora podemos calcular  $\Gamma$  directamente de la integral de camino euclidea (2.19)

$$\Gamma = 2 \operatorname{Im} \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln I}{T} \right). \quad (2.22)$$

## 2.3. Aproximación del punto estacionario

Los casos para los cuales es posible calcular la integral de camino de manera exacta son muy pocos y suelen involucrar técnicas matemáticas sofisticadas [20, 21, 18], por lo que usualmente se tiene que recurrir a métodos aproximados. En nuestro caso, haremos uso de la aproximación del punto estacionario (*saddle point approximation*) para calcular la integral de camino euclidea en (2.22).

Al igual que en el cálculo diferencial, los puntos estacionarios de la acción euclidea  $S_E[x(\tau)]$  son aquellos que cumplen con la condición

$$\frac{\delta S_E[x(\tau)]}{\delta x(\tau)} = 0. \quad (2.23)$$

---

<sup>3</sup>Asumiendo que los autoestados de energía están normalizados.



Esto no es más que el principio de mínima acción de la Mecánica Clásica, por lo que los puntos estacionarios corresponden a las trayectorias clásicas  $x_{cl}(\tau)$ , soluciones de la ecuación de movimiento (2.13). Por simplicidad, supondremos que tenemos un único punto estacionario.

Expandiendo  $S_E[x(\tau)]$  alrededor de la trayectoria clásica  $x_{cl}(\tau)$ ,

$$x(\tau) = x_{cl}(\tau) + \eta(\tau), \quad (2.24)$$

donde  $\eta(\tau)$  es la variación respecto a la trayectoria clásica sujeta a las condiciones de frontera

$$\eta(\tau_i) = \eta(\tau_f) = 0, \quad (2.25)$$

tenemos,

$$S_E[x(\tau)] = S_E[x_{cl}(\tau) + \eta(\tau)] \quad (2.26)$$

$$= S_E[x_{cl}(\tau)] + \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1) \frac{\delta^2 S_E[x_{cl}(\tau)]}{\delta x_{cl}(\tau_1) \delta x_{cl}(\tau_2)} \eta(\tau_2) + O(\eta^3). \quad (2.27)$$

El primer término corresponde a la acción euclídeana clásica  $S_E^{cl}$ . Por conveniencia, definimos la variación de segundo orden como

$$S_E^{(2)} \equiv \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1) \frac{\delta^2 S_E[x_{cl}(\tau)]}{\delta x_{cl}(\tau_1) \delta x_{cl}(\tau_2)} \eta(\tau_2). \quad (2.28)$$

El término lineal se cancela por (2.23).

En comparación con los términos anteriores, el valor de  $\hbar$  es pequeño. Esto nos permite ignorar los términos de orden superior en (2.27). Para verlo más claramente, reemplacemos  $S_E[x(\tau)]$  en (2.19) por (2.27),

$$I = e^{-S_E^{cl}/\hbar} \int \mathcal{D}\eta e^{-S_E^{(2)}/\hbar + O(\eta^3)}, \quad (2.29)$$

donde, al haber fijado el camino clásico, ahora integramos sobre todas sus variaciones, cambiando la medida de integración. Reescalando  $\eta(\tau) \rightarrow \sqrt{\hbar} \eta(\tau)$  <sup>4</sup>,

$$I = e^{-S_E^{cl}/\hbar} \int \mathcal{D}\eta e^{-S_E^{(2)} + O(\hbar)} \quad (2.30)$$

notamos que los términos de orden superior en (2.27) son de primer orden en  $\hbar$ , justificando la aproximación [16]. Esta es la razón por lo que la aproximación del punto estacionario es un

---

<sup>4</sup>La nueva medida de integración incluye un factor constante que absorbemos en  $N$ .

método semiclásico. Será a este orden que calcularemos la tasa de decaimiento del falso vacío  $\Gamma$ .

La derivada funcional de la acción euclideana (2.12) es igual a la ecuación de movimiento (2.13)

$$\frac{\delta S_E[x(\tau)]}{\delta x(\tau_1)} = -\ddot{x}(\tau_1) + V'(\tau_1), \quad (2.31)$$

donde el punto indica la derivada respecto a  $\tau$ , mientras que la prima indica la derivada respecto a  $x(\tau)$ . Tomando la derivada funcional de (2.31) y desarrollando

$$\frac{\delta S_E[x(\tau)]}{\delta x(\tau_1) \delta x(\tau_2)} = -\frac{\delta \ddot{x}(\tau_1)}{\delta x(\tau_2)} + \frac{\delta V'(\tau_1)}{\delta x(\tau_2)} \quad (2.32)$$

$$= -\frac{d^2}{d\tau_1^2} \left( \frac{\delta x(\tau_1)}{\delta x(\tau_2)} \right) + V''(x) \frac{\delta x(\tau_1)}{\delta x(\tau_2)} \quad (2.33)$$

$$= \left( -\frac{d^2}{d\tau_1^2} + V''(x) \right) \delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (2.34)$$

Reemplazando en (2.28),

$$S_E^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1) \left( -\frac{d^2}{d\tau_1^2} + V''(x_{cl}) \right) \delta(\tau_1 - \tau_2) \eta(\tau_2) \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{2} \int d\tau \eta(\tau) \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \eta(\tau), \quad (2.36)$$

notamos que el cálculo de  $S_E^{(2)}$  está íntimamente relacionado con el operador

$$\hat{O} \equiv -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}). \quad (2.37)$$

Introduzcamos una base de autofunciones del operador anterior  $\{\eta_i(\tau)\}$  [17]

$$\left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \eta_\lambda(\tau) = \lambda \eta_\lambda(\tau), \quad (2.38)$$

tal que podemos expandir  $\eta(\tau)$  en función de esta

$$\eta(\tau) = \sum_\lambda c_\lambda \eta_\lambda(\tau). \quad (2.39)$$

Como la base es completa y ortonormal,

$$\int d\tau \eta_{\lambda'}(\tau) \eta_\lambda(\tau) = \delta_{\lambda'\lambda}. \quad (2.40)$$

Insertando (2.39) en (2.36) y usando (2.38) y (2.40),

$$S_E^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau \left( \sum_{\lambda'} c_{\lambda'} \eta_{\lambda'}(\tau) \right) \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \left( \sum_\lambda c_\lambda \eta_\lambda(\tau) \right) \quad (2.41)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda} \lambda c'_{\lambda} c_{\lambda} \int d\tau \eta'_{\lambda}(\tau) \eta_{\lambda}(\tau) \quad (2.42)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda} \lambda c'_{\lambda} c_{\lambda} \delta_{\lambda'\lambda} \quad (2.43)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \lambda c_{\lambda}^2. \quad (2.44)$$

Al momento de reemplazar (2.44) en (2.29), pasamos a integrar sobre todos los coeficientes  $\{c_{\lambda}\}$ , por lo que elegimos como medida de integración

$$\mathcal{D}\eta = \prod_{\lambda} \frac{dc_{\lambda}}{\sqrt{2\pi\hbar}}, \quad (2.45)$$

donde incluimos los factores  $\sqrt{2\pi\hbar}$  por conveniencia. Tomando todo esto en cuenta, (2.29) se reduce a un producto de integrales gaussianas cuyo resultado es conocido y fácil de calcular

$$I \approx e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \int \prod_{\lambda} \frac{dc_{\lambda}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\sum_{\lambda} \lambda c_{\lambda}^2/2\hbar} \quad (2.46)$$

$$= e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \prod_{\lambda} \int \frac{dc_{\lambda}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\lambda c_{\lambda}^2/2\hbar} \quad (2.47)$$

$$= e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \prod_{\lambda} \lambda^{-1/2}. \quad (2.48)$$

El producto de los autovalores en el último término de (2.48) no es más que la determinante de  $\hat{O}$ . Con esto, la amplitud de transición en la aproximación del punto estacionario está dada por

$$I = e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \left[ \det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{\text{cl}}) \right) \right]^{-1/2} (1 + \mathcal{O}(\hbar)). \quad (2.49)$$

Cabe resaltar que esta aproximación es de primer orden en  $\hbar$ . En caso la acción euclídeana cuente con múltiples puntos estacionarios, debemos sumar la contribución de cada uno.

