

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú, Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Para optar por el grado académico de Bachiller en Física

Decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica y la Teoría Cuántica de Campos

AUTOR

Erwin Renzo Franco Diaz

ASESOR

Teófilo Vargas Auccalla

Lima, Perú

Abril 2021

RESUMEN

añadir descripcion de capitulos

AGRADECIMIENTOS

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	II
Índice general	II
Índice de figuras	IV
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Planteamiento del problema	1
1.3. Objetivo	2
2. Decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica	3
2.1. Tasa de decaimiento	3
2.2. Integral de camino euclídeana	5
2.3. Aproximación de punto estacionario	7
2.4. Bounce	10
2.4.1. Modo cero	14
2.4.2. Modo negativo	16
2.4.3. Contribución de las trayectorias con múltiples bounces	17
3. Decaimiento del falso vacío en la TCC	19
3.1. Tasa de decaimiento del falso vacío en la Teoría Cuántica de Campos	19
3.2. Bounces en la Teoría Cuántica de Campos	19
3.2.1. Aproximación de la pared delgada	22

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IV
3.3. Cálculo de la tasa de decaimiento	22
3.4. El destino del falso vacío	22
4. Conclusiones	23
Bibliografía	25

Índice de figuras

1.1. Potencial con un falso vacío en x_+ [4].	2
2.1. Potencial para el estudio numérico del decaimiento del falso vacío. Cuenta con una región de falso (FV) y verdadero vacío (R), separados por una barrera (B) [10].	4
2.2. Probabilidad de que una partícula permanezca en la región de falso vacío para distintos anchos de verdadero vacío. El eje vertical está en escala logarítmica [10].	5
2.3. Trayectorias clásicas para el decaimiento del falso vacío [5].	11
2.4. Potencial invertido correspondiente al de la figura 1.1 [4].	12
2.5. Bounce [6].	13
2.6. Deformación del contorno de integración al plano complejo [3].	17
3.1. Potencial en el que se encuentra el campo escalar dado por la acción (3.1). Notamos que cuenta con un falso vacío en ϕ_+ [3].	20

Dedicado a

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Desde su formulación inicial en la década de 1920, se hizo evidente que la Mecánica Cuántica es una teoría radicalmente distinta al resto de la Física conocida hasta ese entonces. Uno de los ejemplos más sorprendentes de esto es el efecto túnel o tunelamiento. Descubierta inicialmente por George Gamow en 1928 para explicar el decaimiento alfa [1], este fenómeno permite a una partícula atravesar una barrera de potencial, a pesar de que no pueda hacerlo clásicamente por no contar con la energía suficiente.

Una consecuencia importante del efecto túnel es el decaimiento del falso vacío, tema principal a tratar en este trabajo. En este caso, la partícula atraviesa la barrera de potencial a la vez que decae al estado de mínima energía.

El decaimiento del falso vacío tiene implicaciones importantes tanto en la física de partículas como en la cosmología.

1.2. Planteamiento del problema

revisar Consideremos un potencial como el de la figura 1.1 que posee dos mínimos distintos, uno mayor que otro. Clásicamente, ambos puntos son estables. Sin embargo, esta no es la situación a nivel cuántico. Debido al efecto túnel, existe la posibilidad de que una partícula que se encuentre inicialmente en x_+ , atraviese la barrera al estado de menor energía del sistema. Es

por esto que a x_+ se le denomina como falso vacío y a este proceso como decaimiento del falso vacío.

A lo largo del trabajo tomaremos la figura 1.1 como nuestro potencial de referencia.

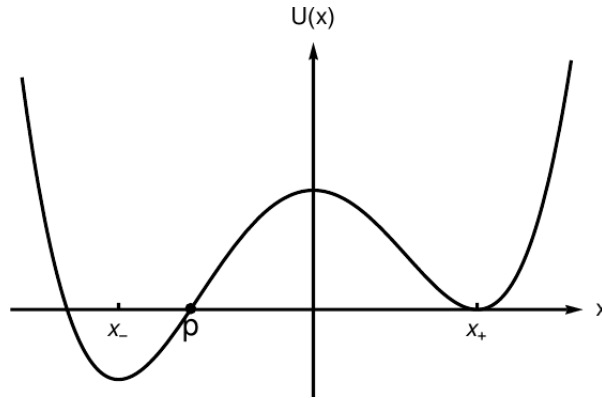


Figura 1.1: Potencial con un falso vacío en x_+ [4].

1.3. Objetivo

El objetivo principal del presente trabajo de investigación es el cálculo de la tasa de decaimiento del falso vacío Γ a primer orden en \hbar . Inicialmente se llevará a cabo en la Mecánica Cuántica haciendo uso de la integral de camino euclídeana y la aproximación del punto estacionario siguiendo el formalismo planteado originalmente por Coleman y Callan [2, 3]. Posteriormente el mismo será extendido a la Teoría Cuántica de Campos del campo escalar donde además se analizará la formación de burbujas de verdadero vacío y su evolución espaciotemporal.

Capítulo 2

Decaimiento del falso vacío en la Mecánica Cuántica

2.1. Tasa de decaimiento

Un estado concentrado en la región del falso vacío no puede ser un autoestado de energía, puesto que estos, al no poseer dependencia temporal, no pueden decaer [5]. Podríamos expandirlo en una combinación lineal de estos autoestados, pero es más conveniente considerarlo como un estado fundamental metaestable cuya energía adquiere una parte imaginaria debido al tunelamiento [6, 7, 8].

