



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ
ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ



Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Διάσπαση κενού βαθμωτού πεδίου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του Δημήτρη Ζαβιτσάνου

Επιβλέπων: Γεώργιος Κουτσούμπας,
Καθηγητής, Τομέας Φυσικής Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2018

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του φαινομένου διάσπασης κενού απουσία και παρουσία βαρύτητας. Αρχικά, παρουσιάζεται μία εισαγωγή στο φαινόμενο σήραγγας στην Κβαντομηχανική μέσω της προσέγγισης WKB και της χρήσης των ολοκληρωμάτων διαδρομών στον Ευκλείδειο χωρόχρονο. Έπειτα, ο φορμαλισμός γενικεύεται για βαθμωτά πεδία σε επίπεδο χωρόχρονο. Θαδειχθεί ότι αποτέλεσμα της διαδικασίας διάσπασης κενού είναι η δημιουργία μίας φυσαλίδας αληθούς κενού μέσα σε περιβάλλον ψευδούς κενού. Στη συνέχεια, εξετάζονται οι επιπτώσεις της βαρύτητας στο φαινόμενο σήραγγας και αναλύονται οι διαφοροποιήσεις που εμφανίζονται σε σχέση με την περίπτωση του επίπεδου χωρόχρονου. Θαδειχθεί ότι σε κλειστές πολλαπλότητες εμφανίζονται ασυνήθιστες λύσεις των εξισώσεων που διέπουν το φαινόμενο οι οποίες σχετίζονται με τη θερμική φύση του χώρου de Sitter. Στο τελευταίο μέρος της εργασίας, οι εξισώσεις αυτές επιλύονται αριθμητικά μέσω ενός κώδικα Mathematica και σχολιάζονται τα αποτελέσματα με βάση τη θεωρητική ανάλυση.

Abstract

The subject of this diploma thesis is the study of vacuum decay in the absence and in the presence of gravity. Initially, an introduction in tunnelling in Quantum Mechanics through the WKB approximation and through the use of Path Integrals in Euclidean space is presented. Then, the formalism is generalised for scalar fields in flat spacetime. It will be shown that the result of the process of vacuum decay is the nucleation of a true vacuum bubble within the false vacuum background. Afterwards, the consequences of the inclusion of gravity in tunnelling are examined and the differences from the flat spacetime case are analysed. It will be shown that in closed manifolds, unusual solutions of the field equations appear, which are related to the thermal nature of de Sitter space. Finally, various numerical results are obtained through a Mathematica shooting code and examined through the theoretical analysis.

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στον Τομέα Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές», με επιβλέποντα τον καθηγητή κ. Γ. Κουτσούμπα.

Καταρχήν, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γ. Κουτσούμπα για τη δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο επιστημονικό αντικείμενο καθώς και για τις χρήσιμες συμβουλές του καθ' όλην τη διάρκεια της προετοιμασίας της παρούσας εργασίας.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στον καθηγητή κ. Κ. Παρασκευαΐδη για την πολύτιμη καθοδήγηση και βοήθεια πριν και κατά τη διάρκεια της φοίτησής μου.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, τους φίλους μου και την Ελισάβετ οι οποίοι με ώθησαν να ασχοληθώ ξανά με τη Φυσική και βρίσκονται κοντά μου και με στηρίζουν όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Διάσπαση κενού στην Κβαντική Μηχανική	5
2.1	Το φαινόμενο σήραγγας μέσω της προσέγγισης WKB	5
2.2	Ο φορμαλισμός των Ευκλείδειων ολοκληρωμάτων διαδρομών	7
2.2.1	Στροφή Wick και Ευκλείδειος χωρόχρονος	8
2.2.2	Η ημικλασική προσέγγιση	9
2.3	Παραδείγματα Ευκλείδειων λύσεων	14
2.3.1	Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής	14
2.3.2	Διπλό πηγάδι δυναμικού και instantons	16
2.3.3	Μετασταθείς καταστάσεις και αναπηδήσεις (bounces)	25
3	Διάσπαση κενού βαθμωτού πεδίου	31
3.1	Η λύση bounce στην Κβαντική θεωρία βαθμωτού πεδίου	32
3.2	Η προσέγγιση λεπτού τείχους (Thin-Wall Approximation)	35
3.3	Η εξέλιξη της φυσαλίδας μετά τον σχηματισμό της	39
3.4	Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης bounce για πολυωνυμικό δυναμικό τετάρτου βαθμού	43
4	Διάσπαση κενού βαθμωτού πεδίου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο	49
4.1	Ευκλείδειες εξισώσεις κίνησης και συνοριακές συνθήκες	49
4.2	Κλασικές λύσεις	53
4.2.1	Τετρμμένες λύσεις	53
4.2.2	Λύσεις bounce	54
4.3	Η προσέγγιση λεπτού τείχους (Thin-Wall Approximation)	61
4.4	Η εξέλιξη της φυσαλίδας μετά τον σχηματισμό της	68
4.5	Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων για πολυωνυμικό δυναμικό τετάρτου βαθμού	70
A	Αναλυτική συνέχιση των μετρικών	83
A.1	Επίπεδος χώρος	83
A.2	Καμπυλωμένος χώρος	84
B	Κώδικας shooting Mathematica	87
	Βιβλιογραφία	97

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

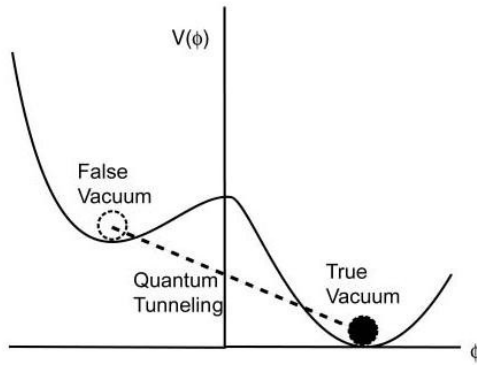
Ένα από τα σημαντικότερα φαινόμενα που προβλέπει η Κβαντική Θεωρία είναι το κβαντικό φαινόμενο σήραγγας, η διάσχιση δηλαδή ενός φράγματος δυναμικού το οποίο, κλασικά, είναι αδύνατο να διαπεραστεί. Το φαινόμενο σήραγγας έχει μελετηθεί αρκετά και παίζει σημαντικό ρόλο σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές, όπως στη λειτουργία πολλών ημιαγωγικών (πχ. δίοδος σήραγγας) και υπεραγώγιμων διατάξεων υψηλής ακρίβειας και ειδικών απαιτήσεων.

Όταν το φαινόμενο σήραγγας ιδωθεί υπό το πρίσμα της Κβαντικής θεωρίας Πεδίου (ΚΘΠ), μετασχηματίζεται σε πρόβλημα διάσπασης κενού¹ (vacuum decay problem). Παρ' όλα αυτά, η περιγραφή του φαινομένου, μέσω της παραδοσιακής Κβαντομηχανικής ανάλυσης, δεν είναι εύκολα γενικεύσιμη στα πλαίσια της ΚΘΠ. Απαιτείται, επομένως, μία εναλλακτική προσέγγιση. Η νέα αυτή μέθοδος βασίζεται σε ένα μαθηματικό τέχνασμα, που είναι γνωστό ως αναλυτική συνέχιση (analytic continuation) ή ως στροφή Wick (Wick rotation). Η διαδικασία αυτή βασίζεται στην περιστροφή του πραγματικού άξονα του χρόνου στο μιγαδικό επίπεδο. Κάνοντας αυτόν τον μετασχηματισμό, μεταφερόμαστε από τον χώρο Minkowski στον Ευκλείδειο χώρο. Κατ' αυτόν τον τρόπο, μας δίνεται η δυνατότητα να παραμετροποιήσουμε τη διαδρομή του πεδίου δια μέσου του φράγματος δυναμικού μέσα από έναν χώρο διατάξεων (configuration space) πιθανών, κλασικών πλέον, διαδρομών (Wickens, 2017; Lee, 2014). Αυτή η ημικλασική προσέγγιση, που αποτελεί μία μη διαταρακτική μέθοδο αντιμετώπισης της ΚΘΠ, παίζει σημαντικότερο ρόλο στην Θεωρητική Φυσική Υψηλών Ενεργειών και στην Κοσμολογία.

Η διαδικασία της διάσπασης του κενού μελετήθηκε αρχικά από τον S. Coleman (Coleman, 1977). Ας θεωρήσουμε την απλή περίπτωση ενός σωματιδίου που κινείται σε μία διάσταση κάτω από την επίδραση ενός δυναμικού $V(x)$. Αν το σωματίδιο βρίσκεται σε ηρεμία σε κάποιο από τα ελάχιστα του δυναμικού, η Κλασική Μηχανική προβλέπει ότι θα παραμείνει εκεί για πάντα. Ομοίως, το κενό ενός πεδίου $\varphi(\vec{x})$ είναι το τοπικό ελάχιστο του δυναμικού του, $V(\varphi)$. Εάν το πεδίο ξεκινήσει από την ηρεμία σε κάποιο από τα κενά, σε αναλογία με την Κλασική Μηχανική, θα παραμείνει για πάντα εκεί. Ωστόσο, τα πράγματα φαίνεται να αλλάζουν σε κβαντικό επίπεδο, καθώς το φαινόμενο σήραγγας, όπως αναφέραμε, είναι δυνατόν να επιτρέψει στο σωματίδιο ή στο πεδίο αντίστοιχα να ξεπεράσει το φράγμα του δυναμικού και να προχωρήσει σε κάποιο κενό με μικρότερη ενέργεια (Ι. Δ. Γιαλαμάς, 2017). Αυτό το μετασταθές, μη ελάχιστης, δηλαδή, ενέργειας, κενό (metastable vacuum), ονομάζεται ψευδοκενό (false vacuum) και το κενό στο οποίο μεταπηδά αληθές κενό (true vacuum) (σχήμα

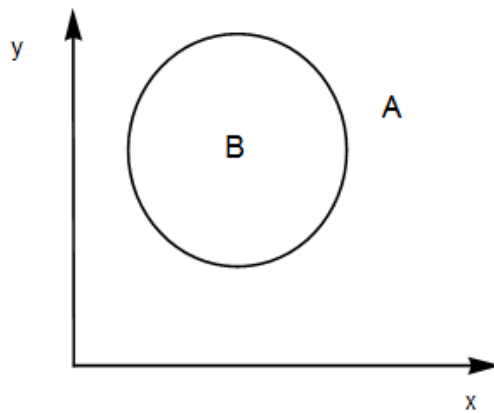
¹ Στο σημείο αυτό, σημειώνουμε πως δανειζόμαστε τις μεταφράσεις των επιστημονικών όρων από την διπλωματική εργασία του Ι. Δ. Γιαλαμά (Ι. Δ. Γιαλαμάς, 2017).

(1.1)).



Σχήμα 1.1: Δυναμικό V βαθμωτού πεδίου ϕ με δύο (κλασικά ευσταθή) ελάχιστα ([Watson, 2014](#)).

Ωστόσο, στην περίπτωση της ΚΘΠ, η μετάβαση από το ψευδές στο αληθές κενό είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί παντού ταυτόχρονα, καθώς αυτό θα απαιτούσε άπειρη ποσότητα ενέργειας. Αντιθέτως, η μετάβαση ξεκινά από μία περιοχή του χώρου (B), μέσα στην οποία το πεδίο βρίσκεται στο αληθές κενό, ενώ σε όλον τον υπόλοιπο χώρο (A) το πεδίο βρίσκεται ακόμα στο ψευδές κενό (σχήμα (1.2)).



Σχήμα 1.2: Μετάβαση πεδίου από το ψευδές προς το αληθές κενό.

Αποτέλεσμα αυτής της μεταπήδησης είναι, όπως θα δούμε, η δημιουργία μίας φυσαλίδας αληθούς κενού (true vacuum bubble) μέσα σε περιβάλλον ψευδούς κενού. Αυτός είναι ο τρόπος με τον οποίον γίνονται πολλές μεταβάσεις και αλλαγές φάσεων στη φύση, όπως στην περίπτωση του βρασμού του νερού με τη δημιουργία φυσαλίδων ατμού, οι οποίες σταδιακά μετατρέπουν το υγρό νερό σε ατμό. Υπό αυτήν την έννοια, θα δούμε πως το Σύμπαν «βράζει» ακόμα και σε μηδενική θερμοκρασία.²

²Το φαινόμενο αυτό είναι ανάλογο της υπέρψυξης υγρών. Ένα σώμα (πχ. νερό) είναι δυνατόν, υπό ορισμένες συνθήκες, να βρίσκεται σε υγρή μορφή ακόμα και σε θερμοκρασία χαμηλότερη από αυτήν της πήξης (μετασταθής κατάσταση). Ο σχηματισμός πάγου ξεκινά έπειτα από διακυμάνσεις (πχ. έπειτα από χτύπημα ενός μπουκαλιού υπέρψυχρου νερού στο τραπέζι) από λεπτά διαμερισμένα σωματίδια (σκόνη) ή άλλες προσμίξεις.

Κατ' αντιστοιχία, στην περίπτωσή μας, έχουμε ένα υπέρψυχρο Σύμπαν, το οποίο, λόγω χβαντικών

Για να περιγράψουμε τη διάσπαση κενού, πρέπει να βρούμε ένα κλασικό μονοπάτι από το ψευδές προς το αληθές κενό του δυναμικού. Ωστόσο, λόγω της αρχής διατήρησης της ενέργειας, δεν φαίνεται να υπάρχουν καλώς ορισμένες κλασικές διαδρομές στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή, όπου το δυναμικό είναι μεγαλύτερο της ενέργειας του συστήματος. Παρ' όλα αυτά, εάν κάνουμε την αναλυτική συνέχιση $\tau = it$, τότε το αποτέλεσμα αυτής είναι η αναστροφή του δυναμικού από V σε $-V$. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να βρούμε μία κλασική διαδρομή σε έναν Ευκλείδειο, πλέον, χωρόχρονο, χρησιμοποιώντας είτε την προσέγγιση WKB είτε τον φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων διαδρομών. Η λύση αυτή ονομάζεται λύση bounce και η δράση της δίνει την κυρίαρχη συνεισφορά στον ρυθμό διάσπασης. Θα δείξουμε ότι το γεγονός ότι το ψευδές κενό είναι ασταθές (ή πιο σωστά μετασταθές), μεταφράζεται στην εμφάνιση ενός φανταστικού (imaginary) διορθωτικού όρου στην ενέργειά του. Αυτός ο όρος ερμηνεύεται ως ρυθμός διάσπασης του ψευδούς κενού. Επιπλέον, η bounce προσδιορίζει τις αρχικές συνθήκες για την κλασική εξέλιξη της φυσικής (δηλ. του πεδίου) στον χώρο Minkowski.

Μεταβαίνοντας στον καμπυλωμένο χωρόχρονο, η διαδικασία εύρεσης κλασικής λύσης είναι αντίστοιχη. Τα κενά του πεδίου αντιστοιχούν, πλέον, σε κοσμολογικές σταθερές και η μετάβαση μεταξύ των δύο αυτών καταστάσεων προτάθηκε ότι μπορεί να οδηγήσει σε μία περίοδο πληθωριστικής διαστολής του σύμπαντος (Guth, 1981). Η γενίκευση του φαινομένου της διάσπασης κενού παρουσία βαρύτητας έγινε αρχικά από τους Coleman και De Luccia (Coleman and De Luccia, 1980). Έκτοτε, το αντικείμενο αυτό έχει αναλυθεί σε μεγάλη έκταση και αποτελεί βασικό κεφάλαιο όλων των πληθωριστικών μοντέλων. Η περαιτέρω διερεύνηση του φαινομένου διάσπασης κενού αποτελεί σημείο κλειδί για την εις βάθος κατανόηση της πληθωριστικής διαδικασίας.

Στην εργασία αυτή, θα μελετήσουμε το φαινόμενο διάσπασης κενού, θεωρώντας αρχικά την απλούστερη περίπτωση της κίνησης ενός κβαντικού σωματιδίου σε ένα μονοδιάστο δυναμικό και έπειτα, γενικεύοντας, στη θεωρία πεδίου απουσία και παρουσία βαρύτητας.

Στο Κεφάλαιο (2), παρουσιάζεται μία εισαγωγή στο φαινόμενο σήραγγας στην Κβαντική Μηχανική μέσω της προσέγγισης WKB και του φορμαλισμού των ολοκληρωμάτων διαδρομών. Θα δούμε ότι ο ρυθμός διάσπασης εξαρτάται από την Ευκλείδεια δράση της κλασικής λύσης. Συγκεκριμένα, θα εξάγουμε μία ακριβή έκφραση του ρυθμού διάσπασης στην ημικλασική προσέγγιση, μέσω του φανταστικού διορθωτικού όρου που εμφανίζεται στην ενέργεια της μετασταθούς κατάστασης.

Στο Κεφάλαιο (3), γενικεύουμε τη μεθοδολογία του προηγούμενου κεφαλαίου στην περίπτωση ενός βαθμωτού πεδίου στον επίπεδο χωρόχρονο. Θα δούμε πως, λόγω διατήρησης της ενέργειας, η μετάβαση από τη μεταστατή στην ευσταθή κατάσταση δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί παντού ταυτόχρονα, οπότε η διάσπαση κενού έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μίας φυσικής αληθούς κενού μέσα σε περιβάλλον ψευδούς κενού. Επιπλέον, θα εξετάσουμε τη γνωστότερη προσέγγιση για την εξαγωγή αναλυτικών εκφράσεων του ρυθμού διάσπασης, την προσέγγιση λεπτού τείχους (Thin-Wall Approximation). Θα επιλύσουμε, επίσης, τις εξισώσεις αριθμητικά και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με αυτά που προβλέπει η προσέγγιση λεπτού τείχους.

Στο Κεφάλαιο (4), εξετάζουμε τις επιπτώσεις της βαρύτητας στη διάσπαση κενού, ανάλογα με την τιμή της κοσμολογικής σταθεράς. Θα συμπεράνουμε πως υπάρχουν

διακυμάνσεων, μπορεί να υποστεί αλλαγή φάσης και να βρεθεί σε μία νέα ευσταθή κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας.

δύο διαφορετικών τοπολογιών κλασικές λύσεις. Η πρώτη αντιστοιχεί σε κλειστή πολλαπλότητα και είναι τοπολογικά ισοδύναμη με έναν Ευκλείδειο χώρο de Sitter. Η δεύτερη αντιστοιχεί σε ανοικτή πολλαπλότητα και είναι τοπολογικά ισοδύναμη με έναν επίπεδο Ευκλείδειο χώρο ή έναν Ευκλείδειο χώρο de Anti-Sitter. Επειδή ο χωρόχρονος για μία κλειστή πολλαπλότητα είναι πεπερασμένος, εμφανίζονται δύο ασυνήθιστες λύσεις. Μία μη δυναμική, στατική λύση, γνωστή ως Hawking-Moss και μία που αντιστοιχεί στη μετάβαση από το αληθές στο ψευδές κενό. Και οι δύο αυτές λύσεις είναι δυνατές λόγω της θερμικής φύσης του χώρου de Sitter. Στη συνέχεια, θα γενικεύσουμε την προσέγγιση λεπτού τείχους και θα εξάγουμε αναλυτικές εκφράσεις του ρυθμού διάσπασης ³. Τέλος, θα επιλύσουμε τις εξισώσεις αριθμητικά χρησιμοποιώντας έναν κώδικα Mathematica και θα εξάγουμε ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με τη συμπεριφορά και την ερμηνεία των λύσεων, καθώς και για τον ρυθμό διάσπασης.

³Αναφερόμαστε μόνο στο εκθετικό μέρος του ρυθμού διάσπασης. Όπως θα επισημάνουμε στη συνέχεια, παρουσία βαρύτητας ο υπολογισμός του μη εκθετικού όρου είναι πολύ δύσκολος.

Κεφάλαιο 2

Διάσπαση κενού στην Κβαντική Μηχανική

2.1 Το φαινόμενο σήραγγας μέσω της προσέγγισης WKB

Το πιο συνηθισμένο εργαλείο για τη μελέτη του φαινομένου σήραγγας στην Κβαντομηχανική, στο ημικλασικό όριο, είναι η προσέγγιση WKB. Μία πολύ σύντομη ανασκόπηση της προσέγγισης αυτής θα μας βοηθήσει αργότερα να κατανοήσουμε καλύτερα τα αποτελέσματα που θα εξάγουμε μέσω του φορμαλισμού των ολοκληρωμάτων διαδρομών.

Η μέθοδος WKB μας παρέχει μία μέθοδο προσεγγιστικού υπολογισμού του συντελεστή διέλευσης T , της πιθανότητας διέλευσης, δηλαδή, ενός κβαντικού σωματιδίου μέσω ενός φράγματος δυναμικού $V(x)$, του οποίου το σχήμα αλλάζει με την απόσταση (Zettili, 2009).

Βασικό στοιχείο στην ανάλυση αυτή είναι τα κλασικά σημεία αναστροφής. Υποθέτοντας πως ένα προσπίπτον σωματίδιο έχει ενέργεια E , σημεία αναστροφής είναι τα σημεία, στα οποία η κινητική ενέργεια K μηδενίζεται, δηλαδή: $V = E$. Ορίζουν, δηλαδή, τα σύνορα μεταξύ περιοχών, όπου, κλασικά, επιτρέπεται η ύπαρξη του σωματιδίου, με $E \geq V$, από περιοχές, όπου απαγορεύεται δηλαδή όπου μόνο κβαντικά σωματίδια που διέρχονται του φράγματος μπορούν να βρεθούν, με $E < V$.

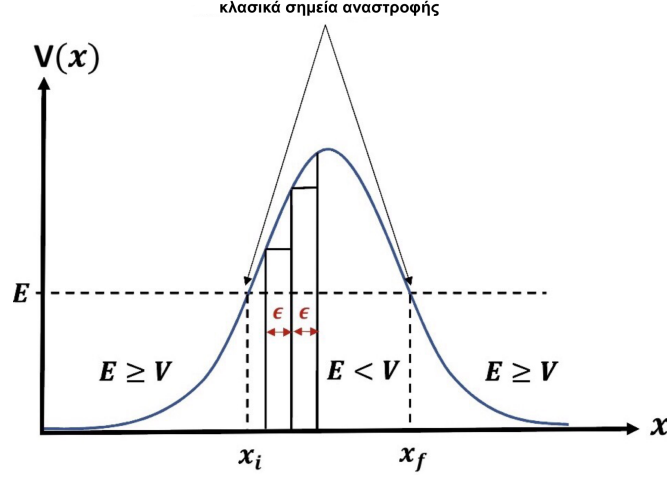
Η βασική υπόθεση της μεθόδου είναι ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε προσεγγιστικά το δυναμικό $V(x)$ ως μία σειρά από τετραγωνικά φράγματα εύρους ϵ (σχήμα (2.1)). Συνεπώς, θα έχουμε δύο λύσεις της εξίσωσης Schrödinger για τις δύο προαναφερθείσες περιοχές και, χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες στα κλασικά σημεία αναστροφής, εκμεταλλευόμεστε τα γνωστά αποτελέσματα για τη διέλευση δια μέσου ενός τετραγωνικού φράγματος δυναμικού. Ολοκληρώνοντας στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$ και $x \rightarrow \infty$, βρίσκουμε μία έκφραση για το συντελεστή διέλευσης T ενός σωματιδίου που προσπίπτει σε ένα φράγμα δυναμικού $V(x)$:

$$T \approx e^{-B}[1 + \mathcal{O}(\hbar)], \quad (2.1)$$

όπου

$$B = 2 \int_{x_i}^{x_f} dx \sqrt{2m[V(x) - E]}, \quad (2.2)$$

και $x = x_i$, $x = x_f$ τα κλασικά σημεία αναστροφής. Η σχέση (2.1) εκφράζει το πλάτος πιθανότητας μετάβασης δια μέσου του φράγματος μέσω ενός ολοκληρώματος πάνω στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή, το οποίο ονομάζεται ολοκλήρωμα διέλευσης μέσω του φράγματος (barrier penetration integral) (Wickens, 2017).

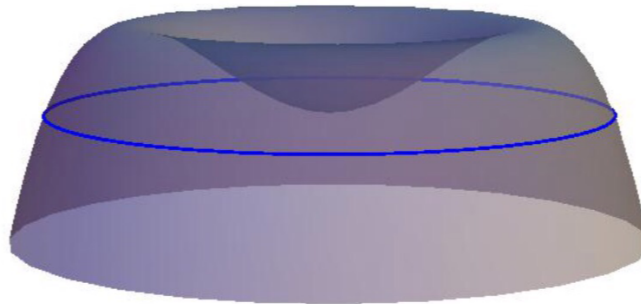


Σχήμα 2.1: Η προσέγγιση WKB για το φαινόμενο σήραγγας (Wickens, 2017).

Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να γενικευθεί στην περίπτωση πολλών βαθμών ελευθερίας $(x^1, x^2, \dots, x^n) = \vec{x}$. Η Λαγκρανζιανή που περιγράφει τη γενική αυτή περίπτωση είναι:

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 - V(\vec{x}). \quad (2.3)$$

Ενδιαφερόμαστε για τη διέλευση από ένα αρχικό σημείο, που είναι τοπικό ελάχιστο του δυναμικού, μέσω της κλασικά απαγορευμένης περιοχής. Σε αντίθεση με το μονοδιάστατο πρόβλημα, όπου το μόνο που είχαμε να κάνουμε ήταν να υπολογίσουμε την πιθανότητα να φτάσει το σωματίδιο στην άλλη πλευρά του φράγματος, στην περίπτωση των πολλών διαστάσεων, το αρχικό σημείο περιβάλλεται από πολλά φράγματα, ένα για κάθε βαθμό ελευθερίας. Υπάρχουν, δηλαδή, πολλά σημεία με ίση ενέργεια με το αρχικό σημείο, στα οποία το σωματίδιο μπορεί να βρεθεί (η μπλε γραμμή στο σχήμα (2.2)). Επομένως, δε μας αρκεί να υπολογίσουμε το πλάτος πιθανότητας διέλευσης μέσω του φράγματος, αλλά πρέπει να προσδιορίσουμε και το πιθανότερο σημείο, από το οποίο το σωματίδιο θα διαφύγει από την άλλη πλευρά του δυναμικού.



Σχήμα 2.2: Πιθανά σημεία διαφυγής από φράγμα δυναμικού σε πολλές διαστάσεις (Masoumi, 2013).

Η γενίκευση της προσέγγισης WKB για την αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος έγινε από τους Banks, Bender και Wu (Banks et al., 1973; Banks and Bender, 1973). Η μέθοδός τους βασίζεται στην εύρεση της πιο πιθανής διαδρομής διαφυγής (most probable escape path (MPEP)). Κάθε διαδρομή P που διαπερνά το φράγμα μπορεί αναπαρασταθεί ως μία τροχιά $\vec{x}(s)$, όπου s η παράμετρος που ορίζεται μέσω της:

$$ds^2 = \sum_{j=1}^n (dx^j)^2 \equiv d\vec{x}^2, \quad (2.4)$$

με την αρχική συνθήκη $\vec{x}(0) = \vec{x}_i$. Το τελικό σημείο $\vec{x}(s_f) = \vec{x}_f$ δεν είναι προσδιορισμένο εκ των προτέρων. Εχμεταλλευόμενοι την παραμετροποίηση, αντιμετωπίζουμε τη διαδρομή ως ένα μονοδιάστατο σύστημα και ορίζουμε το, εξαρτώμενο από τη διαδρομή, ολοκλήρωμα διέλευσης μέσω του φράγματος:

$$B[P] = 2 \int_0^{s_f} ds \sqrt{2m[V(\vec{x}) - E]}, \quad (2.5)$$

με $E = V(\vec{x}_i)$. Η MPEP θα είναι η διαδρομή που ελαχιστοποιεί το $B[P]$ και το πέρας της το πιθανότερο σημείο διαφυγής από το φράγμα. Σύμφωνα με τα παραπάνω, καταλήγουμε ότι το πλάτος μετάβασης θα δίνεται από:

$$T \approx Ae^{-B}[1 + \mathcal{O}(\hbar)], \quad (2.6)$$

όπου A ένας συντελεστής που πρέπει να προσδιοριστεί.

Στη συνέχεια, θα επικεντρωθούμε στη μελέτη του φαινομένου σήραγγας, μέσω του φορμαλισμού των Ευκλείδειων ολοκληρωμάτων διαδρομών και θα επανέλθουμε αργότερα στο ολοκλήρωμα διέλευσης μέσω του φράγματος όταν θα χρειαστεί να διευκρινήσουμε τη φυσική ερμηνεία των Ευκλείδειων λύσεων και να ερμηνεύσουμε το πρόβλημα της αρνητικής ιδιοτιμής (βλ. Κεφάλαιο (2.3.3)).

2.2 Ο φορμαλισμός των Ευκλείδειων ολοκληρωμάτων διαδρομών

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, ο εκθέτης στο πλάτος μετάβασης δια μέσου ενός φράγματος δυναμικού μπορεί να εξαχθεί μέσω της προσέγγισης WKB. Ωστόσο, η γενίκευση της μεθόδου αυτής στα πλαίσια της ΚΘΠ είναι ένα εγχείρημα αρκετά δύσκολο. Για αυτόν τον λόγο, στα επόμενα κεφάλαια, θα προσεγγίσουμε το φαινόμενο της σήραγγας και της διάσπασης κενού ακολουθώντας τη μεθοδολογία του S. Coleman (Coleman, 1979), η οποία έχει το μεγάλο πλεονέκτημα της εύκολης γενίκευσής της στη θεωρία πεδίου.

Βασικό εργαλείο της μεθοδολογίας του Coleman είναι ο φορμαλισμός της Κβαντικής Μηχανικής μέσω των ολοκληρωμάτων διαδρομών του Feynmann. Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε το φαινόμενο αυτό στην περίπτωση ενός βαθμωτού πεδίου, θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση ενός σωματιδίου σε μία διάσταση παρουσία ενός δυναμικού.

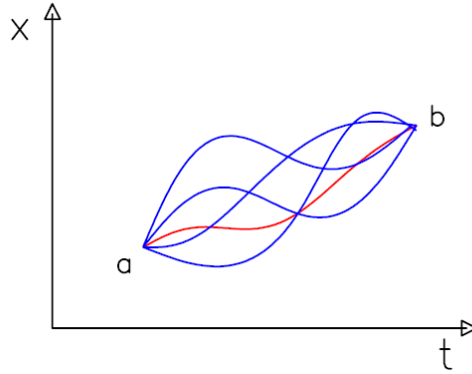
Ένα κβαντικό σωματίδιο μοναδιαίας μάζας κινούμενο σε μία διάσταση μέσα σε ένα δυναμικό $V(x)$, για το χρονικό διάστημα $-T/2$ έως $T/2$, έχει δράση:

$$S = \int_{-T/2}^{T/2} dt L = \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right], \quad (2.7)$$

όπου L είναι η Λαγκρανζιανή. Μπορούμε να εκφράσουμε το πλάτος πιθανότητας για τη μετάβαση από την κατάσταση $(x_i, -T/2)$ στην κατάσταση $(x_f, T/2)$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ολοκληρωμάτων διαδρομών:

$$\langle x_f | e^{-iHT/\hbar} | x_i \rangle = N \sum_{\text{paths}} e^{iS[x(t)]/\hbar} = N \int D[x(t)] e^{iS[x(t)]/\hbar}, \quad (2.8)$$

όπου H είναι η Χαμιλτονιανή, N η σταθερά κανονικοποίησης και το $D[x(t)]$ συμβολίζει την ολοκλήρωση σε όλες τις διαδρομές (σχήμα (2.3)).



Σχήμα 2.3: Μετάβαση κβαντικού σωματιδίου από το σημείο a στο σημείο b . Η κόκκινη γραμμή αντιστοιχεί στην κλασική διαδρομή (Rosenfelder, 2012).

2.2.1 Στροφή Wick και Ευκλείδειος χωρόχρονος

Για τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος θα εφαρμόσουμε την ημικλασική προσέγγιση (semi-classical approximation) σύμφωνα με την οποία κάθε επιτρεπτή διαδρομή εκφράζεται ως άθροισμα της κλασικής διαδρομής και των κβαντικών διορθώσεων.

Ωστόσο, δεν υπάρχει κλασική περιγραφή για την κίνηση ενός σωματιδίου με σταθερή ενέργεια E μέσα σε ένα κλασικά απαγορευμένο φράγμα δυναμικού με $V > E$. Το φαινόμενο σήραγγας είναι ένα καθαρά κβαντικό φαινόμενο.

Για τον λόγο αυτό, κάνουμε μία αναλυτική συνέχιση στη χρονική συντεταγμένη, γνωστή ως στροφή Wick (Wick rotation), μέσω της οποίας ο άξονας του χρόνου περιστρέφεται κατά 90° στο μιγαδικό επίπεδο:

$$t \rightarrow -i\tau, \quad (2.9)$$

όπου το τ ονομάζεται Ευκλείδειος χρόνος.

Υπάρχουν δύο λόγοι για τους οποίους κάνουμε αυτόν τον μετασχηματισμό. Πρώτον, διότι θα οδηγήσει σε ένα ενεργό δυναμικό που θα επιτρέπει κλασικές λύσεις. Και επιπλέον, επειδή ο εκθετικός όρος στο ημικλασικό όριο θα γίνει πραγματικός αριθμός, με αποτέλεσμα να μας δώσει τη δυνατότητα να ερμηνεύσουμε το φαινόμενο

της διάσπασης του κενού (Nicholas, 2014). Και τα δύο θα φανούν αφού δείξουμε πώς η μετάβαση στον Ευκλείδειο χρόνο επηρεάζει τη δράση.

Κάνοντας την εναλλαγή $t \rightarrow -i\tau$, η σχέση (2.8) γράφεται:

$$\langle x_f | e^{-HT_0/\hbar} | x_i \rangle = N \sum_{paths} e^{-S_E[x(\tau)]/\hbar} = N \int D[x(\tau)] e^{-S_E[x(\tau)]/\hbar}, \quad (2.10)$$

όπου S_E η Ευκλείδεια δράση:

$$S_E = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] = -iS, \quad (2.11)$$

απ' όπου φαίνεται ότι το αποτέλεσμα της αναλυτικής συνέχισης στη δράση είναι η αναστροφή του δυναμικού $V(x)$.

Αναπτύσσοντας το αριστερό μέλος της εξίσωσης (2.10) στη βάση των ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας $H |n\rangle = E |n\rangle$, έχουμε:

$$\langle x_f | e^{-HT_0/\hbar} | x_i \rangle = \sum_n e^{-E_n T_0/\hbar} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle, \quad (2.12)$$

απ' όπου, στο όριο $T_0 \rightarrow \infty$, μπορούμε γράψουμε:

$$\langle x_f | e^{-HT_0/\hbar} | x_i \rangle \approx e^{-E_0 T_0/\hbar} \langle x_f | 0 \rangle \langle 0 | x_i \rangle = e^{-E_0 T_0/\hbar} \psi_0(x_f) \psi_0^*(x_i), \quad (2.13)$$

όπου E_0 και $\psi_0(x)$ η ενέργεια και η κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης αντίστοιχα. Επομένως, βλέπουμε πως στο όριο $T_0 \rightarrow \infty$, η εξίσωση (2.13) δίνει την ενέργεια και την κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης.