En la derivación anterior hemos supuesto implícitamente que todos los autovalores de  $\hat{O}$  son positivos. De no ser así, (2.49) falla y tendríamos que tratar por separado aquellos autovalores que no cumplan con esta condición, resultando en factores adicionales. Como veremos en las secciones siguientes, este es el caso para el decaimiento del falso vacío.

## 2.4. Bounce

Como se discutió en la sección inicial de este capítulo, la tasa de decaimiento del falso vacío está relacionada con la probabilidad de que una partícula permanezca en la región del

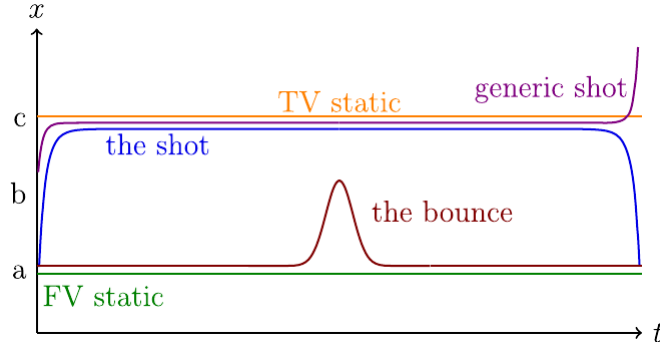


Figura 2.3: Trayectorias clásicas para el decaimiento del falso vacío [14].

falso vacío del potencial. Es por esto que las trayectorias clásicas, necesarias para calcular la amplitud de transición en la aproximación del punto estacionario usando la ecuación (2.49), deben empezar y terminar en dicha región. Es decir,  $x_i = x_f = x_+$ .

Las trayectorias clásicas deben ser entonces las soluciones de la ecuación de movimiento (2.13) con las condiciones de frontera [3]

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} x(\tau) = x_+. \quad (2.50)$$

Las trayectorias clásicas obtenidas no serán las exactas, pero son buenas aproximaciones, especialmente a medida que tomamos intervalos de tiempo euclideo cada vez mayores, que es el límite en el que estamos interesados finalmente [16, 4]. Por conveniencia, tomaremos  $\tau_i = -T/2$  y  $\tau_f = T/2$ , tal que cuando necesitemos considerar el intervalo de tiempo euclideo finito este sea igual a  $T$ .

En la figura 2.3 se encuentran ilustradas las trayectorias clásicas a considerar. La primera es la solución trivial  $x_{\text{FV}}(\tau)$  (*FV static* en la figura 2.3) en la que la partícula permanece en el falso vacío para todo  $\tau$ ,

$$x_{\text{FV}}(\tau) = x_+. \quad (2.51)$$

Como  $V(x_+) = 0$  y la solución es constante,  $S_E[x_{\text{FV}}(\tau)] = 0$  y su contribución a la amplitud de transición  $I_0$  es simplemente

$$I_0 = \left[ \det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \right]^{-1/2}, \quad (2.52)$$

donde hemos definido

$$\omega^2 \equiv V''(x_+). \quad (2.53)$$

De igual manera, su energía euclídeana también es nula.

Analizando el potencial invertido de la figura 2.4 notamos que es posible encontrar trayectorias clásicas no triviales que atraviesen la barrera del potencial original. Consideremos una partícula que inicia su movimiento en  $x_+$ . Como el potencial es plano alrededor de este punto, permanece ahí por un largo tiempo, para luego recorrer rápidamente el pozo de potencial invertido hasta llegar al punto de retorno  $p$  en un tiempo finito. La invarianza de la acción euclídeana ante inversiones temporales nos permite extender esta trayectoria de vuelta a  $x_+$  [15]. Si  $\tau_i = -\infty$  y  $\tau_f = +\infty$ , obtenemos el bounce <sup>5</sup>  $x_B(\tau)$  [3]. Su comportamiento se encuentra ilustrado en las figuras 2.3 y 2.5.

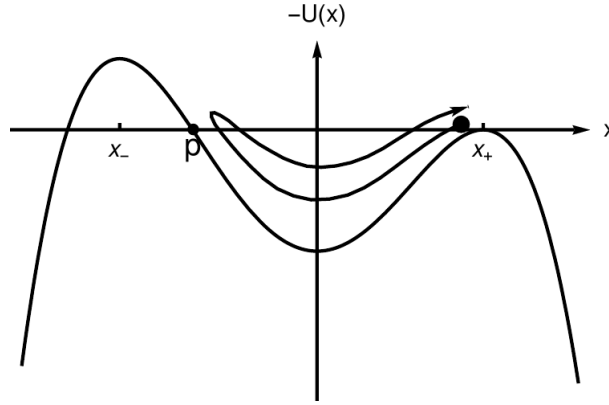


Figura 2.4: Potencial invertido correspondiente al de la figura 1.1 [13].

Aprovechando el hecho de que el bounce es invariante ante translaciones temporales, posicionemos su centro, correspondiente al instante en el que la partícula llega a  $p$ , en  $\tau = 0$  [3]. La partícula se detiene en ese punto, por lo que

$$\left. \frac{dx_B}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (2.54)$$

Como  $V(p) = 0$ , la energía euclídeana del bounce también es nula debido al principio de conservación de la energía. De la definición en (2.18), tenemos que

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 = V(x_B). \quad (2.55)$$

La acción euclídeana del bounce está dada por

$$S_E[x_B(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 + V(x_B) \right]. \quad (2.56)$$

---

<sup>5</sup>Mantendremos el nombre en l idioma original por ser el término comúnmente usado en la literatura.

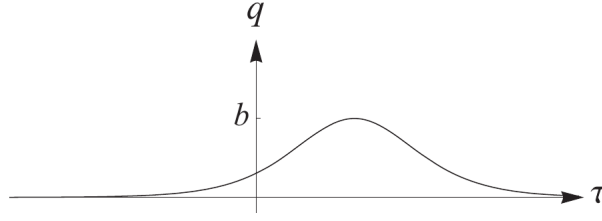


Figura 2.5: Bounce [15].

Si dividimos la integral en  $\tau = 0$ ,

$$S_E[x_B(\tau)] = \int_{-\infty}^0 d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 + V(x_B) \right] + \int_0^{+\infty} d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 + V(x_B) \right]. \quad (2.57)$$

y hacemos  $\tau \rightarrow -\tau$  en la segunda integral, ambos términos son iguales. Esto es una consecuencia directa de la invariancia de la acción euclídeana ante inversiones temporales, relacionada también con la simetría del bounce. Si además usamos la ecuación (2.55), podemos reducir la acción (2.56) a

$$S_E[x_B(\tau)] = 2 \int_{-\infty}^0 d\tau 2V(x_B). \quad (2.58)$$

Por último, realicemos el cambio variable  $\tau \rightarrow x_B$  [17]. Despejando  $dx_B/d\tau$  en la ecuación (2.55),

$$\frac{dx_B}{d\tau} = \sqrt{2V(x_B)} \quad (2.59)$$

$$d\tau = \frac{dx_B}{\sqrt{2V(x_B)}}. \quad (2.60)$$

Reemplazando esta última en la ecuación (2.58) con los límites de integración correspondientes,

$$x_B(-\infty) = x_+, \quad x_B(0) = p, \quad (2.61)$$

obtenemos finalmente

$$S_E[x_B(\tau)] = 2 \int_{x_+}^p dx \sqrt{2V(x)}, \quad (2.62)$$

donde hemos omitido el subíndice al ya no ser necesario. Notamos que la acción euclídeana del bounce es igual al coeficiente  $B$  en la ecuación (2.5),

$$B = S_E[x_B(\tau)]. \quad (2.63)$$

Al momento de calcular la contribución del bounce a la amplitud de transición, no podemos hacer uso de la fórmula en (2.49) directamente debido a que, en este caso,  $\hat{O}$  cuenta con autovalores que no son positivos. En las secciones a continuación, se discutirán las complicaciones que esto conlleva y cómo solucionarlas.