A diferencia de lo que sucede con los autoestados de energía, la evolución temporal del estado metablestable $|\psi\rangle$ no consiste únicamente en la adquisición de una fase [9],

$$e^{iE_0t/\hbar} |\psi\rangle = e^{i\text{Re}(E_0)t/\hbar} e^{\text{Im}(E_0)t/\hbar} |\psi\rangle. \quad (2.1)$$

La parte imaginaria de la energía hace que la probabilidad de que una partícula permanezca en la región del falso vacío, relacionada con la norma del estado metaestable, disminuya exponencialmente en el tiempo

$$P_{\text{FV}}(t) \propto e^{-\Gamma t/\hbar} \quad (2.2)$$

lo que nos permite definir la tasa de decaimiento Γ como

$$\Gamma \equiv -2 \text{Im} \left(\frac{E_0}{\hbar} \right). \quad (2.3)$$

Esta definición considera implícitamente que la parte imaginaria de la energía del estado metaestable es negativa, de tal manera que Γ sea positiva. De no ser así, la probabilidad crecería [9].

Podemos entender cualitativamente este comportamiento estudiando numéricamente la evolución temporal de una función de onda concentrada inicialmente en la región del falso vacío de un potencial sencillo como el de la figura 2.1, y calculando la probabilidad de encontrar a la partícula en esta región luego de un tiempo t . Los resultados de la simulación se presentan en la figura 2.2 para distintos anchos de la región de verdadero vacío [10]. Tal como esperábamos, se observa claramente la dependencia lineal de la probabilidad en escala logarítmica con el tiempo. Notamos además que las tres rectas tienen la misma pendiente, lo cual indica que la forma específica del potencial en la región del verdadero vacío no influye de manera significativa en la dinámica del sistema [7].

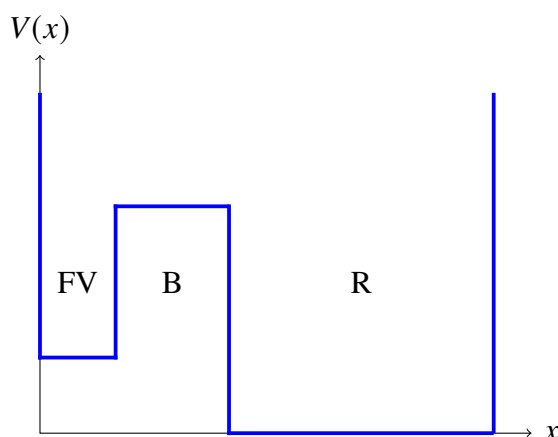


Figura 2.1: Potencial para el estudio numérico del decaimiento del falso vacío. Cuenta con una región de falso (FV) y verdadero vacío (R), separados por una barrera (B) [10].

En la misma figura, sin embargo, puede apreciarse que el régimen lineal se mantiene solo durante un cierto intervalo de tiempo. Antes de atravesar la barrera, la función de onda oscila en la región del falso vacío, mientras que, cuando la función de onda ya atravesó la barrera y se encuentra la región del verdadero vacío, rebota con la pared infinita a la derecha y empieza a interactuar consigo misma, dando como resultado efectos no lineales [10]. Estos aspectos deben ser tomados en cuenta al momento de definir Γ de manera precisa [5].

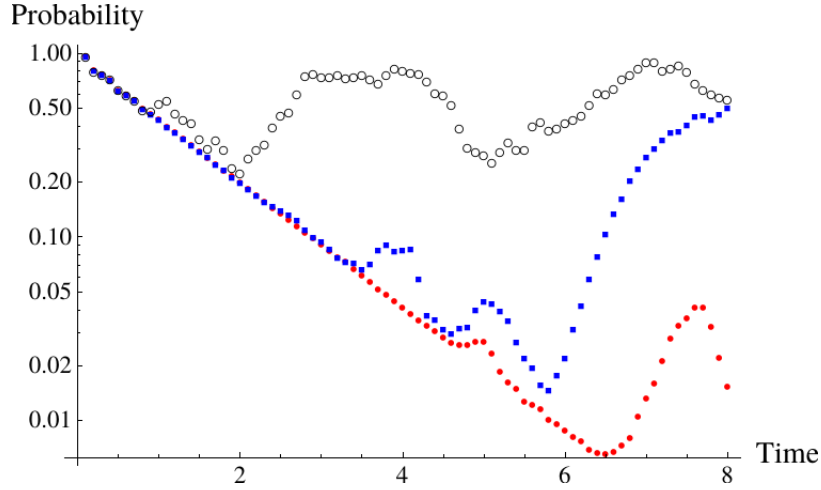


Figura 2.2: Probabilidad de que una partícula permanezca en la región de falso vacío para distintos anchos de verdadero vacío. El eje vertical está en escala logarítmica [10].

Haciendo uso de la aproximación WKB, es posible demostrar que Γ es de la forma [2]

$$\Gamma = Ae^{-B/\hbar}(1 + O(\hbar)), \quad (2.4)$$

donde

$$B = 2 \int_{x_+}^p dx \sqrt{2V(x)}. \quad (2.5)$$

2.2. Integral de camino euclideana

Consideremos una partícula que inicialmente se encuentra en la posición x_i en un tiempo t_i . La amplitud de transición de esta a una posición final x_f en un tiempo t_f está dada por la integral de camino de Feynman ¹ [11]

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x e^{iS[x(t)]/\hbar}, \quad (2.6)$$

donde $S[x(t)]$ es la acción de la partícula que, de la Mecánica Clásica, está dada por ²

$$S[x(t)] = \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right]. \quad (2.7)$$

Una de las dificultades al momento de querer calcular (2.6) se debe al hecho de que está compuesta por una suma de fases complejas oscilatorias, que no necesariamente es convergente.

¹La integral de camino normalmente cuenta con una constante de normalización, pero como no es de interés en este trabajo la asumiremos igual a 1.

²A lo largo de todo el trabajo consideraremos que la partícula es de masa unitaria.

Es por esto que resulta más conveniente trabajar en tiempo imaginario, para lo cual introducimos el tiempo euclideo τ mediante el cambio de variable

$$t = -i\tau, \quad (2.8)$$

también conocido como rotación de Wick [12].