2.2.2 Η ημικλασική προσέγγιση

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στον υπολογισμό του δεξιού μέλους της εξίσωσης (2.10). Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα διαδρομών στο ημικλασικό όριο, σύμφωνα με το οποίο κάθε διαδρομή εκφράζεται ως άθροισμα της κλασικής διαδρομής $\bar{x}(\tau)$ και μίας μικρής διαταραχής $\delta x(\tau)$:

$$x(\tau) = \bar{x}(\tau) + \delta x(\tau), \quad (2.14)$$

και υπακούει στις συνοριακές συνθήκες:

$$x(-T/2) = x_i, \quad x(T/2) = x_f. \quad (2.15)$$

Ως γνωστόν, η πρώτης τάξης μεταβολή της δράσης (την οποία για λόγους συντομίας, εάν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης με τη δράση στο χωρόχρονο Minkowski, θα τη συμβολίζουμε με S) ως προς τη \bar{x}_τ μηδενίζεται:

$$0 = \delta S = S[\bar{x}(\tau) + \delta x(\tau)] - S[\bar{x}(\tau)] = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \left[-\frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} + V'(\bar{x}) \right] \delta x(\tau). \quad (2.16)$$

Η παραπάνω σχέση οδηγεί στην Ευκλείδεια εξίσωση κίνησης:

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2} = V'(\bar{x}). \quad (2.17)$$

Βλέπουμε ότι η εξίσωση αυτή περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου παρουσία ενός αρνητικού δυναμικού $-V(\bar{x})$ (Coleman, 1977). Αυτή είναι η διαδρομή με τη μεγαλύτερη συνεισφορά στον εκθέτη της σχέσης (2.10) (I. Δ. Γιαλαμάς, 2017).

Είναι προφανές, υπό αυτήν την έννοια, ότι η Ενέργεια E , που θα είναι σταθερά της κίνησης, είναι:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau} \right)^2 - V(\bar{x}) = \text{σταθ}. \quad (2.18)$$

Σημείωση σχετικά με την κλασική δράση

Όπως αναφέραμε, η μεγαλύτερη συνεισφορά στο ολοκλήρωμα διαδρομών προέρχεται από τη διαδρομή για την οποία η δράση λαμβάνει ακρότατη τιμή, δηλαδή την κλασική διαδρομή.

Το παραπάνω μπορεί να εξηγηθεί παρατηρώντας τη δομή του ολοκληρώματος διαδρομών της σχέσης (2.8) ή της Ευκλείδειας εκδοχής του στη σχέση (2.10). Η έκφραση αυτή δείχνει ότι ένα κβαντικό σωματίδιο, κατά την πορεία του από μία θέση σε μία άλλη, παίρνει όλους τους δυνατούς δρόμους μεταξύ αυτών των δύο θέσεων.

Ας δούμε όμως συγκεκριμένα πώς συνεισφέρουν στο ολοκλήρωμα όλοι αυτοί οι διαφορετικοί δρόμοι. Με μια πρώτη ματιά, παρατηρούμε ότι η συνεισφορά όλων των δρόμων που αναπαριστώνται με τους μιγαδικούς αριθμούς ίδιων μέτρων, $e^{iS[x_1]/\hbar}$, $e^{iS[x_2]/\hbar}$ κ.ο.κ είναι ισότιμη.

Αυτό, ωστόσο, δεν είναι σωστό, καθώς πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν τη συνδυαστική συνεισφορά των διαδρομών. Για να δούμε πώς αυτή λειτουργεί, θεωρούμε δύο γειτονικούς δρόμους $x(t)$ και $x'(t)$, με $x'(t) = x(t) + \eta(t)$ και αναπτύσσουμε τη δράση γύρω από το δρόμο $x(t)$:

$$S[x'(t)] = S[x(t) + \eta(t)] = S[x(t)] + \int dt \eta(t) \frac{\delta S[x(t)]}{\delta x(t)} + \mathcal{O}(\eta^2). \quad (2.19)$$

Η συνδυασμένη συνεισφορά των δύο παραπάνω διαδρομών, αγνοώντας διορθώσεις $2^{\text{ης}}$ τάξης και άνω, είναι:

$$A \simeq e^{iS[x(t)]/\hbar} \left(1 + e^{\frac{i}{\hbar} \int dt \eta(t) \frac{\delta S[x(t)]}{\delta x(t)}} \right), \quad (2.20)$$

απ' όπου φαίνεται η διαφορά φάσης που καθορίζει το συνδυασμό των δύο συνεισφορών είναι ίση με $\frac{1}{\hbar} \int dt \eta(t) \frac{\delta S[x(t)]}{\delta x(t)}$. Δηλαδή, όσο μικρότερη είναι η τιμή του \hbar (με άλλα λόγια, προσεγγίζοντας το κλασικό όριο), τόσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο διαδρομών, ανεξαρτήτως από το πόσο κοντά αυτές βρίσκονται. Συγκεκριμένα, λαμβάνει χώρα καταστροφική συμβολή, αφού $e^{i\infty} \sim 0$, με αποτέλεσμα την αλληλοαναιρέση της συνεισφοράς των διαδρομών.

Ωστόσο, υπάρχει μία τροχιά $\bar{x}(t)$, η κλασική τροχιά, η οποία είναι στάσιμο σημείο της δράσης:

$$\frac{\delta S[\bar{x}(t)]}{\delta \bar{x}(t)} = 0. \quad (2.21)$$

Είναι σαφές ότι η κυρίαρχη συνεισφορά στο πλάτος μετάβασης προέρχεται από τροχιές $x(t)$ γύρω από την κλασική, αφού για αυτές η δράση, άρα και η φάση, δεν αλλάζει σημαντικά:

$$S[x(t)] = S[\bar{x}(t) + \eta(t)] = S[\bar{x}(t)] + \mathcal{O}(\eta^2), \quad (2.22)$$

με αποτέλεσμα την εποικοδομητική συμβολή (B. Κυριάκος, 2012; Das, 1993).

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι στο ημικλασικό όριο στο οποίο θα επικεντρωθούμε, η κίνηση ενός σωματιδίου, όπως περιγράφεται από τη σχέση (2.17), θα είναι αυτή που θα περιγράφει την $1^{\text{η}}$ τάξης προσέγγιση του φαινομένου σήραγγας στον Ευκλείδειο χώρο σε μία διάσταση. Για να βρούμε τις πρώτες κβαντικές διορθώσεις, θα πρέπει λάβουμε υπ' όψιν και τους όρους $2^{\text{η}}$ τάξης στο ανάπτυγμα της δράσης.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, μία αυθαίρετη διαδρομή $x(\tau)$ που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (2.15). Τότε η σχέση (2.14) μπορεί να γραφεί ως:

$$x(\tau) = \bar{x}(\tau) + \sum_n c_n x_n(\tau), \quad (2.23)$$

όπου x_n είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau x_n(\tau) x_m(\tau) = \delta_{nm}, \quad x_n(\pm T_0/2) = 0. \quad (2.24)$$

Το μέτρο του ολοκληρώματος $[Dx(\tau)]$ μπορεί να εκφραστεί ως (Callan et al., 1977):

$$[Dx(\tau)] = \prod_n (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} dc_n, \quad (2.25)$$

όπου αλλάξαμε τις μεταβλητές ολοκλήρωσης από $x(\tau)$ στους συντελεστές των συναρτήσεων βάσης. Ο συντελεστής $(2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}}$ δεν έχει εν γένει κάποιο συγκεκριμένο νόημα, μέχρις ότου οριστεί ο συντελεστής κανονικοποίησης N .

Θέλουμε, τώρα, να βρούμε την έκφραση των πρώτων κβαντικών διορθώσεων για το πλάτος μετάβασης, στο ημικλασικό όριο, όπου η δράση είναι μεγάλη σε σύγκριση με το \hbar . Για αυτόν τον λόγο, υπολογίζουμε, όπως αναφέραμε προηγουμένως, το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.10), αναπτύσσοντας τη δράση γύρω από την κλασική τροχιά, κρατώντας όρους μέχρι $2^{\text{η}}$ τάξης:

$$S[\bar{x}(\tau) + \delta x(\tau)] = S[\bar{x}] + \frac{1}{2}(\delta x)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_{x=\bar{x}} + \frac{1}{2}(\delta \dot{x})^2 \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{x}^2} \Big|_{x=\bar{x}}, \quad (2.26)$$

όπου $\delta x = \sum_n c_n x_n(\tau)$. Εισάγοντας τη σχέση (2.11) στην παραπάνω, έχουμε:

$$\begin{aligned}
S[\bar{x}(\tau) + \delta x(\tau)] &\approx S[\bar{x}] + \frac{1}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \delta x V''(\bar{x}) \delta x + \left(\frac{1}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(\frac{d(\delta x)}{d\tau} \right)^2 \right) \\
&= S[\bar{x}] + \frac{1}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \delta x V''(\bar{x}) \delta x + \left(\frac{1}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \frac{d}{d\tau} \left[\delta x \frac{d}{d\tau} (\delta x) \right] - \frac{1}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta x \frac{d^2}{d\tau^2} (\delta x) \right) \\
&= S[\bar{x}] + \frac{1}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \delta x V''(\bar{x}) \delta x - \left(\frac{1}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \delta x \frac{d^2}{d\tau^2} (\delta x) \right) \\
&= S[\bar{x}] + \frac{1}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \delta x \left[V''(\bar{x}) - \frac{d^2}{d\tau^2} \right] \delta x(\tau),
\end{aligned} \tag{2.27}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες και τις συνοριακές συνθήκες $\delta[x(\pm\tau/2)] = 0$. Αν ορίσουμε τον τελεστή $S''[\bar{x}(\tau)]$:

$$S''(\bar{x}) = -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}), \tag{2.28}$$

που έχει τη μορφή του μονοδιάστατου τελεστή Schrödinger ([Marino, 2015](#)), η σχέση (2.27) γράφεται:

$$S[\bar{x}(\tau) + \delta x(\tau)] \approx S(\bar{x}) + \frac{1}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \delta x \left[S''[\bar{x}] \right] \delta x(\tau). \tag{2.29}$$

Μπορούμε, στο σημείο αυτό, να εκφράσουμε τον τελεστή $S''(\bar{x})$ μέσω ενός πλήρους συνόλου ιδιοσυναρτήσεων που επιλέγουμε να είναι οι συναρτήσεις βάσης $x_n(\tau)$. Η εξίσωση ιδιοτιμών, τότε, θα είναι:

$$S''(\bar{x})x_n(\tau) = \lambda_n x_n(\tau). \tag{2.30}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις $\delta x = \sum_n c_n x_n(\tau)$ και (2.30) στην (2.29), έχουμε:

$$\begin{aligned}
S[\bar{x}(\tau) + \delta x(\tau)] &\approx S(\bar{x}) + \frac{1}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \left(\sum_m c_m x_m(\tau) \right) \left[S''(\bar{x}) \right] \left(\sum_n c_n x_n(\tau) \right) \\
&= S(\bar{x}) + \frac{1}{2} \sum_n \sum_m c_n c_m \lambda_n \delta_{nm} \\
&= S(\bar{x}) + \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n c_n^2,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

όπου λάβαμε υπ' όψιν τη σχέση ορθοκανονικότητας (2.24).

Έχοντας μία έκφραση για την Ευκλείδεια δράση, μπορούμε να υπολογίσουμε το πλάτος μετάβασης:

$$\begin{aligned}
 \langle x_f | e^{-HT_0/\hbar} | x_i \rangle &= N \int \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{S(\bar{x})}{\hbar} - \frac{1}{2\hbar} \sum_n l_n c_n^2 + \dots} \\
 &= N e^{-S(\bar{x})/\hbar} \prod_n \lambda_n^{-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\hbar^3)
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Για την εξαγωγή της παραπάνω σχέσης, χρησιμοποιήσαμε το Γκαουσιανό ολοκλήρωμα:

$$\int dc_n e^{-\frac{1}{2\hbar} l_n c_n^2} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\lambda_n}}.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι το γινόμενο των ιδιοτιμών ενός τελεστή ισούται με την ορίζουσα του τελεστή αυτού:

$$\prod_n \lambda_n^{-\frac{1}{2}} = [\det(S''(\bar{x}))]^{-1/2} = [\det(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))]^{-1/2}. \tag{2.33}$$

Συνεπώς, η σχέση (2.32) γράφεται:

$$\begin{aligned}
 \langle x_f | e^{-HT_0/\hbar} | x_i \rangle &= N e^{-S(\bar{x})/\hbar} [\det(S''(\bar{x}))]^{-1/2} \\
 &= N e^{-S(\bar{x})/\hbar} [\det(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))]^{-1/2},
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

ενώ στο όριο $T_0 \rightarrow \infty$, η παραπάνω σχέση σε συνδυασμό με τη (2.13) δίνει:

$$\begin{aligned}
 \langle x_f | e^{-HT_0/\hbar} | x_i \rangle &= e^{-E_0 T_0/\hbar} \psi_0(x_f) \psi_0^*(x_i) \\
 &= N e^{-S(\bar{x})/\hbar} [\det(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))]^{-1/2}.
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Είναι σημαντικό, σε αυτό το σημείο, να τονίσουμε τα εξής: πρώτον, το αποτέλεσμα της σχέσης (2.34) δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη μορφή των ιδιοσυναρτήσεων, αλλά μόνο των ιδιοτιμών. Δεύτερον, σε αντίθεση με περιπτώσεις που θα συναντήσουμε αργότερα, θεωρήσαμε πως όλες οι ιδιοτιμές λ_n είναι θετικές. Τέλος, ο παράγοντας κανονικοποίησης N δεν έχει ακόμα ορισθεί, καθώς εξαρτάται από τη μορφή του δυναμικού (Novikov et al., 1999).

Από τα παραπάνω, γίνεται εμφανές το κομβικό αποτέλεσμα της ανάλυσής μας. Η θεμελιώδης κατάσταση, στο όριο που ο Ευκλείδειος χρόνος T_0 είναι μεγάλος, έχει τη μεγαλύτερη συνεισφορά στο πλάτος μετάβασης ενός σωματιδίου, με Χαμιλτονιανή H , από μία θέση x_i σε μία άλλη x_f του Ευκλείδειου χώρου. Επιπλέον, το πλάτος αυτό μπορεί άμεσα να υπολογιστεί στο ημικλασικό όριο, όπου η Ευκλείδεια δράση $S(\bar{x})$ είναι μεγάλη σε σχέση με το \hbar .

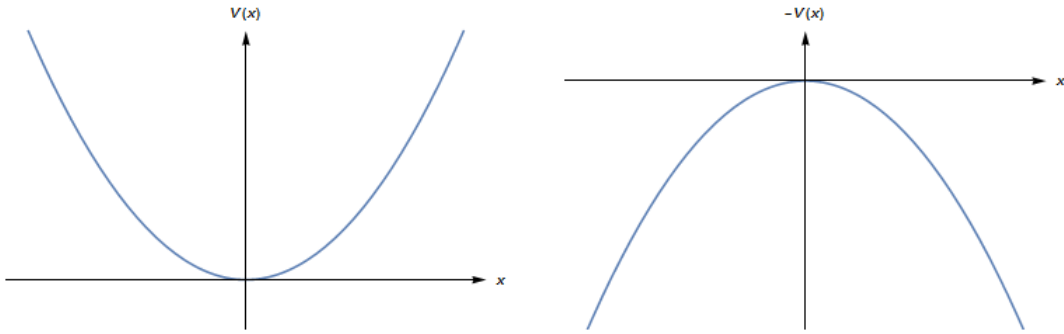
Είδαμε ότι η Ευκλείδεια δράση $S(\bar{x})$ περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου που βρίσκεται μέσα σε ένα αρνητικό δυναμικό $-V(x)$. Η κίνηση αυτή περιγράφεται από ένα σύνολο εξισώσεων (ή προφανώς από μία για τη μονοδιάστατη περίπτωση) οι οποίες μπορούν να επεκταθούν αναλυτικά πίσω στο χώρο Minkowski. Με άλλα λόγια, με μία απλή αναστροφή του δυναμικού $V(x)$, αποκαλύπτεται μία σειρά νέων λύσεων για την κίνηση του σωματιδίου, που προηγουμένως δεν ήταν φανερές. Τέτοιες λύσεις ονομάζονται instantons και είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την περιγραφή του φαινομένου σήραγγας (Wickens, 2017).

Στη συνέχεια, θα δούμε πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο παραπάνω φορμαλισμός σε συγκεκριμένα παραδείγματα δυναμικού.

2.3 Παραδείγματα Ευκλείδειων λύσεων

2.3.1 Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής

Θα δείξουμε, τώρα, πώς εφαρμόζεται ο φορμαλισμός που αναπτύξαμε στο απλό παράδειγμα του μονοδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή με το γνωστό δυναμικό $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$, που έχει ένα μόνο ελάχιστο (σχήμα (2.4)).



Σχήμα 2.4: Το δυναμικό $V(x)$ και το ανεστραμμένο δυναμικό $-V(x)$ του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

Βασιζόμενοι στη διαίσθησή μας, αναμένουμε ότι η λύση θα είναι περιοδική, οπότε επιλέγουμε τις συνοριακές συνθήκες $x(\pm T_0/2) = 0$. Από τη μορφή του ανεστραμμένου δυναμικού, είναι προφανές ότι υπάρχει μόνο μία λύση που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες, η οποία είναι:

$$\bar{x}(\tau) = 0, \quad (2.36)$$

σύμφωνα με την οποία το σωματίδιο παραμένει στο μέγιστο του $-V(x)$ για πάντα. Για αυτή την τροχιά, η Ευκλείδεια δράση μηδενίζεται (σχέση (2.11)). Συνεπώς, από τη σχέση (2.34) έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle x_f = 0 | e^{-HT_0/\hbar} | x_i = 0 \rangle &= N [\det(S''(0))]^{-1/2} \\ &= N [\det(-\partial_\tau^2 + V''(0))]^{-1/2} \\ &= N [\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

όπου $\omega^2 = V''(x)$.

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα του τελεστή, πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών (2.30):

$$\ddot{x}_n + (\lambda_n - \omega^2)x_n = 0, \quad \text{με } x(\pm T_0/2) = 0. \quad (2.38)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες είναι οι $x_n = \cos\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right)$ και $x_n = \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right)$ για περιττό και άρτιο n αντίστοιχα. Συνεπώς, από τα παραπάνω, οι ιδιοτιμές είναι:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{T_0^2} + \omega^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} N[\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)]^{-1/2} &= N \prod_n \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \\ &= N \prod_n \left(\frac{n^2 \pi^2}{T_0^2} + \omega^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= N \prod_n \left(\frac{n^2 \pi^2}{T_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \prod_n \left(1 + \frac{\omega^2 T_0^2}{n^2 \pi^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ο πρώτος όρος της τελευταίας γραμμής δεν εξαρτάται από το δυναμικό, καθώς δεν περιλαμβάνει το ω . Μπορούμε, λοιπόν, να τον συσχετίσουμε με την κίνηση ενός ελεύθερου σωματιδίου με Χαμιλτονιανή $H = \frac{p^2}{2}$ (Novikov et al., 1999):

$$\begin{aligned} N \prod_n \left(\frac{n^2 \pi^2}{T_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} &= \langle x_f = 0 | e^{-\hat{p}^2 T_0 / 2\hbar} | x_i = 0 \rangle \\ &= \sum_n |\langle p_n | 0 \rangle|^2 e^{-\frac{p_n^2 T_0}{2\hbar}} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{-\frac{p^2 T_0}{2\hbar}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar T_0}}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανάλυση της μονάδας $\int dp |p\rangle \langle p| = 1$ και τη γνωστή σχέση $\langle p | 0 \rangle = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}}$ και στην τελευταία γραμμή υπολογίσαμε το ολοκλήρωμα Gauss. Η παραπάνω έκφραση μπορεί να θεωρηθεί και ως ορισμός του παράγοντα κανονικοποίησης N .

Για τον δεύτερο όρο της σχέσης (2.40) θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$$\pi y \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y^2}{n^2} \right) = \sinh \pi y,$$

με $y = \omega T_0 / \pi$ (Novikov et al., 1999). Επομένως:

$$\prod_n \left(1 + \frac{\omega^2 T_0^2}{n^2 \pi^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sinh \omega T_0}{\omega T_0} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.42)$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις (2.41), (2.42) και (2.40) στην (2.37) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \langle 0|e^{-HT_0/\hbar}|0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar T_0}} \left(\frac{\sinh \omega T_0}{\omega T_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega T_0}{2}} (1 - e^{-2\omega T_0})^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega T_0}{2}} (1 + \frac{1}{2}e^{-2\omega T_0} + \dots)^{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Για να βρούμε, τώρα, την ενέργεια και την κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης, παίρνουμε το όριο $T_0 \rightarrow \infty$ (σχέση (2.35)):

$$\begin{aligned}
 \langle 0|e^{-HT_0/\hbar}|0\rangle &= e^{-E_0 T_0/\hbar} \psi_0(0) \psi_0^*(0) \\
 &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega T_0}{2}}.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Από την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στις γνωστές εκφράσεις για την ενέργεια και την κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης του απλού αρμονικού ταλαντωτή:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad |\psi_0(0)|^2 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}. \tag{2.45}$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι ακριβή για την περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή και (μηδενικής τάξης) προσέγγιση για δυναμικά που αποκλίνουν σε μικρό βαθμό από αυτό του αρμονικού ταλαντωτή (μόνο πηγάδι δυναμικού), πχ. για $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \lambda x^4$ (Novikov et al., 1999).

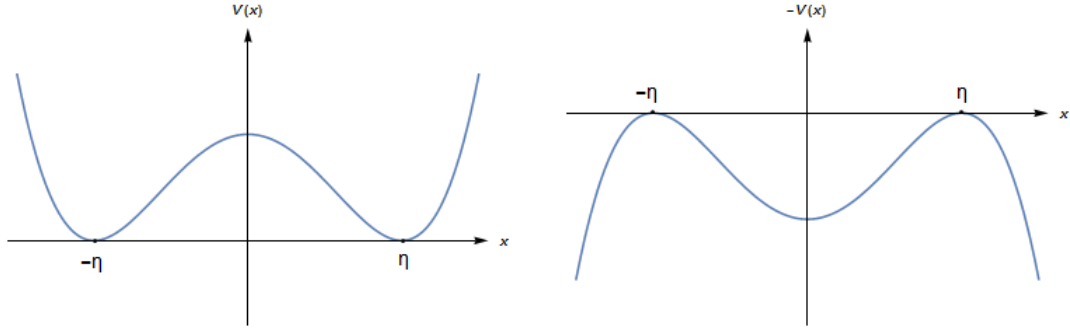
2.3.2 Διπλό πηγάδι δυναμικού και instantons

Στο προηγούμενο παράδειγμα, αναπαράγαμε, στη γλώσσα των ολοκληρωμάτων διαδρομών και του Ευκλείδειου χώρου, ένα από τα πιο θεμελιώδη προβλήματα στη Φυσική - ένα σύστημα που ταλαντώνεται γύρω από μία θέση ισορροπίας. Συγκεκριμένα, λάβαμε υπ' όψιν μικρές ταλαντώσεις (μικρές αποκλίσεις από τη θέση ισορροπίας) και κάναμε το πρώτο βήμα για μία κλασική θεωρία διαταραχών.

Ωστόσο, στην ΚΘΠ, και συγκεκριμένα στην Κβαντική Χρωμοδυναμική, υπάρχουν κάποια φαινόμενα που δεν μπορούν να περιγραφούν υπό το πλαίσιο των μικρών αποκλίσεων από τη θέση ισορροπίας. Με άλλα λόγια, δεν μπορούν να περιγραφούν με ένα ανάπτυγμα της σταθεράς σύζευξης. Είναι, δηλαδή, μη διαταραχτικά φαινόμενα (Novikov et al., 1999).

Το πιο απλό παράδειγμα, στη μελέτη του οποίου η θεωρία διαταραχών αποτυγχάνει, είναι το διπλό πηγάδι δυναμικού. Θεωρούμε τη μονοδιάστατη κίνηση ενός κβαντικού σωματιδίου σε ένα διπλό πηγάδι δυναμικού με δύο εκφυλισμένα ελάχιστα στα σημεία $x = \pm\eta$. Επίσης, υποθέτουμε ότι το δυναμικό είναι συμμετρικό και θέτουμε $V''(\pm\eta) = \omega^2$, όπως στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή (σχήμα (2.5)).

Στην περίπτωση αυτή, υπάρχουν δύο κλασικές θέσεις ισορροπίας. Εάν αγνοήσουμε το γεγονός αυτό, και αναπτύξουμε το δυναμικό γύρω από ένα από τα δύο ελάχιστα, τότε αυτό παίρνει τη μορφή του αρμονικού ταλαντωτή,



Σχήμα 2.5: Διπλό πηγάδι $V(x)$ και ανεστραμμένο διπλό πηγάδι δυναμικού $-V(x)$.

συμπεριλαμβανομένων αναρμονικών όρων 3^{ης} και 4^{ης} τάξης. Μπορούμε, έπειτα, να υπολογίσουμε τις διαταρακτικές διορθώσεις στην κυματοσυνάρτηση και στην ενέργεια, και παρ' όλα αυτά να μην αντιληφθούμε ποτέ την ύπαρξη του άλλου ελάχιστου. Εάν αναπτύσσαμε το δυναμικό γύρω από το άλλο ελάχιστο, θα καταλήγαμε σε ένα ταυτόσημο σύνολο διαταρακτικών διορθώσεων. Λόγω συμμετρίας, οι υπολογισμένες με τη θεωρία διαταραχών ενέργειες των δύο κλασικά ευσταθών σταθμών θα έχουν ακριβώς ίδια τιμή, για κάθε τάξη του αναπτύγματος. Με άλλα λόγια, θα συμπεραίναμε ότι έχουμε δύο εκφυλισμένες θεμελιώδεις στάθμες.

Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι η θεμελιώδης στάθμη δεν είναι εκφυλισμένη. Ένας μη διαταρακτικός διαχωρισμός ενέργειας διαχωρίζει την αληθή θεμελιώδη κατάσταση (η οποία είναι άρτια συνάρτηση του x) από την πρώτη διεγερμένη (η οποία είναι περιττή συνάρτηση του x). Αυτό το φαινόμενο δεν μπορεί να φανεί μέσα από τη θεωρία διαταραχών (MacKenzie, 2000).

Διατυπώνοντάς το διαφορετικά, ενώ στην κλασική περίπτωση αν ένα σωματίδιο είναι παγιδευμένο σε κάποιο ελάχιστο και δεν υπάρχουν εξωτερικές επιδράσεις, όπως θερμικές διεγέρσεις, θα παραμείνει εκεί για πάντα, στην κβαντική περίπτωση, το φαινόμενο σήραγγας μπορεί να επιτρέψει στο σωματίδιο να δραπετεύσει από το ελάχιστο αυτό.

Στην ενότητα αυτή, θα δείξουμε πώς μπορεί να υπολογισθεί ο διαχωρισμός ενέργειας μεταξύ της θεμελιώδους και της πρώτης διεγερμένης στάθμης, χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό των Ευκλείδειων ολοκληρωμάτων διαδρομής.

Όπως έχουμε επισημάνει, την κυρίαρχη συνεισφορά στο ολοκλήρωμα διαδρομών δίνουν οι Ευκλείδειες κλασικές λύσεις. Η εξίσωση κίνησης αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο που κινείται στο αρνητικό δυναμικό $-V(x)$ από το ένα ελάχιστο στο άλλο. Σύμφωνα με την παραπάνω επιλογή των παραμέτρων, η κίνηση περιγράφεται από τη σχέση (2.17) με συνοριακές συνθήκες: $x_i = x(-T_0/2) = -\eta$, $x_f = x(T_0/2) = \eta$. Επιπλέον, για να μπορέσουμε να πάρουμε το όριο $T_0 \rightarrow \infty$, υποχρεούμαστε να θεωρήσουμε ότι το σωματίδιο ξεκινά ακίνητο από το ένα ελάχιστο και καταλήγει ακίνητο στο άλλο: $\dot{x}(\pm T_0/2) = \dot{x}(\pm\eta) = 0$. Σε διαφορετική περίπτωση, η δράση (σχέση (2.11)) θα αποκλίνει. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, λύσεις πεπερασμένης δράσης, για μη πεπερασμένα χρονικά διαστήματα, να έχουν μηδενική ενέργεια: $E = 0$.

Είναι, λοιπόν, προφανές ότι υπάρχουν δύο λύσεις που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες: μία, σύμφωνα με την οποία το σωματίδιο ξεκινά ακίνητο από το η και καταλήγει ακίνητο στο η και μία, με την αντίστροφη φορά. Παρατηρούμε πως εάν κάναμε μία αναλυτική συνέχιση πίσω στον πραγματικό χρόνο, οι λύσεις αυτές περιγράφουν την κίνηση στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή, δηλαδή περιγράφουν το φαινόμενο σήραγγας.

Η αρχή διατήρησης ενέργειας (σχέση (2.18)) για $E = 0$ δίνει:

$$\frac{1}{2}\dot{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) \Rightarrow \dot{\bar{x}} = \sqrt{2V(\bar{x})}. \quad (2.46)$$

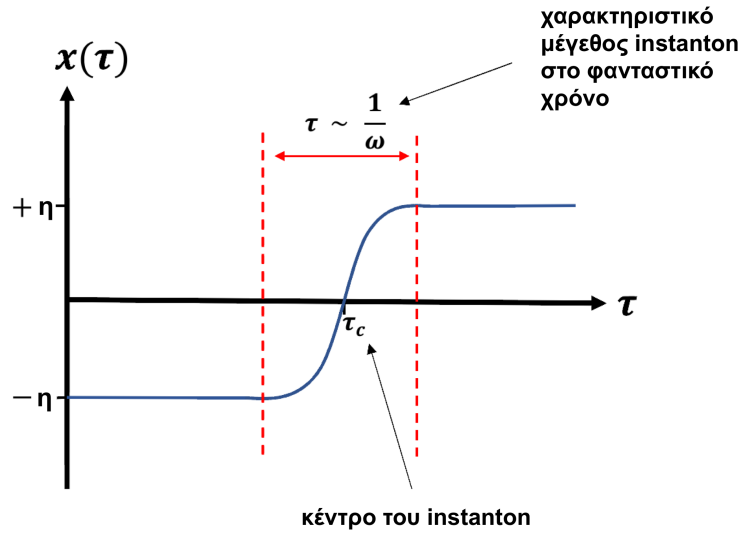
Αναπτύσσοντας κατά Taylor το $V(\bar{x})$ γύρω από το $\bar{x} = \eta$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $V(\eta) = V'(\eta) = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \left[2V(\eta) + 2V'(\eta)(\bar{x} - \eta) + V''(\eta)(\bar{x} - \eta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \omega(\eta - \bar{x}), \end{aligned} \quad (2.47)$$

απ' όπου παίρνουμε:

$$(\eta - \bar{x}) \propto e^{-\omega\tau}. \quad (2.48)$$

Από την παραπάνω σχέση, συμπεραίνουμε ότι η λύση έχει χαρακτηριστικό μέγεθος στον φανταστικό χρόνο $\tau \sim \frac{1}{\omega}$. Είναι, δηλαδή, χρονικά εντοπισμένη. Θα μπορούσε κάποιος να υποθέσει ότι αυτό δεν είναι σωστό, καθώς το σωματίδιο βρίσκεται σε διαφορετικές θέσεις καθώς $\tau \rightarrow \pm\infty$. Ωστόσο, αυτές οι θέσεις, αν και διαφορετικές, είναι φυσικά ισοδύναμες, θεμελιώδεις καταστάσεις. Η λύση περιγράφει μία διάταξη που παρεμβάλλεται μεταξύ των δύο θεμελιωδών καταστάσεων. Δηλαδή, το σύστημα βρίσκεται σε μία θεμελιώδη κατάσταση, εκτός από ένα μικρό χρονικό διάστημα, μία στιγμή (instant). Για αυτόν τον λόγο, τέτοιες λύσεις ονομάζονται *instantons* (σχήμα (2.6)) (MacKenzie, 2000).



Σχήμα 2.6: Η λύση *instanton* σε μία διάσταση (Wickens, 2017).

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.46) στη (2.11), βρίσκουμε τη δράση για το instanton:

$$\begin{aligned}
 S_I = S(\bar{x}) &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \dot{\bar{x}}^2, \quad T_0 \rightarrow \infty \\
 &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau (2V), \quad T_0 \rightarrow \infty \\
 &= \int_{-\eta}^{\eta} dx \sqrt{2V}.
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Θεωρούμε, τώρα, ότι το δυναμικό έχει τη συγκεκριμένη μορφή: $V(x) = \lambda(x^2 - \eta^2)^2$ και επιλέγουμε τις παραμέτρους λ και η , ώστε:

$$8\lambda\eta^2 = \omega^2.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η σχέση (2.46) δίνει:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{x}} = \pm\sqrt{2\lambda}(\eta^2 - \bar{x}^2) &\Rightarrow \bar{x} = \pm\eta \tanh[\sqrt{2\lambda}\eta(\tau - \tau_c)] \\
 \Rightarrow x_I = \bar{x} &= \pm\eta \tanh\left[\frac{\omega}{2}(\tau - \tau_c)\right],
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

η οποία στο όριο $T_0 \rightarrow \infty$ δίνει προφανώς $x_I = \pm\eta$. Η $+\eta$ αντιστοιχεί σε instanton, ενώ η $-\eta$ σε anti-instanton. Για αυτήν τη λύση, είναι εύκολο να υπολογισθεί η δράση του instanton σε κλειστή μορφή:

$$S_I \stackrel{(2.49)}{=} \frac{\eta^2\omega^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{\cosh^4\left[\frac{\omega}{2}(\tau - \tau_c)\right]} = \frac{\omega^3}{12\lambda}. \tag{2.51}$$

Για να υπολογίσουμε το πλάτος μετάβασης, από τη σχέση (2.35), έχουμε ότι για ένα instanton :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \langle \eta | e^{-HT_0/\hbar} | -\eta \rangle = e^{-E_0 T_0/\hbar} \psi_0(\eta) \psi_0^*(-\eta) \\
 &= N e^{-S_I/\hbar} [\det(-\partial_\tau^2 + V''(x_I))]^{-1/2},
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

όπου το instanton x_I είναι στάσιμη διαδρομή της δράσης. Φαίνεται, επίσης, πως έχουμε πάρει το όριο $T_0 \rightarrow \infty$, οπότε οι ιδιοκαταστάσεις θέσης $|\pm\eta\rangle$ δηλώνουν σωματίδια στη θεμελιώδη κατάσταση.