### 2.4.1. Modo cero

Por construcción, el bounce es una solución de la ecuación de movimiento (2.13),

$$\frac{d^2 x_B}{d\tau^2} - V'(x_B) = 0. \quad (2.64)$$

Al derivar la ecuación anterior respecto a  $\tau$ ,

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{d^2 x_B}{d\tau^2} - V'(x_B) \right) = 0 \quad (2.65)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \left( \frac{dx_B}{d\tau} \right) - V''(x_B) \frac{dx_B}{d\tau} = 0 \quad (2.66)$$

$$\left( \frac{d^2}{d\tau^2} - V''(x_B) \right) \frac{dx_B}{d\tau} = 0, \quad (2.67)$$

se muestra claramente que  $\hat{O}$  cuenta con un autovector cuyo autovalor es igual a cero. Por esta razón decimos que  $\hat{O}$  cuenta con un modo cero.

Los autovalores de  $\hat{O}$  deben estar están normalizados. De (2.56) y usando (2.55), tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left( \frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 = B, \quad (2.68)$$

de tal manera que el modo cero  $x_0(\tau)$ , proporcional a  $dx_B/d\tau$ , está dado por

$$x_0(\tau) = B^{-1/2} \frac{dx_B}{d\tau}. \quad (2.69)$$

Como ya se ha comentado anteriormente, el modo cero representa un problema al momento de calcular la contribución del bounce a la amplitud de transición. Para verlo explícitamente, retornemos a la ecuación (2.48), en la que expresamos la amplitud de transición como un producto de integrales gaussianas, y separemos la integral respecto al coeficiente  $c_0$  correspondiente al modo cero,

$$\int \frac{dc_0}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (2.70)$$

Puesto que  $\lambda = 0$ , hemos perdido el amortiguamiento exponencial relacionado con  $c_0$  por lo que (2.70), es divergente.

La existencia de un modo cero está siempre relacionada con una simetría del sistema [21]. En este caso, es debido a la simetría de la acción euclidea ante traslaciones temporales [4]. Si bien, por conveniencia, fijamos el centro del bounce en  $\tau = 0$ , bien podríamos haberlo hecho en cualquier otro instante de tiempo euclideo. Esto significa que existe un conjunto de bounces,

cuyos centros están localizados a lo largo de todo el intervalo de tiempo euclideo, que también son soluciones de la ecuación de movimiento y por lo tanto, también contribuyen a la amplitud de transición. Este es el origen de la divergencia [18].

Analíticamente, una traslación temporal es equivalente a realizar la siguiente transformación,

$$x_B(\tau - \tau_0) = e^{-\tau_0 \frac{d}{d\tau}} x_B(\tau). \quad (2.71)$$

Al efectuar esta transformación, desplazamos al bounce de tal manera que su centro se encuentra ahora en  $\tau_0$ . Como se discutió anteriormente,  $x_B(\tau - \tau_0)$  también es solución de la ecuación de movimiento (2.13),

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x_B(\tau - \tau_0) - V'(x_B(\tau - \tau_0)) = 0. \quad (2.72)$$

Consideremos una transformación infinitesimal,

$$x_B(\tau - \delta\tau_0) \approx x_B(\tau) - \frac{dx_B}{d\tau} \delta\tau_0, \quad (2.73)$$

en (2.72),

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \left( x_B(\tau) - \frac{dx_B}{d\tau} \delta\tau_0 \right) - V' \left( x_B(\tau) - \frac{dx_B}{d\tau} \delta\tau_0 \right) = 0. \quad (2.74)$$

Expandiendo el segundo término a primer orden en  $\tau_0$  y reordenando,

$$\left( \frac{d^2 x_B(\tau)}{d\tau^2} - V'(x_B) \right) - \left( \frac{d^2}{d\tau^2} - V''(x_B) \right) \frac{dx_B}{d\tau} \delta\tau_0 = 0. \quad (2.75)$$

El primer término se anula debido a que el bounce es solución de la ecuación de movimiento, por lo que obtenemos nuevamente el resultado en la ecuación (2.67),

$$\left( \frac{d^2}{d\tau^2} - V''(x_B) \right) \frac{dx_B}{d\tau} = 0. \quad (2.76)$$

Con esto, hemos demostrado la existencia del modo cero a partir de la simetría del sistema ante traslaciones temporales.

Veamos ahora cómo solucionar el problema de la divergencia en el cálculo de la contribución del bounce a la amplitud de transición. Para esto es necesario reemplazar  $c_0$  por una coordenada colectiva relacionada con la simetría correspondiente del sistema. En nuestro caso, debemos hacer uso de  $\tau_0$  [15, 16].

Consideremos la expansión de la trayectoria  $x(\tau)$  alrededor del bounce

$$x(\tau) = x_B(\tau) + c_0 B^{-1/2} \frac{dx_B}{d\tau} + \sum_{\lambda \neq 0} c_\lambda \eta_\lambda(\tau). \quad (2.77)$$



La variación de la trayectoria debido a un cambio infinitesimal en  $c_0$  está dado por

$$B^{-1/2} \frac{dx_B}{d\tau} \delta c_0. \quad (2.78)$$

Comparando (2.78) con (2.73), notamos que el primero es equivalente a la variación de la trayectoria debido a un desplazamiento infinitesimal del centro del bounce  $\delta\tau_0$  igual a

$$\delta\tau_0 = -B^{-1/2} \delta c_0. \quad (2.79)$$

Tenemos entonces que, al realizar el cambio de variable de  $c_0$  a  $\tau_0$  a primer orden en  $\hbar$ , la contribución del bounce a la amplitud de transición  $I_1$  adquiere un factor adicional de  $B^{1/2}$  <sup>6</sup> [21, 18].

Con esto, e integrando sobre el intervalo de tiempo euclideo finito  $\tau_0 \in [-T/2, T/2]$ ,

$$I_1 = e^{-B/\hbar} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau_0 \left( \frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \prod_{\lambda \neq 0} \int \frac{dc_\lambda}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\lambda c_\lambda^2/2\hbar} \quad (2.80)$$

$$= \left( \frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} T e^{-B/\hbar} \prod_{\lambda \neq 0} \int \frac{dc_\lambda}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\lambda c_\lambda^2/2\hbar}, \quad (2.81)$$

hemos resuelto el problema de la divergencia relacionada a la existencia del modo cero. Sin embargo, aún no podemos terminar con el cálculo debido a que existe otra fuente de divergencia aún más grave:  $\hat{O}$  cuenta con un autovalor negativo en su espectro, el cual se discutirá en la sección a continuación.

### 2.4.2. Modo negativo

Al analizar la forma de la ecuación (2.38),

$$\left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \eta_\lambda(\tau) = \lambda \eta_\lambda(\tau), \quad (2.82)$$

notamos inmediatamente su similaridad con la ecuación de Schrödinger. Como el modo cero es proporcional a  $dx_B(\tau)/d\tau$ , de acuerdo con la ecuación (2.54), posee un nodo en  $\tau = 0$  por lo que no puede ser el autoestado de menor autovalor. Esto implica la existencia de un único autovector sin nodos cuyo autovalor es negativo. Por esta razón, decimos que  $\hat{O}$  cuenta con un único modo negativo además del modo cero ya estudiado [4]. Tal como sucedía con este último,

---

<sup>6</sup>Una derivación detallada de este resultado requiere el uso del truco de Faddeev-Popov [18, 17, 14].

la integral respecto al coeficiente  $c_{-1}$  en la ecuación (2.48), correspondiente al modo negativo,

$$\int \frac{dc_{-1}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{|\lambda_{-1}|c_{-1}^2/2\hbar}, \quad (2.83)$$

también es divergente.

El hamiltoniano es un operador hermítico cuyos autovalores son todos reales, mientras que la energía del estado metaestable cuenta con una parte imaginaria, por lo que claramente no pertenece al espectro del hamiltoniano [16]. Este es el origen de la divergencia en (2.83). Para solucionar este problema es necesario definir la amplitud de transición mediante continuación analítica. Siguiendo el trabajo de Callan y Coleman [4], se deforma el contorno de integración a lo largo del plano complejo tal como se muestra en la figura 2.6 <sup>7</sup>, por lo que la contribución del bounce a la amplitud de transición está dada por

$$I_1 = \frac{i}{2} \left( \frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[ \det' \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_B) \right) \right]^{-1/2} T e^{-B/\hbar} \quad (2.84)$$

donde la prima en la determinante indica que se ha excluido el autovalor igual a cero.