Aplicando (2.8) en la acción (2.7), tenemos

$$S[x(\tau)] = \int d(-i\tau) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d(-i\tau)} \right)^2 - V(x) \right] \quad (2.9)$$

$$= i \int d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] \quad (2.10)$$

$$= iS_E[x(\tau)] \quad (2.11)$$

donde hemos definido la acción euclidea $S_E[x(\tau)]$ como

$$S_E[x(\tau)] \equiv \int d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right]. \quad (2.12)$$

De igual manera, su ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dV(x)}{dx}, \quad (2.13)$$

la cual puede ser interpretada como la ecuación de movimiento en tiempo real para una partícula moviéndose en el potencial invertido $-V(x)$,

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{d(-V(x))}{dx}. \quad (2.14)$$

Por último, en la energía,

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \quad (2.15)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \quad (2.16)$$

$$= -\mathcal{E} \quad (2.17)$$

donde hemos definido la energía euclidea \mathcal{E} como [8]

$$\mathcal{E} \equiv \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x) \quad (2.18)$$

Al reemplazar (2.11) en (2.6), obtenemos la integral de camino euclídeana [12]

$$I = \langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = \int \mathcal{D}x e^{-S_E[x(\tau)]/\hbar}, \quad (2.19)$$

donde T es el intervalo de tiempo euclídeano que le toma a la partícula ir de x_i a x_f . De esta manera, hemos convertido las fases oscilatorias en (2.6) en exponenciales decaientes que podremos calcular de manera aproximada mediante integrales gaussianas, como se verá en la sección siguiente.

Insertamos una base de autoestados de energía $\{|n\rangle\}$ en (2.19) [2]

$$I = \sum_n e^{-E_n T/\hbar} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle. \quad (2.20)$$

En el límite en el que $T \rightarrow \infty$, la contribución de los términos de orden superior es exponencialmente pequeña, lo que nos permite extraer la energía del estado fundamental³ [5]

$$\frac{E_0}{\hbar} = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln I}{T}. \quad (2.21)$$

Como ya se discutió en la sección anterior, la energía del estado metaestable cuenta con una parte imaginaria, a partir de la cual obtenemos vacío Γ a partir de la ecuación (2.3). A su vez, E_0 está dado por (2.21), por lo que ahora podemos calcular Γ directamente de la integral de camino euclídeana (2.19)

$$\Gamma = 2 \operatorname{Im} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln I}{T} \right). \quad (2.22)$$

2.3. Aproximación de punto estacionario

Los casos para los cuales es posible calcular la integral de camino de manera exacta son muy pocos y suelen involucrar técnicas matemáticas sofisticadas [11, 12, 9], por lo que usualmente se tiene que recurrir a métodos aproximados. En nuestro caso, haremos uso de la aproximación de punto estacionario (*saddle point approximation*) para calcular la integral de camino euclídeana en (2.19).

Al igual que en el cálculo diferencial, los puntos estacionarios de la acción euclídeana $S_E[x(\tau)]$ son aquellos que cumplen con la condición

$$\frac{\delta S_E[x(\tau)]}{\delta x(\tau)} = 0. \quad (2.23)$$

³Asumiendo que los autoestados de energía están normalizados.

Esto no es más que el principio de mínima acción de la Mecánica Clásica, por lo que los puntos estacionarios corresponden a las trayectorias clásicas $x_{cl}(\tau)$, soluciones de la ecuación de movimiento (2.13). Por simplicidad, supondremos que tenemos un único punto estacionario.

Expandiendo $S_E[x(\tau)]$ alrededor de la trayectoria clásica $x_{cl}(\tau)$,

$$x(\tau) = x_{cl}(\tau) + \eta(\tau), \quad (2.24)$$

donde $\eta(\tau)$ es la variación respecto a la trayectoria clásica sujeta a las condiciones de frontera

$$\eta(\tau_i) = \eta(\tau_f) = 0, \quad (2.25)$$

tenemos,

$$S_E[x(\tau)] = S_E[x_{cl}(\tau) + \eta(\tau)] \quad (2.26)$$

$$= S_E[x_{cl}(\tau)] + \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1) \frac{\delta^2 S_E[x_{cl}(\tau)]}{\delta x_{cl}(\tau_1) \delta x_{cl}(\tau_2)} \eta(\tau_2) + O(\eta^3). \quad (2.27)$$

El primer término corresponde a la acción euclídeana clásica S_E^{cl} . Por conveniencia, definimos la variación de segundo orden como

$$S_E^{(2)} \equiv \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1) \frac{\delta^2 S_E[x_{cl}(\tau)]}{\delta x_{cl}(\tau_1) \delta x_{cl}(\tau_2)} \eta(\tau_2). \quad (2.28)$$

El término lineal se cancela por (2.23).

En comparación con los términos anteriores, el valor de \hbar es pequeño. Esto nos permite ignorar los términos de orden superior en (2.27). Para verlo más claramente, reemplacemos $S_E[x(\tau)]$ en (2.19) por (2.27),

$$I = e^{-S_E^{cl}/\hbar} \int \mathcal{D}\eta e^{-S_E^{(2)}/\hbar + O(\eta^3)}, \quad (2.29)$$

donde, al haber fijado el camino clásico, ahora integramos sobre todas sus variaciones, cambiando la medida de integración. Reescalando $\eta(\tau) \rightarrow \sqrt{\hbar} \eta(\tau)$ ⁴,

$$I = e^{-S_E^{cl}/\hbar} \int \mathcal{D}\eta e^{-S_E^{(2)} + O(\hbar)} \quad (2.30)$$

notamos que los términos de orden superior en (2.27) son de primer orden en \hbar , justificando la aproximación [7]. Esta es la razón por lo que la aproximación de punto estacionario es un

⁴La nueva medida de integración incluye un factor constante que absorbemos en N .

método semiclásico. Será a este orden que calcularemos la tasa de decaimiento del falso vacío Γ .