Εάν παρατηρήσουμε, όμως, καλύτερα, διαπιστώνουμε ότι η ιδιοκατάσταση x_1 έχει ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$. Αυτό μπορεί να φανεί ως εξής: Έχουμε:

$$x(\tau) = x_I(\tau + d\tau) = x_I(\tau) + x_I(\tau + d\tau) - x_I(\tau) = x_I(\tau) + \frac{dx_I(\tau)}{d\tau} d\tau + \dots \tag{2.53}$$

Επιπλέον, από την (2.23) για $n = 1$, έχουμε:

$$x(\tau) = x_I(\tau) + c_1 x_1(\tau). \tag{2.54}$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$\frac{dx_I}{d\tau} d\tau = c_1 x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{c_1} \frac{dx_I}{d\tau}. \quad (2.55)$$

Παραγωγίζοντας την Ευκλείδεια εξίσωση κίνησης (2.17):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \left[\frac{d^2 x_I}{d\tau^2} - V'(x_I) \right] = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{d\tau} \left[\frac{d}{d\tau} \frac{dx_I}{d\tau} \right] - \frac{dx_I}{d\tau} \frac{d}{dx} \left[V'(x_I) \right] = 0 \\ \Rightarrow & \left[-\partial_\tau^2 + V''(x_I) \right] \frac{dx_I}{d\tau} = 0 \\ \Rightarrow & S''(x_I) \frac{dx_I}{d\tau} = 0 \\ \Rightarrow & S''(x_I) x_1 = 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

και συγκρίνοντας με την εξίσωση ιδιοτιμών (2.30), βλέπουμε ότι η ιδιοκατάσταση x_1 έχει μηδενική ιδιοτιμή. Επίσης, από τη συνθήκη κανονικοποίησης (2.24), λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} 1 = |x_1|^2 &= \frac{1}{c_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\frac{dx_I}{d\tau} \right)^2 \\ \Rightarrow \quad c_1 &= \sqrt{S_I}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Επομένως, καταλήγουμε ότι η ιδιοκατάσταση με μηδενική ιδιοτιμή (2.55) είναι η:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{S_I}} \frac{dx_I}{d\tau}. \quad (2.58)$$

Η ιδιοκατάσταση με μηδενική ιδιοτιμή προέρχεται από το αναλλοίωτο των εξισώσεων κίνησης ως προς τον φανταστικό χρόνο τ . Ο λόγος είναι ο εξής: Ολοκληρώνοντας τη δράση πάνω σε όλον τον χρόνο τ , και καθώς το instanton είναι εντοπισμένο στον χρόνο, το αποτέλεσμα δε θα επηρεαστεί από το πού βρίσκεται το κέντρο του τ_c . Όπως δείξαμε στη ενότητα (2.2.2), ο τελεστής $S''(x_I)$ δρα πάνω στις αποκλίσεις $dx(\tau)$ από την κλασική τροχιά και επιστρέφει την αντίστοιχη απόκλιση από την κλασική Ευκλείδεια δράση (σχέση (2.31)). Αλλά, αφού μετατοπίσεις του instanton στον φανταστικό χρόνο δεν επηρεάζουν τη δράση, ο τελεστής $S''(x_I)$, καθώς δρα πάνω στην ιδιοκατάσταση x_1 (που σχετίζεται με τις χρονικές μετατοπίσεις)¹, επιστρέφει μηδενική ιδιοτιμή.

Λόγω της ύπαρξης μηδενικής ιδιοτιμής, το γινόμενο των ιδιοτιμών μηδενίζεται, άρα και η ορίζουσα στη σχέση (2.52). Αυτό σημαίνει ότι το πλάτος μετάβασης θα αποκλίνει. Για να αντιμετωπίσουμε αυτήν την απόκλιση, πρέπει να διαχωρίσουμε την ιδιοκατάσταση με τη μηδενική ιδιοτιμή και να την αντιμετωπίσουμε ξεχωριστά από

¹Η ιδιοκατάσταση x_1 είναι ανάλογη της χρονικής παραγώγου του instanton. Είναι, όμως, γνωστό ότι ο τελεστής $\frac{d}{d\tau}$ γεννά χρονικές μετατοπίσεις. Γίνεται σαφές, λοιπόν, ο λόγος για τον οποίο η ιδιοκατάσταση αυτή συνδέεται με το αναλλοίωτο των εξισώσεων κίνησης ως προς τον φανταστικό χρόνο τ .

τις υπόλοιπες. Ακολουθώντας τον Weinberg (Weinberg, 2015), μετατρέπουμε την ολοκλήρωση στο dc_1 σε ολοκλήρωση στο $d\tau_c$:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau_c = T_0. \quad (2.59)$$

Αυτό είναι εύκολο να γίνει, από τη στιγμή που γνωρίζουμε ότι για μια μικρή αλλαγή στο κέντρο του instanton τ_c , έχουμε, λόγω της σχέσης (2.23):

$$dx = \frac{dx_I}{d\tau} d\tau_c, \quad (2.60)$$

ενώ για μια μικρή αλλαγή στο c_1 :

$$dx = x_1 dc_1. \quad (2.61)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω:

$$\begin{aligned} dc_1 &= \sqrt{S_I} d\tau_c \\ \Rightarrow \frac{dc_1}{\sqrt{2\pi\hbar}} &= \sqrt{\frac{S_I}{2\pi\hbar}} d\tau_c, \end{aligned} \quad (2.62)$$

όπου στην τελευταία γραμμή, διαιρέσαμε με $\sqrt{2\pi\hbar}$ ώστε να την αντιστοιχίσουμε με τη μεταβλητή ολοκλήρωσης στη σχέση (2.32).

Μπορούμε, τώρα, με τη βοήθεια της σχέσης (2.32), να επιδιώξουμε να υπολογίσουμε το πλάτος μετάβασης της σχέσης (2.52). Απομονώνουμε την ιδιοκατάσταση με τη μηδενική ιδιοτιμή και ολοκληρώνουμε πάνω στη νέα μεταβλητή της παραπάνω σχέσης:

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle \eta | e^{-HT_0/\hbar} | -\eta \rangle = N e^{-S_I/\hbar} \sqrt{\frac{S_I}{2\pi\hbar}} [\det'(-\partial_\tau^2 + V''(x_I))]^{-1/2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau_c \\ &= N e^{-S_I/\hbar} T_0 \sqrt{\frac{S_I}{2\pi\hbar}} [\det'(S''(x_I))]^{-1/2} \\ &= N e^{-S_I/\hbar} [\det(S''(x_{SHO}))]^{-1/2} K T_0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

όπου το $\det'(S''(x_I))$ δηλώνει την ορίζουσα που περιλαμβάνει μόνο ιδιοκαταστάσεις με μη μηδενικές ιδιοτιμές και

$$K = \sqrt{\frac{S_I}{2\pi\hbar}} \left[\frac{\det'(S''(x_I))}{\det(S''(x_{SHO}))} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.64)$$

Στο τελευταίο βήμα, πολλαπλασιάσαμε και διαιρέσαμε με την ορίζουσα του τελεστή S'' για τον αρμονικό ταλαντωτή. Ο λόγος, για τον οποίο εκφράσαμε το πλάτος μετάβασης κατ' αυτόν τον τρόπο, είναι για να ταυτοποιηθεί ο παράγοντας K με έναν διορθωτικό όρο στο πλάτος μετάβασης του instanton από την απλή περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή.

Είναι προφανές ότι η λύση του αρμονικού ταλαντωτή θα έχει συνεισφορά (και μάλιστα μεγάλη) στο ολοκλήρωμα διαδρομών, καθώς όπως έχουμε ήδη αναφέρει το instanton περιγράφει μία διάταξη που παρεμβάλλεται μεταξύ των δύο ελάχιστων $\pm\eta$ (και συγκεκριμένα, κατά το μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, βρίσκεται πιο κοντά σε αυτές τις καταστάσεις) (Weinberg, 2015). Διατυπώνοντάς το διαφορετικά, η συνεισφορά του αρμονικού ταλαντωτή περιγράφει τη συνεισφορά της στοιχειώδους λύσης $x_I = \pm\eta$, δηλαδή το σωματίδιο να βρίσκεται μόνιμα σε ένα από τα δύο ελάχιστα, όπως στην περίπτωση του μονού πηγαδιού.

Σύμφωνα με τα παραπάνω και τις σχέσεις (2.40) και (2.44), η συνεισφορά του αρμονικού ταλαντωτή στο όριο $T_0 \rightarrow \infty$ είναι:

$$\begin{aligned} I_0 &= \langle \eta | e^{-HT_0/\hbar} | \eta \rangle \quad \left\{ = \langle -\eta | e^{-HT_0/\hbar} | -\eta \rangle \right\} \\ &= N[\det(S''(x_{SHO}))]^{-1/2} \quad \left\{ = N[\det(S''(\pm\eta))]^{-1/2} = N[\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)]^{-1/2} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega T_0}{2}}. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Τέλος, από τις σχέσεις (2.63) και (2.65), το πλάτος μετάβασης για ένα instanton γράφεται:

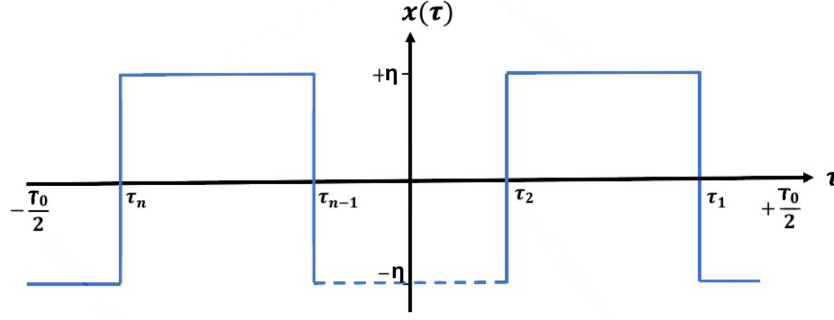
$$I_1 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega T_0}{2}} e^{-S_I/\hbar} K T_0. \tag{2.66}$$

Η προσέγγιση αερίου instanton (instanton gas approximation)

Μένει ένα τελευταίο βήμα για τον υπολογισμό του πλάτους μετάβασης για την περίπτωση του διπλού πηγαδιού δυναμικού. Αν σκεφτούμε λίγο καλύτερα, θα δούμε ότι η συνεισφορά ενός instanton δεν είναι η μοναδική. Στην πραγματικότητα, υπάρχει μία σειρά από instantons και anti-instantons που μεταβαίνουν από το ένα ελάχιστο στο άλλο, καθώς, όπως έχουμε επανειλημμένως αναφέρει, οι εξισώσεις κίνησης είναι αναλλοίωτες κάτω από τη μετατόπιση του κέντρου τ_c . Για μεγάλους χρόνους (δηλ. για χρόνους μεγαλύτερους του χαρακτηριστικού εύρους του instanton: $\tau > \frac{1}{\omega}$ (σχήμα (2.6))), θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και την επίδραση των instantons που εντοπίζονται σε κάθε ενδιαμέσο χρονικό διάστημα. Ο μόνος περιορισμός είναι ότι ένα instanton από το $-\eta$ στο η πρέπει να ακολουθείται από ένα anti-instanton από το η στο $-\eta$.

Θεωρούμε ένα αραιό αέριο n instantons, σαφώς διαχωρισμένων στον φανταστικό χρόνο τ . Στο σχήμα (2.7) φαίνεται μία τέτοια αλυσίδα instantons, στο οποίο οι κατακόρυφες γραμμές αναπαριστούν ένα συγκεκριμένο instanton, καθώς η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών instantons (οριζόντιες γραμμές) είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με το χαρακτηριστικό τους μέγεθος.

Υπό αυτήν την οπτική, μπορούμε να δούμε το αραιό αέριο instanton (dilute instanton gas) ως μία κλασική λύση οποία είναι ένα προσεγγιστικά στάσιμο σημείο της Ευκλείδειας δράσης (Novikov et al., 1999; Coleman, 1979). Η δράση, λοιπόν, του αερίου θα είναι:



Σχήμα 2.7: Αέριο πολλών διαχωρισμένων instantons με κέντρα $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ (Wickens, 2017).

$$S = nS_I \quad (2.67)$$

Προφανώς το αέριο instanton θα έχει n ιδιοκαταστάσεις με μηδενική ιδιοτιμή, που αντιστοιχούν σε n ανεξάρτητες χρονικές μετατοπίσεις των κέντρων των instantons τ_n . Όπως, όμως, διαπιστώσαμε προηγουμένως, αυτές οι ιδιοκαταστάσεις αποτελούν την αιτία των απειρισμών στο ολοκλήρωμα διαδρομών, οπότε πρέπει να τις διαχωρίσουμε από τις άλλες με τις θετικές ιδιοτιμές. Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο, μετατρέπουμε την ολοκλήρωση στους συντελεστές c_n που αντιστοιχούν σε μηδενικές ιδιοτιμές σε ολοκλήρωση στα κέντρα των instantons του αερίου τ_n :

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau_1 \int_{-T_0/2}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{-T_0/2}^{\tau_{n-1}} d\tau_n = \frac{T_0^n}{n!}, \quad (2.68)$$

υπό την προϋπόθεση ότι : $\frac{T_0}{2} > \tau_n > \tau_{n-1} > \dots > \tau_2 > \tau_1 > -\frac{T_0}{2}$, όπως φαίνεται και στο σχήμα (2.7). Από τις σχέσεις (2.66), (2.67) και (2.68) καταλήγουμε ότι η συνεισφορά n instantons και anti-instantons θα είναι:

$$I_n = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega T_0}{2}} e^{-nS_I/\hbar} K^n \frac{T_0^n}{n!}. \quad (2.69)$$

Τέλος, πρέπει να αθροίσουμε τις συνεισφορές από όλες τις πιθανές αλυσίδες instantons. Για να ξεκινήσει ένα σωματίδιο από το $\pm\eta$ και να καταλήξει στο ίδιο σημείο, χρειαζόμαστε άρτιο αριθμό αλυσίδων instantons, ενώ για να καταλήξει στο άλλο κενό, χρειαζόμαστε περιττό αριθμό:

$$\begin{aligned} \langle \pm\eta | e^{-HT_0/\hbar} | \pm\eta \rangle &= \sum_{\text{even } n} I_n \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega T_0}{2}} \sum_{\text{even } n} \frac{(K e^{-S_I/\hbar} T_0)^n}{n!} \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega T_0}{2}} \cosh (K e^{-S_I/\hbar} T_0), \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned}
 \langle \pm\eta | e^{-HT_0/\hbar} | \mp\eta \rangle &= \sum_{\text{odd } n} I_n \\
 &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega T_0}{2}} \sum_{\text{odd } n} \frac{(K e^{-S_I/\hbar} T_0)^n}{n!} \\
 &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega T_0}{2}} \sinh(K e^{-S_I/\hbar} T_0).
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να εκφραστούν ως:

$$\langle \pm\eta | e^{-HT_0/\hbar} | -\eta \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega T_0}{2}} \frac{1}{2} \left[e^{K e^{-S_I/\hbar} T_0} \mp e^{-K e^{-S_I/\hbar} T_0} \right]. \tag{2.72}$$

Στο όριο $T_0 \rightarrow \infty$, από τη σχέση (2.13) (λαμβάνοντας υπ' όψιν τις δύο χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες), το αριστερό μέλος της (2.72) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των δύο ιδιοκαταστάσεων ελάχιστης ενέργειας $|+\rangle$ και $|-\rangle$:

$$\langle \pm\eta | e^{-HT_0/\hbar} | -\eta \rangle = e^{-E_- T_0/\hbar} \langle \pm\eta | - \rangle \langle - | -\eta \rangle + e^{-E_+ T_0/\hbar} \langle \pm\eta | + \rangle \langle + | -\eta \rangle \tag{2.73}$$

απ' όπου σε σύγκριση με το δεξί μέλος της (2.72) βρίσκουμε τις ενέργειες και τις κυματοσυναρτήσεις των δύο ιδιοκαταστάσεων ελάχιστης ενέργειας (Coleman, 1979):

$$E_{\pm} = \frac{1}{2} \hbar \omega \pm \hbar K e^{-S_I/\hbar}, \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_-(-\eta) \Psi_-^*(+\eta) &= -\Psi_+(-\eta) \Psi_+^*(+\eta) = \Psi_-(-\eta) \Psi_-^*(-\eta) \\
 &= \Psi_+(-\eta) \Psi_+^*(-\eta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Η ανάλυσή μας καθιστά σαφές ότι η λύση που εξάγαμε αναπαριστά μία σειρά μεταβάσεων, δια μέσου της κλασικά απαγορευμένης περιοχής του δυναμικού, μεταξύ των δύο κλασικά ευσταθών καταστάσεων $|\eta\rangle$ και $|- \eta\rangle$.

Από τις σχέσεις που ικανοποιούν οι κυματοσυναρτήσεις, προκύπτει ότι:

$$\Psi_-(-\eta) = \Psi_- (+\eta), \quad \Psi_+(-\eta) = -\Psi_+ (+\eta), \tag{2.76}$$

δηλαδή η $|-\rangle$ είναι άρτια υπέρθεση των ιδιοκαταστάσεων θέσης $|\pm\eta\rangle$, ενώ η $|+\rangle$ είναι περιττή συνάρτηση, άρα περιττή υπέρθεση των ιδιοκαταστάσεων θέσης $|\pm\eta\rangle$. Αυτές είναι οι γνωστές ιδιοκαταστάσεις ελάχιστης ενέργειας που εμφανίζονται στην παραδοσιακή Κβαντομηχανική ανάλυση του διπλού πηγαδιού και είναι υπεύθυνες για το φαινόμενο ενεργειακού διαχωρισμού μεταξύ των ιδιοκαταστάσεων $|\eta\rangle$ και $|- \eta\rangle$.

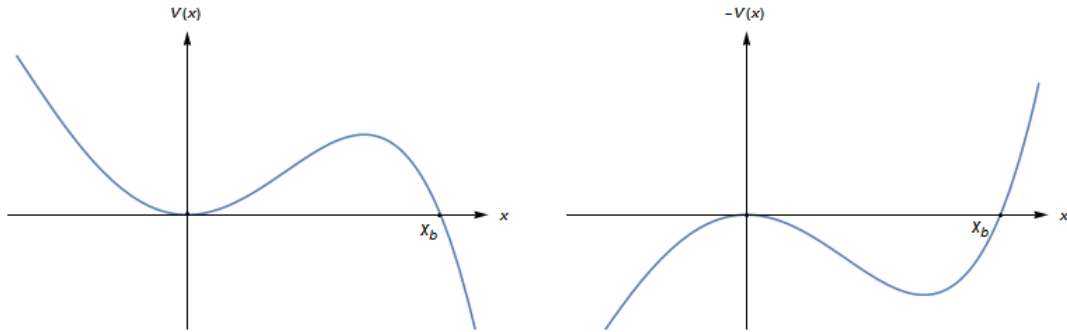
Στο σημείο αυτό, πρέπει να αναφερθεί ότι οι υπολογισμοί μας αφορούν την ενεργειακή διαφορά, και όχι ευθέως τις διορθώσεις στην ενέργεια. Πράγματι, υπάρχουν διαταραχτικές διορθώσεις στην ενέργεια, οι οποίες είναι εν γένει πολύ μεγαλύτερες από τη μη διαταραχτική, εκθετικά συμπιεσμένη, διόρθωση που υπολογίσαμε. Ωστόσο, καμία από τις διαταραχτικές διορθώσεις δεν μπορεί να προβλέψει το φαινόμενο σήραγγας. Συνεπώς, ο υπολογισμός μας δίνει τον κυρίαρχο

διορθωτικό όρο, λόγω του φαινομένου αυτού. Διατυπώνοντάς το διαφορετικά, ο ενεργειακός διαχωρισμός, που βασίζεται στο φαινόμενο σήραγγας, μπορεί να βρεθεί μόνο μέσω του υπολογισμού που παρουσιάσαμε και όχι μέσω της θεωρίας διαταραχών (Paranjape, 2017).

2.3.3 Μετασταθείς καταστάσεις και αναπηδήσεις (bounces)

Στην ενότητα αυτή, θα ασχοληθούμε με τη διάσπαση ασταθών, η πιο σωστά μετασταθών (metastable) καταστάσεων, και θα υπολογίσουμε τον χρόνο ημιζωής τους. Η περίπτωση αυτή είναι και η πιο ενδιαφέρουσα, καθώς είναι εύκολα γενικεύσιμη στην ΚΘΠ. Μία μετασταθή κατάσταση αντιστοιχεί σε ένα τοπικό ελάχιστο του δυναμικού, το οποίο, όμως, δεν είναι ολικό ελάχιστο.

Θεωρούμε, λοιπόν, το δυναμικό του σχήματος (2.8).



Σχήμα 2.8: Δυναμικό $V(x)$ με μία μετασταθή κατάσταση στο $x = 0$ και η ανεστραμμένη του μορφή $-V(x)$.

Η ακριβής μορφή του δυναμικού δεξιά από το σημείο $x = x_b$ δεν παίζει κανέναν ρόλο. Αυτό που έχει σημασία είναι ότι σε εκείνη την περιοχή υπάρχουν καταστάσεις ελεύθερου σωματιδίου (free particle states). Συνεπώς, το φάσμα της Χαμιλτονιανής, σε αυτήν την περιοχή, θα είναι συνεχές. Επίσης, μπορούμε να αναπτύξουμε γύρω από τη «θεμελιώδη» κατάσταση στο $x = 0$, αγνοώντας την περιοχή δεξιά του x_b , και να βρούμε προσεγγιστικά τις διακριτές ενεργειακές στάθμες, όπως στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή. Ωστόσο, επειδή το ενεργειακό φάσμα στην περιοχή δεξιά του x_b είναι συνεχές, αυτές οι στάθμες δε θα αντιστοιχούν σε ιδιοκαταστάσεις της συνολικής Χαμιλτονιανής. Συγκεκριμένα, για τη «θεμελιώδη κατάσταση» στο $x = 0$, θα δούμε ότι εμφανίζεται ένας φανταστικός διορθωτικός όρος στην ενέργεια E_0 , λόγω του φαινομένου σήραγγας:

$$E_0 \rightarrow E_0 + i\frac{\Gamma}{2}, \quad (2.77)$$

γεγονός που την καθιστά μετασταθή κατάσταση². Το Γ μπορεί να ερμηνευτεί ως ρυθμός διάσπασης αυτής της μετασταθούς κατάστασης.

Για τη μελέτη του προβλήματος, ακολουθούμε την ίδια μέθοδο και ψάχνουμε κλασικές λύσεις στο ανεστραμμένο δυναμικό $V(-x)$ (δεξί γράφημα του σχήματος (2.8)). Πέρα από την τετριμμένη περίπτωση, στην οποία το σωματίδιο βρίσκεται

² Αντιμετωπίσαμε το ψευδοκενό, μία μη θεμελιώδη κατάσταση, ως θεμελιώδη, οπότε η ενέργεια επιτρέπεται να είναι μιγαδική.

ακίνητο στο $x = 0$, υπάρχει και μία λύση, σύμφωνα με την οποία το σωματίδιο ξεκινά από την κορυφή του λόφου $x = 0$, αναπηδά στο σημείο $x = x_b$, και επιστρέφει στο $x = 0$. Αυτή η κίνηση ονομάζεται αναπήδηση (bounce) και έχει τις προφανείς συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \bar{x}(\tau) &= 0 \\ \left. \frac{d\bar{x}}{d\tau} \right|_{\tau=0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το πλάτος μετάβασης ανάμεσα στα σημεία $x = 0$ και (μέσω της αναπήδησης στο σημείο $x = x_b$) $x = 0$. Σε αναλογία με την περίπτωση του διπλού πηγαδιού, πρέπει να αθροίσουμε πάνω σε όλες τις πιθανές κλασικές λύσεις, με τη διαφορά, όμως, ότι δεν υφίσταται λόγος περιορισμού στον αριθμό των bounces, καθώς κάθε bounce ξεκινά και σταματά στο ίδιο σημείο. Επομένως, για $V''(0) = \omega^2$, αθροίζοντας όλες τις συνεισφορές I_n ((2.69)), παίρνουμε:

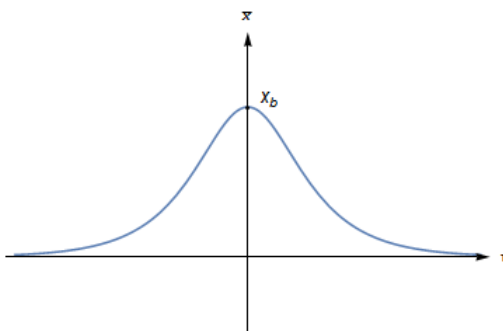
$$\begin{aligned} \langle 0 | e^{-HT_0/\hbar} | 0 \rangle &= \sum_n I_n \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega T_0}{2}} e^{KT_0 e^{-S(\bar{x})/\hbar}}, \end{aligned} \quad (2.79)$$

όπου

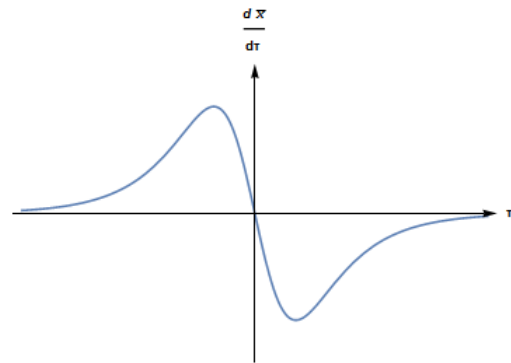
$$K = \sqrt{\frac{S(\bar{x})}{2\pi\hbar}} \left[\frac{\det'(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))}{\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.80)$$

και \bar{x} η κλασική λύση bounce.

Εάν παρατηρήσουμε, όμως, καλύτερα, θα αντιληφθούμε ότι υπάρχει ένα πρόβλημα. Επειδή, η λύση bounce είναι συμμετρική γύρω από το x_b , θα έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα (2.9a):



(a) Η λύση bounce.



(b) Η παράγωγος της bounce $\frac{d\bar{x}}{d\tau}$.

Σχήμα 2.9: Η λύση bounce και η παράγωγός της, η οποία είναι η ιδιοκατάσταση με τη μηδενική ιδιοτιμή.

Όπως δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα, η ιδιοκατάσταση με τη μηδενική ιδιοτιμή είναι ανάλογη της παραγώγου της κλασικής λύσης (σχέση (2.58)). Σε αντίθεση με την περίπτωση του instanton, που δεν έχει ακρότατα, η bounce παρουσιάζει μέγιστο στο $x = x_b$ (σχήμα(2.9a)). Επομένως, η παράγωγός της θα

έχει έναν κόμβο. Γνωρίζουμε, όμως, από το θεώρημα των κόμβων της Κβαντικής Μηχανικής (Σ. Τραχανάς, 2013) ότι η ιδιοσυνάρτηση με τη χαμηλότερη ιδιοτιμή δε μηδενίζεται πουθενά, δεν έχει κανέναν κόμβο. Άρα, θα υπάρχει μία ιδιοκατάσταση με μικρότερη ιδιοτιμή από αυτήν της $\frac{1}{\sqrt{S(\vec{x})}} \frac{d\vec{x}}{d\tau}$. Δηλαδή, θα υπάρχει μία ιδιοκατάσταση με αρνητική ιδιοτιμή.

Στο σημείο αυτό, είναι αρκετά διαφωτιστικό να διερευνήσουμε το αίτιο της αρνητικής ιδιοτιμής, συγκρίνοντας τη λύση bounce με τη λύση instanton. Για αυτόν τον λόγο, έχει αξία να κάνουμε μία μικρή παρέκβαση και να δούμε πώς σχετίζεται το ολοκλήρωμα διέλευσης $B[P]$ (σχέση (2.5)), για το οποίο μιλήσαμε στην πρώτη ενότητα, με την Ευκλείδεια δράση για τις λύσεις instanton και bounce.

Το ολοκλήρωμα διέλευσης B για το instanton και τη bounce

Στο Κεφάλαιο (2.1), είχαμε αναφέρει ότι η πιο πιθανή διαδρομή διαφυγής (MPEP) από το φράγμα δυναμικού είναι αυτή που ελαχιστοποιεί το $B[P] = 2 \int_0^{s_f} ds \sqrt{2[V(\vec{x}) - E]}$ (για ευκολία θέτουμε $m=1$). Σύμφωνα με τη μεταβολική αρχή του Jacobi, μία διαδρομή που ελαχιστοποιεί το παραπάνω ολοκλήρωμα, είναι λύση των Ευκλείδειων εξισώσεων κίνησης με σταθερά της κίνησης:

$$E = V(\vec{x}_i) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{d\tau} \right)^2 + V(\vec{x}). \quad (2.81)$$

Αντιστοιχεί, δηλαδή, σε ένα στάσιμο σημείο της Ευκλείδειας δράσης:

$$S_E = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{d\tau} \right)^2 + V(\vec{x}) \right]. \quad (2.82)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις και τη (2.4), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} S_E(\vec{x}) &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau 2[V(\vec{x}) - V(\vec{x}_i)] + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau V(\vec{x}_i) \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{\left(\frac{d\vec{x}}{d\tau} \right)^2} \sqrt{2[V(\vec{x}) - V(\vec{x}_i)]} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau V(\vec{x}_i) \\ &= \int_0^{s_f} ds \sqrt{2[V(\vec{x}) - V(\vec{x}_i)]} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau V(\vec{x}_i) \\ &= \int_0^{s_f} ds \sqrt{2[V(\vec{x}) - E]} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau V(\vec{x}_i) \\ &= \frac{B}{2} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau V(\vec{x}_i). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Η παραπάνω έκφραση δίνει τη σχέση μεταξύ του ολοκληρώματος διέλευσης B και της Ευκλείδειας δράσης S_E . Το μόνο που απομένει για να τη συγκεκριμενοποιήσουμε για το instanton και τη bounce, είναι να προσέξουμε τα όρια ολοκλήρωσης. Στην περίπτωση του instanton, το σωματίδιο ξεκινά από το ένα κενό x_i στο $-\infty$ και σταματά στο άλλο κενό x_f στο $+\infty$, και η παραπάνω σχέση δίνει:

$$\frac{B}{2} = S_E(\vec{x}) - S_E(\vec{x}_i). \quad (2.84)$$

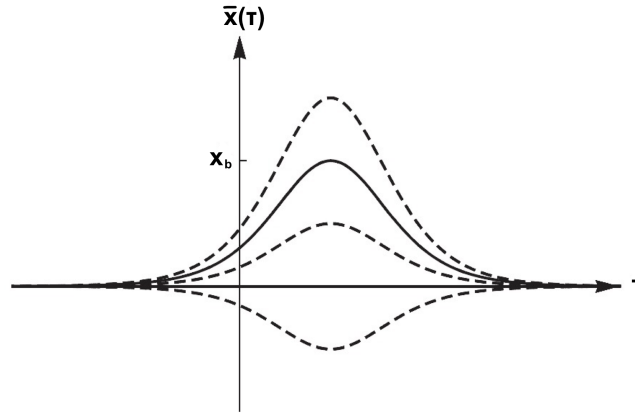
Για τη bounce, επειδή το σωματίδιο φτάνει στο σημείο αναστροφής x_f σε πεπερασμένο χρόνο, και έπειτα επιστρέφει στο x_i στο $+\infty$, η Ευκλείδεια δράση, καθώς έχουμε δύο διελύσεις του φράγματος, διπλασιάζεται, οπότε:

$$B = S_E(\vec{x}) - S_E(\vec{x}_i). \quad (2.85)$$

Τέλος, η παραπάνω σχέση σε συνδυασμό με τη (2.1), δίνει την πιθανότητα διέλευσης μέσω του φράγματος για τη bounce, στην προσέγγιση WKB:

$$T \approx e^{S_E(\vec{x}) - S_E(\vec{x}_i)} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (2.86)$$

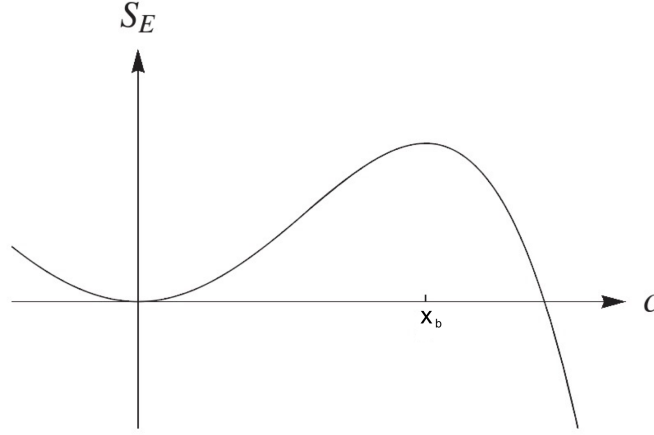
Επανερχόμαστε, τώρα, στην προέλευση της αρνητικής ιδιοτιμής. Θεωρούμε μία σειρά από διαδρομές που παραμετροποιούνται από έναν αριθμό c , την ακρότατη τιμή του $\bar{x}(\tau)$ (σχήμα (2.10)). Η καμπύλη με $c = x_b$ αντιστοιχεί στη bounce, ενώ αυτή με $c = 0$ (ο άξονας τ) στην τετριμμένη λύση $\bar{x}(\tau) = 0$. Γνωρίζουμε ότι αυτές οι δύο λύσεις είναι ακρότατα της δράσης και συγκεκριμένα για $\bar{x}(\tau) = 0$, η δράση μηδενίζεται. Οπότε, καθώς το c αυξάνεται, η δράση αυξάνεται μονοτονικά, με αποτέλεσμα το $c = x_b$, δηλαδή η bounce, να είναι μέγιστο (σχήμα (2.11)).



Σχήμα 2.10: Διαδρομές με διαφορετικό σημείο αναστροφής. Οι διαδρομές με μέγιστο μεγαλύτερο του x_b εκτείνονται και στην κλασικά επιτρεπτή περιοχή πέραν του φράγματος, ενώ διαδρομές με μέγιστο του μικρότερο x_b παραμένουν εντός του φράγματος. Από όλες αυτές, η bounce (συνεχής γραμμή) έχει τη μεγαλύτερη Ευκλείδεια δράση (Weinberg, 2015).

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι το γεγονός ότι το σημείο αναστροφής δεν είναι προσδιορισμένο εκ των προτέρων, έχει ως αποτέλεσμα η bounce να είναι σαγματικό σημείο της δράσης (Weinberg, 2015). Από τη μία, για το δεδομένο $c = x_b$ (δηλ. αν δε θεωρήσουμε εξάρτηση από το c), η bounce ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα διέλευσης B^3 , άρα και την Ευκλείδεια δράση. Από την άλλη, όμως, για διαφορετικά σημεία

³Υπενθυμίζουμε ότι το B για τη bounce ορίζεται ως το ολοκλήρωμα πάνω σε μία διαδρομή, με αρχικό σημείο x_i και τελικό x_f , που βρίσκεται πάνω σε μία ισοδυναμική επιφάνεια Σ : $V(\vec{x}) = V(\vec{x}_i)$, και στην αντίστροφή της.



Σχήμα 2.11: Η Ευκλείδεια δράση για το σύνολο των διαδρομών του σχήματος (2.10). Το μέγιστο $c = x_b$ αντιστοιχεί στη bounce (Weinberg, 2015).

αναστροφής, η bounce είναι μέγιστο σημείο της δράσης. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την περίπτωση του instanton. Στο διπλό πηγάδι δυναμικού, η κλασική διαδρομή που θεωρήσαμε αντιστοιχεί στη μετάβαση από μία αρχική θέση x_i σε μία τελική x_f με ίδιο δυναμικό. Αυτές οι συνοριακές συνθήκες επιβάλλουν η διαδρομή που ελαχιστοποιεί το B να ελαχιστοποιεί και την Ευκλείδεια δράση.

Καταλήγοντας, η αρνητική ιδιοτιμή προκύπτει από τις διαδρομές που δεν επιστρέφουν από την ισοδυναμική επιφάνεια Σ : $V(\vec{x}) = V(\vec{x}_i)$, δηλαδή για $c > x_b$. Συνεπώς, αντιστοιχεί σε διαδρομές που είναι πιθανές διαδρομές για την Ευκλείδεια δράση, αλλά όχι για το B (Weinberg, 2015).