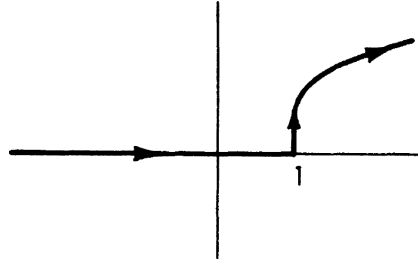


Figura 2.6: Deformación del contorno de integración al plano complejo [4].

### 2.4.3. Trayectorias con múltiples bounces

Como vimos en la sección 2.4.1, el bounce no es único y existen otras trayectorias clásicas que también contribuyen a la amplitud de transición. De igual manera, debemos considerar la contribución de aquellas trayectorias que cuenten con un número arbitrario de bounces consecutivos lo suficientemente separados, aunque no sean soluciones exactas de la ecuación de movimiento [15].

Por comodidad, reescribamos  $I_1$  en función de  $I_0$ ,

$$I_1 = iKT e^{-B/\hbar} I_0 \quad (2.85)$$

<sup>7</sup>Una discusión detallada de la continuación analítica puede encontrarse en [14, 16]

donde hemos definido

$$K \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[ \frac{\det' \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_B) \right)}{\det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right]^{-1/2}. \quad (2.86)$$

por comodidad. De esta forma la elección de los subíndices queda justificada puesto que indican el número de bounces con los que cuenta una trayectoria dada.

Generalizando (2.85), tenemos que la contribución de una trayectoria que cuenta con  $n$  bounces a la amplitud de transición  $I_n$  está dada por

$$I_n = \frac{(iKT e^{-B/\hbar})^n}{n!} I_0 \quad (2.87)$$

donde incluimos el factor de  $n!$  debido a que los bounces son equivalentes y por lo tanto intercambiables entre sí.

Con esto, solo nos queda sumar cada una de las contribuciones a la amplitud de transición,

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \quad (2.88)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iKT e^{-B/\hbar})^n}{n!} I_0 \quad (2.89)$$

$$= I_0 \exp(iKT e^{-B/\hbar}) \quad (2.90)$$

y reemplazarlo en la ecuación (2.22)

$$\Gamma = 2 \operatorname{Im} \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( I_0 \exp(iKT e^{-B/\hbar}) \right)}{T} \right) \quad (2.91)$$

$$= 2 \operatorname{Im} \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln I_0}{T} + iK e^{-B/\hbar} \right) \right) \quad (2.92)$$

$$= 2K e^{-B/\hbar}, \quad (2.93)$$

de donde obtenemos finalmente que la tasa de decaimiento del falso vacío a primer orden en  $\hbar$  está dada por

$$\Gamma = \left( \frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[ \frac{\det' \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_B) \right)}{\det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right]^{-1/2} e^{-B/\hbar} (1 + O(\hbar)). \quad (2.94)$$

Notamos que la expresión anterior es de la forma dada en la ecuación (2.4), tal como esperábamos. Contamos ahora con una expresión analítica para la constante  $A$  que, junto con la exponencial, representan el carácter no perturbativo del decaimiento del falso vacío [15].

Habiendo desarrollado el formalismo introducido por Coleman [3] para estudiar el decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica, se procederá a extenderlo a la Teoría Cuántica de Campos del campo escalar en el siguiente capítulo.

## Capítulo 3

# Decaimiento del falso vacío en la Teoría Cuántica de Campos

### 3.1. Tasa de decaimiento del falso vacío por unidad de volumen

Consideremos el campo escalar  $\phi(x)$  cuya acción  $S[\phi(x)]$  está dada por

$$S[\phi(x)] = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - U(\phi) \right] \quad (3.1)$$

donde el potencial  $U(\phi)$  está dado en la figura 3.1. Cuenta con dos mínimos  $\phi_-$  y  $\phi_+$ , de los cuales este último es un falso vacío por lo que, al igual que en la Mecánica Cuántica, esperamos que, si la configuración inicial del campo es  $\phi_+$ , exista una cierta probabilidad de que pueda decaer a  $\phi_-$  por tunelamiento. Resulta conveniente añadirle una constante de tal manera que  $U(\phi_+) = 0$  y la energía del campo en el falso vacío sea finita [14].

A pesar de esto, la energía del campo en el verdadero vacío es infinita debido a que  $U(\phi_-)$  es distinto de cero e integramos sobre todo el espacio [16]. De la misma manera, la barrera de potencial a través de la cual se debe dar el tunelamiento, también es infinita, por lo que el decaimiento del falso vacío solo puede darse en ciertas regiones del espacio. Es por esto que la cantidad físicamente relevante a calcular es la tasa de decaimiento del falso vacío por unidad de volumen  $\Gamma/V$  [15] de la forma

$$\frac{\Gamma}{V} = A e^{-B/\hbar} (1 + O(\hbar)), \quad (3.2)$$

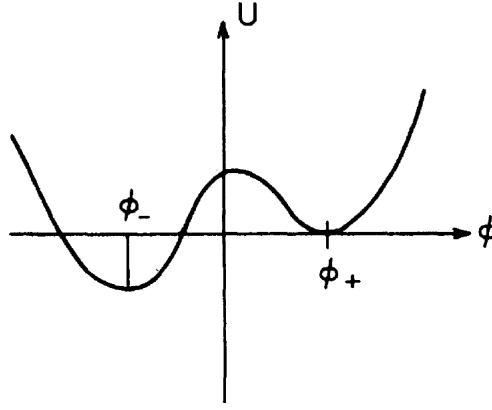


Figura 3.1: Potencial en el que se encuentra el campo escalar dado por la acción (3.1). Notamos que cuenta con un falso vacío en  $\phi_+$  [4].

donde  $A$  y  $B$  son coeficientes a determinar mediante la extensión del formalismo desarrollado en el capítulo anterior a la Teoría Cuántica de Campos del campo escalar.

### 3.2. Bounces en la Teoría Cuántica de Campos

Si bien al momento de calcular  $\Gamma/V$  haremos uso del formalismo desarrollado en el capítulo anterior, previamente debemos plantear el problema clásico correspondiente con sus respectivas condiciones de frontera y encontrar las configuraciones clásicas del campo que no son más que las soluciones a la ecuación de movimiento.

Al aplicar el cambio de variable a tiempo imaginario (2.8) en la acción (3.1) tenemos que  $\phi = \phi(\mathbf{x}, \tau)$ <sup>1</sup> y su acción euclídeana  $S_E[\phi(\tau, \mathbf{x})]$  está dada por

$$S_E[\phi(\mathbf{x}, \tau)] = \int d\tau d^3x \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + U(\phi) \right] \quad (3.3)$$

junto con la ecuación de movimiento correspondiente

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2 \right) \phi = U'(\phi), \quad (3.4)$$

donde la prima indica la derivada respecto a  $\phi(\mathbf{x}, \tau)$ .

Como estamos interesados en las configuraciones clásicas, debemos establecer las condiciones de frontera adecuadas para la ecuación de movimiento (3.4). Sabemos que la solución no trivial relevante en el decaimiento del falso vacío es el bounce [3]. Es decir, buscamos una

<sup>1</sup>A partir de ahora trabajaremos exclusivamente en tiempo euclídeano.

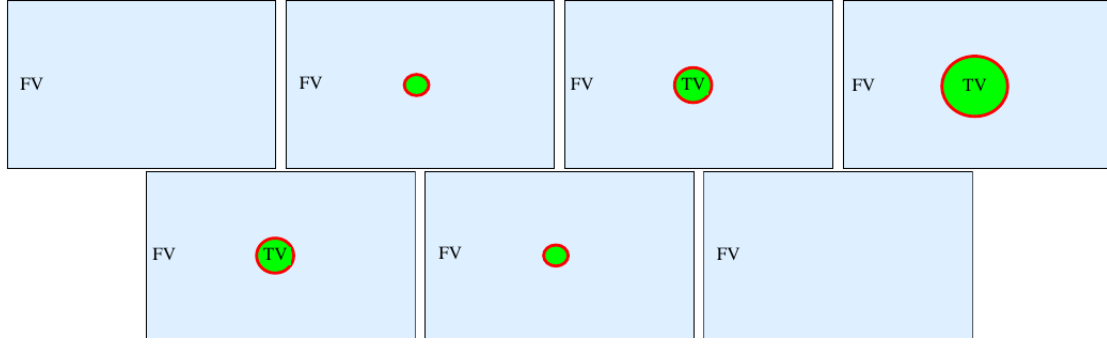


Figura 3.2: Proceso de nucleación de una burbuja de verdadero vacío [19].

configuración que parta de  $\phi_+$ , atraviese la barrera hasta llegar al punto de retorno y finalmente, regrese de vuelta a  $\phi_+$ . De esta manera, podemos trasladar todas las consideraciones estudiadas anteriormente en la Mecánica Cuántica a la Teoría Cuántica de Campos del campo escalar.