La derivada funcional de la acción euclideana (2.12) es igual a la ecuación de movimiento (2.13)

$$\frac{\delta S_E[x(\tau)]}{\delta x(\tau_1)} = -\ddot{x}(\tau_1) + V'(\tau_1), \quad (2.31)$$

donde el punto indica la derivada respecto a τ , mientras que la prima indica la derivada respecto a $x(\tau)$. Tomando la derivada funcional de (2.31) y desarrollando

$$\frac{\delta S_E[x(\tau)]}{\delta x(\tau_1) \delta x(\tau_2)} = -\frac{\delta \ddot{x}(\tau_1)}{\delta x(\tau_2)} + \frac{\delta V'(x)}{\delta x(\tau_2)} \quad (2.32)$$

$$= -\frac{d^2}{d\tau_1^2} \left(\frac{\delta x(\tau_1)}{\delta x(\tau_2)} \right) + V''(x) \frac{\delta x(\tau_1)}{\delta x(\tau_2)} \quad (2.33)$$

$$= \left(-\frac{d^2}{d\tau_1^2} + V''(x) \right) \delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (2.34)$$

Reemplazando en (2.28),

$$S_E^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1) \left(-\frac{d^2}{d\tau_1^2} + V''(x_{cl}) \right) \delta(\tau_1 - \tau_2) \eta(\tau_2) \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{2} \int d\tau \eta(\tau) \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \eta(\tau), \quad (2.36)$$

notamos que el cálculo de $S_E^{(2)}$ está íntimamente relacionado con el operador

$$\hat{O} \equiv -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}). \quad (2.37)$$

Introduzcamos una base de autofunciones del operador anterior $\{\eta_i(\tau)\}$ [8]

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \eta_\lambda(\tau) = \lambda \eta_\lambda(\tau), \quad (2.38)$$

tal que podemos expandir $\eta(\tau)$ en función de esta

$$\eta(\tau) = \sum_\lambda c_\lambda \eta_\lambda(\tau). \quad (2.39)$$

Como la base es completa y ortonormal,

$$\int d\tau \eta_{\lambda'}(\tau) \eta_\lambda(\tau) = \delta_{\lambda'\lambda}. \quad (2.40)$$

Insertando (2.39) en (2.36) y usando (2.38) y (2.40),

$$S_E^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau \left(\sum_{\lambda'} c_{\lambda'} \eta_{\lambda'}(\tau) \right) \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \left(\sum_\lambda c_\lambda \eta_\lambda(\tau) \right) \quad (2.41)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda} \lambda c'_{\lambda} c_{\lambda} \int d\tau \eta'_{\lambda}(\tau) \eta_{\lambda}(\tau) \quad (2.42)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda} \lambda c'_{\lambda} c_{\lambda} \delta_{\lambda'\lambda} \quad (2.43)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \lambda c_{\lambda}^2. \quad (2.44)$$

Al momento de reemplazar (2.44) en (2.29), pasamos a integrar sobre todos los coeficientes $\{c_{\lambda}\}$, por lo que elegimos como medida de integración

$$\mathcal{D}\eta = \prod_{\lambda} \frac{dc_{\lambda}}{\sqrt{2\pi\hbar}}, \quad (2.45)$$

donde incluimos los factores $\sqrt{2\pi\hbar}$ por conveniencia. Tomando todo esto en cuenta, (2.29) se reduce a un producto de integrales gaussianas cuyo resultado es conocido y fácil de calcular

$$I \approx e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \int \prod_{\lambda} \frac{dc_{\lambda}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\sum_{\lambda} \lambda c_{\lambda}^2/2\hbar} \quad (2.46)$$

$$= e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \prod_{\lambda} \int \frac{dc_{\lambda}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\lambda c_{\lambda}^2/2\hbar} \quad (2.47)$$

$$= e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \prod_{\lambda} \lambda^{-1/2}. \quad (2.48)$$

La multiplicación de los autovalores en el último término de (2.48) no es más que la determinante de \hat{O} . Con esto, tenemos finalmente que la amplitud de transición en la aproximación de punto estacionario está dada por

$$I = e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{\text{cl}}) \right) \right]^{-1/2} (1 + \mathcal{O}(\hbar)). \quad (2.49)$$

Cabe resaltar que esta aproximación es de primer orden en \hbar . En caso la acción euclídeana posea múltiples puntos estacionarios, debemos sumar la contribución de cada uno.

En la derivación anterior hemos supuesto implícitamente que todos los autovalores de \hat{O} son positivos. De no ser así, (2.49) falla y tendríamos que tratar por separado aquellos autovalores que no cumplan con esta condición, resultando en factores adicionales. Como veremos en las secciones siguientes, este es el caso para el decaimiento del falso vacío.

2.4. Bounce

Como se discutió en la sección inicial de este capítulo, la tasa de decaimiento del falso vacío está relacionada con la probabilidad de que una partícula permanezca en la región del

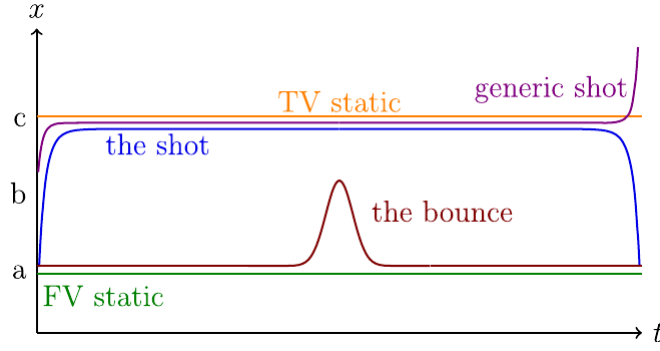


Figura 2.3: Trayectorias clásicas para el decaimiento del falso vacío [5].

falso vacío del potencial. Es por esto que las trayectorias clásicas, necesarias para calcular la amplitud de transición en la aproximación de punto estacionario usando la ecuación (2.49), deben empezar y terminar en dicha región. Es decir, $x_i = x_f = x_+$.