Το πρόβλημα της αρνητικής ιδιοτιμής μπορεί να αντιμετωπισθεί, εάν το δυναμικό με τη μεταστατή κατάσταση ιδωθεί ως αναλυτική συνέχιση ενός δυναμικού με ευσταθή κατάσταση. Μπορούμε, έτσι, να επιβάλουμε να συγκλίνει το προβληματικό μέρος του ολοκληρώματος διαδρομών (2.10), το οποίο προέρχεται από την ολοκλήρωση πάνω στην ιδιοκατάσταση με την αρνητική ιδιοτιμή:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} dc \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar}} e^{\frac{-S(c)}{\hbar}}, \quad (2.87)$$

όπου $S(c)$ η καμπύλη του σχήματος (2.11). Αυτή διαδικασία γίνεται αναλυτικά από τον Coleman (1979), απ' όπου προκύπτει ένας επιπλέον παράγοντας $\frac{1}{2}$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η ενέργεια E_0 της μετασταθούς κατάστασης θα είναι:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar K e^{-S(\bar{x})/\hbar}, \quad (2.88)$$

όπου, πλέον, το K είναι φανταστικός αριθμός και συμπεριλαμβάνει έναν παράγοντα $\frac{1}{2}$:

$$K = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{S(\bar{x})}{2\pi\hbar}} \left[\frac{\det'(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))}{\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.89)$$

Από τη σχέση (2.77), προκύπτει ο ρυθμός διάσπασης Γ :

$$\Gamma = 2ImE_0 = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{S(\bar{x})}{2\pi\hbar}} \left[\frac{det'(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))}{det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)} \right]^{-\frac{1}{2}} e^{-S(\bar{x})/\hbar}. \quad (2.90)$$

Στις τελευταίες ενότητες, είχαμε υποθέσει, για λόγους ευκολίας, ότι το δυναμικό της μετασταθούς κατάστασης $V(\bar{x}_i)$ είναι μηδέν. Στην περίπτωση που $V(\bar{x}_i) \neq 0$, πρέπει να προσέξουμε δύο σημεία. Πρώτον, η συνεισφορά του αρμονικού ταλαντωτή στο ολοκλήρωμα διαδρομών (σχέση (2.65)) θα γίνει:

$$\begin{aligned} I_0 &= N[det(S''(x_{SHO}))]^{-1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega T_0}{2}} e^{-S(\bar{x}_i)}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

με αποτέλεσμα να εμφανιστεί ένας όρος $e^{-S(\bar{x}_i)}$ στον αριθμητή της σχέσης (2.63) που δίνει τη συνεισφορά ενός instanton. Δεύτερον, θα αλλάξει η διατήρηση ενέργειας για το instanton (σχέση (2.46)), άρα και η δράση για το instanton, οπότε η (2.49) θα γίνει:

$$\begin{aligned} S(\bar{x}) &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \dot{\bar{x}}^2 + \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau V(\bar{x}_i) \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \dot{\bar{x}}^2 + S(\bar{x}_i). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Αυτό έχει ως συνέπεια η συνθήκη κανονικοποίησης (2.57) της ιδιοκατάστασης με τη μηδενική ιδιοτιμή να δώσει:

$$c_1 = \sqrt{S(\bar{x}) - S(\bar{x}_i)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dc_1}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \sqrt{\frac{S(\bar{x}) - S(\bar{x}_i)}{2\pi\hbar}} d\tau_c. \quad (2.93)$$

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι, για $V(\bar{x}_i) \neq 0$, ο ρυθμός διάσπασης Γ της μετασταθούς κατάστασης γράφεται:

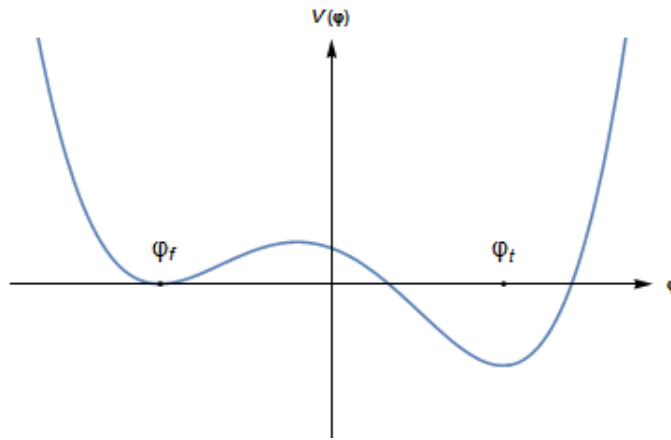
$$\Gamma = 2ImE_0 = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{B}{2\pi\hbar}} \left[\frac{det'(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))}{det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)} \right]^{-\frac{1}{2}} e^{-B/\hbar}, \quad (2.94)$$

με $B = S(\bar{x}) - S(\bar{x}_i)$. Καταλήξαμε, δηλαδή, στο ίδιο αποτέλεσμα για την εκθετική απόσβεση, που προκύπτει από την προσέγγιση WKB (σχέσεις (2.85), (2.86)).

Κεφάλαιο 3

Διάσπαση κενού βαθμωτού πεδίου

Στο κεφάλαιο αυτό, θα γενικεύσουμε τον φορμαλισμό που έχουμε αναπτύξει για να εξετάσουμε το φαινόμενο της διάσπασης κενού στην περίπτωση ενός βαθμωτού πεδίου. Θα θεωρήσουμε ένα βαθμωτό πεδίο φ που βρίσκεται μέσα σε ένα δυναμικό $V(\varphi)$ που έχει δύο ελάχιστα, όπως φαίνεται στο σχήμα (3.1). Το τοπικό ελάχιστο φ_f , με $V(\varphi_f) = V_f$, ονομάζεται ψευδοκενό (false vacuum) και το ολικό ελάχιστο φ_t , με $V(\varphi_t) = V_t$, αληθές κενό (true vacuum). Στα επόμενα, θα μελετήσουμε το φαινόμενο σήραγγας από την κλασικά ευσταθή, αλλά κβαντικά μετασταθή κατάσταση φ_f στην κατάσταση με την ελάχιστη ενέργεια φ_t .



Σχήμα 3.1: Δυναμικό με ευσταθή κατάσταση φ_t και μετασταθή κατάσταση φ_f .

Όπως είχαμε αναφέρει και στην Εισαγωγή, η διάσπαση κενού μπορεί να παραλληλισθεί με θερμοδυναμικά φαινόμενα αλλαγής φάσης, όπως για παράδειγμα με τη διαδικασία βρασμού ενός υπέρθερμου υγρού. Υπ' αυτήν την έννοια, μπορούμε να φανταστούμε το σχήμα (3.1) ως ένα διάγραμμα της ελεύθερης ενέργειας του υγρού συναρτήσει της πυκνότητάς του. Το ψευδοκενό αντιστοιχεί στην μετασταθή υπέρθερμη υγρή φάση, ενώ το αληθές κενό στην ευσταθή αέρια φάση. Λόγω θερμοδυναμικών διακυμάνσεων, δημιουργούνται συνεχώς φυσαλίδες ατμού στο υγρό. Εάν η φυσαλίδα είναι μικρή, το όφελος στην ενέργεια όγκου, λόγω της δημιουργίας της, δεν μπορεί να αντισταθμίσει το έλλειμμα της επιφανειακής ενέργειας, με αποτέλεσμα τη συρρίκνωση και την εξαφάνιση της φυσαλίδας. Κάποια στιγμή, όμως, θα σχηματισθεί μία φυσαλίδα αρκετά μεγάλη, ώστε να είναι ενεργειακά προτιμότερο να μεγαλώσει κι άλλο. Η φυσαλίδα αυτή θα διαστέλλεται έως ότου όλο το υγρό

μετατραπεί σε αέριο.

Η διαδικασία διάσπασης κενού για ένα βαθμωτό πεδίο είναι ευθέως ανάλογη του παραπάνω φαινομένου, με τη διαφορά ότι οι θερμοδυναμικές διακυμάνσεις αντικαθίστανται από κβαντικές (Coleman, 1979). Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση του φαινομένου στην περίπτωση που ο χώρος είναι επίπεδος και θα την επεκτείνουμε για να συμπεριλάβουμε τις επιπτώσεις της βαρύτητας.

3.1 Η λύση bounce στην Κβαντική θεωρία βαθμωτού πεδίου

Έχοντας ασχοληθεί εκτενώς με τη μονοδιάστατη περίπτωση, η επέκταση στη διάσπαση κενού βαθμωτού πεδίου είναι απλή. Η Ευκλείδεια δράση στον τετραδιάστατο χώρο θα είναι:

$$\begin{aligned} S_E &= \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + V(\varphi) \right] \\ &= \int d\tau d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + V(\varphi) \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

ενώ η δυναμική ενέργεια προκύπτει από ολοκλήρωση πάνω σε όλον τον χώρο:

$$U[\varphi(\tau, \vec{x})] = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + V(\varphi) \right], \quad (3.2)$$

και το πλάτος μετάβασης από την κατάσταση φ_f στην φ_t σε ευθεία αναλογία είναι:

$$\langle \varphi_t | e^{-HT_0/\hbar} | \varphi_f \rangle = N \int D[\varphi(\tau, \vec{x})] e^{-S_E/\hbar}. \quad (3.3)$$

Η μετάβαση από το φ_f στο φ_t είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί παντού ταυτόχρονα, καθώς αυτό θα απαιτούσε άπειρη ποσότητα ενέργειας. Αντιθέτως, η μετάβαση ξεκινά από μία τυχαία περιοχή του χώρου, μέσα στην οποία το πεδίο βρίσκεται στην κατάσταση φ_t , ενώ στον υπόλοιπο χώρο, στο υπόβαθρο, το πεδίο βρίσκεται ακόμα στην κατάσταση φ_f . Επειδή η μετάβαση μπορεί να ξεκινήσει σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου, ο ρυθμός διάσπασης θα είναι ανάλογος του όγκου του χώρου, δηλαδή μη πεπερασμένος. Επομένως, η ποσότητα που έχει φυσικό νόημα είναι ο ρυθμός διάσπασης ανά μονάδα όγκου, $\frac{\Gamma}{V}$.

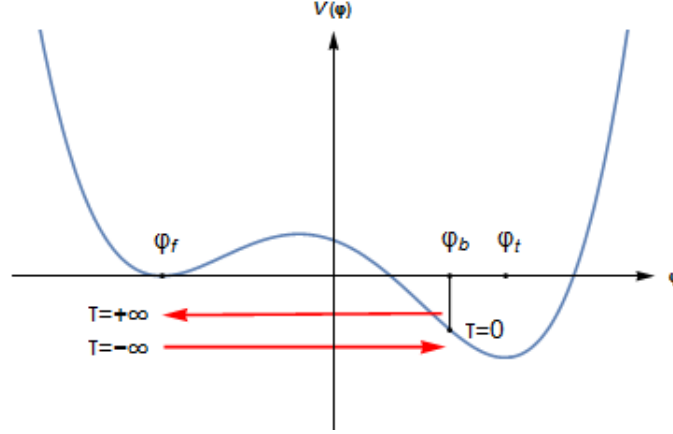
Κατ' αντιστοιχία με όσα ειπώθηκαν στην ενότητα (2.3.3), θέλουμε να βρούμε τη λύση bounce $\bar{\varphi}$ των Ευκλείδειων εξισώσεων κίνησης, που προκύπτουν από την παραπάνω Ευκλείδεια δράση. Δηλαδή, τη $\bar{\varphi}$ που ικανοποιεί την Ευκλείδεια εξίσωση Klein-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \tau^2} + \nabla^2 \bar{\varphi} = \frac{dV}{d\varphi}, \quad (3.4)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \bar{\varphi}(\tau, \vec{x}) &= \varphi_f \\
 \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(\tau, \vec{x}) &= \varphi_f \\
 \left. \frac{\partial \bar{\varphi}(\tau, \vec{x})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

όπου η δεύτερη συνθήκη επιβάλλεται, ώστε να μην αποκλίνει η δράση. Σύμφωνα με αυτές τις συνοριακές συνθήκες, η $\bar{\varphi}$ ξεκινά από το φ_f στο $\tau \rightarrow -\infty$ και θα επιστρέφει σε αυτό στο $\tau \rightarrow +\infty$. Επίσης, υπάρχει ένα σημείο αναστροφής φ_b , για το οποίο υποθέτουμε: $\varphi(\tau = 0, \vec{x} = 0) = \varphi_b$, που ικανοποιεί την τελευταία συνοριακή συνθήκη. Η αρχή διατήρησης της ενέργειας επιβάλλει η δυναμική ενέργεια της κατάστασης φ_b να είναι ίση με αυτήν της κατάστασης φ_f . Λόγω, όμως, του όρου κλίσης $\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2$ που εμφανίζεται στη σχέση (3.2), το δυναμικό (δηλ. η πυκνότητα δυναμικής ενέργειας) της κατάστασης φ_b θα είναι μικρότερο από το δυναμικό της κατάστασης φ_f , $V_b < V_f$ (σχήμα (3.2)).



Σχήμα 3.2: Η λύση bounce για βαθμωτό πεδίο.

Ο ρυθμός διάσπασης του ψευδοκενού φ_f ανά μονάδα όγκου, σύμφωνα με τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου, θα είναι:

$$\frac{\Gamma}{V} = A e^{-\frac{B}{\hbar}}, \tag{3.6}$$

όπου

$$B = S_E(\bar{\varphi}) - S_E(\varphi_f), \tag{3.7}$$

και $S_E(\bar{\varphi}), S_E(\varphi_f) = \int d\tau d^3x V_f$ οι Ευκλείδειες δράσεις για τη bounce και το ψευδές κενό αντίστοιχα.

Το A περιλαμβάνει τον λόγο των οριζουσών για τη bounce και, καθώς, πλέον, η λύση δεν είναι εντοπισμένη μόνο στον χρόνο, αλλά σε κάθε κατεύθυνση του τετραδιάστατου χώρου, θα περιέχει τέσσερις ιδιοκαταστάσεις με μηδενική ιδιοτιμή. Επίσης, είναι πιθανόν, εν γένει, να εμφανιστούν περισσότερες από μία αρνητικές ιδιοτιμές¹. Ωστόσο, οι περιπτώσεις αυτές δεν έχουν καμία σχέση με το φαινόμενο

¹Αποδεικνύεται εύκολα ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή από τον Coleman (1979)

σήραγγας, καθώς μπορούν να προκύψουν μόνο από σαγματικά, και όχι ελάχιστα, σημεία του B (Coleman, 1988). Συνεπώς, στο A περιλαμβάνεται και η μοναδική ιδιοκατάσταση με αρνητική ιδιοτιμή. Επειδή η διαδικασία ακριβούς υπολογισμού του παράγοντα A στον καμπυλωμένο χωρόχρονο είναι αρκετά δύσκολη, στο υπόλοιπο της εργασίας δεν θα ασχοληθούμε μαζί του, καθώς ο ρυθμός διάσπασης μπορεί να αποδοθεί ποιοτικά από τον όρο εκθετικής απόσβεσης $e^{-\frac{B}{\hbar}}$.

Οι εξισώσεις (3.4) και (3.5) είναι $O(4)$ συμμετρικές, παρόλο που το τ και το \vec{x} έχουν διαφορετικές φυσικές ερμηνείες, οπότε είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η bounce είναι επίσης $O(4)$ αναλλοίωτη κάτω από $4D$ Ευκλείδειες στροφές. Όντως, αποδεικνύεται ότι η λύση bounce (για μία θεωρία ενός βαθμωτού πεδίου) με την ελάχιστη δράση, άρα με τη μέγιστη συνεισφορά στο ολοκλήρωμα διαδρομών, είναι $O(4)$ συμμετρική (Coleman et al., 1978). Επομένως, εάν επιλέξουμε ως κέντρο συμμετρίας το σημείο ($\tau = 0, \vec{x} = 0$) η bounce $\bar{\varphi}$ θα εξαρτάται μόνο από την τετραδιάστατη απόσταση $r = \sqrt{\tau^2 + \vec{x}^2}$.

Η δράση, σε συνάρτηση της νέας μεταβλητής, γράφεται:

$$S_E = 2\pi^2 \int_0^\infty r^3 dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{dr} \right)^2 + V(\bar{\varphi}) \right], \quad (3.8)$$

όπου το $2\pi^2$ προέκυψε από την τετραδιάστατη γωνιακή ολοκλήρωση. Η εξίσωση κίνησης (3.4) προκύπτει από την $1^{η}$ τάξης μεταβολή της δράσης:

$$\frac{d^2\bar{\varphi}}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\bar{\varphi}}{dr} = \frac{dV}{d\bar{\varphi}}, \quad (3.9)$$

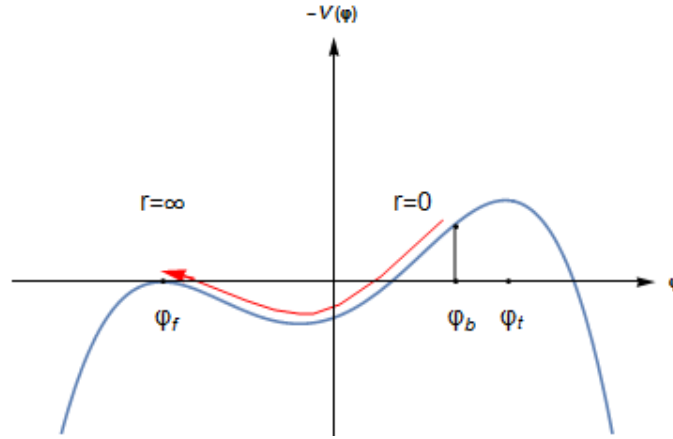
και οι συνοριακές συνθήκες (3.5) γίνονται:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(r) &= \varphi_f \\ \left. \frac{d\bar{\varphi}(r)}{dr} \right|_{r=0} &= 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

όπου η τελευταία επιβάλλεται ώστε να μην έχουμε απειρισμό για $r = 0$.

Η ύπαρξη λύσης για αυτές τις εξισώσεις μπορεί να αποδειχθεί εάν ερμηνεύσουμε το φ ως τη θέση ενός σωματιδίου και το r ως τον αντίστοιχο χρόνο. Τότε, η εξίσωση (3.9) περιγράφει την κίνηση ενός υποθετικού σωματιδίου μοναδιαίας μάζας σε δυναμικό $-V(\varphi)$, υπό την επίδραση μίας δύναμης απόσβεσης, $-\frac{3}{r} \frac{d\varphi}{dr}$, αντιστρόφως ανάλογης του χρόνου. Από τις συνοριακές συνθήκες, βλέπουμε ότι το σωματίδιο θα ξεκινά από τη θέση φ_b με μηδενική ταχύτητα και θα καταλήγει σε άπειρο χρόνο στη θέση φ_f , όπως φαίνεται και στο σχήμα (3.3).

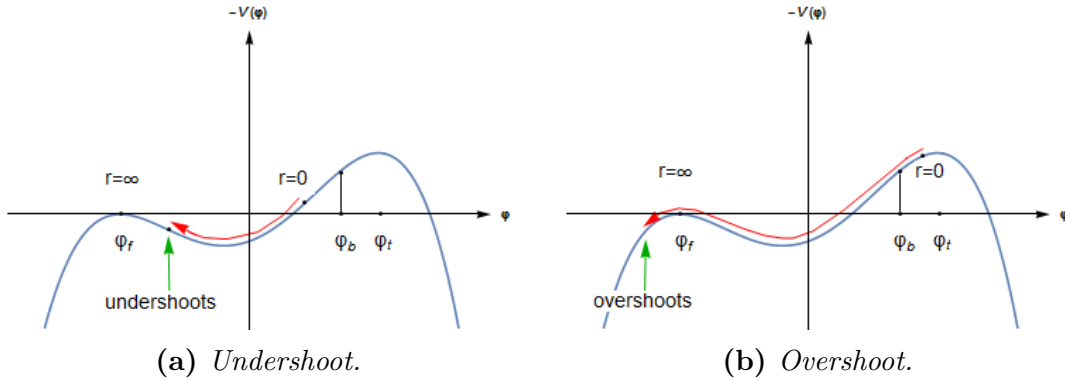
Η αρχική θέση φ_b πρέπει να επιλεγεί προσεκτικά, ούτως ώστε το σωματίδιο να καταφέρει να υπερσχύσει της δύναμης απόσβεσης και να σκαρφαλώσει επιτυχώς το λόφο, έως ότου έρθει σε ηρεμία στη θέση φ_f στο όριο $r \rightarrow \infty$. Είναι προφανές ότι πάντα θα υπάρχει μία αρχική τιμή για το φ_b , έτσι ώστε να συμβεί αυτό. Εάν το σωματίδιο ξεκινήσει από μία θέση αρκετά πιο αριστερά από το φ_t , τότε δε θα αποκτήσει αρκετή κινητική ενέργεια ώστε να σκαρφαλώσει τον λόφο. Η δύναμη απόσβεσης δεν επηρεάζει αυτόν τον ισχυρισμό, καθώς πάντα ελαττώνει την ενέργεια. Από την άλλη, εάν ξεκινήσει από μία θέση πολύ κοντά στο φ_t , μπορεί ναδειχθεί (Coleman, 1977) ότι μπορεί να μείνει εκεί για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα, μέχρις ότου η δύναμη τριβής γίνει αμελητέα. Οπότε, κάποια στιγμή θα ξεκινήσει να πέφτει στην κοιλάδα,



Σχήμα 3.3: Το μηχανικό ανάλογο της λύσης bounce.

χωρίς να το επιβραδύνει η, αμελητέα πλέον, δύναμη απόσβεσης, οπότε θα έχει αρκετή ενέργεια για να προσπεράσει την κορυφή του λόφου φ_f .

Λόγω συνέχειας, θα υπάρχει μία αρχική θέση φ_b , για την οποία το σωματίδιο έρχεται σε ηρεμία, στη θέση φ_f , στο όριο $r \rightarrow \infty$. Το επιχείρημα αυτό οφείλεται στον Coleman (1977) και ονομάζεται «overshoot–undershoot» argument (σχήμα (3.4)).



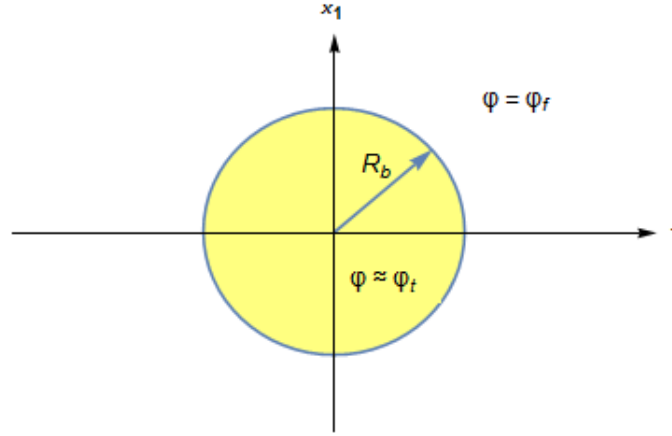
Σχήμα 3.4: Περιπτώσεις στις οποίες το σωματίδιο είτε προσπερνά το ψευδές κενό και φεύγει στο $-\infty$ (3.4b), είτε δεν καταφέρνει να το προσεγγίσει (3.4a). Λόγω συνέχειας, θα υπάρχει μία αρχική θέση φ_b , για την οποία το σωματίδιο έρχεται σε ηρεμία, στη θέση φ_f , στο όριο $r \rightarrow \infty$.

Η σφαιρική συμμετρία $O(4)$ μας επιτρέπει να αναπαραστήσουμε τη bounce ως μία σφαιρική φυσαλίδα, μέσα στην οποία το πεδίο βρίσκεται στην κατάσταση αληθινού κενού και έξω από αυτήν στην κατάσταση του ψευδοκενού. Η Ευκλείδεια φυσαλίδα έχει κέντρο το $r = 0$ και ακτίνα $r = R_b$. Την επιφάνεια $r = R_b$ μπορούμε να τη φανταστούμε ως ένα τείχος που χωρίζει το αληθές κενό του εσωτερικού από το ψευδές κενό του εξωτερικού (σχήμα (3.5)).

3.2 Η προσέγγιση λεπτού τείχους (Thin-Wall Approximation)

Μέχρι στιγμής, έχουμε καταφέρει να μετατρέψουμε τη μερική διαφορική εξίσωση (εξίσωση (3.4)) για τη bounce σε μία συνήθη διαφορική εξίσωση (εξίσωση (3.9)). Μπορούμε, όμως, να προχωρήσουμε παραπέρα. Στο όριο της μικρής διαφοράς των

3.2. Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΛΕΠΤΟΥ ΤΕΙΧΟΥΣ (THIN-WALL APPROXIMATION)



Σχήμα 3.5: Η bounce ως φυσαλίδα στον Ευκλείδειο χώρο.

ενεργειακών πυκνοτήτων των δύο κενών, είναι δυνατόν να εξάγουμε μία ακριβή έκφραση για τη δράση της bounce, S_E .

Για τη μελέτη του φαινομένου στο όριο αυτό, θεωρούμε ότι το δυναμικό έχει τη μορφή:

$$V(\varphi) = V_0 + \frac{\varepsilon}{2\eta}(\varphi - \eta), \quad (3.11)$$

όπου V_0 είναι ένα συμμετρικό διπλό πηγάδι δυναμικού με δύο εκφυλισμένα ελάχιστα στα σημεία $\varphi = \pm\eta$ και $\varepsilon = V_f - V_t$, η ενεργειακή διαφορά μεταξύ των δύο κενών. Υποθέτοντας ότι το ε είναι μικρό, το μηχανικό ανάλογο της bounce υποδεικνύει ότι το σωματίδιο μπορεί να χάσει ένα πολύ μικρό ποσό ενέργειας μόνο λόγω της δύναμης απόσβεσης, ούτως ώστε να μην προσπεράσει την κορυφή του λόφου φ_f . Αυτό μπορεί να συμβεί, μόνο εάν παραμείνει για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα $r \approx R_b$ στο $\varphi_b \rightarrow \varphi_t$. Μεταφράζοντας τα παραπάνω στη γλώσσα της θεωρίας πεδίου, η bounce έχει τη μορφή μίας τετραδιάστατης σφαιρικής φυσαλίδας, ακτίνας R_b , με ένα λεπτό τείχος να διαχωρίζει το αληθές κενό του εσωτερικού της από το ψευδές κενό του εξωτερικού της χώρου. Αυτός είναι ο λόγος που η προσέγγιση $\varepsilon \rightarrow 0$ ονομάζεται προσέγγιση λεπτού τείχους (Thin-Wall Approximation, στο εξής TWA).

Όταν το r είναι κοντά στο R_b , μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο απόσβεσης στη σχέση (3.9), καθώς και τον όρο που είναι ανάλογος του ε στο δυναμικό $V(\varphi)$. Άρα, η εξίσωση κίνησης (3.9) γίνεται:

$$\frac{d^2\bar{\varphi}}{dr^2} = \frac{dV_0}{d\varphi}. \quad (3.12)$$

Αυτή είναι η κλασική εξίσωση κίνησης για ένα σωματίδιο που βρίσκεται σε ένα διπλό πηγάδι δυναμικού. Επομένως, για $r \approx R_b$, η λύση έχει τη μορφή ενός μονοδιάστατου instanton, με κέντρο το $r = R_b$, που μεταβαίνει από το φ_t στο φ_f .

Για τον υπολογισμό του B (σχέση (3.7)), θα χρειαστεί να χωρίσουμε το πρόβλημα σε τρεις περιοχές του Ευκλείδειου χώρου και να υπολογίσουμε τη συνεισφορά της κάθε περιοχής ξεχωριστά.

Εξω από το τείχος, $r > R_b$:

Στην περιοχή έξω από το τείχος, το πεδίο βρίσκεται στο ψευδές κενό, οπότε

$$B_{out} = S_E(\varphi_f) - S_E(\varphi_f) = 0. \quad (3.13)$$

Μέσα από το τείχος, $r < R_b$:

Στην περιοχή μέσα από το τείχος, το πεδίο βρίσκεται στο αληθές κενό, οπότε

$$\begin{aligned} B_{in} &= S_E(\varphi_t) - S_E(\varphi_f) \\ &\stackrel{(3.8)}{=} 2\pi^2 \int_0^{R_b - \Delta r/2} r^3 dr \left[V(\varphi_t) - V(\varphi_f) \right] \\ &= 2\pi^2 \int_0^{R_b - \Delta r/2} r^3 dr (-\varepsilon) \\ &= -\frac{1}{2} \pi^2 R_b^4 \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Πάνω στο τείχος, $r \approx R_b$:

Έχουμε ότι $V_f = V(\eta) = V_0(\eta)$ και, επίσης, επάνω στο τείχος ισχύει ότι $V \approx V_0$. Επιπλέον, η δράση του instanton για $V_0(\eta) \neq 0$ από τη σχέση (2.83) είναι:

$$\begin{aligned} S_E(\bar{\varphi}) &= \int_{R_b - \Delta r/2}^{R_b + \Delta r/2} dr 2 \left[V(\bar{\varphi}) - V_f \right] + \int_{R_b - \Delta r/2}^{R_b + \Delta r/2} dr V_f \\ &= \int_{-\eta}^{\eta} d\bar{\varphi} \sqrt{2[V_0(\bar{\varphi}) - V_0(\eta)]} + \int_{R_b - \Delta r/2}^{R_b + \Delta r/2} dr V_0(\eta), \end{aligned} \quad (3.15)$$

λόγω της διατήρησης ενέργειας (2.81), άρα

$$\begin{aligned} B_{wall} &= S_E(\bar{\varphi}) - S_E(\varphi_f) \\ &= 2\pi^2 R_b^3 \int_{R_b - \Delta r/2}^{R_b + \Delta r/2} dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{dr} \right)^2 + V(\bar{\varphi}) - V_f \right] \\ &= 2\pi^2 R_b^3 \int_{-\eta}^{\eta} d\bar{\varphi} \sqrt{2[V_0(\bar{\varphi}) - V_0(\eta)]} \\ &= 2\pi^2 R_b^3 S_I, \end{aligned} \quad (3.16)$$

όπου

$$\begin{aligned}
S_I &= \int_{R_b - \Delta r/2}^{R_b + \Delta r/2} dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{dr} \right)^2 + V(\bar{\varphi}) - V_f \right] \\
&= \int_{R_b - \Delta r/2}^{R_b + \Delta r/2} dr 2 \left[V(\bar{\varphi}) - V_f \right] \\
&= \int_{-\eta}^{\eta} d\bar{\varphi} \sqrt{2[V_0(\bar{\varphi}) - V_0(\eta)]}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Αθροίζοντας όλες τις συνεισφορές, έχουμε:

$$\begin{aligned}
B &= B_{out} + B_{in} + B_{wall} \\
&= -\frac{1}{2}\pi^2 R_b^4 \varepsilon + 2\pi^2 R_b^3 S_I.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Η ακτίνα της φυσαλίδας R_b προσδιορίζεται από το γεγονός ότι η bounce πρέπει να είναι στάσιμο σημείο της δράσης, άρα:

$$\begin{aligned}
\frac{dB}{dR_b} &= -2\pi^2 R_b^3 \varepsilon + 6\pi^2 R_b^2 S_I = 0 \\
\Rightarrow R_b &= \frac{3S_I}{\varepsilon},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

η οποία δίνει:

$$B = \frac{27\pi^2 S_I^4}{2\varepsilon^3}. \tag{3.20}$$

Μπορούμε να εκτιμήσουμε την αξιοπιστία της προσέγγισης, εάν θυμηθούμε ότι τα instantons είναι καλά εντοπισμένα αντικείμενα με χαρακτηριστικό μέγεθος $\frac{1}{\omega}$, όπου $\omega^2 \equiv |V''(\eta)|$. Κατ' αντιστοιχία, το μέγεθος της bounce είναι προσεγγιστικά $\frac{1}{\mu}$, με $\mu^2 \equiv |V_f''|$. Επομένως, η TWA είναι αξιόπιστη για:

$$R_b \mu \gg 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3S_I \mu \gg \varepsilon. \tag{3.21}$$

Μπορούμε, επίσης, να διατυπώσουμε το κριτήριο αξιοπιστίας με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης. Από τη σχέση (3.12), προκύπτει ότι το εύρος του τείχους $\frac{1}{\mu} = \Delta r$ έχει χαρακτηριστικό μέγεθος:

$$\Delta r \sim \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{\Delta V}}, \tag{3.22}$$

με $\Delta V = V - V_f$. Εάν το δυναμικό δεν έχει μεγάλο peak, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε παράμετρος του δυναμικού, εκτός του ε , έχει αντίστοιχη mass scale:

$$\Delta\varphi \sim (\Delta V)^{1/4} \sim (S_1)^{1/3} \sim m. \tag{3.23}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με τη σχέση (3.21), καταλήγουμε ότι η προσέγγιση είναι

αξιόπιστη όταν το ε είναι πολύ μικρότερο από τη mass scale του δυναμικού²:

$$\varepsilon \ll m^4 \sim \Delta V. \quad (3.24)$$

Τέλος, παραγωγίζοντας την (3.2), παίρνουμε:

$$\left. \frac{d^2 B}{dr^2} \right|_{r=R_b} = -\frac{18\pi^2 S_I^2}{\varepsilon}, \quad (3.25)$$

απ' όπου βλέπουμε ότι το R_b μεγιστοποιεί τη δράση, οπότε η αναμενόμενη ιδιοκατάσταση με την αρνητική ιδιοτιμή αντιστοιχεί σε μεταβολές του R_b . Συγκεκριμένα, παραγωγίζοντας την εξίσωση κίνησης (3.9) ως προς r , έχουμε:

$$\frac{d^3 \bar{\varphi}}{dr^3} + \frac{3}{r} \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dr^2} - \frac{3}{r^2} \frac{d\bar{\varphi}}{dr} = \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \frac{d\bar{\varphi}}{dr}, \quad (3.26)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} S''(\bar{\varphi}_{R_b}) \frac{d\bar{\varphi}}{dr} &= (-\partial_\mu^2 + V''(\bar{\varphi}_{R_b})) \frac{d\bar{\varphi}}{dr} \\ &= \left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{3}{r} \frac{d}{dr} + V'' \right] \frac{d\bar{\varphi}}{dr} \\ &= -\frac{3}{r^2} \frac{d\bar{\varphi}}{dr}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

όπου ο τόνος συμβολίζει παραγωγή ως προς φ . Στην TWA, όπου το $\frac{d\bar{\varphi}}{dr}$ δεν είναι αμελητέο μόνο στο τείχος, $r \approx R_b$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το r με το R_b στην τελευταία γραμμή. Οπότε, στην TWA, το $\frac{d\bar{\varphi}}{dr}$ είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή S'' με αρνητική ιδιοτιμή $-\frac{3}{R_b^2}$ (Weinberg, 2015).

3.3 Η εξέλιξη της φυσαλίδας μετά τον σχηματισμό της

Ο ρόλος της bounce είναι διπλός. Από τη μία, η δράση της καθορίζει την πιθανότητα σχηματισμού μίας φυσαλίδας αληθούς κενού μέσα σε περιβάλλον ψευδούς κενού. Από την άλλη, ένα χωρικό τμήμα που διαπερνά το κέντρο της προσδιορίζει το πιθανότερο σημείο διαφυγής από το φράγμα δυναμικού. Δηλαδή, προσδιορίζει τις αρχικές συνθήκες για την κλασική εξέλιξη της φυσαλίδας (δηλ. του πεδίου) στο χώρο

²Αναπτύξαμε την προσέγγιση λεπτού τείχους, υποθέτοντας ότι η διαφορά των ενεργειακών πυκνοτήτων μεταξύ των δύο κενών ε είναι αρκούντως μικρή, και συμπεράναμε ότι η bounce θα έχει τη μορφή μίας φυσαλίδας με ένα λεπτό τείχος να διαχωρίζει το αληθές κενό του εσωτερικού της από το ψευδές κενό του εξωτερικού της χώρου. Τέλος, επιβεβαιώσαμε ότι η προσέγγιση είναι αξιόπιστη για ε πολύ μικρό.