Tenemos entonces la primera condición de frontera

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \phi(\mathbf{x}, \tau) = \phi_+, \quad (3.5)$$

la cual establece que el campo permanece en el falso vacío durante un tiempo euclideo lo suficientemente largo antes y después de atravesar la barrera. Cabe resaltar que este comportamiento simétrico es debido al hecho de que la acción es invariante ante inversiones temporales. Como hemos establecido la condición de frontera (3.5) para un tiempo euclideo que tiende al infinito, podemos fijar el instante en el que el campo llega al punto de retorno en  $\tau = 0$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad (3.6)$$

de tal manera que la energía cinética del campo sea igual a cero una vez que haya cruzado la barrera. Por último, la acción del bounce debe ser finita. Caso contrario, el coeficiente  $B$  en la ecuación (3.2), se anularía [22]. Como  $U(\phi_+) = 0$ ,

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \pm\infty} \phi(\mathbf{x}, \tau) = \phi_+, \quad (3.7)$$

el campo se encuentra en el falso vacío a grandes distancias [19].

Analicemos cualitativamente el comportamiento del bounce. Inicialmente, el campo se encuentra en el falso vacío a lo largo de todo el espacio. En un cierto instante de tiempo euclideo y en una cierta región del espacio, el campo decae al verdadero vacío mientras que lejos de este, permanece inafectado. Es decir, aparece una burbuja de verdadero vacío que

empieza a crecer hasta alcanzar su tamaño máximo en  $\tau = 0$ , a partir del cual se encoge hasta desaparecer, regresando finalmente a la configuración inicial. Todo este proceso se ilustra en la figura (3.2) y es análogo al proceso de nucleación de burbujas de vapor en la Mecánica Estadística [3].

Como es de esperarse, la ecuación de movimiento (3.4) cuenta con una solución trivial que, de acuerdo con la condición de frontera en (3.5), está dada por

$$\phi_{\text{FV}}(\mathbf{x}, \tau) = \phi_+. \quad (3.8)$$

Las ecuación de movimiento (3.4), las condiciones de frontera (3.5) y (3.7) y la interpretación del bounce como una burbuja de verdadero vacío, sugieren asumir que este último cuenta con una simetría  $O(4)$ , es decir, es invariante ante rotaciones del espaciotiempo euclideo o esféricamente simétrico [15]. Para una gran cantidad de potenciales, esto siempre es posible [23].

Introduzcamos la distancia euclidea

$$\rho^2 \equiv \mathbf{x}^2 + \tau^2 \quad (3.9)$$

de tal manera que, de acuerdo con lo establecido anteriormente,  $\phi = \phi(\rho = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \tau^2})$ . Resulta conveniente renombrar las coordenadas espaciotemporales euclideas como  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  y  $\tau = x_4$  de tal manera que podemos expresar  $\rho$  y la ecuación de movimiento (3.4) de forma compacta como

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \quad (3.10)$$

y

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 \phi(\rho)}{\partial x_i^2} = U'(\phi) \quad (3.11)$$

respectivamente. Con esto, procederemos a desarrollar las derivadas en el lado izquierdo de la ecuación de movimiento (3.11) para obtener la correspondiente a  $\phi(\rho)$ .

Haciendo uso de la regla de la cadena,

$$\frac{\partial \phi(\rho)}{\partial x_i} = \frac{d\phi}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}. \quad (3.12)$$

donde  $i = 1, 2, 3, 4$ . Derivemos la ecuación (3.10) respecto a  $x_i$  para obtener la derivada de  $\rho$  respecto a  $x_i$ ,

$$2\rho \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 2x_i \quad (3.13)$$



$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\rho}. \quad (3.14)$$

Al reemplazarla en la ecuación (3.12),

$$\frac{\partial \phi(\rho)}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho}. \quad (3.15)$$

De igual manera,

$$\frac{\partial^2 \phi(\rho)}{\partial x_i^2} = \frac{x_i}{\rho} \frac{d^2 \phi}{d\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \left( \frac{1}{\rho} - \frac{x_i}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) \frac{d\phi}{d\rho} \quad (3.16)$$

$$= \frac{x_i^2}{\rho^2} \frac{d^2 \phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{x_i^2}{\rho^2} \right) \frac{d\phi}{d\rho}. \quad (3.17)$$

Por último, al sumar las segundas derivadas y simplificar, obtenemos finalmente la ecuación de movimiento

$$\frac{d^2 \phi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} = U'(\phi). \quad (3.18)$$

Las condiciones de frontera (3.5) y (3.7) se reducen a

$$\lim_{\rho \rightarrow \pm\infty} \phi(\rho) = \phi_+. \quad (3.19)$$

Con la finalidad de evitar que las soluciones cuenten con una singularidad en el origen, requerimos que [3]

$$\left. \frac{d\phi}{d\rho} \right|_0 = 0. \quad (3.20)$$

Podemos interpretar la ecuación de movimiento (3.18) como la de una partícula con “posición”  $\phi$  y “tiempo”  $\rho$  moviéndose en el potencial invertido  $-U(\phi)$  bajo la acción de una fuerza de fricción cuyo coeficiente de amortiguamiento <sup>2</sup> es inversamente proporcional al “tiempo” [15]. Es posible demostrar la existencia de una solución a esta ecuación que satisfaga las condiciones de frontera (3.19) y (3.20) mediante un argumento *overshoot-undershoot* y la continuidad de las condiciones iniciales [3].

### 3.3. Aproximación de la pared delgada

Podemos continuar con el análisis del bounce bajo la suposición de que

$$\epsilon \equiv U(\phi_+) - U(\phi_-) \quad (3.21)$$

---

<sup>2</sup>Coeficiente de Stokes.

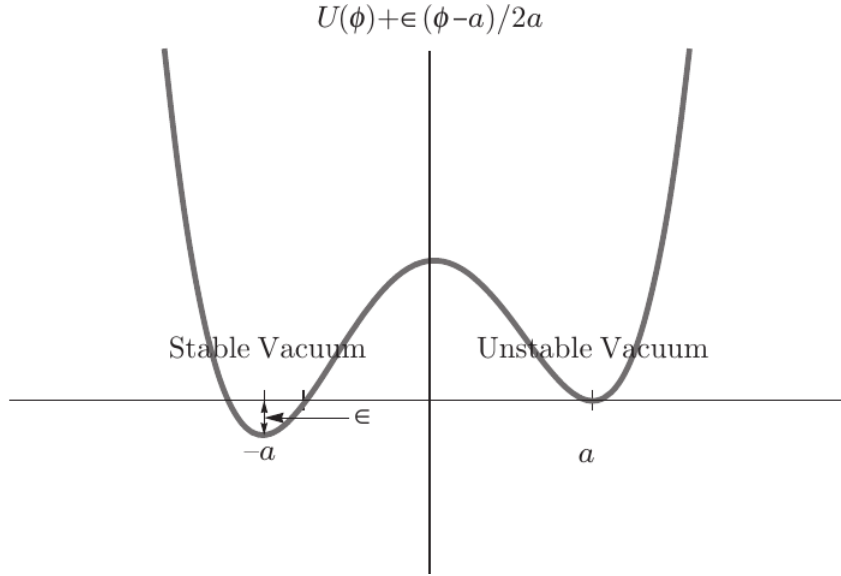


Figura 3.3: Potencial  $U(\phi)$  en la aproximación de la pared delgada [16].

es pequeño en comparación con la altura de la barrera del potencial. A este régimen se le denomina como la aproximación de la pared delgada (*thin-wall approximation*) debido a que, como veremos más adelante, la burbuja está separada del exterior, que aún se encuentra en el falso vacío, por una pared delgada.