Las trayectorias clásicas deben ser entonces las soluciones de la ecuación de movimiento (2.13) con las condiciones de frontera [2]

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} x(\tau) = x_+. \quad (2.50)$$

Las trayectorias clásicas obtenidas no serán las exactas, pero son buenas aproximaciones, especialmente a medida que tomamos intervalos de tiempo euclideo cada vez mayores, que es el límite en el que estamos interesados finalmente [7, 3]. Por conveniencia, tomaremos $\tau_i = -T/2$ y $\tau_f = T/2$, tal que cuando necesitemos considerar el intervalo de tiempo euclideo finito este sea igual a T .

En la figura 2.3 se encuentran ilustradas las trayectorias clásicas a considerar. La primera es la solución trivial $x_{FV}(\tau)$ (*FV static* en la figura 2.3) en la que la partícula permanece en el falso vacío para todo τ ,

$$x_{FV}(\tau) = x_+. \quad (2.51)$$

Como $V(x_+) = 0$ y la solución es constante, $S_E[x_{FV}(\tau)] = 0$ y su contribución a la amplitud de transición I_0 es simplemente

$$I_0 = \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \right]^{-1/2}, \quad (2.52)$$

donde hemos definido

$$\omega^2 \equiv V''(x_+). \quad (2.53)$$

De igual manera, su energía euclidea también es nula.

Analizando el potencial invertido de la figura 2.4 notamos que es posible encontrar trayectorias clásicas no triviales que atraviesen la barrera del potencial original. Consideremos una partícula que inicia su movimiento en x_+ . Como el potencial es plano alrededor de este punto, permanece ahí por un largo tiempo, para luego recorrer rápidamente el pozo de potencial invertido hasta llegar al punto de retorno p en un tiempo finito. La invarianza de la acción euclidea ante inversiones temporales nos permite extender esta trayectoria de vuelta a x_+ [6]. Si los tiempos inicial y final son $\tau = \pm\infty$ respectivamente, obtenemos el bounce ⁵ $x_B(\tau)$ [2]. Su comportamiento se encuentra ilustrado en las figuras 2.3 y 2.5.

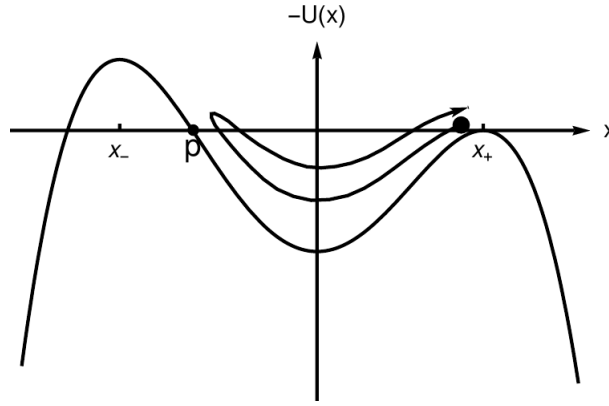


Figura 2.4: Potencial invertido correspondiente al de la figura 1.1 [4].

Aprovechando el hecho de que el bounce es invariante ante translaciones temporales, posicionemos su centro, correspondiente al instante en el que la partícula llega a p , en $\tau = 0$ [2]. La partícula se detiene en ese punto, por lo que

$$\left. \frac{dx_B}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (2.54)$$

Como $V(p) = 0$, la energía euclidea del bounce también es nula. De la definición en (2.18), tenemos que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 = V(x_B). \quad (2.55)$$

La acción euclidea del bounce está dada por

$$S_E[x_B(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 + V(x_B) \right]. \quad (2.56)$$

⁵Mantendremos el nombre en su idioma original por ser el término comúnmente usado en la literatura.

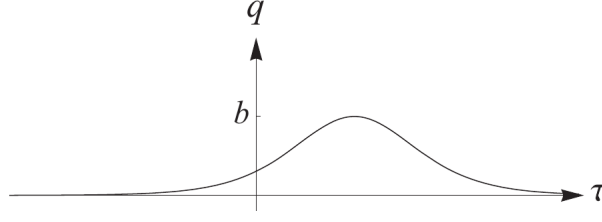


Figura 2.5: Bounce [6].

Si dividimos la integral en $\tau = 0$,

$$S_E[x_B(\tau)] = \int_{-\infty}^0 d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 + V(x_B) \right] + \int_0^{+\infty} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 + V(x_B) \right]. \quad (2.57)$$

y hacemos $\tau \rightarrow -\tau$ en la segunda integral, ambos términos son iguales. Esto es una consecuencia directa de la invariancia de la acción euclídeana ante inversiones temporales, relacionada también con la simetría del bounce. Si además usamos (2.55), podemos reducir (2.56) a

$$S_E[x_B(\tau)] = 2 \int_{-\infty}^0 d\tau 2V(x_B). \quad (2.58)$$

Por último, realicemos el cambio variable $\tau \rightarrow x_B$ [8]. Despejando $dx_B/d\tau$ en (2.55),

$$\frac{dx_B}{d\tau} = \sqrt{2V(x_B)} \quad (2.59)$$

$$d\tau = \frac{dx_B}{\sqrt{2V(x_B)}}. \quad (2.60)$$

Reemplazando (2.60) en (2.58) con los límites de integración correspondientes,

$$x_B(-\infty) = x_+, \quad x_B(0) = p, \quad (2.61)$$

obtenemos finalmente

$$S_E[x_B(\tau)] = 2 \int_{x_+}^p dx \sqrt{2V(x)}, \quad (2.62)$$

donde hemos omitido el subíndice al ya no ser necesario. Notamos que la acción euclídeana del bounce es equivalente al coeficiente B en (2.5),

$$B = S_E[x_B(\tau)]. \quad (2.63)$$

Al momento de calcular la contribución del bounce a la amplitud de transición, no podemos hacer uso de (2.49) directamente debido a que, en este caso, \hat{O} cuenta con autovalores que no son positivos. En las secciones a continuación, se discutirán las complicaciones que esto conlleva y cómo solucionarlas.