Θα μπορούσαμε, όμως, να κινηθούμε αντίστροφα και να υποθέσουμε ότι η bounce έχει τη μορφή μίας φυσαλίδας με ένα λεπτό τείχος, ακτίνας R_b , χωρίς να κάνουμε καμία υπόθεση για τη μορφή του δυναμικού, πέραν του ότι δεν εμφανίζει μεγάλα peaks. Αυτός είναι ο λόγος που αντικαταστήσαμε το V_0 με V στην εξίσωση κίνησης. Από εκεί και πέρα, οι υπολογισμοί είναι οι ίδιοι, αφού πάλι αγνοούμε τον όρο τριβής στην εξίσωση κίνησης. Η μεθοδολογία αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι ταυτίζεται με αυτήν στον χαμπυλωμένο χώρο.

Minkowski.

Μπορούμε να αποκτήσουμε μία διαισθητική εικόνα μέσω του φαινομένου σήραγγας ενός κβαντικού σωματιδίου, όπως, για παράδειγμα, ενός σωματιδίου α , που εκπέμπεται από έναν ασταθή πυρήνα. Η ημικλασική προσέγγιση αυτού του φαινομένου έχει ως εξής: Το σωματίδιο παραμένει μέσα στο πηγάδι για ένα χρονικό διάστημα (χρόνος μετάπτωσης (transition time)), το οποίο είναι μία τυχαία μεταβλητή, έως ότου κάνει ένα κβαντικό άλμα στην άλλη μεριά του φράγματος. Εμφανίζεται ξαφνικά σε ένα σημείο, το σημείο εξόδου, το οποίο έχει ίση ενέργεια με τη μετασταθή κατάσταση. Έπειτα, το σωματίδιο συνεχίζει προς το άπειρο, ως ένα κλασικό σωματίδιο.

Οι νόμοι της Κβαντικής Μηχανικής υπεισέρχονται μόνο στη μελέτη της διαδικασίας της διέλευσης του σωματιδίου μέσω του φράγματος. Μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τη μέση τιμή του χρόνου μετάπτωσης (Paranjape, 2017). Το σημείο εξόδου, στη γλώσσα της WKB ανάλυσης, είναι το κλασικό σημείο αναστροφής (βλ. Κεφάλαιο (2.1)).

Στην περίπτωση μας, είναι το σημείο, για το οποίο:

$$\left. \frac{\partial \bar{\varphi}(\tau, \vec{x})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (3.28)$$

Το πεδίο εμφανίζεται στην κατάσταση $\bar{\varphi}(\tau = 0, \vec{x})$, για $\tau = 0$, και έπειτα συνεχίζει κλασικά. Επομένως, επεκτείνουμε αναλυτικά τη λύση bounce στον χώρο Minkowski, θεωρώντας την τομή του Ευκλείδειου χώρου με τον χώρο Minkowski, $t = i\tau = 0$. Έτσι, οι αρχικές συνθήκες της εξέλιξης φυσαλίδας γίνονται:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_M(t = 0, \vec{x}) &= \bar{\varphi}(\tau = 0, \vec{x}) \\ \left. \frac{\partial \bar{\varphi}_M(t, \vec{x})}{\partial t} \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial \bar{\varphi}(\tau, \vec{x})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Έπειτα, η φυσαλίδα εξελίσσεται σύμφωνα με την κλασική εξίσωση Klein-Gordon:

$$-\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_M}{\partial t^2} + \nabla^2 \bar{\varphi}_M = \frac{dV}{d\varphi}, \quad (3.30)$$

η οποία, προφανώς, είναι η αναλυτική επέκταση της Ευκλείδειας μορφής της (3.4), για $t = i\tau$. Βλέπουμε ότι η $O(4)$ συμμετρία της Ευκλείδειας bounce $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(r) = \bar{\varphi}(\sqrt{\vec{x}^2 + \tau^2})$ μετατρέπεται σε $O(3, 1)$ συμμετρία της Minkowskian bounce

$$\bar{\varphi}_M = \bar{\varphi}_M(r_M) = \bar{\varphi}_M(\sqrt{\vec{x}^2 - t^2}), \quad (3.31)$$

με αποτέλεσμα η εξέλιξη της φυσαλίδας να φαίνεται ίδια για κάθε παρατηρητή Lorentz. Στη χωροειδή περιοχή εκτός του κώνου φωτός της αρχής των αξόνων, $r_M = \sqrt{\vec{x}^2} > t$, η παραπάνω σχέση δίνει την $\bar{\varphi}_M$ απευθείας. Η χρονοειδής περιοχή εκτός του κώνου φωτός, $r_M = \sqrt{\vec{x}^2} < t$, δεν έχει Ευκλείδειο ανάλογο. Σε αυτήν την περίπτωση, λύνουμε την εξίσωση (3.9) στη Minkowskian μορφή της:

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}_M}{du^2} + \frac{3}{u} \frac{d\bar{\varphi}_M}{du} = -\frac{dV}{d\varphi}, \quad (3.32)$$

με $\bar{\varphi}_M = \bar{\varphi}_M(u) = \bar{\varphi}_M(\sqrt{t^2 - \bar{x}^2})$.

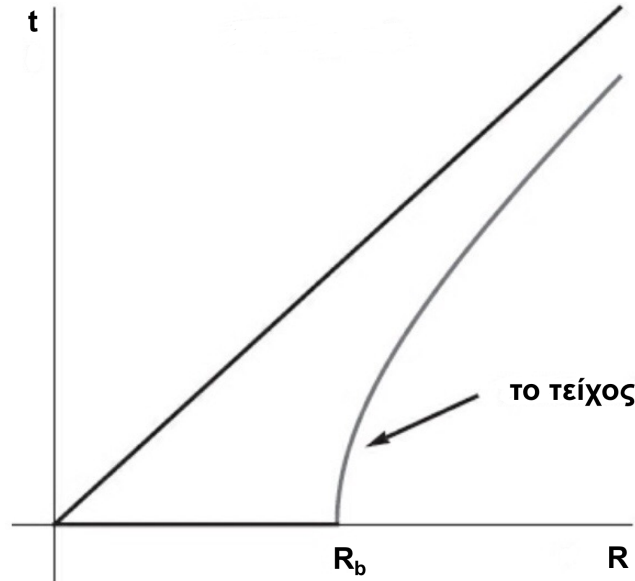
Στην TWA, η φυσαλίδα, τη στιγμή του σχηματισμού της, έχει ένα λεπτό τείχος ακτίνας $R(0) = R_b = \frac{3S_I}{\epsilon}$, το οποίο διαχωρίζει το αληθές από το ψευδές κενό και, αφού η Minkowskian λύση εξαρτάται μόνο από το $r_M^2 = \bar{x}^2 - t^2$, ακολουθεί την υπερβολή:

$$R(t)^2 - t^2 = R_b^2, \quad (3.33)$$

οπότε θα διαστέλλεται με ταχύτητα:

$$v = \frac{dR}{dt} = \frac{t}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - R_b^2}}{R} = \sqrt{1 - \frac{R_b^2}{R^2}}. \quad (3.34)$$

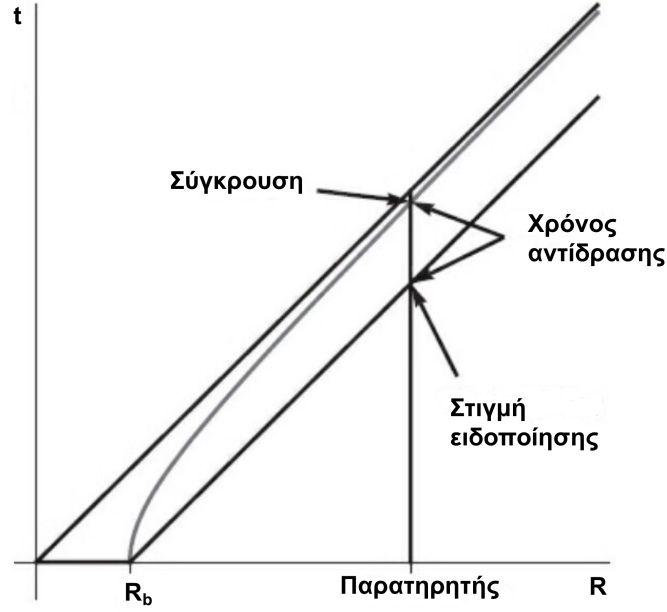
Επειδή το φαινόμενο της εμφάνισης της φυσαλίδας είναι ένα καθαρά κβαντικό φαινόμενο, αναμένουμε το R_b να είναι ένας μικροσκοπικός αριθμός, της τάξης του 10^{-10} έως 10^{-30} . Επομένως, η φυσαλίδα θα αρχίσει να επεκτείνεται σχεδόν στιγμιαία, με ταχύτητα που προσεγγίζει την ταχύτητα του φωτός (σχήμα (3.6)).



Σχήμα 3.6: Η διαστολή του τείχους της φυσαλίδας μετά τον σχηματισμό της.

Εάν μία φυσαλίδα κατευθύνεται προς έναν ακίνητο παρατηρητή, αυτός θα ειδοποιηθεί για την έλευσή της τη στιγμή που η κοσμική γραμμή του τμηθεί από τον κώνο φωτός του σημείου δημιουργίας του τείχους. Το χρονικό διάστημα από τη στιγμή της ειδοποίησης έως ότου το τείχος φτάσει στον παρατηρητή είναι σχεδόν όσο το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το φως να ταξιδέψει απόσταση R_b , αρκεί, βέβαια, ο παρατηρητής να βρίσκεται μακριά από το σημείο δημιουργίας του τείχους, σε σχέση με το R_b (σχήμα (3.7)).

Μπορούμε, ακόμα, να μελετήσουμε τη διαδικασία εξέλιξης της φυσαλίδας με ενεργειακούς όρους. Η ενέργεια του τείχους, τη στιγμή της εμφάνισής του, $t = \tau = 0$, είναι:



Σχήμα 3.7: Το χρονικό διάστημα από τη στιγμή της ειδοποίησης της έλευσης της φυσαλίδας έως ότου το τείχος φτάσει στον παρατηρητή.

$$\begin{aligned}
 E_{wall} &= \int_{r_M \approx R_b} d^3x \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_M}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \bar{\varphi}_M)^2 + V(\bar{\varphi}_M) - V_f \right] \\
 &= \int_{r_M \approx R_b} d^3x \left[\frac{1}{2} (\nabla \bar{\varphi}_M)^2 + V(\bar{\varphi}_M) - V_f \right] \\
 &= 4\pi \int_{R_b - \Delta r/2}^{R_b + \Delta r/2} dr_M r_M^2 \left[\frac{1}{2} (\nabla \bar{\varphi}_M)^2 + V(\bar{\varphi}_M) - V_f \right] \\
 &= 4\pi R_b^2 \int_{R_b - \Delta r/2}^{R_b + \Delta r/2} dr \left[\frac{1}{2} (\nabla \bar{\varphi})^2 + V(\bar{\varphi}) - V_f \right] \\
 &= 4\pi R_b^2 \int_{R_b - \Delta r/2}^{R_b + \Delta r/2} dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{dr} \right)^2 + V(\bar{\varphi}) - V_f \right] \\
 &= 4\pi R_b^2 S_I,
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

όπου S_I η δράση του instanton σε σχέση με αυτή του ψευδούς κενού (βλ. σχέση (3.17)). Βλέπουμε ότι η δράση S_I ισούται με την επιφανειακή τάση της φυσαλίδας, δηλαδή με την ενέργεια του τείχους, τη στιγμή της εμφάνισής του, ανά μονάδα επιφάνειας. Καθώς το τείχος κινείται με ταχύτητα v , η S_I μετασχηματίζεται ως:

$$S_I \rightarrow \gamma S_I = \frac{S_I}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{3.36}$$

οπότε η ενέργεια του τείχους θα γίνει:

$$\begin{aligned}
 E_{wall} &= 4\pi R^2 \frac{S_I}{\sqrt{1-v^2}} \\
 &\stackrel{(3.34)}{=} 4\pi R^2 S_I \frac{R}{R_b} \\
 &\stackrel{(3.19)}{=} \frac{4}{3}\pi R^3 \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Αυτή είναι ακριβώς η ενέργεια που προκύπτει από τη μετατροπή μίας σφαίρας ψευδούς κενού, ακτίνας R , σε αληθές κενό. Ως εκ τούτου, στην TWA, όλη η ενέργεια που απελευθερώνεται από τη μετατροπή αυτή πηγαίνει στο τείχος προς επιτάχυνσή του, αφήνοντας το πεδίο στο εσωτερικό της φυσαλίδας αδιατάρακτο, χωρίς να διεγείρεται, στη χαμηλότερη δυνατή ενεργειακή κατάσταση.

Στο Παράρτημα (A) δείχνουμε τη συγκεκριμένη μορφή που παίρνει η Lorentzian μετρική για τις δύο περιοχές του χώρου, μετά τον σχηματισμό της φυσαλίδας.

3.4 Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης bounce για πολυωνυμικό δυναμικό τετάρτου βαθμού

Στην ενότητα (3.2) είδαμε ότι, στο όριο της μικρής διαφοράς των ενεργειακών πυκνοτήτων των δύο κενών, είναι δυνατόν να εξαχθεί μία ακριβής έκφραση για τη δράση της bounce, άρα και του ρυθμού διάσπασης του κενού. Στο σημείο αυτό, θα προχωρήσουμε στην αριθμητική επίλυση της εξίσωσης bounce, στην περίπτωση που το δυναμικό έχει τη μορφή ενός πολυωνύμου τετάρτου βαθμού, και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα για τη δράση και τον ρυθμό διάσπασης σε σχέση με αυτά της TWA.

Θεωρούμε ότι το αδιάστατο δυναμικό έχει τη μορφή:

$$V(\varphi) = \frac{1}{4} \left[(\varphi^2 - 1)^2 + \frac{4\alpha}{3} (\varphi^3 - 3\varphi - 2) \right], \tag{3.38}$$

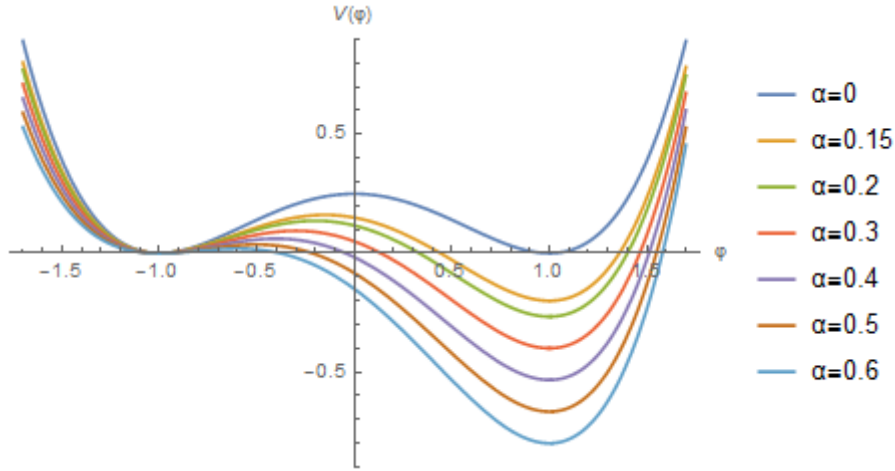
Βλέπουμε ότι έχει δύο άνισα ελάχιστα, στα σημεία $\varphi = \pm 1$, και ένα μέγιστο, που διαχωρίζει το ψευδές από το αληθές κενό, στο σημείο $\varphi = -\alpha$. Επιπλέον, έχει εισαχθεί μία σταθερά, έτσι ώστε το δυναμικό να μηδενίζεται στο ψευδοκενό (σχήμα (3.8)).

Όπως φαίνεται στο σχήμα, καθώς το α αυξάνεται, αυξάνεται η διαφορά των ενεργειακών πυκνοτήτων των δύο κενών. Και, συγκεκριμένα, για $\alpha = 0$, το δυναμικό έχει τη μορφή του διπλού πηγαδιού με δύο εκφυλισμένα ελάχιστα.

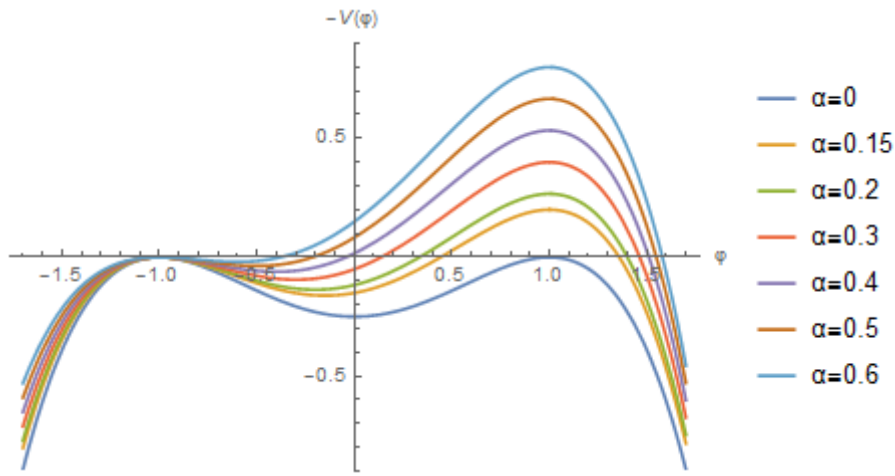
Θέλουμε να βρούμε τη λύση της εξίσωσης bounce (3.9), σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες (3.10). Επομένως, θα χρησιμοποιήσουμε το overshoot-undershoot επιχείρημα του Coleman, που είδαμε και προηγουμένως, για το ανεστραμμένο δυναμικό $-V(\varphi)$ (σχήμα (3.9)), ούτως ώστε να προσδιορίσουμε την αρχική θέση φ_b , και να λύσουμε την εξίσωση αριθμητικά.

Το overshoot-undershoot επιχείρημα, αφενός αποδεικνύει την ύπαρξη λύσης για την εξίσωση κίνησης, αφετέρου μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να προσδιοριστεί η σωστή αρχική συνθήκη, η αρχική τιμή του πεδίου δηλαδή, η οποία εξασφαλίζει ότι η λύση θα ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Υπενθυμίζουμε ότι οι συνοριακές συνθήκες επιβάλλουν ότι το υποθετικό σωματίδιο, στο μηχανικό ανάλογο του

3.4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ BOUNCE ΓΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ



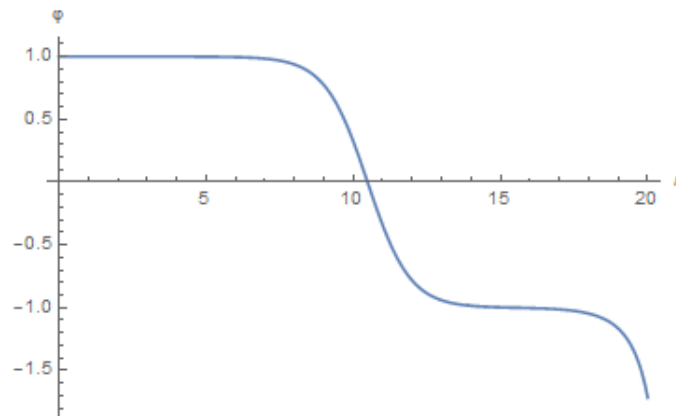
Σχήμα 3.8: Το δυναμικό $V(\varphi)$ για διάφορες τιμές του α .



Σχήμα 3.9: Το ανεστραμμένο δυναμικό $-V(\varphi)$ για τις διάφορες τιμές του α .

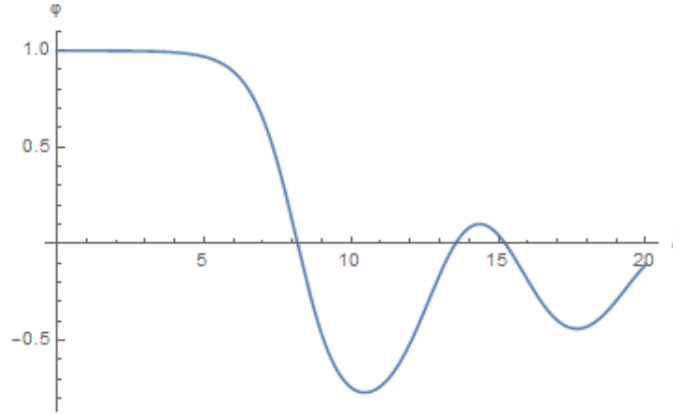
προβλήματος, ξεκινά από μία θέση $\varphi(r=0) = \varphi_b \rightarrow \varphi_t$ και καταλήγει σε ηρεμία, στο ψευδές κενό $\varphi_f = -1$, στο όριο $r \rightarrow \infty$.

Εάν το σωματίδιο ξεκινήσει πάρα πολύ κοντά στο αληθές κενό φ_t , τότε θα έχει πολλή κινητική ενέργεια και θα προσπεράσει το ψευδές κενό φ_f και η λύση θα αποκλίνει:



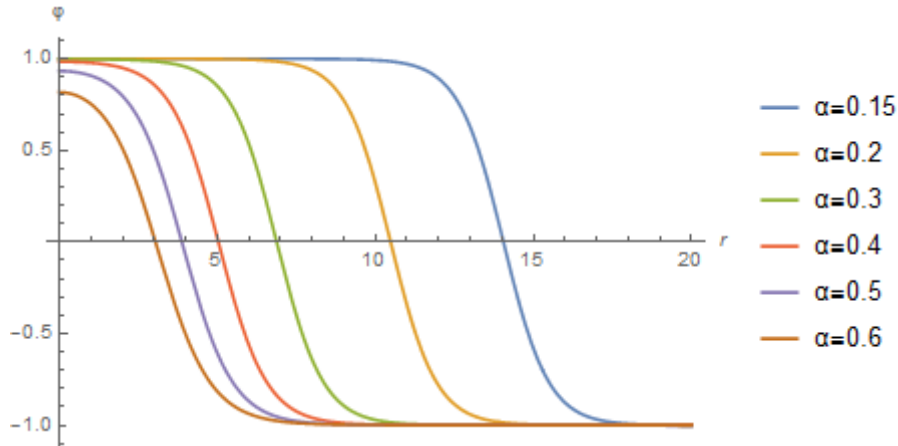
Σχήμα 3.10: Η αρχική θέση φ_b είναι πολύ κοντά στο αληθές κενό φ_t και έχουμε overshoot.

Αντιθέτως, εάν ξεκινήσει αρκετά μακριά από το φ_t , δε θα καταφέρει να φτάσει το φ_f , και λύση θα είναι μία αποσβενόμενη ταλάντωση:



Σχήμα 3.11: Η αρχική θέση φ_b είναι αρκετά μακριά από το αληθές κενό φ_t και έχουμε undershoot.

Λόγω συνέχειας, η σωστή τιμή του φ_b θα βρίσκεται ανάμεσα στις προηγούμενες δύο. Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία ανά δεκαδικό ψηφίο, καταλήγουμε ότι η λύση bounce για τις παραπάνω τιμές της παραμέτρου α , με ακρίβεια 11 δεκαδικών ψηφίων (πίνακας (3.1)), θα έχει τη μορφή του σχήματος (3.12).



Σχήμα 3.12: Η λύση bounce για τις διάφορες τιμές του α .

Όπως αναμενόταν, καθώς το α αυξάνεται, το σημείο εκκίνησης φ_b απομακρύνεται από το αληθές κενό $\varphi_t = 1$. Όσο λιγότερο εκφυλισμένα είναι τα δύο κενά τόσο περισσότερη ενέργεια είναι διαθέσιμη, επομένως για να μην αποκτήσει το σωματίδιο πολλή κινητική ενέργεια και προσπεράσει το φ_f , θα πρέπει να ξεκινήσει από μία θέση όλο και πιο απομακρυσμένη από την κορυφή του λόφου (πίνακας (3.1)).

Η λύση αυτή υποδεικνύει ότι καθώς ξεκινάμε από το κέντρο της φυσαλίδας, βρισκόμαστε προσεγγιστικά στο αληθές κενό $\varphi_t = 1$. Κινούμενοι ακτινικά προς τα έξω, κάποια στιγμή συναντάμε το τείχος της φυσαλίδας (πχ. για $\alpha = 0.4$, το τείχος βρίσκεται στο $r \approx 5$), και σταδιακά μεταφερόμαστε στο εξωτερικό της φυσαλίδας, στο ψευδές κενό φ_f , το οποίο εκτείνεται σε όλον τον Ευκλείδειο χώρο.

Από το σχήμα (3.12), φαίνεται ότι καθώς αυξάνεται το α , άρα και η διαφορά των ενεργειακών πυκνοτήτων των δύο κενών, η ακτίνα R_b της φυσαλίδας μειώνεται. Η αιτία της μείωσης της ακτίνας έγκειται στο γεγονός ότι καθώς η ενεργειακή διαφορά

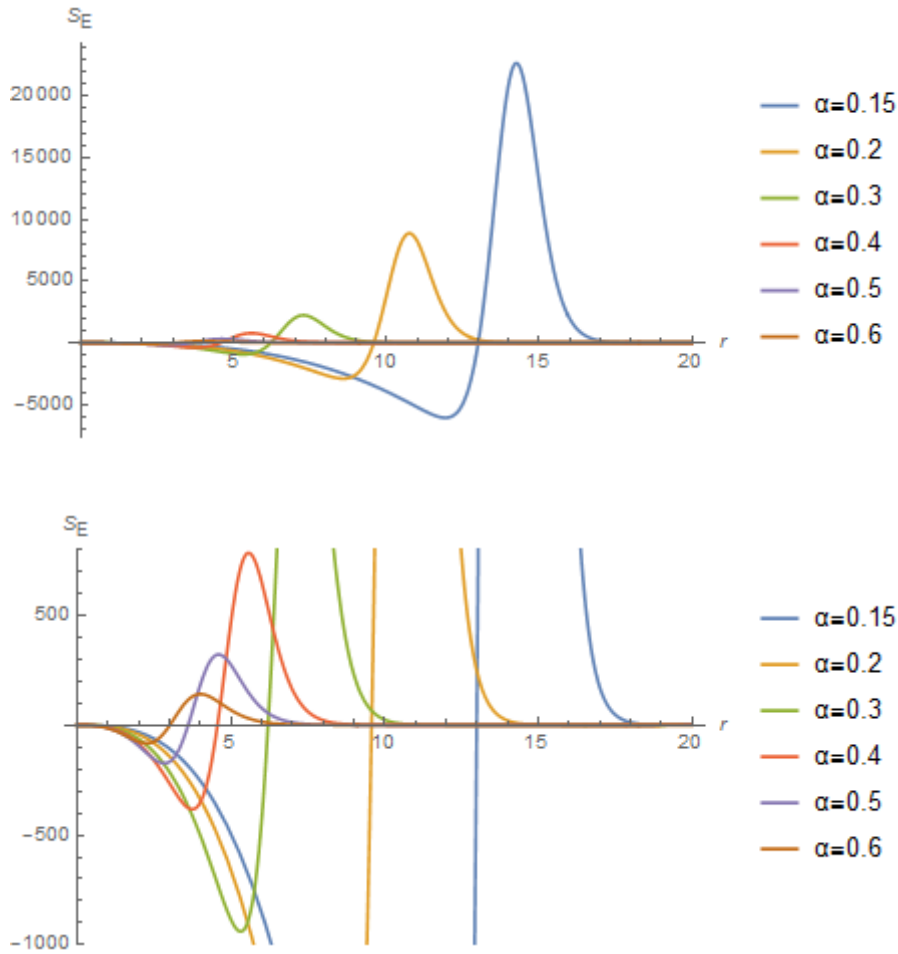
3.4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ BOUNCE ΓΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Τιμή του α	Θέση εκκίνησης φ_b
0.15	0.99999988728
0.2	0.99998484343
0.3	0.99845496543
0.4	0.98426904331
0.5	0.93370162095
0.6	0.81744652467

Πίνακας 3.1: Η αρχική θέση φ_b για τις διάφορες τιμές του α .

των κενών αυξάνεται τόσο περισσότερη ενέργεια ανά μονάδα όγκου είναι διαθέσιμη για τη μετατροπή του αληθούς κενό σε ψευδές κενό. Επομένως, απαιτείται λιγότερος όγκος για να αντισταθμίσει το ενεργειακό κόστος που προέρχεται από το τείχος, οπότε η ακτίνα R_b μειώνεται. Είναι, επίσης, σαφές ότι, καθώς η ακτίνα μειώνεται, η αξιοπιστία της TWA μειώνεται (σχέση (3.21)).

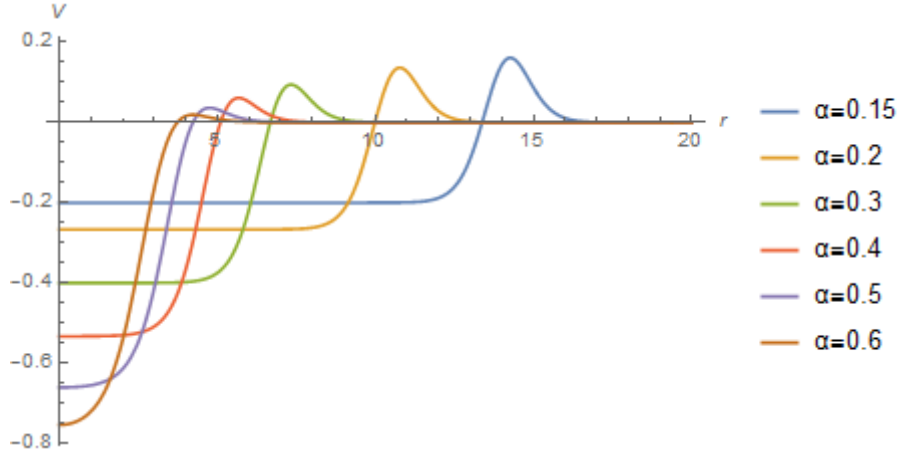
Για να υπολογίσουμε τον ρυθμό διάσπασης, πρέπει, πρώτα, να υπολογίσουμε την Ευκλείδεια δράση. Καθώς έχουμε βρει τη λύση bounce, μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της σχέσης (3.8). Τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης, για τις διάφορες τιμές του α , φαίνονται στο σχήμα (3.13).



Σχήμα 3.13: Η Ευκλείδεια δράση S_E συναρτήσει του r , για τις διάφορες τιμές του α (σε δύο κλίμακες για καλύτερη απεικόνιση των αποτελεσμάτων).

Η μορφή που έχει η δράση συναρτήσει του r εξηγείται από την κίνηση του

υποθετικού σωματιδίου στο δυναμικό $-V$. Αρχικά, για μικρές τιμές του r , το σωματίδιο είναι πρακτικά ακίνητο και το δυναμικό παραμένει αρνητικό, για όλην την περίοδο της ακινησίας (σχήμα (3.14)). Άρα, αρχικά, η δράση είναι αρνητική και παίρνει την ελάχιστη τιμή της, τη στιγμή που η δύναμη απόσβεσης γίνεται αμελητέα, και το σωματίδιο ξεκινά την κατάβαση της κοιλάδας. Έπειτα, η κινητική ενέργεια αυξάνεται και η αρνητική συνεισφορά του δυναμικού μειώνεται, με αποτέλεσμα την αύξηση της δράσης. Αργότερα, καθώς το σωματίδιο αρχίζει να σκαρφαλώνει το λόφο, επιβραδύνεται σταδιακά και έρχεται σε ηρεμία στο φ_f , και, αντιστοίχως, η δράση μειώνεται και μηδενίζεται όταν το σωματίδιο σταματήσει στο ψευδές κενό, αφού $V(\varphi_f) = 0$.



Σχήμα 3.14: Το δυναμικό V συναρτήσει του r , για τις διάφορες τιμές του α .

Επίσης, από το σχήμα (3.13), βλέπουμε ότι όσο προσεγγίζουμε την TWA (δηλ. όσο το α μειώνεται), τόσο μεγαλύτερη είναι η αρχική αρνητική συνεισφορά του δυναμικού στη δράση, καθώς το σωματίδιο παραμένει κοντά στην αρχική του θέση φ_b για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα r (βλ. σχήμα (3.14)). Επιπλέον, όμως, όσο μειώνεται το α , τόσο μεγαλώνει η τελική τιμή της δράσης, επειδή μικρό α σημαίνει μεγάλη ακτίνα R_b , άρα όλο και πιο αμελητέα δύναμη απόσβεσης.

Καταλήγοντας, υπολογίζουμε τον όρο εκθετικής απόσβεσης $e^{-\frac{B}{\hbar}}$ της σχέσης του ρυθμού διάσπασης ανά μονάδα όγκου (3.6), για τις διάφορες τιμές του α (πίνακας (3.2)).

Τιμή του α	Αριθμητική τιμή της δράσης S_E	Ρυθμός διάσπασης ανά μονάδα όγκου $\frac{\Gamma}{V}$
0.15	12906.1	8.98×10^{-5606}
0.2	5360.98	5.7×10^{-2329}
0.3	1516.97	1.54×10^{-659}
0.4	597.637	2.81×10^{-260}
0.5	277.763	2.34×10^{-121}
0.6	138.655	6.07×10^{-61}

Πίνακας 3.2: Ο ρυθμός διάσπασης ανά μονάδα όγκου $\frac{\Gamma}{V}$ για τις διάφορες τιμές του α .

Βλέπουμε ότι, όσο μειώνεται η ενεργειακή διαφορά των δύο κενών, μειώνεται ο ρυθμός διάσπασης, γεγονός αναμενόμενο, καθώς μείωση του α συνεπάγεται αύξηση της δράσης.

3.4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ BOUNCE ΓΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Τέλος, στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η αυξανόμενη απόκλιση της δράσης, υπολογισμένης στην TWA μέσω της σχέσης (3.20), από την αριθμητική τιμή της.

Τιμή του α	Αριθμητική τιμή της δράσης S_E	Τιμή της δράσης S_E στην TWA	Απόκλιση από την αριθμητική τιμή (%)
0.15	12906.1	13159.5	1.92
0.2	5360.98	5551.65	3.43
0.3	1516.97	1644.93	7.78
0.4	597.637	693.957	13.88
0.5	277.763	355.306	21.82
0.6	138.655	205.617	32.57

Πίνακας 3.3: Σύγκριση της δράσης υπολογισμένης στην TWA με την αριθμητική τιμή της.

Γίνεται σαφές ότι, όσο απομακρυνόμαστε από το όριο των δύο, σχεδόν εκφυλισμένων, κενών, η TWA γίνεται όλο και πιο αναξιόπιστη.