Consideremos el potencial

$$U(\phi) = U_0(\phi) + \frac{\epsilon}{2a}(\phi - a), \quad (3.22)$$

donde  $U_0(\phi)$  es un potencial simétrico que cuenta con dos mínimos iguales en  $\phi(\rho) = \pm a$  tal que

$$U_0(-\phi) = U_0(\phi) \quad (3.23)$$

$$U_0(\pm a) = 0 \quad (3.24)$$

$$U'_0(\pm a) = 0 \quad (3.25)$$

$$U''_0(\pm a) = \omega^2, \quad (3.26)$$

como se muestra en la figura 3.3. En este caso,  $\phi_+ = -a$  y  $\phi_- = a$ .

Reemplazando (3.22) en la ecuación de movimiento (3.18),

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} = U'_0(\phi) + \frac{\epsilon}{2a}. \quad (3.27)$$

Despreciamos el último término por ser de orden  $\epsilon$ .

Analizando la ecuación (3.27) en términos de una partícula moviéndose en el potencial invertido  $-U'_0(\phi)$ , tenemos que, como la diferencia entre ambos mínimos es tan pequeña, es posible que una partícula que empieza su movimiento en  $a$ , no cuente con la suficiente “energía” para llegar a  $-a$  debido a la fuerza de fricción [19]. Es por esto que, antes de cruzar la barrera para llegar a  $-a$ , la partícula debe permanecer cerca a  $a$  durante un tiempo  $\rho \approx R$  lo suficientemente grande, de tal manera que el término de fricción se vuelva despreciable [15]. La ecuación (3.27) se reduce entonces,

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} = U'_0(\phi). \quad (3.28)$$

Notamos que la ecuación (3.28) es de la misma forma que la ecuación de movimiento (2.13), por lo que podemos hacer uso del hecho de que

$$\left(\frac{d\phi}{d\rho}\right)^2 - U_0(\phi) = 0 \quad (3.29)$$

para obtener la solución

$$\rho - R = \int_0^{\phi_I(\rho)} \frac{d\phi}{\sqrt{U_0(\phi)}} \quad (3.30)$$

conocida como instanton. A diferencia del bounce, el campo se encuentra en el verdadero vacío cerca al origen. Tenemos entonces que, de acuerdo con las condiciones de frontera y la discusión realizada anteriormente, el bounce en la aproximación de la pared delgada está dado por

$$\phi_B(\rho) = \begin{cases} -a & 0 < \rho \ll R \\ \phi_I(\rho) & \rho \approx R \\ a & \rho \gg R \end{cases}. \quad (3.31)$$

donde  $R$  es el radio de la burbuja.

Como ejemplo explícito consideremos

$$U_0(\phi) = \frac{\lambda}{8}(\phi^2 - a^2), \quad (3.32)$$

de tal manera que la solución a la ecuación (3.28) está dada por

$$\phi_{TW}(\rho) = a \tanh\left(\frac{\omega}{2}(\rho - R)\right) \quad (3.33)$$

donde  $\omega^2 = \lambda^2 a^2$  [21]. En la figura, podemos apreciar que  $\phi_{TW}(\rho)$  presenta el comportamiento esperado, es decir, el campo se encuentra en el verdadero vacío cerca al origen hasta llegar a

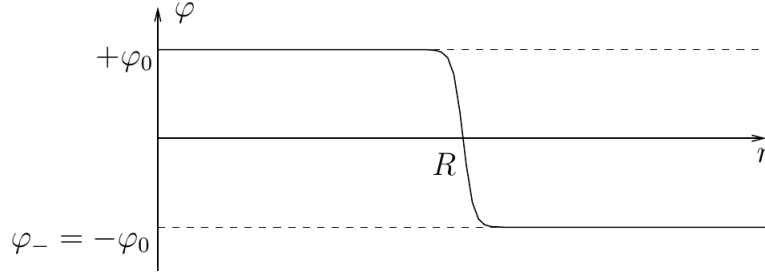


Figura 3.4: Bounce en la aproximación de la pared delgada. En la figura  $r = \rho$ ,  $\phi_+ = -\varphi_0$  y  $\phi_- = \varphi_0$  [17]

$\rho \approx R$  donde ocurre la transición al falso vacío. Esta región es una pared delgada que separa a la burbuja del exterior.

La acción euclideana del bounce está dada por [17]

$$S_E[\phi_B(\rho)] = 2\pi^2 \int_0^{+\infty} d\rho \rho^3 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_B}{\partial \rho} \right)^2 + U(\phi_B) \right]. \quad (3.34)$$

En la aproximación de la pared delgada,

$$S_E[\phi_B(\rho)] = 2\pi^2 \left( \int_0^{R-\Delta R/2} d\rho \rho^3 U(-a) + \int_{R-\Delta R/2}^{R+\Delta R/2} d\rho \rho^3 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_I}{\partial \rho} \right)^2 + U(\phi_I) \right] \right) \quad (3.35)$$

$$+ \int_{R+\Delta R/2}^{+\infty} d\rho \rho^3 U(a) \quad (3.36)$$

donde  $\Delta R$  es el ancho de la pared tal que  $R \gg \Delta R$ .

Calculamos cada integral por separado. Como  $U(-a) = -\epsilon$ ,

$$\int_0^{R-\Delta R/2} d\rho \rho^3 U(-a) \approx -\frac{1}{4} R^4 \epsilon, \quad (3.37)$$

donde ignoramos los términos del orden  $\Delta R$ , mientras que la última integral se anula debido a que  $U(a) = 0$ . En la segunda integral,  $\rho \approx R$  por lo que

$$\int_{R-\Delta R/2}^{R+\Delta R/2} d\rho \rho^3 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_I}{\partial \rho} \right)^2 + U(\phi_I) \right] \approx R^3 \int_{R-\Delta R/2}^{R+\Delta R/2} d\rho \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_I}{\partial \rho} \right)^2 + U(\phi_I) \right] \quad (3.38)$$

La integral del potencial  $U(\phi_I)$  se reduce a

$$\int_{R-\Delta R/2}^{R+\Delta R/2} d\rho U(\phi_I) = \int_{R-\Delta R/2}^{R+\Delta R/2} d\rho U_0(\phi) + \frac{\epsilon}{2a} \left( \int_{R-\Delta R/2}^{R+\Delta R/2} d\rho \phi(\rho) - \int_{R-\Delta R/2}^{R+\Delta R/2} d\rho \right) \quad (3.39)$$

$$\approx \int_{R-\Delta R/2}^{R+\Delta R/2} d\rho U_0(\phi) \quad (3.40)$$

donde la segunda integral se anula debido a que  $\phi_I(\rho)$  es antisimétrica, como se puede apreciar en la figura 3.4, mientras que la última se desprecia por ser del orden  $\epsilon\Delta R$ .

Tomando en cuenta todo lo anterior tenemos que la acción euclideana en la aproximación de la pared delgada está dada por

$$S_E(R) \approx -\frac{1}{2}\pi^2 R^4 \epsilon + 2\pi^2 R^3 S_I \quad (3.41)$$

donde

$$S_I \equiv \int_{R-\Delta R/2}^{R+\Delta R/2} d\rho \rho^3 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_I}{\partial \rho} \right)^2 + U_0(\phi_I) \right]. \quad (3.42)$$

Como  $S_E(R)$  debe ser estacionario,

$$\frac{dS_E}{dR} = -2\pi^2 R^3 \epsilon + 6\pi^2 R^2 S_I = 0 \quad (3.43)$$

de donde obtenemos que

$$R = \frac{3S_I}{\epsilon} \quad (3.44)$$

por lo que finalmente

$$B = S_E[\phi_B(\rho)] = \frac{27}{2} \frac{\pi^2 S_I^4}{\epsilon^3}. \quad (3.45)$$

### 3.4. Cálculo de la tasa de decaimiento del falso vacío por unidad de volumen

Habiendo obtenido las configuraciones clásicas relevantes en el decaimiento del falso vacío, procedemos al cálculo de la tasa de decaimiento del falso vacío por unidad de volumen  $\Gamma/V$ . Siguiendo el formalismo de Coleman y Callan, partimos de la amplitud de transición

$$I = \langle \phi_f | e^{-HT/\hbar} | \phi_i \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi(\mathbf{x},\tau)]/\hbar}, \quad (3.46)$$

donde  $\phi_i$  y  $\phi_f$  son las configuraciones inicial y final del campo respectivamente y  $T$  es el intervalo de tiempo euclideo. A partir de este obtendremos  $\Gamma/V$  que, de acuerdo con la ecuación (2.22), está relacionado con la amplitud de transición como

$$\frac{\Gamma}{V} = 2 \operatorname{Im} \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln I}{T} \right). \quad (3.47)$$

De acuerdo con la condición de frontera (3.5),  $\phi_i = \phi_f = \phi_+$ .