2.4.1. Modo cero

Por construcción, el bounce es una solución de la ecuación de movimiento (2.13),

$$\frac{d^2 x_B}{d\tau^2} - V'(x_B) = 0. \quad (2.64)$$

Al derivar la ecuación anterior respecto a τ ,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{d^2 x_B}{d\tau^2} - V'(x_B) \right) = 0 \quad (2.65)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right) - V''(x_B) \frac{dx_B}{d\tau} = 0 \quad (2.66)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} - V''(x_B) \right) \frac{dx_B}{d\tau} = 0, \quad (2.67)$$

se muestra claramente que \hat{O} cuenta con un autovector cuyo autovalor es igual a cero. Por esta razón decimos que \hat{O} cuenta con un modo cero.

Los autovalores de \hat{O} deben estar estandarizados. De (2.56) y usando (2.55), tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 = B, \quad (2.68)$$

de tal manera que el modo cero $x_0(\tau)$, proporcional a $dx_B/d\tau$, está dado por

$$x_0(\tau) = B^{-1/2} \frac{dx_B}{d\tau}. \quad (2.69)$$

Como ya se ha comentado anteriormente, el modo cero representa un problema al momento de calcular la contribución del bounce a la amplitud de transición. Para verlo explícitamente, retornemos a la ecuación (2.48), en la que expresamos la amplitud de transición como un producto de integrales gaussianas, y separemos la integral respecto al coeficiente c_0 correspondiente al modo cero,

$$\int \frac{dc_0}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (2.70)$$

Puesto que $\lambda = 0$, hemos perdido el amortiguamiento exponencial relacionado con c_0 por lo que (2.70), es divergente.

La existencia de un modo cero está siempre relacionada con una simetría del sistema [12]. En este caso, es debido a la simetría de la acción euclidea ante traslaciones temporales [3]. Si bien, por conveniencia, fijamos el centro del bounce en $\tau = 0$, bien podríamos haberlo hecho en cualquier otro instante de tiempo euclideo. Esto significa que existe un conjunto de bounces,

cuyos centros están localizados a lo largo de todo el intervalo de tiempo euclideo, que también son soluciones de la ecuación de movimiento y por lo tanto, también contribuyen a la amplitud de transición. Este es el origen de la divergencia [9].

Analíticamente, una traslación temporal es equivalente a realizar la siguiente transformación,

$$x_B(\tau - \tau_0) = e^{-\tau_0 \frac{d}{d\tau}} x_B(\tau). \quad (2.71)$$

Al efectuar esta transformación, desplazamos al bounce de tal manera que su centro se encuentra ahora en τ_0 . Como se discutió anteriormente, $x_B(\tau - \tau_0)$ también es solución de la ecuación de movimiento (2.13),

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x_B(\tau - \tau_0) - V'(x_B(\tau - \tau_0)) = 0. \quad (2.72)$$

Consideremos una transformación infinitesimal,

$$x_B(\tau - \delta\tau_0) \approx x_B(\tau) - \frac{dx_B}{d\tau} \delta\tau_0, \quad (2.73)$$

en (2.72),

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \left(x_B(\tau) - \frac{dx_B}{d\tau} \delta\tau_0 \right) - V' \left(x_B(\tau) - \frac{dx_B}{d\tau} \delta\tau_0 \right) = 0. \quad (2.74)$$

Expandiendo el segundo término a primer orden en τ_0 y reordenando,

$$\left(\frac{d^2 x_B(\tau)}{d\tau^2} - V'(x_B) \right) - \left(\frac{d^2}{d\tau^2} - V''(x_B) \right) \frac{dx_B}{d\tau} \delta\tau_0 = 0. \quad (2.75)$$

El primer término se anula debido a que el bounce es solución de la ecuación de movimiento, por lo que obtenemos nuevamente el resultado en la ecuación (2.67),

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} - V''(x_B) \right) \frac{dx_B}{d\tau} = 0. \quad (2.76)$$

Con esto, hemos demostrado la existencia del modo cero a partir de la simetría del sistema ante traslaciones temporales.

Veamos ahora cómo solucionar el problema de la divergencia en el cálculo de la contribución del bounce a la amplitud de transición. Para esto es necesario reemplazar c_0 por una coordenada colectiva relacionada con la simetría correspondiente del sistema. En nuestro caso, debemos hacer uso de τ_0 [6, 7].

Consideremos la expansión de la trayectoria $x(\tau)$ alrededor del bounce

$$x(\tau) = x_B(\tau) + c_0 B^{-1/2} \frac{dx_B}{d\tau} + \sum_{\lambda \neq 0} c_\lambda \eta_\lambda(\tau). \quad (2.77)$$

La variación de la trayectoria debido a un cambio infinitesimal en c_0 está dado por

$$B^{-1/2} \frac{dx_B}{d\tau} \delta c_0. \quad (2.78)$$

Comparando (2.78) con (2.73), notamos que el primero es equivalente a la variación de la trayectoria debido a un desplazamiento infinitesimal del centro del bounce $\delta\tau_0$ igual a

$$\delta\tau_0 = -B^{-1/2} \delta c_0. \quad (2.79)$$

Tenemos entonces que, al realizar el cambio de variable de c_0 a τ_0 a primer orden en \hbar , la contribución del bounce a la amplitud de transición I_1 adquiere un factor adicional de $B^{1/2}$ ⁶ [12, 9].