Κεφάλαιο 4

Διάσπαση κενού βαθμωτού πεδίου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο

Μέχρις στιγμής, έχουμε μελετήσει το φαινόμενο της σήραγγας, αγνοώντας τις επιπτώσεις που πιθανώς έχει η βαρύτητα. Υπάρχουν, όμως, περιπτώσεις στις οποίες η βαρύτητα παίζει σημαντικό ρόλο. Η πιο προφανής περίπτωση είναι η διάσπαση πεδίου με μάζα κοντά στην κλίμακα Planck. Ωστόσο, οι επιπτώσεις της βαρύτητας πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν ακόμα και σε πεδία με μικρότερη μάζα, εάν η ακτίνα σχηματισμού της φυσαλίδας Λ είναι τόσο μεγάλη, ώστε να είναι ευαίσθητη στην καμπυλότητα του χωροχρόνου. Για να αποκτήσουμε μια εκτίμηση της τάξης μεγέθους της ακτίνας αυτής, μία σφαίρα ακτίνας Λ και ενεργειακής πυκνότητας ε έχει ακτίνα Schwarzschild $R_S = 2GE = 2G\varepsilon \frac{4\pi\Lambda^3}{3}$. Η ακτίνα Λ θα είναι ίση με την ακτίνα Schwarzschild για:

$$\Lambda = \left(\frac{8\pi G\varepsilon}{3} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.1)$$

Για τιμές της διαφοράς των ενεργειακών πυκνοτήτων των δύο κενών της τάξης του $\varepsilon \approx (1\text{GeV})^4$, η αντίστοιχη ακτίνα είναι $\Lambda = 0.8\text{km}$. Επομένως, οι βαρυτικές επιπτώσεις στη διάσπαση κενού συναντώνται σε κλίμακες που δεν είναι ούτε μικροσκοπικές ούτε κοσμολογικές. Επιπλέον, ακόμα και εάν ο ρόλος της βαρύτητας δεν είναι σημαντικός στη διαδικασία σχηματισμού της φυσαλίδας, γίνεται κομβικός στην εξέλιξή της.

Η γενίκευση του φαινομένου της διάσπασης κενού βαθμωτού πεδίου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο έγινε αρχικά από τους Coleman και De Luccia ([Coleman and De Luccia, 1980](#)). Στο κεφάλαιο αυτό, θα εξετάσουμε τις επιπτώσεις της βαρύτητας στη διάσπαση του κενού, ανάλογα με την τιμή της κοσμολογικής σταθεράς, ακολουθώντας τον φορμαλισμό τους και λαμβάνοντας παράλληλα υπ' όψιν πιο πρόσφατες προσεγγίσεις και ερμηνείες.

4.1 Ευκλείδειες εξισώσεις κίνησης και συνοριακές συνθήκες

Σε πλήρη αναλογία με την περίπτωση του επίπεδου χώρου, θέλουμε να βρούμε τις Ευκλείδειες εξισώσεις κίνησης που υπακούουν στις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Με την εισαγωγή της βαρύτητας, η Ευκλείδεια δράση της σχέσης (3.1) γίνεται:

$$S_E = \int d^4x \sqrt{g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi + V(\varphi) - \frac{R}{16\pi G} \right], \quad (4.2)$$

όπου g η ορίζουσα του μετρικού τανυστή $g_{\mu\nu}$ (η οποία στον Ευκλείδειο χωρόχρονο είναι θετική) και R το βαθμωτό του Ricci. Είναι, επίσης, σαφές ότι η εισαγωγή μίας σταθεράς στο δυναμικό ισοδυναμεί με την εισαγωγή μίας κοσμολογικής σταθεράς. Συνεπώς, έπειτα από τη διάσπαση του κενού, η μορφή του χωροχρόνου αλλάζει, καθώς η κοσμολογική σταθερά εντός της φυσαλίδας θα είναι διαφορετική από αυτήν εκτός της φυσαλίδας. Επομένως, για τους υπολογισμούς μας, απαιτείται ο ορισμός της αρχικής τιμής της κοσμολογικής σταθεράς ή ισοδύναμα ο ορισμός του επιπέδου μηδενικού δυναμικού.

Γνωρίζουμε ότι, στον επίπεδο χώρο η bounce με την ελάχιστη δράση, άρα και τη μέγιστη συνεισφορά στο ολοκλήρωμα διαδρομών, είναι $O(4)$ συμμετρική. Παρόλο που το αντίστοιχο δεν έχει αποδειχθεί στην περίπτωση του καμπυλωμένου χώρου, αποτελεί κοινή πεποίθηση ότι είναι αληθές. Υποθέτοντας, λοιπόν, $O(4)$ συμμετρία, η γενικότερη Ευκλείδεια μετρική που υπακούει στη συμμετρία αυτή γράφεται ως:

$$ds^2 = d\xi^2 + \rho^2(\xi) d\Omega_3^2, \quad (4.3)$$

όπου

$$d\Omega_3^2 = dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.4)$$

η μετρική της μοναδιαίας 3-σφαίρας και ρ η ακτίνα καμπυλότητας κάθε 3-σφαίρας. Η Ευκλείδεια ακτινική συνιστώσα ξ αντιστοιχεί στην ακτινική απόσταση κατά μήκος μίας ακτινικής τροχιάς. Η περιστροφική συμμετρία απλοποίησε ιδιαίτερα τη μορφή της μετρικής, καθώς οι 10 άγνωστες συνιστώσες μειώθηκαν σε μία άγνωστη συνάρτηση $\rho(\xi)$ μίας μεταβλητής ξ . Επιπλέον, σημειώνουμε ότι μπορούμε να επανορίσουμε το ξ , προσθέτωντάς του μία σταθερά, χωρίς να αλλάξει η μορφή της μετρικής. Ισοδύναμα, μπορούμε να προσδιορίσουμε αυθαίρετα την αρχική τιμή του ξ .

Η εξίσωση κίνησης του πεδίου φ^1 προκύπτει από την πρώτη τάξης μεταβολή της δράσης ως προς $\delta\varphi$ και είναι η εξίσωση Klein-Gordon:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi &= \frac{dV}{d\varphi} \Rightarrow \\ \partial_\mu \partial^\mu \varphi + \Gamma_{\mu\nu}^\mu \partial^\nu \varphi &= \frac{dV}{d\varphi} \Rightarrow \\ \partial_\xi \partial^\xi \varphi + \Gamma_{\mu\xi}^\mu \partial^\xi \varphi &= \frac{dV}{d\varphi}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Επειδή

$$\Gamma_{\mu\xi}^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\xi(\sqrt{g}) = \frac{1}{\sqrt{\rho^6(\xi) g_\Omega}} \partial_\xi(\sqrt{\rho^6(\xi) g_\Omega}) = 3 \frac{\rho'(\xi)}{\rho(\xi)}, \quad (4.6)$$

όπου $g_\Omega = \sin^4 r \sin^2 \theta$ η ορίζουσα της μετρικής της μοναδιαίας 3-σφαίρας $d\Omega_3^2$, η οποία εξαρτάται μόνο από τις γωνιακές συντεταγμένες και όχι από το ξ , οπότε απαλείφεται.

¹ Από εδώ και στο εξής, η λύση φ θα συμβολίζεται με φ για λόγους συντομίας.

Άρα, η εξίσωση κίνησης του πεδίου γίνεται:

$$\varphi'' + 3\frac{\rho'}{\rho}\varphi' = \frac{dV}{d\varphi}, \quad (4.7)$$

όπου ο τόνος συμβολίζει παράγωγο ως προς ξ .

Η μεταβολή της δράσης ως προς δg δίνει τις εξισώσεις πεδίου του Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

όπου $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$. Για τη συγκεκριμένη μετρική, παίρνουμε²:

$$R = -\frac{6}{\rho^2}(-1 + \rho\rho'' + \rho'^2) \quad (4.9)$$

και

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\rho^2}(\rho'^2 - 1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + 2\rho\rho'' + \rho'^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 r G_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2 r \sin^2 \theta G_{rr} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Επίσης, ο ταυιστής ενέργειας-ορμής

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi + V(\varphi) \right)$$

γίνεται:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\varphi'^2 - V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho^2(\frac{1}{2}\varphi'^2 + V) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 r T_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2 r \sin^2 \theta T_{rr} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Η ξξ-συνιστώσα των εξισώσεων πεδίου δίνει την εξίσωση Friedmann για τον παράγοντα κλίμακας (scale factor) $\rho(\xi)$:

$$\rho'^2 = 1 + \frac{\kappa}{3}\rho^2 \left(\frac{1}{2}\varphi'^2 - V \right), \quad (4.12)$$

όπου $\kappa = 8\pi G = \frac{8\pi}{M_{Pl}^2}$. Επίσης, από την rr -συνιστώσα, με τη χρήση της παραπάνω, έχουμε:

$$\rho'' = -\frac{\kappa}{3}\rho \left(\frac{1}{2}\varphi'^2 + V \right), \quad (4.13)$$

²Οι υπολογισμοί των ταυιστών καμπυλότητας, του βαθμωτού Ricci και του ταυιστή Einstein έγιναν μέσω του κώδικα Mathematica του Leonard Parker, του Πανεπιστημίου Wisconsin, Milwaukee με τίτλο [Curvature and the Einstein Equation](#).

η οποία είναι εύκολο να δειχθεί ότι δεν είναι ανεξάρτητη, καθώς μπορεί να προκύψει από παραγωγή της εξίσωσης Friedmann σε συνδυασμό με την εξίσωση κίνησης του πεδίου (4.7). Οι άλλες δύο μη μηδενικές συνιστώσες είναι ισοδύναμες της rr -συνιστώσας.

Εισάγοντας τη σχέση (4.9) στην (4.2), η Ευκλείδεια δράση γράφεται:

$$\begin{aligned} S_E &= \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} d\xi \rho^3 \left[\frac{1}{2} \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi + V(\varphi) - \frac{R}{16\pi G} \right] \int_0^\pi dr \sin^2 r \int_0^\pi dr \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi^2 \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} d\xi \left[\rho^3 \left(\frac{1}{2} \varphi'^2 + V \right) + \frac{3}{\kappa} \left(\rho^2 \rho'' + \rho \rho'^2 - \rho \right) \right] \\ &= 2\pi^2 \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} d\xi \left[\rho^3 \left(\frac{1}{2} \varphi'^2 + V \right) - \frac{3}{\kappa} \left(\rho \rho'^2 + \rho \right) \right] + \frac{6\pi^2}{\kappa} \rho^2 \rho' \Big|_{\xi=\xi_{min}}^{\xi=\xi_{max}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, το ξ_{max} είναι πεπερασμένο (δηλ. $\rho(\xi_{max}) = 0$) για κλειστή πολλαπλότητα, ενώ απειρίζεται (δηλ. $\rho(\xi_{max}) \rightarrow \infty$) για ανοικτή πολλαπλότητα. Για μία λύση των εξισώσεων πεδίου, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$S_E = 4\pi^2 \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} d\xi \left(\rho^3 V - \frac{3}{\kappa} \rho \right) + \frac{6\pi^2}{\kappa} \rho^2 \rho' \Big|_{\xi=\xi_{min}}^{\xi=\xi_{max}}, \quad (4.15)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση Friedmann (4.12).

Στο σημείο αυτό, αξίζει να αναφερθούμε λίγο εκτενέστερα στον επιφανειακό όρο που εμφανίστηκε στη δράση, έπειτα από την παραγοντική ολοκλήρωση. Σε πολλές μελέτες σχετικά με τη διάσπαση κενού, συμπεριλαμβανομένης και αυτής των Coleman και De Luccia, η αρχική μορφή της δράσης είναι αυτή της σχέσης (4.2). Ωστόσο, είναι γνωστό, ότι όταν αναφερόμαστε σε ανοικτή πολλαπλότητα, πρέπει να εισάγουμε έναν επιφανειακό όρο, ο οποίος είναι γνωστός ως επιφανειακός όρος Gibbons-Hawking (Gibbons and Hawking, 1977), ώστε η μεταβολική αρχή να είναι σωστά καθορισμένη. Η επιλογή του όρου Gibbons-Hawking γίνεται με σκοπό την απαλοιφή του επιφανειακού όρου που εμφανίζεται στη σχέση (4.14). Η αναγκαιότητά του οφείλεται στο γεγονός ότι για ανοικτή πολλαπλότητα το ξ_{max} απειρίζεται, οπότε η δράση αποκλίνει. Παρ' όλα αυτά, αποδεικνύεται (Masoumi et al., 2016) ότι η εισαγωγή ή η παράλειψή του μεταβάλλει με τέτοιο τρόπο τη δράση της bounce και του ψευδούς κενού, ώστε, αν και αποκλίνουν, το $B = S_E(b) - S_E(\varphi_f)$ συγκλίνει και παραμένει αναλλοίωτο. Λόγω αυτού, στην εργασία αυτή θα παραλείψουμε τον επιφανειακό όρο Gibbons-Hawking.

Για να υπολογίσουμε τη δράση, πρέπει να προσδιορίσουμε τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, στις οποίες θα υπακούουν οι κλασικές λύσεις. Ξεκινώντας από το ρ , είναι εύκολο να δείξουμε ότι έχει τουλάχιστον ένα σημείο μηδενισμού.

Υποθέτουμε ότι το ρ είναι παντού θετικό. Τότε, το πεδίο ορισμού του ξ πρέπει να είναι το $(-\infty, +\infty)$, αφού το ξ μπορεί να «σταματήσει» μόνο για $\rho = 0$. Διαφορετικά, εάν το ξ «σταματήσει» για κάποια θετική τιμή του ρ , εμφανίζεται ασυνέχεια στο σημείο αυτό. Αυτό επιβάλλει να υπάρχει ένα τοπικό ελάχιστο του ρ , για το οποίο $\rho' = 0$. Αφαιρώντας, όμως, τη σχέση (4.13) από τη (4.12), παίρνουμε $\rho'^2 - \rho''\rho \geq 1$, από την οποία βλέπουμε ότι καταλήγουμε σε άτοπο ($\rho'' > 0$ στο ελάχιστο). Επειδή η μετρική είναι αναλλοίωτη κάτω από μετατοπίσεις του ξ , επιλέγουμε αυτό το σημείο μηδενισμού να βρίσκεται στο σημείο $\xi = \xi_{min} = 0$.

Από τη σχέση (4.12) για $\rho(0) = 0$, έχουμε $\rho'(0) = \pm 1$. Επειδή η γεωμετρία μπορεί να εκτείνεται είτε για θετικά είτε για αρνητικά ξ , επιλέγουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $\rho'(0) = 1$. Επιπλέον, για να αποφευχθεί απειρισμός στην εξίσωση του πεδίου φ , (4.7), πρέπει να θέσουμε $\varphi'(0) = 0$. Τέλος, για να μην αποκλίνει η δράση επιβάλλουμε: $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \varphi = \varphi_f$, όπως στην περίπτωση του επίπεδου χώρου.

Εάν το ρ έχει μόνο αυτό το σημείο μηδενισμού, τότε το ξ κυμαίνεται από το 0 στο $+\infty$ και η λύση έχει την τοπολογία του R^4 , που αντιστοιχεί σε ανοικτή πολλαπλότητα. Όπως, όμως, θα δούμε στη συνέχεια, είναι δυνατόν το ρ να έχει και δεύτερο σημείο μηδενισμού. Τότε, η λύση έχει την τοπολογία μίας 4-σφαίρας, S^4 , που αντιστοιχεί σε κλειστή πολλαπλότητα. Σε αυτήν την περίπτωση, δεν υπάρχει απαίτηση το πεδίο να καταλήγει στο ψευδές κενό φ_f , παρόλο που στην περίπτωση της λύσης bounce η διαφορά $\varphi - \varphi_f$ μπορεί να γίνει πολύ μικρή (Lee, 2014; Weinberg, 2015). Για να μην έχουμε απειρισμό στο δεύτερο σημείο μηδενισμού, πρέπει να θέσουμε, επιπλέον, $\varphi'(\xi_{max}) = 0$.

Συνοψίζοντας, οι συνοριακές συνθήκες των Ευκλείδειων λύσεων, για ανοικτή και κλειστή πολλαπλότητα είναι:

$$\begin{aligned} \rho(0) &= 0 \\ \rho'(0) &= 1 \\ \varphi'(0) &= 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \varphi = \varphi_f \quad \} \quad \text{ανοικτή πολλαπλότητα} \tag{4.17}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho(\xi_{max}) &= 0 \\ \rho'(\xi_{max}) &= -1 \\ \varphi'(\xi_{max}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{κλειστή πολλαπλότητα} \tag{4.18}$$

4.2 Κλασικές λύσεις

4.2.1 Τετριμμένες λύσεις

Η πιο απλή περίπτωση κλασικής λύσης των εξισώσεων είναι αυτή, στην οποία το πεδίο είναι παντού σταθερό:

$$\varphi' = 0, \quad \frac{dV}{d\varphi} = 0, \tag{4.19}$$

δηλαδή παραμένει ακίνητο σε ένα από τα ελάχιστα του δυναμικού V_0 : $\varphi = \varphi_0$. Τότε, η εξίσωση (4.12) δίνει:

$$\rho(\xi) = \begin{cases} \Lambda_0 \sin\left(\frac{\xi}{\Lambda_0}\right), & V_0 > 0 \\ \Lambda_0 \sinh\left(\frac{\xi}{\Lambda_0}\right), & V_0 < 0 \\ \xi, & V_0 = 0, \end{cases} \tag{4.20}$$

όπου $\Lambda_0^2 \equiv \frac{3}{\kappa|V_0|}$. Εάν $V_0 > 0$, το ρ έχει ημιτονοειδή συμπεριφορά, με αποτέλεσμα να έχει δύο σημεία μηδενισμού και το πεδίο ορισμού του ξ είναι το $[0, \pi\Lambda_0]$. Η πολλαπλότητα, σε αυτήν την περίπτωση, έχει τη μορφή ενός Ευκλείδειου de Sitter (dS) χώρου. Για $V_0 \leq 0$, το ρ είναι αύξουσα συνάρτηση του ξ , οπότε δεν έχει δεύτερο σημείο μηδενισμού. Οι περιπτώσεις αυτές αντιστοιχούν σε ανοικτές πολλαπλότητες και συγκεκριμένα, η γεωμετρία για $V_0 < 0$ είναι αυτή ενός Ευκλείδειου Anti-de Sitter (AdS) χώρου, ενώ για $V_0 = 0$ αυτή του επίπεδου R ⁴³.

Η Ευκλείδεια δράση για τις παραπάνω λύσεις υπολογίζεται εύκολα με εφαρμογή της σχέσης (4.15). Για $V_0 > 0$:

$$\begin{aligned} S_{dS} &= 4\pi^2 \int_0^{\pi\Lambda_0} d\xi \left[\Lambda_0^3 \sin^3\left(\frac{\xi}{\Lambda_0}\right) V_0 - \frac{3}{\kappa} \Lambda_0 \sin\left(\frac{\xi}{\Lambda_0}\right) \right] \\ &= -\frac{24\pi^2}{\kappa^2 V_0} \\ &= -\frac{8\pi^2}{\kappa} \Lambda_0^2, \end{aligned} \quad (4.21)$$

Για $V_0 < 0$:

$$\begin{aligned} S_{AdS} &= 4\pi^2 \int_0^\infty d\xi \left[\Lambda_0^3 \sinh^3\left(\frac{\xi}{\Lambda_0}\right) V_0 - \frac{3}{\kappa} \Lambda_0 \sinh\left(\frac{\xi}{\Lambda_0}\right) \right] + \frac{6\pi^2}{\kappa} \rho^2 \rho' \Big|_0^\infty \\ &= \lim_{\rho_{max} \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{12\pi^2}{\kappa^2 V_0} \left[1 - \left(1 - \frac{\kappa}{3} \rho_{max}^2 V_0 \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right\} + \frac{6\pi^2}{\kappa} \rho^2 \rho' \Big|_0^\infty \\ &= \lim_{\rho_{max} \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{4\pi^2}{\kappa} \Lambda_0^2 \left[\left(1 + \frac{\rho_{max}^2}{\Lambda_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \right\} + \frac{6\pi^2}{\kappa} \rho^2 \rho' \Big|_0^\infty, \end{aligned} \quad (4.22)$$

και για $V_0 = 0$:

$$\begin{aligned} S_M &= -4\pi^2 \int_0^\infty d\xi \frac{3\xi}{\kappa} + \frac{6\pi^2}{\kappa} \xi^2 \Big|_0^\infty \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.2.2 Λύσεις bounce

Εάν το πεδίο δεν παραμένει στάσιμο σε ένα από τα ακρότατα του δυναμικού, παίρνουμε τη δεύτερη κατηγορία λύσεων: τις λύσεις bounce. Η πιο γνωστή και σημαντική εξ' αυτών προτάθηκε αρχικά από τους Coleman και De Luccia (Coleman and De Luccia, 1980) και ονομάζεται CDL bounce. Αποτελεί τη γενίκευση της λύσης bounce, που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στην περίπτωση που συμπεριλάβουμε τη βαρύτητα.

Είδαμε ότι, στον επίπεδο χώρο, το μηχανικό ανάλογο της bounce είναι η κίνηση

⁴³Υπενθυμίζουμε ότι οι χώροι de Sitter, Anti-de Sitter και Minkowski είναι οι λύσεις των εξισώσεων πεδίου του Einstein στο κενό για θετική, αρνητική και μηδενική κοσμολογική σταθερά αντίστοιχα. Οι τετριμμένες λύσεις για σταθερό πεδίο αντιστοιχούν στο Ευκλείδειο ανάλογο αυτών των χώρων.

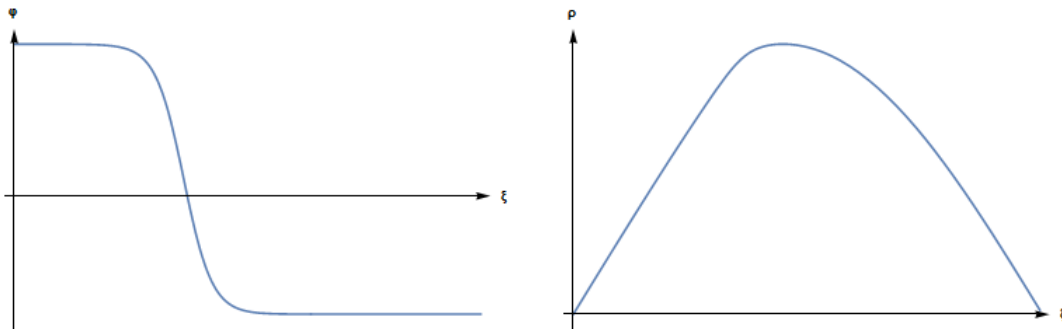
ενός υποθετικού σωματιδίου, που υπόκειται σε μία δύναμη τριβής $\frac{3}{\rho}\varphi'$, μέσα στο ανεστραμμένο δυναμικό $-V$. Παρουσία βαρύτητας, η δύναμη στην οποία υπόκειται το σωματίδιο δεν είναι, καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης, αποσβεστική. Για να μελετήσουμε την κίνηση, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (4.7) με φ' και παίρνουμε (Lee et al., 2006)

$$\left(\frac{1}{2}\varphi'^2 - V\right)' = -3\frac{\rho'}{\rho}\varphi'^2, \quad (4.24)$$

η οποία μας δίνει τη χρονική παράγωγο της ολικής ενέργειας του σωματιδίου.

Επεκτείνοντας το overshoot-undershoot επιχείρημα του Coleman στην περίπτωση καμπυλωμένου χωρόχρονου, εάν το σωματίδιο ξεκινήσει πολύ κοντά στο αληθές κενό φ_t , θα προσπεράσει το ψευδές κενό φ_f και θα αποκλίνει, ενώ εάν ξεκινήσει πολύ μακριά από το φ_t , δε θα καταφέρει να φτάσει το φ_f . Λόγω συνέχειας, αναμένουμε να υπάρχει κάποια ενδιάμεση αρχική θέση $\varphi_i \rightarrow \varphi_t$, η οποία θα αντιστοιχεί σε μία τροχιά που θα σταματά στο φ_f .

Λόγω της παρουσίας της βαρύτητας, προκύπτουν αρκετές βασικές διαφορές σε σχέση με την περίπτωση του επίπεδου χώρου. Πρώτον, η δύναμη τριβής είναι δυνατόν να γίνει δύναμη αντι-τριβής. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, το ρ είναι πάντα μη αρνητικό, επομένως η μεταβολή της ενέργειας εξαρτάται από το πρόσημο του ρ' ⁴. Όταν το ρ αυξάνεται, το σωματίδιο χάνει ενέργεια, άρα η κίνηση είναι αποσβεστική. Όταν το ρ μειώνεται, η ενέργεια αυξάνεται και η δύναμη $\frac{3\rho'}{\rho}\varphi'$ γίνεται προωθητική. Εάν, όμως, γίνει προωθητική, για να σταματήσει το σωματίδιο, θα πρέπει να αντισταθμιστεί από τη δύναμη που προέρχεται από το δυναμικό. Αυτό, προφανώς, δεν μπορεί να συμβεί στην κορυφή του λόφου του ψευδοκενού, όπου η δύναμη του δυναμικού μηδενίζεται. Συνεπώς, εάν το ρ' αλλάξει πρόσημο, εάν δηλαδή το ρ έχει δεύτερο σημείο μηδενισμού (κλειστή πολλαπλότητα), η τελική τιμή του πεδίου $\varphi(\infty)$ δεν είναι ακριβώς το ψευδές κενό φ_f , αλλά μία τιμή κοντά σε αυτό. Επιβεβαιώσαμε, λοιπόν, ότι η συνοριακή συνθήκη (4.17) ισχύει μόνο για ανοικτή πολλαπλότητα⁵.



(a) Η εξέλιξη του πεδίου για μία 1-bounce. (b) Τυπική συμπεριφορά του συντελεστή κλίμακας για μία 1-bounce.

Σχήμα 4.1: Παράδειγμα μίας CDL bounce σε κλειστή πολλαπλότητα.

⁴Εάν αλλάξει το ρ' πρόσημο, το ρ θα έχει και δεύτερο σημείο μηδενισμού. Άρα, η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί μόνο σε κλειστές πολλαπλότητες.

⁵Το γεγονός ότι, στο υπόβαθρο de Sitter, το πεδίο δεν γίνεται πουθενά ίσο με φ_f μπορεί να ερμηνευτεί και διαφορετικά, λαμβάνοντας υπ' όψιν τη θερμική φύση του χώρου de Sitter. Ως γνωστό, ο χώρος de Sitter έχει μη μηδενική θερμοκρασία, με αποτέλεσμα το σημείο από το οποίο το πεδίο εισέρχεται στο φράγμα δυναμικού να είναι πάντα θερμικά διεγερμένο. Επομένως, δεν είναι δυνατόν να εισέρχεται από το ελάχιστο του δυναμικού, φ_f .

Δεύτερον, υπάρχουν περιπτώσεις, για τις οποίες δεν υπάρχει CDL bounce. Στην περίπτωση που το ρ έχει δεύτερο σημείο μηδενισμού (για κλειστή, δηλαδή, πολλαπλότητα), η δύναμη τριβής γίνεται δύναμη αντι-τριβής, με αποτέλεσμα το overshoot-undershoot επιχείρημα του Coleman να μην εγγυάται την ύπαρξη λύσης bounce. Για να το κατανοήσουμε αυτό, υπενθυμίζουμε ότι το εύρος το τείχους της φυσαλίδας καθορίζεται από τη μορφή του φράγματος, δηλαδή από την καμπυλότητα του V στο μέγιστο του φράγματος, $\varphi = \varphi_{top}$ (βλ. σχέση (3.21)). Ένα αρκετά επίπεδο φράγμα δυναμικού αντιστοιχεί σε παχύ τείχος (thick-wall.) Στον επίπεδο χώρο, αυτό δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα. Μπορούμε να έχουμε λύση bounce, όσο επίπεδο και εάν γίνει το δυναμικό, καθώς μπορεί πάντα να σχηματισθεί φυσαλίδα με παχύ τείχος (αλλά λεπτό συγκριτικά με την ακτίνα της), αρκεί να αυξήσουμε αρκετά την ακτίνα της⁶. Ωστόσο, στην περίπτωση του καμπυλωμένου χώρου, κάτι τέτοιο δεν είναι εγγυημένο, καθώς ο συμπαγής χώρος de Sitter θέτει ένα άνω όριο στο μέγεθος της bounce. Το κριτήριο που εγγυάται την ύπαρξη λύσης bounce είναι:

$$|V''_{top}| > \frac{4}{\Lambda_{top}^2}. \quad (4.25)$$

Εάν η παραπάνω ανισότητα δεν ικανοποιείται, είναι δυνατόν να μην υπάρχει CDL bounce (Jensen and Steinhardt, 1984, 1989; Hackworth and Weinberg, 2005; Batra and Kleban, 2007). Ακόμα, όμως, και εάν υπάρχει, η μορφή της θα είναι αρκετά διαφορετική από την αναμενόμενη, καθώς μπορεί να μην προσεγγίζει ούτε το αληθές κενό ούτε το ψευδές κενό (Weinberg, 2015).

Επιπλέον, η παρουσία της βαρύτητας δίνει τη δυνατότητα ύπαρξης ενός νέου τύπου λύσεων, που ταλαντώνονται μέσα στο πηγάδι, πριν τελικά φτάσουν σε κάποιο σημείο ηρεμίας κοντά στο φ_f ή στο φ_t , το οποίο καθορίζεται από τη σχέση της δύναμης τριβής αντι-τριβής με τη δύναμη του δυναμικού. Οι λύσεις αυτές ονομάζονται «oscillating bounce solutions» ή « n -bounce solutions», όπου το n αντιστοιχεί στον αριθμό των διελεύσεων του πεδίου μέσω του φράγματος δυναμικού. (Banks, 2002; Hackworth and Weinberg, 2005).⁷ Η ερμηνεία αυτών των λύσεων (για $n \geq 1$) είναι σχετικά ασαφής (η ασάφεια οφείλεται στον αριθμό των ιδιοκαταστάσεων με αρνητική ιδιοτιμή στις διακυμάνσεις από το ημικλασικό όριο (Johnson, 2007)), αλλά αποδεικνύεται ότι η Ευκλείδεια δράση τους είναι πάντα μεγαλύτερη της δράσης της CDL bounce⁸. Επομένως, ακόμα και εάν σχετίζονται με το φαινόμενο σήραγγας, θα έχουν πάντα μικρότερη συνεισφορά στο ρυθμό διάσπασης του κενού.

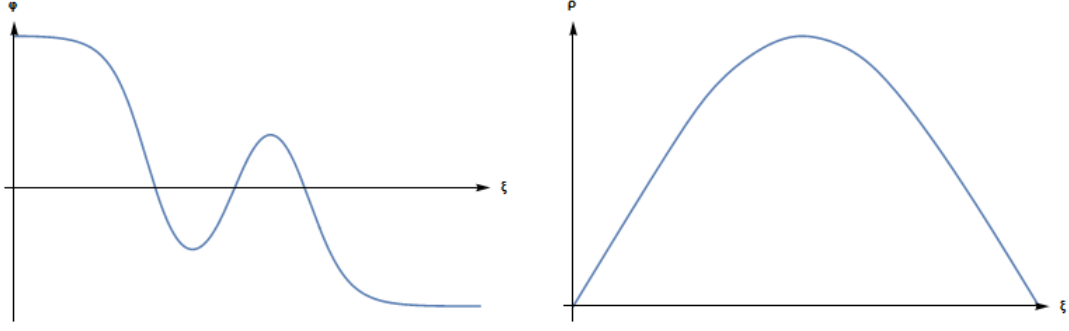
Για να υπολογίσουμε την Ευκλείδεια δράση της bounce, πρέπει να προσδιορίσουμε την τοπολογία της πολλαπλότητας, η οποία εξαρτάται από τα σημεία στα οποία βρίσκονται τα δύο ελάχιστα του δυναμικού: δηλαδή, από την κοσμολογική σταθερά πριν και μετά το φαινόμενο της διάσπασης του κενού (4.3).

Εάν το δυναμικό είναι παντού μη μηδενικό, η πολλαπλότητα είναι πάντα κλειστή. Από την εξίσωση (4.13), βλέπουμε ότι $\rho'' < 0$, $\forall \xi$:

⁶Στο κεφάλαιο (3.4), είδαμε ότι, για το δυναμικό της σχέσης (3.38), καθώς η ενεργειακή διαφορά μεταξύ των δύο κενών α αυξάνεται, η αρχική θέση του πεδίου απομακρύνεται από το αληθές κενό και η ακτίνα της φυσαλίδας μειώνεται. Όμως, στο όριο $\alpha \rightarrow 1$, η ενεργειακή διαφορά γίνεται αμελητέα και η λύση bounce γίνεται προσεγγιστικά: $\varphi = \varphi_t = \varphi_f$. Επομένως, στο όριο $\alpha \rightarrow 1$, όπου το φράγμα σχεδόν εξαφανίζεται και το δυναμικό γίνεται επίπεδο ($|V''_{top}| \approx |V''_f| = \alpha^2 - 1 \approx 0$), είναι ενεργειακά εφικτό να σχηματισθεί μία φυσαλίδα ακτίνας $R_b \rightarrow \infty$, με παχύ τείχος, με το πεδίο στο εσωτερικό της να είναι πολύ μικρό: $\varphi \approx \varphi_f$.

⁷Η CDL bounce αποτελεί υποκατηγορία των λύσεων n -bounce για $n = 1$.

⁸Στη συνέχεια, όταν αναφέρουμε τη bounce, θα εννοούμε τη CDL bounce.



(a) Η εξέλιξη του πεδίου για μία 3-bounce. (b) Τυπική συμπεριφορά του συντελεστή κλίμακας για μία 3-bounce.