En la aproximación del punto estacionario, la amplitud de transición a primer orden en  $\hbar$  está dada por

$$I = e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \left[ \det \left( -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + U''(\phi_{\text{cl}}) \right) \right]^{-1/2} (1 + \mathcal{O}(\hbar)), \quad (3.48)$$

donde  $\phi_{\text{cl}}$  es la configuración clásica del campo correspondiente al punto estacionario de la acción euclídeana y  $S_E^{\text{cl}} = S[\phi_{\text{cl}}(\mathbf{x}, \tau)]$  es su acción euclídeana. En caso cuente con múltiples puntos estacionarios, debemos sumar la contribución de cada uno.

Tal como vimos en el capítulo anterior, las configuraciones clásicas a considerar son la trivial, el bounce o burbuja así como las configuraciones que cuenten con múltiples bounces. Nuevamente volveremos a encontrarnos con los mismo problemas al momento de calcular la contribución del bounce a la amplitud de transición, los cuales tendrán que ser tratadas independientemente.

De acuerdo con la ecuación (3.48), la contribución de la configuración trivial  $\phi_{\text{FV}}(\mathbf{x}, \tau)$  a la amplitud de transición  $I_0$  no es más que

$$I_0 = \left[ \det \left( -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + \omega^2 \right) \right]^{-1/2}, \quad (3.49)$$

donde  $\omega^2 \equiv U''(\phi_+)$ . De igual manera, esperaríamos que la contribución del bounce  $\phi_B(\mathbf{x}, \tau)$  a la amplitud de transición  $I_1$  este dada por

$$I_1 = e^{-B/\hbar} \left[ \det \left( -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + U''(\phi_B) \right) \right]^{-1/2}, \quad (3.50)$$

donde  $B = S[\phi_B(\mathbf{x}, \tau)]$  es la acción euclídeana del bounce. Sin embargo, sabemos que esta expresión no es la correcta puesto que no todos los autovalores del operador

$$\hat{O} \equiv -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + U''(\phi_B) \quad (3.51)$$

son positivos.

Las burbujas pueden aparecer en cualquier región del espacio, es decir, son invariantes ante traslaciones espaciales [3]. Además, aunque fijamos el instante en el que el campo llega al punto de retorno en  $\tau = 0$ , bien podríamos haberlo hecho en cualquier otro instante de tiempo euclídeano. Ambas observaciones indican que el bounce es invariante ante traslaciones espaciotemporales en el espaciotiempo euclídeano. Esto significa que, al igual que lo que ocurría con el bounce en la Mecánica Cuántica, el operador  $\hat{O}$  cuenta con modos ceros. Nuevamente,

esto es un reflejo de la simetría  $O(4)$  del sistema. En esta ocasión, tendremos cuatro modos ceros

$$\phi_{0_i}(\mathbf{x}, \tau) = \left( \frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{-1/2} \frac{\partial \phi_B}{\partial x_i}, \quad (3.52)$$

donde  $i = 1, 2, 3, 4$ . Al integrar sobre el centro de la burbuja en el espaciotiempo euclideo,  $I_1$  adquiere el siguiente factor

$$\left( \frac{B}{2\pi\hbar} \right)^2 VT. \quad (3.53)$$

Es posible demostrar que el operador  $\hat{O}$  cuenta con único modo negativo [3, 24]. Para solucionar este problema, hacemos la continuación analítica de la integral de camino euclidea (3.48) deformando el contorno de integración a la parte superior del plano complejo. Como resultado,  $I_1$  obtiene un factor de adicional de  $i/2$ , por lo que la contribución del bounce a la amplitud de transición es en realidad

$$I_1 = e^{-B/\hbar} \left( \frac{B}{2\pi\hbar} \right)^2 VT \left[ \det' \left( -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + U''(\phi_B) \right) \right]^{-1/2}, \quad (3.54)$$

donde la prima en la determinante indica que se ha excluido el autovalor igual a cero.

Por último, consideremos las configuraciones que cuentan con un número arbitrario de  $n$  bounces lo suficientemente separados. Siguiendo el análisis realizado en el capítulo anterior, sabemos que, al sumar todas las contribuciones de estas configuraciones, la amplitud de transición (3.48) está dada por

$$I = I_0 \exp \left( iKVT e^{-B/\hbar} \right), \quad (3.55)$$

donde

$$K \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{B}{2\pi\hbar} \right)^2 \left[ \frac{\det' \left( -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + U''(\phi_B) \right)}{\det \left( -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + \omega^2 \right)} \right]^{-1/2}. \quad (3.56)$$

Finalmente, reemplazando la amplitud de transición (3.55) en la ecuación (3.47), obtenemos la tasa de decaimiento del falso vacío por unidad de volumen  $\Gamma/V$  a primer orden en  $\hbar$

$$\frac{\Gamma}{V} = \left( \frac{B}{2\pi\hbar} \right)^2 \left[ \frac{\det' \left( -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + U''(\phi_B) \right)}{\det \left( -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla + \omega^2 \right)} \right]^{-1/2} e^{-B/\hbar} (1 + O(\hbar)). \quad (3.57)$$

### 3.5. El destino del falso vacío

Analicemos la evolución de una burbuja de verdadero vacío en el espaciotiempo de Minkowski. Al cruzar la barrera de potencial a través de un salto cuántico en  $t = 0$ , el campo emerge

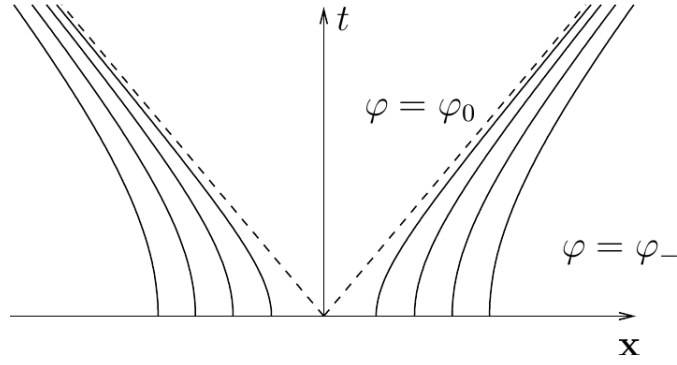


Figura 3.5: Crecimiento de las burbujas de verdadero vacío en el espaciotiempo de Minkowski. En la figura,  $\varphi_-$  y  $\varphi_0$  corresponden al falso y verdadero vacío respectivamente [17].

en el punto de retorno en la configuración más probable, es decir,

$$\phi(\mathbf{x}, t = 0) = \phi_B(\mathbf{x}, \tau = 0), \quad (3.58)$$

debido a que el bounce es la configuración que cuenta con la menor acción euclídeana [17]. Además,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t = 0) = 0, \quad (3.59)$$

y a partir de este instante, el campo evoluciona de acuerdo con la ecuación de movimiento [4]

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 \right) \phi(\mathbf{x}, t) = -U'(\phi(\mathbf{x}, t)). \quad (3.60)$$

Tenemos entonces que en  $t = 0$ , se materializa una burbuja de verdadero vacío de radio  $R$ .