Con esto, e integrando sobre el intervalo de tiempo euclideo finito $\tau_0 \in [-T/2, T/2]$,

$$I_1 = e^{-B/\hbar} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau_0 \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \prod_{\lambda \neq 0} \int \frac{dc_\lambda}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\lambda c_\lambda^2/2\hbar} \quad (2.80)$$

$$= T \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} e^{-B/\hbar} \prod_{\lambda \neq 0} \int \frac{dc_\lambda}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\lambda c_\lambda^2/2\hbar}, \quad (2.81)$$

hemos resuelto el problema de la divergencia relacionada a la existencia del modo cero. Sin embargo, aún no podemos terminar con el cálculo debido a que existe otra fuente de divergencia aún más grave: \hat{O} cuenta con un autovalor negativo en su espectro, el cual se discutirá en la sección a continuación.

2.4.2. Modo negativo

Al analizar la forma de la ecuación (2.38),

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \eta_\lambda(\tau) = \lambda \eta_\lambda(\tau), \quad (2.82)$$

notamos inmediatamente su similaridad con la ecuación de Schrödinger. Como el modo cero es proporcional a $dx_B(\tau)/d\tau$, de acuerdo con la ecuación (2.54), posee un nodo en $\tau = 0$ por lo que no puede ser el autoestado de menor autovalor. Esto implica la existencia de un único autovector sin nodos cuyo autovalor es negativo. Por esta razón, decimos que \hat{O} cuenta con un único modo negativo además del modo cero ya estudiado [3]. Tal como sucedía con este último,

⁶Una derivación detallada de este resultado requiere el uso del truco de Faddeev-Popov [9, 8, 5].

la integral respecto al coeficiente c_{-1} en la ecuación (2.48), correspondiente al modo negativo,

$$\int \frac{dc_{-1}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{|\lambda_{-1}|c_{-1}^2/2\hbar}, \quad (2.83)$$

también es divergente.

El hamiltoniano es un operador hermítico cuyos autovalores son todos reales, mientras que la energía del estado metaestable cuenta con una parte imaginaria, por lo que claramente no pertenece al espectro del hamiltoniano [7]. Este es el origen de la divergencia en (2.83). Para solucionar este problema es necesario definir la amplitud de transición mediante continuación analítica. Siguiendo el trabajo de Callan y Coleman [3], se deforma el contorno de integración a lo largo del plano complejo tal como se muestra en la figura 2.6 ⁷, por lo que la contribución del bounce a la amplitud de transición está dada por

$$I_1 = \frac{i}{2} \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_B) \right) \right]^{-1/2} T e^{-B/\hbar} \quad (2.84)$$

donde la prima en la determinante indica que no se considera el autovalor igual a cero.

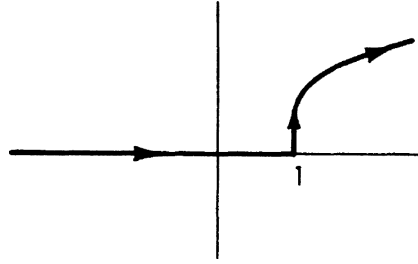


Figura 2.6: Deformación del contorno de integración al plano complejo [3].

2.4.3. Contribución de las trayectorias con múltiples bounces

Como vimos en la sección 2.4.1, el bounce no es único y existen otras trayectorias clásicas que también contribuyen a la amplitud de transición. De igual manera, debemos considerar la contribución de aquellas trayectorias que cuenten con un número arbitrario de bounces consecutivos lo suficientemente separados, aunque no sean soluciones exactas de la ecuación de movimiento [6].

Por comodidad, reescribamos I_1 en función de I_0 ,

$$I_1 = iKT e^{-B/\hbar} I_0 \quad (2.85)$$

⁷Una discusión detallada de la continuación analítica puede encontrarse en [5, 7]

donde hemos definido

$$K \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[\frac{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_B) \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right]^{-1/2}. \quad (2.86)$$

De esta forma justificamos la elección de los subíndices puesto que estos señalan el número de bounces que contiene la trayectoria.

Generalizando (2.85), tenemos que la contribución de una trayectoria que cuenta con n bounces a la amplitud de transición I_n está dada por

$$I_n = \frac{\left(iKT e^{-B/\hbar} \right)^n}{n!} I_0 \quad (2.87)$$

donde incluimos el factor de $n!$ debido a que los bounces son equivalentes y por lo tanto intercambiables entre sí.

Con esto, solo queda sumar todas las contribuciones a la amplitud de transición

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \quad (2.88)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(iKT e^{-B/\hbar} \right)^n}{n!} I_0 \quad (2.89)$$

$$= I_0 \exp \left(iKT e^{-B/\hbar} \right) \quad (2.90)$$

y reemplazarlo en la ecuación (2.22)

$$\Gamma = 2 \operatorname{Im} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(I_0 \exp \left(iKT e^{-B/\hbar} \right) \right)}{T} \right) \quad (2.91)$$

$$= 2 \operatorname{Im} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln I_0}{T} + iK e^{-B/\hbar} \right) \right) \quad (2.92)$$

$$= 2K e^{-B/\hbar} \quad (2.93)$$

de donde obtenemos finalmente que la tasa de decaimiento del falso vacío a primer orden en \hbar está dado por

$$\Gamma = \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[\frac{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_B) \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right]^{-1/2} e^{-B/\hbar} (1 + \mathcal{O}(\hbar)). \quad (2.94)$$

Notamos que (2.94) es de la misma forma que (2.4), tal como esperábamos. Contamos ahora con una expresión analítica para la constante A que, junto con la exponencial, representan el carácter no perturbativo del decaimiento del falso vacío [6].

Capítulo 3

Decaimiento del falso vacío en la Teoría Cuántica de Campos

3.1. Tasa de decaimiento del falso vacío en la Teoría Cuántica de Campos

3.2. Bounces en la Teoría Cuántica de Campos

Si bien al momento de calcular la tasa de decaimiento del falso vacío en la Teoría Cuántica de Campos del campo escalar haremos uso del formalismo desarrollado en el capítulo anterior adaptado, previamente debemos plantear el problema clásico correspondiente con sus respectivas condiciones de frontera y encontrar las soluciones a la ecuación de movimiento.