Σχήμα 4.2: Παράδειγμα μίας 3-bounce σε κλειστή πολλαπλότητα.

$$\rho'' = -\frac{\kappa}{3}\rho\left(\frac{1}{2}\varphi'^2 + V\right) < -\frac{\kappa}{3}\rho V_t < 0. \quad (4.26)$$

Αυτό συνεπάγεται ότι το ρ' θα είναι πάντα μικρότερο από το ρ' στο ψευδές κενό, οπότε το ρ θα είναι επίσης πάντα μικρότερο του ρ στο ψευδές κενό: για κάθε ξ^* , ρ και ρ' , έχουμε:

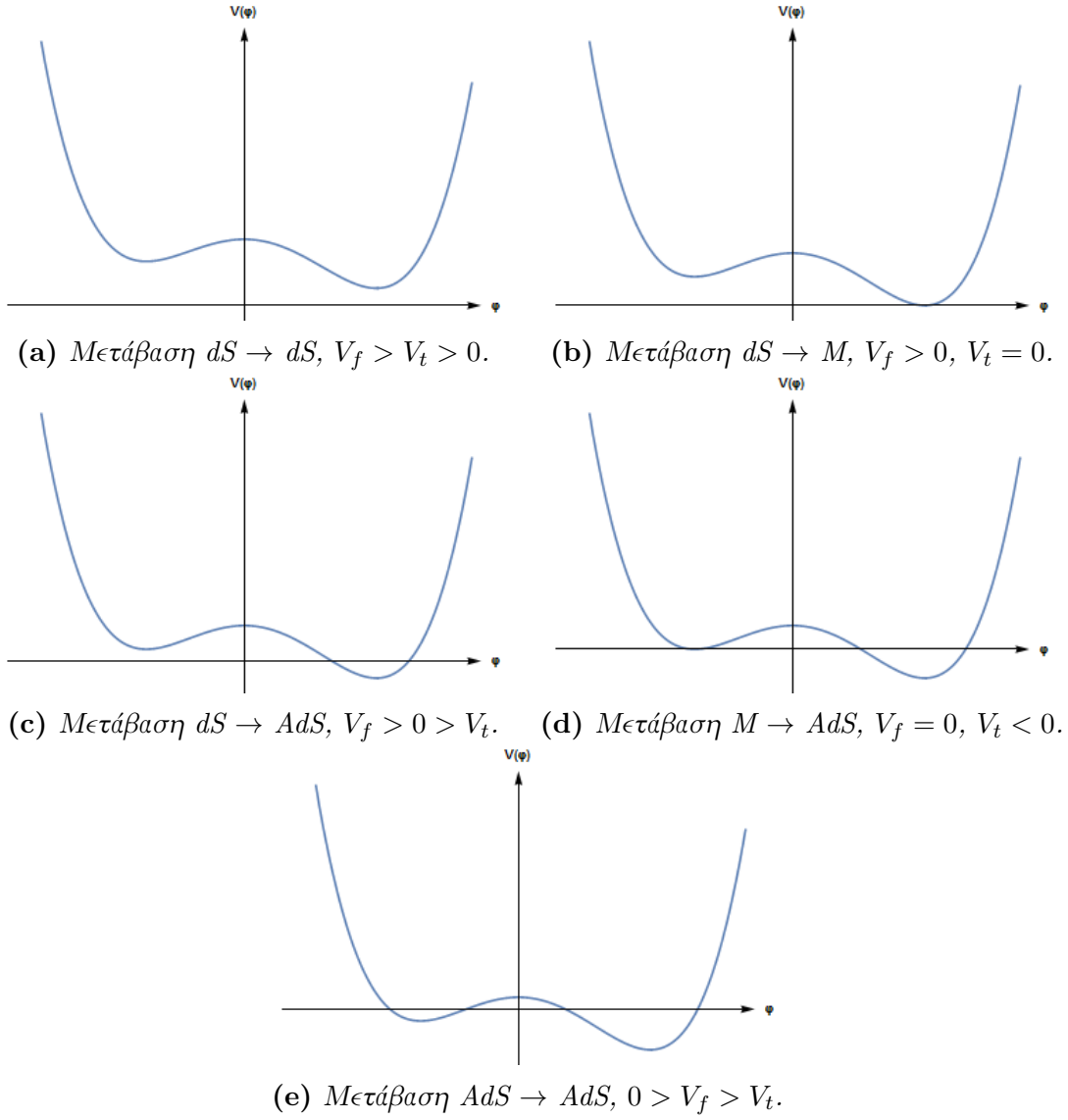
$$\begin{aligned} \rho'(\xi^*) &= 1 + \int_0^{\xi^*} d\xi \rho'' < 1 - \int_0^{\xi^*} d\xi \frac{\kappa}{3}\rho V_t = \cos\left(\frac{\xi}{\Lambda_t}\right) \Rightarrow \\ \rho(\xi^*) &= \int_0^{\xi^*} d\xi \rho' < \Lambda_t \sin\left(\frac{\xi}{\Lambda_t}\right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Αυτό σημαίνει ότι το ρ μηδενίζεται σε κάποιο σημείο ξ_{max} μικρότερο του $\xi^* = \pi\Lambda_t$ και η πολλαπλότητα είναι κλειστή. Ακόμα και στην περίπτωση που το δυναμικό δεν είναι παντού μη μηδενικό, η πολλαπλότητα θα είναι κλειστή, αρκεί ο χώρος πριν τη μετάβαση να είναι de Sitter (σχήματα (4.3a), (4.3b), (4.3c)). Θεωρώντας την ακραία περίπτωση $dS \rightarrow AdS$ (σχήμα (4.3c)), ακόμα και εάν το πεδίο ξεκινήσει από μία αρνητική θέση του δυναμικού, όταν διασχίσει τον άξονα $V = 0$, το δυναμικό θα είναι παντού θετικό, με αποτέλεσμα τη συνεχή επιβράδυνση του παράγοντα κλίμακας ρ (σχέση (4.13)). Τελικά, για κάποιο $\xi = \xi_{max}$, θα μηδενιστεί ξανά.

Η δεύτερη περίπτωση περιλαμβάνει μεταβάσεις που εκκινούν από μη θετικό ψευδές κενό, δηλαδή από χώρους Minkowski ή Anti-de Sitter. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σημείο αναστροφής του ρ και χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(V - \frac{1}{2}\varphi'^2 \right) &= \frac{dV}{d\xi} \varphi' - \varphi' \varphi'' = \varphi' \left(-\frac{3\rho'}{\rho} \varphi' \right) = -\frac{3\rho'}{\rho} \varphi'^2 \Rightarrow \\ \left(V - \frac{1}{2}\varphi'^2 \right) \Big|_{\xi=\xi^*} &= V_0 - \int_0^{\xi^*} d\xi \frac{3\rho'}{\rho} \varphi'^2. \quad \left(V_0 = V(\xi=0) \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

όπου λάβαμε υπ' όψιν τη σχέση (4.7). Επίσης, μέχρι το ρ' να μηδενιστεί, το ρ είναι αύξουσα συνάρτηση του ξ . Οπότε, στα σημεία για τα οποία $\rho' = 0$, όπου δηλαδή το ρ θα είναι μέγιστο, η σχέση (4.12) δίνει:



Σχήμα 4.3: Οι συνθήκες για τις 5 δυνατές μεταβάσεις.

$$\frac{3}{\kappa\rho^2} = V - \frac{1}{2}\varphi'^2 < V_0 - \int_0^{\xi^*} d\xi \frac{3\rho'}{\rho} \varphi'^2. \quad (4.29)$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω ανισότητας είναι θετικό, ενώ το δεξί αρνητικό εάν το V_0 είναι αρνητικό και το ρ' θετικό. Όντως, $V_0 = V_t < 0$ και $\rho' > 0$ μέχρι το σημείο αναστροφής, επομένως καταλήξαμε σε αντίφαση. Συνεπώς, δεν είναι δυνατόν να υπάρχει σημείο αναστροφής του ρ . Για μεταβάσεις από χώρο με μηδενική ή αρνητική κοσμολογική σταθερά, η πολλαπλότητα είναι ανοικτή (σχήματα (4.3d), (4.3e)).

Έχοντας αναφερθεί στην τοπολογία της πολλαπλότητας για κάθε τιμή της κοσμολογικής σταθεράς, γνωρίζουμε, πλέον, την τιμή του επιφανειακού όρου της Ευκλείδειας δράσης στην εξίσωση (4.15). Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε τον εκθέτη $B = S_E(b) - S_E(\varphi_f)$ του ρυθμού διάσπασης, μέσω των σχέσεων (4.15) και μίας εκ των (4.21), (4.22) και (4.23), ανάλογα με το υπόβαθρο στο οποίο αναφερόμαστε. Συγκεκριμένα, όμως, για την περίπτωση του υπόβαθρου Minkowski, ο υπολογισμός της δράσης $S_E(b)$ είναι ευκολότερος μέσω της σχέσης:

$$S_E = -2\pi^2 \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} d\xi \rho^3 V, \quad (4.30)$$

που προκύπτει από τη δεύτερη γραμμή της (4.14), σε συνδυασμό με τις σχέσεις (4.12) και (4.13).

Συνοψίζοντας, έχουμε (Espinosa et al., 2016; Masoumi et al., 2018):

$$\begin{aligned} B_{dS} &= 4\pi^2 \int_0^{\xi_{max}} d\xi \left(\rho^3 V - \frac{3}{\kappa} \rho \right) + \frac{8\pi^2}{\kappa} \Lambda_f^2, \\ B_{AdS} &= 4\pi^2 \int_0^\infty d\xi \left(\rho^3 V - \frac{3}{\kappa} \rho \right) + \lim_{\rho_{max} \rightarrow \infty} \left\{ \frac{4\pi^2}{\kappa} \Lambda_f^2 \left[\left(1 + \frac{\rho_{max}^2}{\Lambda_f^2} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \right\}, \\ B_M &= -2\pi^2 \int_0^\infty d\xi \rho^3 V. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Ακόμα και εάν το δυναμικό γίνει τόσο επίπεδο ώστε να μην υφίσταται CDL bounce, υπάρχει πάντα ένας άλλος τύπος λύσης, που αρχικά επισημάνθηκε από τους Hawking και Moss (Hawking and Moss, 1982). Είναι η πιο τετριμμένη λύση bounce, σύμφωνα με την οποία το πεδίο βρίσκεται σταθερό στο μέγιστο του φράγματος: $\varphi = \varphi_{top}$, για κάθε σημείο του χώρου, και έπειτα μεταβαίνει ομογενώς σε ένα από τα δύο κενά.

Στον επίπεδο χώρο, μία τέτου είδους λύση δεν είναι εφικτή. Ο όγκος του επίπεδου χώρου είναι άπειρος, επομένως είναι αδύνατον το πεδίο να διακυμανθεί παντού στο χώρο ώστε να βρεθεί στο μέγιστο του φράγματος. Κάτι τέτοιο θα απαιτούσε άπειρη ποσότητα ενέργειας. Η Ευκλείδεια δράση της λύσης αυτής είναι άπειρη και ο αντίστοιχος ρυθμός διάσπασης μηδενικός. Το ίδιο ισχύει και για τον ανοικτό χώρο Anti-de Sitter.

Ωστόσο, ο συμπαγής χώρος de Sitter έχει ορίζοντα με ακτίνα $\rho = \Lambda$ και πεπερασμένο όγκο. Επομένως, η Hawking-Moss bounce είναι δυνατή μόνο για υποβαθρο de Sitter. Ο παράγοντας κλίμακας είναι:

$$\rho = \Lambda_{top} \sin \left(\frac{\xi}{\Lambda_{top}} \right) \quad (4.32)$$

και η Ευκλείδεια δράση:

$$S_{HM} = S_E(\varphi_{top}) = -\frac{24\pi^2}{\kappa^2} V_{top} = -\frac{8\pi^2}{\kappa} \Lambda_{top}^2, \quad (4.33)$$

όπου Λ_{top} η ακτίνα του ορίζοντα του χώρου de Sitter με ενέργεια V_{top} , που δίνει εκθέτη διάσπασης B :

$$\begin{aligned} B_{HM} &= S_{HM} - S_E(\varphi_f) \\ &= \frac{24\pi^2}{\kappa^2} \left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_{top}} \right) \\ &= \frac{8\pi^2}{\kappa} (\Lambda_f^2 - \Lambda_{top}^2). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Η λύση Hawking-Moss εγείρει το ερώτημα πώς είναι δυνατόν μία στατική λύση να αναπαριστά μία διαδικασία διάσπασης κενού, διαδικασία που υποτίθεται ότι είναι δυναμική. Η απάντηση είναι ότι σχετίζεται περισσότερο με τη θερμική φύση του χώρου de Sitter. Στο όριο $(V_{top} - V_f)/V_f \ll 1$, τα δύο ακρότατα έχουν, σε πρώτη προσέγγιση, κοινό ορίζοντα ακτίνας Λ . Επομένως, η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$B_{HM} \approx \frac{4\pi\Lambda^3}{T_{dS}}(V_{top} - V_f), \quad (4.35)$$

όπου $T_{dS} = \frac{2\pi}{\Lambda}$ η θερμοκρασία του ορίζοντα του χώρου de Sitter, ακτίνας Λ . Ο αριθμητής εκφράζει τη διαφορά ενέργειας που απαιτείται για να μεταβεί ένας όγκος ορίζοντα με φ_f σε μία κατάσταση με $\varphi = \varphi_{top}$. Συνεπώς:

$$B_{HM} \approx \frac{\Delta U_{hor}}{T_{dS}}, \quad (4.36)$$

όπου ΔU_{hor} η διαφορά δυναμικής ενέργειας μεταξύ ενός όγκου ορίζοντα με φ_{top} και ενός όγκου ορίζοντα με φ_f . Η σχέση αυτή ισχύει στο όριο όπου η διαφορά δυναμικού, άρα και η διαφορά στη γεωμετρία, των δύο ακρότατων είναι πολύ μικρή. Επομένως, δεν υπάρχει συνεισφορά βαρυτικής ενέργειας και η εξίσωση (4.36) υποδεικνύει τη θερμική φύση της Hawking-Moss bounce. Καταλήγοντας, η ερμηνεία που μπορούμε να δώσουμε για τη λύση Hawking-Moss είναι ότι μία περιοχή, με όγκο αυτόν του ορίζοντα de Sitter, λόγω θερμικών διακυμάνσεων, μεταβαίνει από την κατάσταση του ψευδούς κενού στο μέγιστο του φράγματος, και έπειτα κατεβαίνει την κοιλάδα, καταλήγοντας στο αληθές κενό (Weinberg, 2007, 2015).

Μέχρις στιγμής, στην εργασία αυτή, έχουμε ασχοληθεί με τη διάσπαση του ψευδούς κενού και τη μετάβασή του σε μία κατάσταση αληθούς κενού. Αυτή είναι η μόνη λογική μετάβαση, που μπορεί κάποιος να σκεφτεί στην περίπτωση του επίπεδου χώρου. Εάν μία φυσαλίδα ψευδούς κενού σχηματιζόταν στον επίπεδο χώρο, θα είχε αμελητέο αντίκτυπο, αφού η εσωτερική πίεση του όγκου της φυσαλίδας καθώς και η επιφανειακή της τάση θα ωθούσαν τη φυσαλίδα να συρρικνωθεί.

Ωστόσο, η παρουσία της βαρύτητας καθιστά πιθανή και την αντίστροφη μετάβαση από μία κατάσταση αληθούς κενού σε μία ψευδούς. Κάτι τέτοιο είναι δυνατόν μόνο στο υπόβαθρο του χώρου de Sitter. Όπως διαπιστώσαμε νωρίτερα, η τοπολογία του Ευκλείδειου χώρου de Sitter είναι αυτή της S^4 . Σύμφωνα με τις συνοριακές συνθήκες (4.16), (4.18) και με όσα έχουν αναφερθεί, μία φυσαλίδα αληθούς κενού έχει κέντρο το σημείο $\xi = 0$ και προσεγγίζει το ψευδές κενό για $\xi = \xi_{max}$. Όμως, λόγω της κλειστής τοπολογίας, η μία πλευρά της σφαίρας δεν είναι εν τέλει διαφορετική από την άλλη. Οι δύο καταστάσεις είναι περιστροφικά συμμετρικές. Αναμένουμε, δηλαδή, ότι η μετάβαση από το φ_t στο φ_f είναι πιθανή.

Όντως, η μετάβαση από το φ_t στο φ_f μπορεί να ερμηνευθεί και με ενεργειακά κριτήρια. Υπενθυμίζουμε, ότι στον επίπεδο χώρο, πρέπει να ικανοποιούνται δύο κριτήρια για το σχηματισμό μίας φυσαλίδας. Αφενός, η διατήρηση ενέργειας επιβάλλει η ολική ενέργεια της φυσαλίδας, τη στιγμή του σχηματισμού της, σε σχέση με αυτή του ψευδούς κενού, να μηδενίζεται. Επομένως, η ενέργεια του εσωτερικού της φυσαλίδας, που παράγεται από τη μετάβαση του ψευδούς κενού σε αληθές κενό, πρέπει να αντισταθμίζει την επιφανειακή τάση του τείχους. Αφετέρου, η φυσαλίδα πρέπει να πληροί τις προϋποθέσεις για την διαστολή και την εξέλιξή της. Δηλαδή, όλη η ενέργεια που απελευθερώνεται από τη διάσπαση του κενού πρέπει να πηγαίνει στο τείχος προς επιτάχυνσή του. Συγκεκριμένα, είδαμε ότι το δεύτερο κριτήριο προκύπτει

άμεσα από το πρώτο (βλ. Κεφάλαιο (3.3)).

Η θερμική φύση του χώρου de Sitter ακυρώνει το πρώτο κριτήριο. Οι θερμικές διακυμάνσεις μπορούν να δημιουργήσουν ένα θερμικό λουτρό που θα παράσχει την απαιτούμενη ενέργεια για το σχηματισμό της φυσαλίδας. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι ο χώρος de Sitter διαστέλλεται. Άρα, η κοσμολογική διαστολή θα δρα ανασταλτικά στην τάση συρρίκνωσης της φυσαλίδας. Συγκεκριμένα, λόγω της ύπαρξης του ορίζοντα de Sitter ακτίνας Λ_t , εάν σχηματισθεί μία φυσαλίδα με ακτίνα Λ_t , είναι δεδομένο ότι δεν μπορεί να συρρικνωθεί, διότι αυτό θα συνεπαγόταν ότι αιτιατά ασύνδετα σημεία θα έρχονταν σε επαφή. Καταλήγουμε, ότι στο υπόβαθρο de Sitter, η μετάβαση από το αληθές προς το ψευδές κενό είναι δυνατή και μία φυσαλίδα ψευδούς κενού με ακτίνα μεγαλύτερη ή ίση του Λ_t είναι εγγυημένο ότι θα επιβιώσει και θα διασταλεί (Lee and Weinberg, 1987). Ο εκθέτης διάσπασης είναι:

$$B_{t \rightarrow f} = S_E(b) - S_E(\varphi_t). \quad (4.37)$$

Από τον λόγο των ρυθμών διάσπασης των δύο αντίστροφων μεταβάσεων:

$$\frac{e^{-B_{t \rightarrow f}}}{e^{-B_{f \rightarrow t}}} = e^{-S_E(\varphi_f) + S_E(\varphi_t)} = e^{\frac{24\pi^2}{\kappa^2} \left(\frac{1}{v_f} - \frac{1}{v_t} \right)} < 1, \quad (4.38)$$

βλέπουμε ότι ο ρυθμός διάσπασης του αληθούς κενού είναι μικρότερος από αυτόν του ψευδούς, αλλά είναι και αυτός πεπερασμένος.

Κλείνοντας, είναι σαφές ότι οι bounces για μεταβάσεις αληθούς κενού σε υπόβαθρο Minkowski ή Anti-de Sitter, $M \rightarrow dS$ και $AdS \rightarrow dS$, αν και τοπολογικά είναι S^4 , δεν δίνουν πεπερασμένο εκθέτη διάσπασης, αφού η Ευκλείδεια δράση για υπόβαθρο Minkowski και Anti-de Sitter απειρίζεται. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο, αφού δεν υπάρχει θερμοκρασία Hawking, άρα ούτε και πιθανότητα θερμικών διακυμάνσεων, σε χώρους με αρνητική ή μηδενική κοσμολογική σταθερά.

4.3 Η προσέγγιση λεπτού τείχους (Thin-Wall Approximation)

Εξαιρώντας τετριμμένες λύσεις, όπως την Hawking-Moss bounce, η εύρεση ακριβών, αναλυτικών λύσεων των εξισώσεων πεδίου είναι αδύνατη. Μπορούμε, όμως, να βρούμε προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις στην προσέγγιση λεπτού τείχους (TWA).

Σε αντιστοιχία με την περίπτωση του επίπεδου χώρου (βλ. Κεφάλαιο (3.2)), θέλουμε η bounce να έχει τη μορφή μίας φυσαλίδας με ένα λεπτό τείχος να διαχωρίζει το αληθές κενό του εσωτερικού της από το ψευδές κενό του εξωτερικού της⁹. Οι διαφορές στον καμπυλωμένο χώρο είναι αφενός ότι το πεδίο φ και η μετρική είναι εκφρασμένες συναρτήσει της ξ συντεταγμένης και αφετέρου ότι ο συντελεστής του φ' στην εξίσωση Klein-Gordon (4.7) είναι $\frac{\rho'}{\rho}$ αντί για $\frac{1}{\rho}$ που είναι στην αντίστοιχη εξίσωση στον επίπεδο χώρο (3.9). Η διαφορά στη μορφή των συντελεστών, αν και ασήμαντη αναφορικά με τους υπολογισμούς, επειδή στην TWA τους αγνοούμε, θα οδηγήσει σε διαφορετικό κριτήριο αξιοπιστίας της προσέγγισης.

⁹Στο υπόλοιπο της εργασίας, θα ασχοληθούμε μόνο με τη διάσπαση του ψευδούς κενού και τη μετάβασή του σε μία κατάσταση αληθούς κενού.

4.3. Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΛΕΠΤΟΥ ΤΕΙΧΟΥΣ (THIN-WALL APPROXIMATION)

Θα υπολογίσουμε το B ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία που χρησιμοποιήσαμε στον επίπεδο χώρο, χωρίζοντας την ολοκλήρωση σε τρεις περιοχές. Η πρώτη περιοχή εκτείνεται από το κέντρο $\xi = 0$ σε μία τιμή $\bar{\xi} - \Delta\xi/2$, όπου βρίσκεται η εσωτερική επιφάνεια του τείχους. Στην περιοχή αυτή, το πεδίο βρίσκεται στο αληθές κενό. Η δεύτερη περιοχή, από $\bar{\xi} - \Delta\xi/2$ έως $\bar{\xi} + \Delta\xi/2$, είναι η περιοχή όπου βρίσκεται το τείχος, το οποίο έχει ακτίνα καμπυλότητας $\bar{\rho} = \rho(\bar{\xi})$ και πλάτος $\Delta\rho = \rho(\bar{\xi} + \Delta\xi/2) - \rho(\bar{\xi} - \Delta\xi/2) \approx \rho'\Delta\xi$. Η τελευταία περιοχή είναι η περιοχή εκτός του τείχους, με $\xi > \bar{\xi} + \Delta\xi/2$, στην οποία το πεδίο βρίσκεται στο ψευδές κενό.

Για $\bar{\rho} \gg \Delta\rho \approx \rho'\Delta\xi$, η εξίσωση (4.7) γράφεται:

$$\frac{dV}{d\varphi} = \varphi_w'' + 3\frac{\rho'}{\rho}\varphi_w' \approx \varphi_w'' + 3\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\varphi_w' \approx \varphi_w'', \quad (4.39)$$

όπου φ_w η τιμή του πεδίου στη δεύτερη περιοχή, εντός του τείχους. Η εξίσωση αυτή, όπως έχουμε αναφέρει, αναπαριστά την κίνηση ενός μονοδιάστατου instanton. Άρα, το πεδίο φ στην TWA ικανοποιεί την:

$$\frac{1}{2}\varphi_w'^2 + V_w = V_f \quad (4.40)$$

Πάνω στο τείχος:

Εφαρμόζοντας τη σχέση (4.15) έχουμε:

$$\begin{aligned} B_{wall} &= S_E(\varphi_w) - S_E(\varphi_f) \\ &= 4\pi^2 \int_{\bar{\xi}-\Delta\xi/2}^{\bar{\xi}+\Delta\xi/2} d\xi \rho^3 (V_w - V_f) \\ &= 2\pi^2 \bar{\rho}^3 \int_{\bar{\xi}-\Delta\xi/2}^{\bar{\xi}+\Delta\xi/2} d\xi (V_w - V_f) \\ &= 2\pi^2 \bar{\rho}^3 S_I, \end{aligned} \quad (4.41)$$

όπου S_I η επιφανειακή τάση του τείχους, όπως ορίστηκε στην (3.17).

Μέσα από το τείχος:

Στην περιοχή μέσα από το τείχος, το πεδίο βρίσκεται στο αληθές κενό, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} B_{in} &= S_E(\varphi_t) - S_E(\varphi_f) \\ &= 4\pi^2 \int_0^{\bar{\rho}} d\rho \frac{1}{\rho'} \left(\rho^3 V_t - \frac{3\rho}{\kappa} \right) - (\varphi_t \rightarrow \varphi_f) \\ &= -\frac{4\pi^2 \Lambda_f^2}{\kappa} \left[\left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_f^2} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] + \frac{4\pi^2 \Lambda_t^2}{\kappa} \left[\left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_t^2} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right], \end{aligned} \quad (4.42)$$

Η σχέση αυτή ισχύει για μη μηδενικές κοσμολογικές σταθερές $V_t, V_f \neq 0$, είτε

για κλειστή είτε για ανοικτή πολλαπλότητα (αρκεί στην περίπτωση της ανοικτής πολλαπλότητας να κάνουμε την αντικατάσταση $\Lambda^2 \rightarrow -\Lambda^2$ επειδή $V < 0$), αφού:

$$\rho' = \cos\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right) = \left(1 - \sin^2\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{\rho^2}{\Lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{κλειστή πολλαπλότητα} \quad (4.43)$$

$$\rho' = \cosh\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right) = \left(1 + \sinh^2\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{\rho^2}{\Lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ανοικτή πολλαπλότητα.} \quad (4.44)$$

Έξω από το τείχος:

Στην περιοχή έξω από το τείχος, όπου το πεδίο βρίσκεται στο ψευδές κενό, υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Στην εξίσωση (4.42) θεωρήσαμε ότι το ρ' είναι θετικό στην πρώτη περιοχή (όντως, αυτή είναι η μόνη αποδεκτή περίπτωση, όπως θα επισημάνουμε παρακάτω). Όμως, στην περίπτωση του υπόβαθρου de Sitter, το ρ' αλλάζει πρόσημο. Εάν το ρ αυξάνεται και σε μία περιοχή μετά το τείχος ($\rho' > 0$), η περιοχή του ψευδούς κενού που περιβάλλει τη φυσαλίδα είναι μεγαλύτερη από ένα ημισφαίριο μίας S^4 . Αυτή η λύση ονομάζεται bounce τύπου A. Εάν το ρ' γίνεται αρνητικό αμέσως μετά το τείχος ($\rho' < 0$), η περιοχή του ψευδούς κενού που περιβάλλει τη φυσαλίδα είναι μικρότερη από ένα ημισφαίριο μίας S^4 και αντιστοιχεί σε bounce τύπου B.

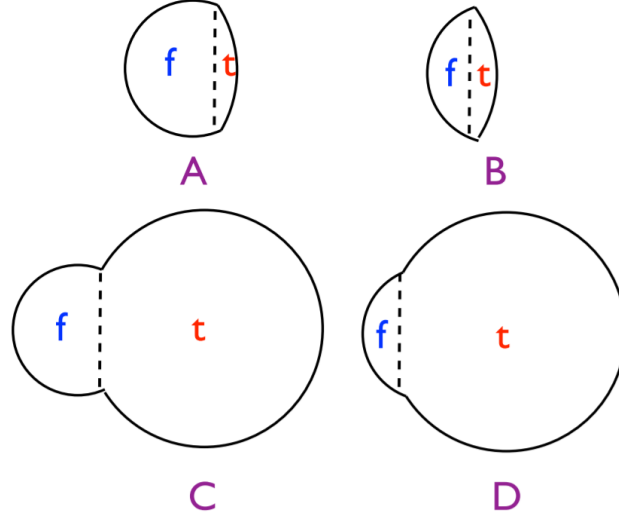
Τον παραπάνω διαχωρισμό μπορούμε να τον αντιληφθούμε καλύτερα εάν φανταστούμε ότι μία φυσαλίδα λεπτού τείχους σχηματίζεται εάν πάρουμε ένα τμήμα ψευδούς κενού και ένα τμήμα αληθούς κενού, τα οποία, στην περίπτωση που και τα δύο κενά έχουν θετική πυκνότητα ενέργειας, είναι τμήματα δύο S^4 και τα ενώσουμε κατά μήκος ενός τείχους S^3 (Brown, 2009). Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικοί τρόποι, με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτό, ανάλογα με το αν πάρουμε ένα τμήμα αληθούς κενού μικρότερο ή μεγαλύτερο ενός ημισφαιρίου και, ομοίως, ένα τμήμα ψευδούς κενού μικρότερο ή μεγαλύτερο ενός ημισφαιρίου, όπως φαίνεται και στο σχήμα (4.4).

Ωστόσο, οι τύποι C και D απορρίπτονται, επειδή έχουν $\rho'' > 0$ πάνω στο τείχος σε αντίθεση με τη σχέση (4.13). Αυτός είναι ο λόγος που δεν διαχωρίσαμε περιπτώσεις και στην περιοχή μέσα στο τείχος.

Η συνεισφορά της bounce στο B_{out} , στην περιοχή ψευδούς κενού, είναι διαφορετική για τους δύο τύπους A και B, λόγω της διαφοράς των δύο στην αλλαγή προσήμου του ρ' . Από τη σχέση (4.15), η δράση της bounce στην περιοχή ψευδούς κενού είναι:

$$S_{E_b}(\varphi_f) = -\frac{4\pi^2\Lambda_f^2}{\kappa} \left[\pm \left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_f^2}\right)^{\frac{3}{2}} + 1 \right], \quad (4.45)$$

όπου το $+$ αντιστοιχεί στον τύπο A και το $-$ στον τύπο B. Άρα, έξω από το τείχος, ο εκθέτης διάσπασης είναι:



Σχήμα 4.4: Οι τέσσερις διαφορετικοί τύποι *bounces*, εάν και τα δύο κενά έχουν θετική πυκνότητα ενέργειας. Οι τύποι A και C έχουν περισσότερο από ένα ημισφαίριο ψευδούς κενού, ενώ οι τύποι B και D έχουν λιγότερο. Οι τύποι C και D έχουν περισσότερο από ένα ημισφαίριο αληθούς κενού, ενώ οι τύποι A και B έχουν λιγότερο.

$$B_{out} = S_{E_b}(\varphi_f) - S_E(\varphi_f) = \begin{cases} 0, & \text{τύπος A} \\ \frac{8\pi^2\Lambda_f^2}{\kappa} \left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_f^2}\right)^{\frac{3}{2}}, & \text{τύπος B.} \end{cases} \quad (4.46)$$

Αθροίζοντας όλες τις συνεισφορές, καταλήγουμε ότι ο εκθέτης διάσπασης, στην TWA είναι:

$$B = B_{wall} + B_{in} + B_{out} \\ = 2\pi^2\bar{\rho}^3 S_I + \frac{4\pi^2\Lambda_f^2}{\kappa} \left[\mp \left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_f^2}\right)^{\frac{3}{2}} + 1 \right] + \frac{4\pi^2\Lambda_t^2}{\kappa} \left[\left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_t^2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right], \quad (4.47)$$

όπου το $-$ αντιστοιχεί στον τύπο A και το $+$ στον τύπο B. Η σχέση αυτή ισχύει για μη μηδενικές κοσμολογικές σταθερές $V_t, V_f \neq 0$, είτε για κλειστή είτε για ανοικτή πολλαπλότητα, αρκεί να κάνουμε την αντικατάσταση $\Lambda^2 \rightarrow -\Lambda^2$. Ωστόσο, δεν υπάρχει bounce τύπου B για ανοικτή πολλαπλότητα, επειδή απαιτεί την ύπαρξη μέγιστου του ρ . Είναι εύκολο ναδειχθεί ότι σε ανοικτή πολλαπλότητα, το B γίνεται αρνητικό για bounce τύπου B, γεγονός που συνεπάγεται ότι λύσεις τύπου B υπάρχουν μόνο σε υπόβαθρο de Sitter (Lee, 2014).

Επειδή η bounce είναι στάσιμο σημείο της δράσης, η ακτίνα της φυσαλίδας $\bar{\rho}$ προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dB}{d\bar{\rho}} = 6\pi^2\bar{\rho}^2 S_I + \frac{12\pi^2\bar{\rho}}{\kappa} \left[\pm \left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_f^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_t^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] = 0, \quad (4.48)$$

η οποία δίνει:

$$\frac{1}{\bar{\rho}^2} = \frac{1}{\Lambda_f^2} + \left(\frac{\varepsilon}{3S_I} - \frac{\kappa S_I}{4} \right)^2 = \frac{1}{\Lambda_t^2} + \left(\frac{\varepsilon}{3S_I} + \frac{\kappa S_I}{4} \right)^2, \quad (4.49)$$

με τις συνθήκες:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{3S_I} &> \frac{\kappa S_I}{4}, & \text{τύπος A} \\ \frac{\varepsilon}{3S_I} &< \frac{\kappa S_I}{4}, & \text{τύπος B,} \end{aligned} \quad (4.50)$$

όπου ε η διαφορά ενεργειακής πυκνότητας των δύο κενών. Βλέπουμε ότι το όριο ασθενούς βαρύτητας ($\kappa \rightarrow 0$) μπορεί να προκύψει μόνο από τη λύση τύπου A. Επειδή ο όρος $\frac{\varepsilon}{3S_I} = R_b^{-1}$ (σχέση (3.19)) είναι το αντίστροφο της ακτίνας της φυσαλίδας στον επίπεδο χώρο, η λύση τύπου B εμφανίζεται εάν η ακτίνα R_b γίνει πολύ μεγάλη. Βλέπουμε, επίσης, ότι σε ανοικτές πολλαπλότητες, στην TWA, δεν μπορεί να υπάρξει φαινόμενο διάσπασης κενού εάν:

$$\varepsilon \leq \frac{3}{4} \kappa S_I^2. \quad (4.51)$$

Αυτό μπορεί, εκ πρώτης όψης, να φαίνεται παράδοξο, καθώς αναμένει κανείς να είναι πάντα δυνατόν να υπάρχει φαινόμενο σήραγγας από μία κατάσταση σε μία άλλη χαμηλότερης ενέργειας. Όμως, λόγω διατήρησης της ενέργειας, μία φυσαλίδα που σχηματίζεται πχ. σε χώρο Minkowski πρέπει να έχει μηδενική ενέργεια. Πρέπει, δηλαδή, να έχει μεγάλη ακτίνα ώστε η αρνητική ενέργεια του εσωτερικού της να αντισταθμίζει τη θετική ενέργεια του τείχους. Απουσία βαρύτητας, αυτό είναι πάντα δυνατόν. Όταν, όμως, υπεισέρχονται βαρυτικά φαινόμενα, δεν είναι απαραίτητα εφικτό¹⁰, λόγω της περιέργης ιδιότητας του χώρου Anti-de Sitter, ο όγκος που περικλείει μία επιφάνεια σταθερού χρόνου να μεγαλώνει ανάλογα με το R^2 για μεγάλες ακτίνες, $R \gg \Lambda$, και όχι ανάλογα με το R^3 ¹¹. Αντίστοιχο είναι το αποτέλεσμα εάν το υπόβαθρο είναι αντί για Minkowski, Anti-de Sitter.

Συνεχίζοντας, εισάγοντας την εξίσωση (4.49) στην (4.47) καταλήγουμε ότι ο εκθέτης διάσπασης για τη λύση bounce, στην TWA, δίνεται από τη σχέση:

¹⁰ Αποδεικνύεται εύκολα ότι η συνεισφορά της βαρύτητας στην ενέργεια είναι θετική, οπότε η ακτίνα της φυσαλίδας πρέπει να μεγαλώσει για να αντισταθμιστεί η συνεισφορά αυτή (Coleman and De Luccia, 1980).