Para obtener  $\phi(\mathbf{x}, t)$  hacemos el cambio de variable  $\tau = it$  en la ecuación (3.10) para pasar del tiempo euclídeano al del espaciotiempo de Minkowski. Definamos

$$r^2 \equiv \mathbf{x}^2 - t^2, \quad (3.61)$$

de tal manera que al hacer la continuación analítica del bounce al campo en el espaciotiempo de Minkowski tenemos que este último está dado por

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_B\left(r = \sqrt{\mathbf{x}^2 - t^2}\right) \quad (3.62)$$

Puesto que  $r$  es positivo, esta solución solo está definida fuera del cono de luz. Para obtener la solución dentro del cono de luz habría que resolver la ecuación de movimiento (3.60) [15]. La simetría  $O(4)$  del bounce se ha convertido entonces en una simetría  $O(3, 1)$ . Esto significa que



la evolución de la burbuja será la misma para cualquier observador inercial [3]. A medida que la burbuja se expande, su pared describe la hiperboloide

$$\mathbf{x}^2 - t^2 = R^2 \quad (3.63)$$

tal como se puede apreciar en la figura (3.5). Es decir, la burbuja crece a una velocidad que se aproxima a la velocidad de la luz asintóticamente. Si  $R$  es microscópico, del orden de  $10^{-10}$ , esto es prácticamente instantáneo de tal manera que si una burbuja se está acercando, no sabremos en qué momento nos golpeó [16]. Dentro de la burbuja solo queda el verdadero vacío inalterado.

# Capítulo 4

## Conclusiones

Una partícula cuántica que se encuentra en un potencial que cuenta con un falso vacío, tiene cierta probabilidad de decaer al verdadero vacío. A partir de esta probabilidad definimos la tasa de decaimiento del falso vacío  $\Gamma$ , dada por

$$\Gamma = 2 \operatorname{Im} \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln I}{T} \right). \quad (4.1)$$

donde  $I$  es la integral de camino euclidea

$$I = \langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = \int \mathcal{D}x e^{-S_E[x(\tau)]/\hbar}. \quad (4.2)$$

Para calcular la integral de camino euclidea se hizo uso de la aproximación del punto estacionario en el que expandimos la acción euclidea alrededor de la trayectoria clásica, obteniendo

$$I = e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \left[ \det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{\text{cl}}) \right) \right]^{-1/2} (1 + \mathcal{O}(\hbar)). \quad (4.3)$$

En el caso del decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica, las trayectorias clásicas corresponden a la trivial y al bounce. El bounce es una trayectoria clásica en la que la partícula parte del falso vacío en  $\tau = -\infty$ , llega al verdadero vacío en  $\tau = 0$  y vuelve al falso vacío en  $\tau = +\infty$ . Al momento de calcular la contribución del bounce a la integral de camino euclideo, notamos que el operador  $\left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{\text{cl}}) \right)$  cuenta con un modo cero y uno negativo, los cuales impiden usar la ecuación (4.3) directamente. El modo cero se debe a la simetría del centro del bounce y para solucionarlo se integro sobre este obteniendo un factor adicional igual a la acción euclidea del bounce  $B$ . La existencia del modo negativo es consecuencia directa del modo

cero y para solucionarlo se debe hacer la continuación analítica de la amplitud de transición al plano complejo dando como resultado un factor adicional de  $i/2$ .

Tomando todo esto en cuenta y al sumar todas las contribuciones a la integral de camino, incluyendo las de las trayectorias que cuentan con múltiples bounces, obtenemos una expresión analítica para la tasa de decaimiento del falso vacío

$$\Gamma = \left( \frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[ \frac{\det' \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V'''(x_B) \right)}{\det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right]^{-1/2} e^{-B/\hbar} (1 + O(\hbar)). \quad (4.4)$$

Al momento de extender el formalismo anterior a la Teoría Cuántica de Campos del campo escalar la cantidad a calcular es la tasa de decaimiento del falso vacío por unidad de volumen  $\Gamma/V$ . En el espaciotiempo euclideo, el bounce en este caso consiste en la aparición de burbujas de falso vacío que crecen hasta un cierto radio y luego se vuelve a contraer. Esto lleva a buscar soluciones que posean simetría  $O(4)$ . En la aproximación de la pared delgada, es decir, cuando la diferencia entre los mínimos es pequeña en comparación en la barrera que los separa, tenemos que el bounce consta de una burbuja cuyo interior se encuentra en el verdadero vacío, separado por una pared delgada del exterior que sigue en el verdadero vacío. Siguiendo el formalismo desarrollado en la Mecánica Cuántica, obtenemos

$$\frac{\Gamma}{V} = \left( \frac{B}{2\pi\hbar} \right)^2 \left[ \frac{\det' \left( -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + U''(\phi_B) \right)}{\det \left( -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + \omega^2 \right)} \right]^{-1/2} e^{-B/\hbar} (1 + O(\hbar)), \quad (4.5)$$

con la salvedad de que ahora se tienen 4 modos ceros. Al retornar al espaciotiempo de Minkowski tenemos que la burbuja de verdadero vacío crece cada vez más rápido con la velocidad de la pared aproximándose a de la luz.

Por último, pero no por eso menos importante, el presente trabajo de investigación representa una pequeña contribución a la literatura en español sobre el decaimiento del falso vacío y espero puede ser utilizada como referencia en investigaciones futuras.

# Bibliografía

- [1] Gamow, G. (1928). The quantum theory of nuclear disintegration. *Nature*, 122(3082), 805-806.
- [2] Kobzarev, I., Okun, L. & Voloshin, M. (1975). Bubbles in Metastable Vacuum. *Sov. J. Nucl. Phys.* 20, 644-646.
- [3] Coleman, S. (1977). Fate of the false vacuum: Semiclassical theory. *Physical Review D*, 15(10), 2929.
- [4] Callan Jr, C. G. & Coleman, S. (1977). Fate of the false vacuum. II. First quantum corrections. *Physical Review D*, 16(6), 1762.
- [5] Coleman, S. & De Luccia, F. (1980). Gravitational effects on and of vacuum decay. *Physical Review D*, 21(12), 3305.
- [6] Guth, A. H. (1981). Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, 23(2), 347.
- [7] Hawking, S. W. & Moss, I. L. (1982). Supercooled phase transitions in the very early universe. *Physics Letters B*, 110(1), 35-38.
- [8] Hawking, S. W. & Turok, N. (1998). Open inflation without false vacua. *Physics Letters B*, 425(1-2), 25-32.
- [9] Hackworth, J. C. & Weinberg, E. J. (2005). Oscillating bounce solutions and vacuum tunneling in de Sitter spacetime. *Physical Review D*, 71(4), 044014.
- [10] Guth, A. H. (2007). Eternal inflation and its implications. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(25), 6811.
- [11] Bass, S. D., De Roeck, A. & Kado, M. (2021). The Higgs boson implications and prospects for future discoveries. *Nature Reviews Physics*, 1-17.

- [12] Andreassen, A., Frost, W. & Schwartz, M. D. (2018). Scale-invariant instantons and the complete lifetime of the standard model. *Physical Review D*, 97(5), 056006.
- [13] Ai, W.-Y. (2019). *Aspects of false vacuum decay* (Tesis doctoral).
- [14] Andreassen, A., Farhi, D., Frost, W. & Schwartz, M. D. (2017). Precision decay rate calculations in quantum field theory. *Physical Review D*, 95(8), 085011.
- [15] Weinberg, E. J. (2012). *Classical solutions in quantum field theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics*. Cambridge University Press.
- [16] Paranjape, M. (2017). *The theory and applications of instanton calculations*. Cambridge University Press.
- [17] Rubakov, V. (2009). *Classical theory of gauge fields*. Princeton University Press.
- [18] Kleinert, H. (2009). *Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets*. World scientific.
- [19] Masoumi, A. (2013). *Topics in vacuum decay* (Tesis doctoral). arXiv: 1505.06397 [hep-th]
- [20] Feynman, R. P., Hibbs, A. R. & Styer, D. F. (2010). *Quantum mechanics and path integrals*. Courier Corporation.
- [21] Das, A. (2006). *Field Theory: A Path Integral Approach* (2.<sup>a</sup> ed.). World Scientific Lecture Notes In Physics. World Scientific Publishing Company.
- [22] Lee, W. & Lee, C. H. (2005). The fate of the false vacuum in Einstein gravity theory with nonminimally-coupled scalar field. *International Journal of Modern Physics D*, 14(06), 1063-1073.
- [23] Coleman, S., Glaser, V. & Martin, A. (1978). Action minima among solutions to a class of Euclidean scalar field equations. *Communications in Mathematical Physics*, 58(2), 211-221.
- [24] Coleman, S. (1988). Quantum tunneling and negative eigenvalues. *Nuclear Physics B*, 298(1), 178-186.