Consideremos el campo escalar $\phi(x)$ cuya acción $S[\phi(x)]$ está dada por

$$S[\phi(x)] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - U(\phi) \right]. \quad (3.1)$$

La densidad de potencial $U(\phi)$ está dado en la figura 3.1 . Cuenta con dos mínimos ϕ_- y ϕ_+ , de los cuales este último es un falso vacío por lo que, al igual que en la Mecánica Cuántica, esperamos que, si el campo se encuentra inicialmente en ϕ_+ , exista una cierta probabilidad de que pueda decaer a ϕ_- por tunelamiento. Resulta conveniente añadirle una constante de tal manera que $U(\phi_+) = 0$ y la energía del falso vacío sea finita [5]

Aplicando el cambio de variable (2.8) en la acción (3.1) obtenemos la acción euclídeana del

campo escalar $S_E[\phi(x)]$

$$S_E[\phi(x)] = \int d\tau d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + U(\phi) \right] \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2 \right) \phi = U'(\phi) \quad (3.3)$$

donde la prima indica la derivada respecto a $\phi(x)$.

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \phi(\tau, \mathbf{x}) = \phi_+ \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}(0, \mathbf{x}) = 0 \quad (3.5)$$

Como $U(\phi_+) = 0$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \pm\infty} \phi(\tau, \mathbf{x}) = \phi_+ \quad (3.6)$$

$$\rho^2 = \tau^2 + |\mathbf{x}|^2 \quad (3.7)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \pm\infty} \phi(\rho) = \phi_+ \quad (3.8)$$

$$\left. \frac{\partial \phi(\rho)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \left(\frac{d\phi}{d\rho} \frac{d\rho}{d\tau} \right) \Big|_{\tau=0} \quad (3.9)$$

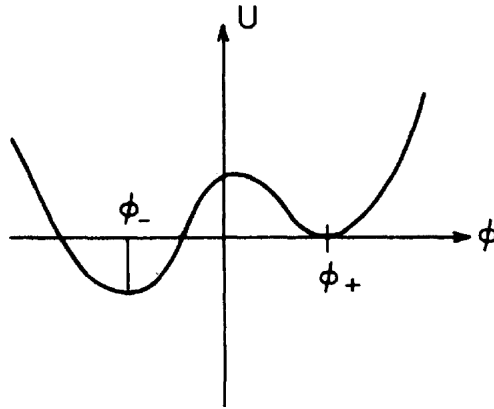


Figura 3.1: Potencial en el que se encuentra el campo escalar dado por la acción (3.1). Notamos que cuenta con un falso vacío en ϕ_+ [3].

$$2\rho \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 2\tau \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\tau}{\rho} \quad (3.11)$$

$$\left. \frac{\partial \phi(\rho)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (3.12)$$

$$\left. \frac{d\phi}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0 \quad (3.13)$$

Renombremos $\tau = x_4$

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \quad (3.14)$$

$$2\rho \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 2x_i \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\rho} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \phi(\rho)}{\partial x_i} = \frac{d\phi}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (3.17)$$

$$= \frac{x_i}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(\rho)}{\partial x_i^2} = \frac{x_i}{\rho} \frac{d^2 \phi}{d\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x_i}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) \frac{d\phi}{d\rho} \quad (3.19)$$

$$= \frac{x_i^2}{\rho^2} \frac{d^2 \phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x_i^2}{\rho^2} \right) \frac{d\phi}{d\rho} \quad (3.20)$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 \phi(\rho)}{\partial x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i^2}{\rho^2} \frac{d^2 \phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \left(4 - \frac{\sum_{i=1}^4 x_i^2}{\rho^2} \right) \frac{d\phi}{d\rho} \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} = U'(\phi) \quad (3.22)$$

3.2.1. Aproximación de la pared delgada

3.3. Cálculo de la tasa de decaimiento

Es posible demostrar que el modo negativo es único para todos los casos de interés [2, 13]

3.4. El destino del falso vacío

Capítulo 4

Conclusiones

Si bien hemos podido calcular la tasa de decaimiento Γ para el decaimiento del falso vacío, quedan varias preguntas conceptuales que no podrán ser abordadas en este trabajo y que tampoco se discuten a profundidad en la literatura consultada. Por ejemplo, la hermiticidad

Bibliografía

- [1] Gamow, G. (1928). The quantum theory of nuclear disintegration. *Nature*, 122(3082), 805-806.
- [2] Coleman, S. (1977). Fate of the false vacuum: Semiclassical theory. *Physical Review D*, 15(10), 2929.
- [3] Callan Jr, C. G. & Coleman, S. (1977). Fate of the false vacuum. II. First quantum corrections. *Physical Review D*, 16(6), 1762.
- [4] Ai, W.-Y. (2019). *Aspects of false vacuum decay* (Tesis doctoral).
- [5] Andreassen, A., Farhi, D., Frost, W. & Schwartz, M. D. (2017). Precision decay rate calculations in quantum field theory. *Physical Review D*, 95(8), 085011.
- [6] Weinberg, E. J. (2012). *Classical solutions in quantum field theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics*. Cambridge University Press.
- [7] Paranjape, M. (2017). *The theory and applications of instanton calculations*. Cambridge University Press.
- [8] Rubakov, V. (2009). *Classical theory of gauge fields*. Princeton University Press.
- [9] Kleinert, H. (2009). *Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets*. World scientific.
- [10] Masoumi, A. (2013). *Topics in vacuum decay* (Tesis doctoral). arXiv: 1505.06397 [hep-th]
- [11] Feynman, R. P., Hibbs, A. R. & Styer, D. F. (2010). *Quantum mechanics and path integrals*. Courier Corporation.
- [12] Das, A. (2006). *Field Theory: A Path Integral Approach* (2.^a ed.). World Scientific Lecture Notes In Physics. World Scientific Publishing Company.

- [13] Coleman, S. (1988). Quantum tunneling and negative eigenvalues. *Nuclear Physics B*, 298(1), 178-186.