¹¹ Ένα συχνά χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων που καλύπτει όλον τον χώρο Anti-de Sitter είναι το (t, r, θ, φ) :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{r^2}{\Lambda^2} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{r^2}{\Lambda^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega_2^2. \quad (4.52)$$

Σε μία επιφάνεια σταθερού χρόνου, η 2-σφαίρα $r = R$ έχει επιφάνεια $4\pi R^2$ και περικλείει όγκο $V(R) = 4\pi \int_0^R dr \frac{r^2}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{\Lambda^2}}}$. Για $R \gg \Lambda$, ο όγκος αυτός αυξάνεται ανάλογα με το R^2 , $V(R) \approx 2\pi \Lambda R^2$, άρα ο λόγος του όγκου προς την επιφάνεια είναι φραγμένος από το $\Lambda/2$.

$$B = \bar{\rho}^3 \left[2\pi^2 S_I - \frac{4\pi^2 \Lambda_f^2}{\kappa} \left(\frac{\varepsilon}{3S_I} - \frac{\kappa S_I}{4} \right)^3 + \frac{4\pi^2 \Lambda_t^2}{\kappa} \left(\frac{\varepsilon}{3S_I} + \frac{\kappa S_I}{4} \right)^3 \right] + \frac{4\pi^2}{\kappa} (\Lambda_f^2 - \Lambda_t^2). \quad (4.53)$$

Τα πρόσημα σε αυτήν την έκφραση είναι τα ίδια και για τους δύο τύπους bounce A και B. Ο λόγος είναι ότι η αντικατάσταση της έκφρασης για την ακτίνα της φυσαλίδας στον δεύτερο όρο της σχέσης για το B δίνει:

$$\mp \left[\bar{\rho}^2 \left(\frac{\varepsilon}{3S_I} - \frac{\kappa S_I}{4} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} = \mp \left[\pm \bar{\rho}^3 \left(\frac{\varepsilon}{3S_I} - \frac{\kappa S_I}{4} \right)^3 \right] = \bar{\rho}^3 \left(\frac{\varepsilon}{3S_I} - \frac{\kappa S_I}{4} \right)^3,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις συνθήκες (4.50). Η σχέση (4.53) είναι ισοδύναμη με την έκφραση του Parke (Parke, 1983), ο οποίος γενίκευσε τα αποτελέσματα των Coleman και de Luccia (Coleman and De Luccia, 1980) για κάθε τιμή των κοσμολογικών σταθερών. Οι Coleman και de Luccia και αργότερα ο Parke δεν είχαν συνυπολογίσει τη δυνατότητα ύπαρξης bounces τύπου B. Λόγω, όμως, των δύο αλλαγών προσήμων, τα αποτελέσματά τους ήταν σωστά και ισχύουν και για τους δύο τύπους λύσεων.

Και αυτή η σχέση ισχύει για μη μηδενικές κοσμολογικές σταθερές $V_t, V_f \neq 0$, είτε για κλειστή είτε για ανοικτή πολλαπλότητα, αρκεί να κάνουμε την αντικατάσταση $\Lambda^2 \rightarrow -\Lambda^2$.

Εάν η μετάβαση γίνεται από χώρο de Sitter ($V_f = \varepsilon$) σε χώρο Minkowski ($V_t = 0$), οι υπολογισμοί είναι πολύ απλούστεροι και η σχέση (4.47) γίνεται:

$$B = 2\pi^2 \bar{\rho}^3 S_I - \frac{6\pi^2 \bar{\rho}^2}{\kappa} + \frac{4\pi^2 \Lambda_f^2}{\kappa} \left[- \left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_f^2} \right)^{\frac{3}{2}} + 1 \right], \quad (4.54)$$

ενώ η συνθήκη στασιμότητας δίνει:

$$\bar{\rho} = \frac{R_b}{1 + (R_b/2\Lambda_f)^2}. \quad (4.55)$$

Τέλος, ο εκθέτης διάσπασης για τη λύση bounce είναι:

$$B = \frac{B_0}{[1 + (R_b/2\Lambda_f)^2]^2}, \quad (4.56)$$

όπου B_0 η έκφραση του B στον επίπεδο χώρο (σχέση (3.20)).

Αντίστοιχα, για μετάβαση από χώρο Minkowski ($V_f = 0$) σε χώρο Anti-de Sitter ($V_t = -\varepsilon$), τα αποτελέσματα είναι:

$$\bar{\rho} = \frac{R_b}{1 - (R_b/2\Lambda_t)^2} \quad (4.57)$$

και

$$B = \frac{B_0}{[1 - (R_b/2\Lambda_t)^2]^2}, \quad (4.58)$$

τα οποία μπορούν να προκύψουν απευθείας με την αντικατάσταση $\Lambda^2 \rightarrow -\Lambda^2$ στα προηγούμενα.

Στην πρώτη περίπτωση, βλέπουμε ότι η παρουσία βαρύτητας αυξάνει την πιθανότητα δημιουργίας φυσαλίδας σε σχέση με την απουσία βαρύτητας, διότι το B μικραίνει. Αντίθετα, στη δεύτερη περίπτωση συμβαίνει το αντίστροφο. Συγκεκριμένα, εάν ορίσουμε την κρίσιμη τιμή:

$$\kappa_{cr} = \frac{4\varepsilon}{3S_I^2}, \quad (4.59)$$

οι παραπάνω σχέσεις γράφονται:

$$\bar{\rho} = \frac{R_b}{1 - \kappa/\kappa_{cr}} \quad (4.60)$$

και

$$B = \frac{B_0}{(1 - \kappa/\kappa_{cr})^2}, \quad (4.61)$$

απ' όπου βλέπουμε ότι η βαρύτητα μηδενίζει την πιθανότητα διάσπασης κενού για $R_b \geq 2\Lambda_t$ ή ισοδύναμα για $\kappa \geq \kappa_{cr}$.

Οι παραπάνω δύο μεταβάσεις είναι αυτές που μελέτησαν αρχικά οι Coleman και de Luccia (Coleman and De Luccia, 1980).

Εάν, τώρα, παραγωγίσουμε την (4.48), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B}{d\bar{\rho}^2} &= 12\pi^2 \bar{\rho} S_I + \frac{12\pi^2}{\kappa} \left[\pm \left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_f^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad - \frac{12\pi^2}{\kappa} \left[\pm \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_f^2} \left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_f^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_t^2} \left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_t^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{12\pi^2}{\kappa} \left[\mp \left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_f^2} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{\Lambda_t^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right], \end{aligned} \quad (4.62)$$

οπότε

$$\left. \frac{d^2 B}{d\bar{\rho}^2} \right|_{r=\bar{\rho}} \begin{cases} < 0, & \text{τύπος A} \\ > 0, & \text{τύπος B.} \end{cases} \quad (4.63)$$

Βλέπουμε ότι η bounce τύπου A μεγιστοποιεί τη δράση. Το γεγονός αυτό εγγυάται την ύπαρξη ιδιοκατάστασης με αρνητική ιδιοτιμή και επιβεβαιώνει ότι η μετάβαση πρέπει να ερμηνευτεί ως διάσπαση κενού. Αντιθέτως, για την bounce τύπου B δεν έχουμε καμία εγγύηση για την ύπαρξη αρνητικής ιδιοτιμής.

Κλείνοντας, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο αξιοπιστίας της προσέγγισης. Για κλειστή πολλαπλότητα, με κενά με θετική πυκνότητα ενέργειας, ισχύει:

$$\Delta\rho = \rho' \Delta\xi < \Delta\xi, \quad (4.64)$$

επειδή $\rho'' < 0$ παντού. Επομένως, η συνθήκη $\bar{\rho} \gg \Delta\rho$ ικανοποιείται εάν:

$$\Delta\xi \ll \bar{\rho}. \quad (4.65)$$

Όπως και στον επίπεδο χώρο (βλ. σχέση (3.22)), έχουμε:

$$\Delta\xi \sim \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{\Delta V}} \sim \frac{1}{m}, \quad (4.66)$$

εάν το δυναμικό πληροί τη συνθήκη (3.23). Στο όριο ασθενούς βαρύτητας, $\bar{\rho} \approx \frac{3S_1}{\varepsilon}$, η συνθήκη εγκυρότητας ταυτίζεται με αυτήν του επίπεδου χώρου (3.24):

$$\varepsilon \ll m^4 \sim \Delta V. \quad (4.67)$$

Εάν, όμως, η βαρύτητα δεν είναι ασθενής, η ακτίνα της φυσαλίδας $\bar{\rho}$, η οποία εξαρτάται από το κ , θα είναι πάντα μικρότερη από την ακτίνα του ορίζοντα Λ_f , αλλά μπορεί να είναι συγκρίσιμη της: $\bar{\rho} \sim \Lambda_f$. Για να ισχύει ότι $\bar{\rho} \gg \Delta\xi$, πρέπει:

$$\Delta\xi \sim \frac{1}{m} \ll \sqrt{\frac{1}{\kappa V_f}} \sim \frac{1}{m_f^2 \sqrt{\kappa}} \Rightarrow \frac{m_f^2}{m} \ll M_{Pl}. \quad (4.68)$$

Για συγκρίσιμη mass scale του δυναμικού με την Planck scale, $m \sim M_{Pl}$, πρέπει $m_f \ll m$, ή ισοδύναμα $V_f \ll V_{top}$, άρα $\varepsilon < V_f \ll V_{top}$, η οποία είναι ισοδύναμη με την (4.67).

Ας εξετάσουμε, όμως, τη συνθήκη η ακτίνα της φυσαλίδας να είναι συγκρίσιμη με την ακτίνα του ορίζοντα. Σύμφωνα με τη σχέση (4.49), η συνθήκη μεταφράζεται στην:

$$\varepsilon \approx \frac{3\kappa S_I^2}{4} \sim \frac{m^6}{M_{Pl}^2} \sim \left(\frac{m}{M_{Pl}} \right)^2 m^4. \quad (4.69)$$

Εάν $m \sim M_{Pl}$, τότε $\varepsilon \sim m^4$. Φαίνεται ότι δεν απαιτείται μικρό ε , όμως τότε το πλάτος του τείχους $\Delta\xi$ είναι συγκρίσιμο με τις άλλες παραμέτρους μήκους, επομένως η TWA δεν ισχύει. Εάν $m \ll M_{Pl}$, τότε $\varepsilon \ll m^4$, που ταυτίζεται με την (4.67).

Για ανοικτή πολλαπλότητα, η ακτίνα της φυσαλίδας είναι πάντα μεγαλύτερη από την αντίστοιχη στον επίπεδο χώρο R_b , διότι από τη σχέση (4.49), για $\Lambda_f^2 \rightarrow -\Lambda_f^2$, έχουμε:

$$\frac{1}{\bar{\rho}^2} = -\frac{1}{\Lambda_f^2} + \left(\frac{\varepsilon}{3S_I} - \frac{\kappa S_I}{4} \right)^2 < \left(\frac{\varepsilon}{3S_I} \right)^2 \Rightarrow \bar{\rho} > \frac{3S_1}{\varepsilon} = R_b. \quad (4.70)$$

Επομένως, και σε αυτήν την περίπτωση, η συνθήκη ταυτίζεται με αυτήν για τον επίπεδο χώρο (Lee, 2014).

4.4 Η εξέλιξη της φυσαλίδας μετά τον σχηματισμό της

Στο Κεφάλαιο (3.3) εξηγήσαμε ότι το μόνο που έπρεπε να κάνουμε για να μελετήσουμε την εξέλιξη της φυσαλίδας στον επίπεδο χώρο ήταν να επεκτείνουμε αναλυτικά τη λύση bounce στο χώρο Minkowski. Συγκεκριμένα, επιλέγοντας το κέντρο της φυσαλίδας τη στιγμή του σχηματισμού της ως το κέντρο των

συντεταγμένων, για τη χωροειδή περιοχή η αναλυτική συνέχιση είναι απλά μία επανερμηνεία της Ευκλείδειας απόστασης r ως χωροειδής χωροχρονική απόσταση r_M . Μόνο για τη χρονοειδή περιοχή απαιτείται αναλυτική συνέχιση του r στον φανταστικό άξονα.

Παρουσία βαρύτητας, η παραπάνω διαδικασία μεταφέρεται αυτούσια. Η μόνη διαφορά είναι ότι πρέπει να επεκτείνουμε πέραν του πεδίου και τη μετρική ¹².

Στη χωροειδή περιοχή, εκτός του κώνου φωτός, η μετρική (4.3) γράφεται:

$$\begin{aligned} ds_M^2 &= -d\xi^2 - \rho^2(\xi)(-d\psi_+^2 + \cosh^2 \psi_+ d\Omega_2^2) \\ &= -d\xi^2 - \rho^2(\xi)d\Omega_S^2 \end{aligned} \quad (4.71)$$

όπου το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στη σύμβαση (+ - - -) της υπογραφής της Lorentzian μετρικής. Η επιφάνεια $\psi_+ = 0$, με $\frac{d\varphi}{d\psi_+} = 0$, αναπαριστά τη φυσαλίδα τη στιγμή του σχηματισμού της (βλ. Παράρτημα (A)). Αφού το ξ δεν επηρεάζεται από την αναλυτική συνέχιση, το πεδίο φ και ο παράγοντας κλίμακας ρ θα ικανοποιούν τις ίδιες εξισώσεις με αυτές που ικανοποιεί η bounce, δηλαδή τις:

$$\varphi'' + 3\frac{\rho'}{\rho}\varphi' = \frac{dV}{d\varphi} \quad (4.72)$$

και

$$\rho'^2 = 1 + \frac{\kappa}{3}\rho^2\left(\frac{1}{2}\varphi'^2 - V\right), \quad (4.73)$$

όπου ο τόνος συμβολίζει παραγωγή ως προς ξ , το οποίο τώρα ορίζεται μέσω της σχέσης (A.16). Συνεπώς, σε πλήρη αναλογία με τον επίπεδο χώρο, η μορφή του φ και του ρ στη χωροειδή περιοχή ταυτίζεται με τη μορφή που έχουν στον Ευκλείδειο χώρο.

Στη χρονοειδή περιοχή, εντός του κώνου φωτός, η μετρική (4.3) παίρνει μορφή:

$$\begin{aligned} ds_M^2 &= d\tilde{t}^2 - \alpha^2(\tilde{t})(d\psi_-^2 + \sinh^2 \psi_- d\Omega_2^2) \\ &= d\tilde{t}^2 - \alpha^2(\tilde{t})d\Omega_T^2, \end{aligned} \quad (4.74)$$

η οποία αναπαριστά ένα ανοικτό FRW σύμπαν. Ο παράγοντας κλίμακας α υπακούει στην εξίσωση Friedmann:

$$\alpha'^2 = 1 + \frac{\kappa}{3}\alpha^2\left(\frac{1}{2}\varphi'^2 + V\right) \quad (4.75)$$

και το πεδίο φ την:

$$\varphi'' + 3\frac{\rho'}{\rho}\varphi' = -\frac{dV}{d\varphi}. \quad (4.76)$$

Ο τόνος, πλέον, συμβολίζει παραγωγή ως προς \tilde{t} και οι αρχικές συνθήκες είναι

¹²Στο παράρτημα (A) παρουσιάζεται αναλυτικά η εξαγωγή της μορφής της μετρικής και οι αρχικές συνθήκες για τις δύο περιοχές του χώρου, μετά τον σχηματισμό της φυσαλίδας.

$\xi = \tilde{t} = 0$ (βλ. Παράρτημα (A)).

Όπως και στον επίπεδο χώρο, το τείχος βρίσκεται στη χωροειδή περιοχή και η τροχιά του προσεγγίζει ασυμπτωτικά τον κώνο φωτός. Σε αντίθεση με τον χώρο Minkowski, όπου οποιοδήποτε ζεύγος κώνων φωτός τέμνεται, στον χώρο de Sitter η παρουσία του ορίζοντα αποτρέπει τη σύγκρουση δύο διαστελλόμενων φυσαλίδων που έχουν σχηματιστεί σε μεγάλη απόσταση μεταξύ τους. Συμπερασματικά, εάν ο ρυθμός διάσπασης είναι πολύ μικρός συγκριτικά με την κοσμική διαστολή, οι φυσαλίδες δεν συγχωνεύονται για να σχηματίσουν μία ομοιόμορφη περιοχή αληθούς κενού. Τότε, οι περιοχές του αληθούς κενού παραμένουν περιορισμένες σε απομονωμένες φυσαλίδες ή σε ένα σύμπλεγμα φυσαλίδων (Weinberg, 2015).

Για τις μεταβάσεις $M \rightarrow AdS$ και $AdS \rightarrow AdS$, στην TWA, στο εσωτερικό της φυσαλίδας το φ βρίσκεται στο φ_t και η εξίσωση (4.75) δίνει:

$$a'^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{\Lambda^2}, \quad (4.77)$$

με λύση:

$$\alpha = \sin\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right). \quad (4.78)$$

Όπως ο μηδενισμός του α στην κορυφή του κώνου φωτός για $t = 0$, έτσι και ο μηδενισμός του για $t = \pi\Lambda$ είναι ανωμαλία συντεταγμένων. Ωστόσο, η σχέση (4.76) δείχνει ότι μία πραγματική ανωμαλία στο φ , άρα και φυσική ανωμαλία στη μετρική, εμφανίζεται εάν $\varphi' \neq 0$ όταν $\alpha = 0$. Οι διορθώσεις της TWA, αν και εκθετικά μικρές, δίνουν στο φ μία χρονική εξάρτηση ώστε πράγματι $\varphi' \neq 0$ για $\alpha = 0$. Ακόμα, όμως, και μακριά από την TWA, εάν το α αρχίσει να μικραίνει και γίνει μικρότερο του Λ , θα μηδενιστεί ξανά, όπως φαίνεται από την ανισότητα:

$$\alpha'^2 \geq 1 - \frac{\alpha^2}{\Lambda^2}, \quad (4.79)$$

που προκύπτει από την εξίσωση (4.75). Εκτός από πολύ συγκεκριμένες τιμές του $\varphi(0)$, το φ' δε μηδενίζεται στο δεύτερο σημείο μηδενισμού του α και, επομένως, η φυσαλίδα καταλήγει σε κατάρρευση μετά από πεπερασμένο διάστημα μετά τον σχηματισμό της (Coleman and De Luccia, 1980; Abbott and Coleman, 1985; Weinberg, 2015).

4.5 Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων για πολυωνυμικό δυναμικό τετάρτου βαθμού

Όπως και στην περίπτωση του επίπεδου χώρου, η εξαγωγή ακριβούς έκφρασης της δράσης της bounce είναι δυνατή μόνο στην προσέγγιση λεπτού τείχους. Εάν θέλουμε να αποκτήσουμε μία γενικότερη εικόνα για τη συμπεριφορά της bounce, θα πρέπει να προβούμε στην αριθμητική επίλυση των εξισώσεων¹³ (4.7) και (4.12). Η ύπαρξη, όμως, του όρου ρ'^2 στην εξίσωση (4.12) δημιουργεί προβλήματα στην αριθμητική ολοκλήρωση για $\rho' \rightarrow 0$, οπότε είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί

¹³ Ακολουθούμε τη μέθοδο αριθμητικής επίλυσης του Nicholas (2014).

η σχέση (4.13) αντί αυτής. Συνεπώς, οι εξισώσεις που θέλουμε να επιλύσουμε αριθμητικά είναι οι:

$$\varphi''(\xi) + 3\frac{\rho'(\xi)}{\rho(\xi)}\varphi'(\xi) = \frac{dV(\varphi(\xi))}{d\varphi}, \quad (4.80)$$

$$\rho''(\xi) = -\frac{\kappa}{3}\rho(\xi)\left(\frac{1}{2}\varphi'^2(\xi) + V(\varphi(\xi))\right). \quad (4.81)$$

Παρόλο που έχουμε επαρκείς συνοριακές συνθήκες για την επίλυση του παραπάνω συστήματος, δεν μπορούμε να τις εφαρμόσουμε απευθείας. Η πρώτη εξίσωση περιλαμβάνει έναν όρο $1/\rho(\xi)$, ο οποίος απειρίζεται στα σημεία μηδενισμού του $\rho(\xi)$. Επομένως, πρέπει να ξεκινήσουμε την ολοκλήρωση από μία πολύ μικρή τιμή του ξ , την οποία επιλέγουμε να είναι η $\xi_0 = 10^{-16}$ και αναπτύσσουμε το $\varphi(\xi)$ και το $\rho(\xi)$ γύρω από το $\xi = 0$ (στις περισσότερες των περιπτώσεων κρατάμε όρους μέχρι και 4^{ης} τάξης) για να βρούμε τις αρχικές συνθήκες $\rho(\xi_0)$, $\rho'(\xi_0)$ και $\varphi'(\xi_0)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4, \\ \rho(\xi) &= b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + b_4\xi^4. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Λόγω των συνοριακών συνθηκών (4.16), είναι προφανές ότι πρέπει $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ και $a_1 = 0$. Για να βρούμε τους υπόλοιπους συντελεστές, αναπτύσσουμε και τις εξισώσεις κίνησης. Επειδή αυτές πρέπει να ικανοποιούνται για κάθε ξ , μπορούμε να συλλέξουμε τους όρους ίδιας τάξης κάθε εξίσωσης και να λύσουμε κάθε όρο, έναν προς έναν, για να βρούμε τους συντελεστές. Προκύπτει ότι ο όρος μικρότερης τάξης είναι συνάρτηση μόνο του μικρότερης τάξης συντελεστή, ο επόμενος όρος μόνο των δύο μικρότερης τάξης συντελεστών κ.ο.κ. Άρα, είναι δυνατόν να εξαχθούν όλοι οι συντελεστές ξεκινώντας από την εύρεση του πρώτου και αντικαθιστώντας τον στον επόμενο όρο των εξισώσεων κ.ο.κ.

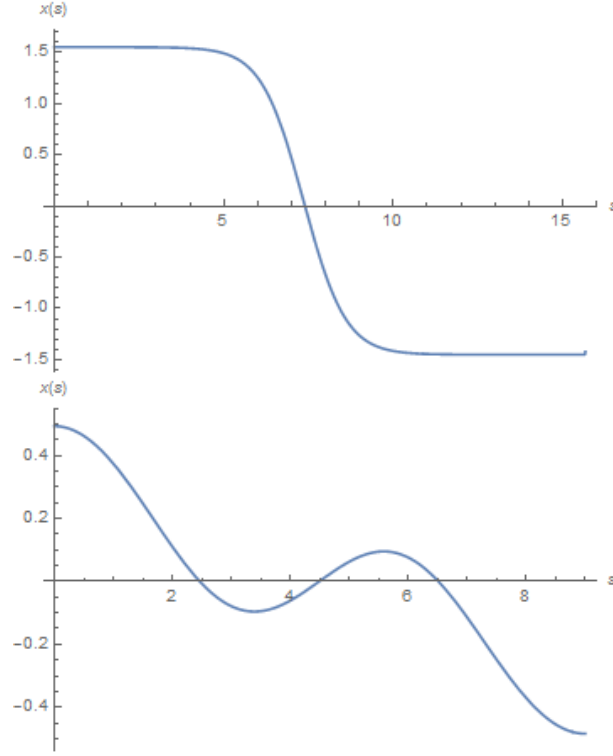
Όμως, στην πράξη, δεν υπάρχουν επαρκείς εξισώσεις κίνησης για να υπολογίσουμε όλους τους συντελεστές. Για αυτόν τον λόγο, ορίζουμε $\varphi(0) = a_0 \equiv \varphi_0$ και βρίσκουμε τους συντελεστές συναρτήσεως του φ_0 . Αυτός ο όρος είναι η παράμετρος shooting, την οποία πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλα, έτσι ώστε να πληρούνται οι συνοριακές συνθήκες (βλ. Κεφάλαιο (3.4)). Η μέθοδος αυτή ονομάζεται shooting και βασίζεται στο overshoot–undershoot επιχείρημα του Coleman.

Όταν η λύση αποκλίνει προς το $+\infty$ έχουμε overshoot και όταν αποκλίνει προς το $-\infty$ έχουμε undershoot. Όσο πιο κοντά στο φ_t βρίσκεται το φ_0 , τόσο περισσότερο καθυστερεί το υποθετικό σωματίδιο να αναπτύξει μεγάλη ταχύτητα, ενώ όσο απομακρύνεται, διαπερνά το φράγμα όλο και πιο γρήγορα. Όσο, δηλαδή, το φ_0 απομακρύνεται από το φ_t , τόσο περισσότερες φορές διαπερνά το φράγμα πριν τελικά αποκλίνει.

Για να βρούμε τη σωστή τιμή εκκίνησης φ_0 για μία n -bounce, ξεκινάμε από το φ_t και απομακρυνόμαστε σταδιακά μέχρι να έχουμε n διασχίσεις του φράγματος για $\varphi = 0$. Όσο περισσότερο απομακρυνόμαστε τόσο περισσότερες διασχίσεις έχουμε (σχήμα (4.5)). Εάν έχουμε overshoot και η λύση αποκλίνει προς το $+\infty$ (το οποίο επιπλέον σημαίνει ότι έχουμε $n + 1$ διασχίσεις), το φ_0 βρίσκεται πολύ κοντά στο φ_t , ενώ εάν έχουμε undershoot και η λύση αποκλίνει προς το $-\infty$, το φ_0 βρίσκεται αρκετά μακριά από το φ_t . Η σωστή τιμή εκκίνησης φ_0 βρίσκεται ανάμεσα στις προηγούμενες δύο. Για

4.5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

την εύρεση του φ_0 και την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων, χρησιμοποιούμε τον κώδικα Mathematica του [Nicholas \(2014\)](#), ο οποίος παρουσιάζεται στο Παράρτημα (B).



Σχήμα 4.5: 1-bounce και 3-bounce για τις αδιάστατες παραμέτρους $(a, b, z) = (1.5, 0.1, 0.4)$ και $\varepsilon = 0.4$ του δυναμικού $v(x)$ που ορίζεται αμέσως παρακάτω. Η τιμή εκκίνησης για την 1-bounce είναι $x_0 = 1.55075$, ενώ για την 3-bounce $x_0 = 0.493266$.

Θεωρούμε ένα δυναμικό φ^4 της μορφής ([Espinosa et al., 2016](#)):

$$V(\varphi) = \mu^4 v(x = \varphi/M) = \mu^4 [f(x) - (1-z)f(x_f) - zf(x_t)], \quad \text{με} \quad (4.83)$$

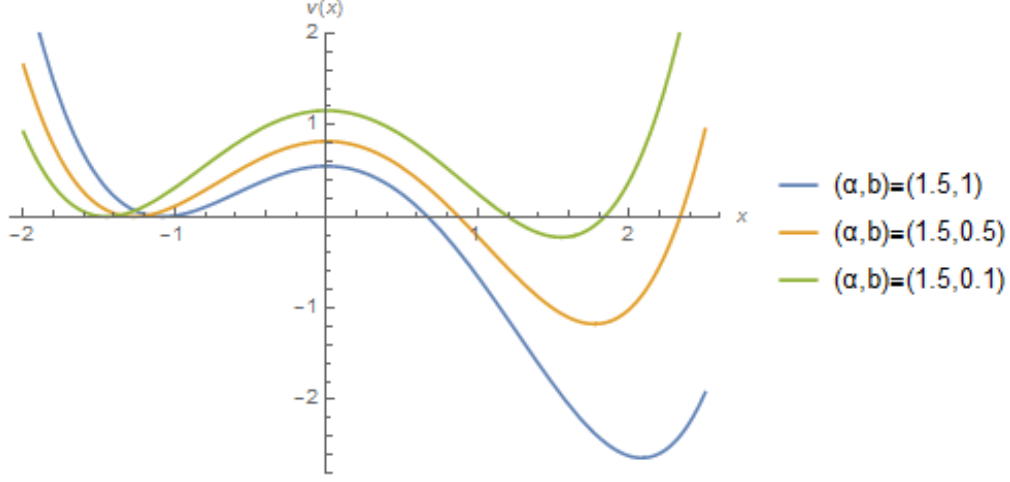
$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{bx^3}{3} - \frac{a^2x^2}{2},$$

όπου $x \equiv \varphi/M$, ενώ το ψευδές και το αληθές κενό βρίσκονται στα σημεία $x_f = \varphi_f/M = \frac{1}{2}(b - \sqrt{4a^2 + b^2})$ και $x_t = \varphi_t/M = \frac{1}{2}(b + \sqrt{4a^2 + b^2})$ με $v_f \equiv v(x_f)$ και $v_t \equiv v(x_t)$ αντίστοιχα. Οι χαρακτηριστικές κλίμακες M και μ επιλέγονται έτσι ώστε όλες οι μεταβολές του αδιάστατου δυναμικού να είναι τάξης 1, δηλαδή $\Delta\varphi \equiv |\varphi_f - \varphi_t| \approx M$ και $\Delta V \equiv V(\varphi_f) - V(\varphi_t) \approx \mu^4$.

Στο σχήμα (4.6) φαίνεται η μορφή που παίρνει το δυναμικό για τρεις διαφορετικές επιλογές των παραμέτρων. Η επιλογή $(a, b) = (1.5, 1)$ αντιστοιχεί σε δυναμικό με μικρό ενεργειακό φράγμα, η $(a, b) = (1.5, 0.5)$ σε δυναμικό με όλες τις μεταβολές να είναι ίδιας τάξης, ενώ η $(a, b) = (1.5, 0.1)$ σε δυναμικό με μικρή ενεργειακή διαφορά μεταξύ των δύο κενών συγκριτικά με το ύψος του φράγματος.

Τέλος, η παράμετρος z ρυθμίζει τις ενεργειακές πυκνότητες των δύο κενών, με $v_t = 0$ όταν $z = 1$ και $v_f = 0$ όταν $z = 0$. Γενικότερα, $v_t = -(1-z)\Delta v$ και $v_f = z\Delta v$, όπου $\Delta v = \Delta V/\mu^4 = v_f - v_t$ η αδιάστατη ενεργειακή διαφορά μεταξύ των δύο κενών.

Εάν ορίσουμε τις αδιάστατες μεταβλητές:



Σχήμα 4.6: Το αδιάστατο δυναμικό $v(x)$ για τρεις διαφορετικές τιμές του b , για $z = 0$.

$$r \equiv \frac{\mu^2}{M}\rho, \quad s \equiv \frac{\mu^2}{M}\xi, \quad \varepsilon^2 \equiv \frac{8\pi M^2}{3M_{Pl}^2} = \frac{\kappa}{3}M^2,^{14} \quad (4.84)$$

οι εξισώσεις (4.80) και (4.81) γράφονται:

$$\ddot{x} + \frac{3\dot{r}}{r}\dot{x} = v', \quad (4.85)$$

$$\dot{r}^2 = 1 + \varepsilon^2 r^2 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 - v \right), \quad (4.86)$$

όπου ο τόνος πλέον συμβολίζει παραγωγή ως προς x , ενώ η τελεία ως προς s . Η παράμετρος ε προσδιορίζει την ισχύ της βαρύτητας, άρα για $\varepsilon = 0$ ο χώρος είναι επίπεδος.

Συναρτήσει των παραπάνω αδιάστατων μεταβλητών, ο εκθέτης διάσπασης B (σχέση (4.31)) γίνεται:

$$\begin{aligned} B_{dS} &= -\frac{4\pi^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{M}{\mu} \right)^4 \left[\int_0^{s_{max}} ds r (1 - \varepsilon^2 r^2 v^2) - \frac{2}{3\varepsilon^2 v_f} \right], \\ B_{AdS} &= -\frac{4\pi^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{M}{\mu} \right)^4 \left[\int_0^{s_{max}} ds r (1 - \varepsilon^2 r^2 v^2) - \frac{1}{3\varepsilon^2 v_f} \left(1 - (1 - \varepsilon^2 r_{max}^2 v_f)^{\frac{3}{2}} \right) \right], \\ B_M &= -2\pi^2 \left(\frac{M}{\mu} \right)^4 \int_0^{s_{max}} ds r^3 v, \end{aligned} \quad (4.87)$$

όπου $s_{max}, r_{max} \rightarrow \infty$ για υπόβαθρο Anti-de Sitter και Minkowski, ενώ στην TWA (Espinosa et al., 2016):

¹⁴Σημειώνουμε ότι το ε δεν έχει καμία σχέση με την ενεργειακή διαφορά των δύο κενών, την οποία πλέον συμβολίζουμε με Δv .

$$B_{TWA} = -\frac{4\pi^2}{3\varepsilon^4 z \Delta v} \left(\frac{M}{\mu}\right)^4 \frac{\varepsilon^2(2z-1) + \varepsilon_{cr}^2 - [(\varepsilon^2 - \varepsilon_{cr}^2)^2 + 4\varepsilon_{cr}^2 \varepsilon^2 z]^{\frac{1}{2}}}{(1-z)[(\varepsilon^2 - \varepsilon_{cr}^2)^2 + 4\varepsilon_{cr}^2 \varepsilon^2 z]^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.88)$$

και η ακτίνα της φουσαλίδας είναι:

$$\bar{r} = \frac{4}{3S_I[(\varepsilon^2 - \varepsilon_{cr}^2)^2 + 4\varepsilon_{cr}^2 \varepsilon^2 z]^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.89)$$

όπου $\varepsilon_{cr} = \frac{2\sqrt{\Delta v}}{3S_I}$ η κρίσιμη τιμή του ε , πάνω από την οποία η bounce είναι τύπου B για κλειστή πολλαπλότητα, ενώ για ανοικτή δεν υπάρχει (βλ. σχέσεις (4.50), (4.51), (4.59)) και

$$\begin{aligned} S_I &= \int ds 2[v(x) - v_f] \\ &= \int_{x_f}^{x_t} dx \sqrt{2[v(x) - v_t]} + \mathcal{O}(\Delta v) \\ &\approx \int_{x_f}^{x_t} dx \sqrt{2[v(x) - v_t]} \end{aligned} \quad (4.90)$$

η αδιάστατη δράση ενός instanton (βλ. σχέση (3.17)).

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε ορισμένα αποτελέσματα της αριθμητικής μεθόδου για διάφορες τιμές των παραμέτρων του δυναμικού και της ισχύος της βαρύτητας ε και θα διευκρινίσουμε κατά πόσο αυτά αντιστοιχούν στη θεωρητική ανάλυση.

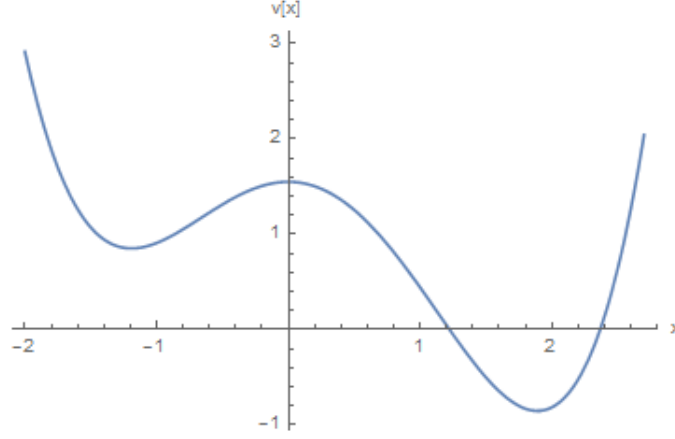
Η αριθμητική μέθοδος, όμως, που χρησιμοποιούμε δεν δίνει αποδεκτές λύσεις για μικρές τιμές του ε , επομένως δεν λαμβάνουμε αποδεκτά αποτελέσματα για μικρές τιμές του b , εάν θέλουμε να μελετήσουμε bounces τύπου A ¹⁵. Συνεπώς, για την εξαγωγή σωστών αποτελεσμάτων απαιτείται και η TWA, η οποία, καθώς το b μικραίνει, γίνεται όλο και πιο αξιόπιστη.

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω, έχουμε μία ακριβή έκφραση για την κρίσιμη τιμή ε_{cr}^{TWA} στην TWA. Για να βρούμε την κρίσιμη τιμή ε_{cr}^{num} στην αριθμητική μέθοδο, πρέπει να παρατηρήσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων και να προσέξουμε εάν για μία κλειστή πολλαπλότητα το r' αλλάζει πρόσημο αμέσως μετά το τείχος ή πιο μετά. Αντίστοιχα, σε μία ανοικτή πολλαπλότητα, γνωρίζουμε ότι έχουμε υπερβεί την κρίσιμη τιμή του ε , εάν το r έχει και δεύτερο σημείο μηδενισμού, καθώς κάτι τέτοιο δεν μπορεί να γίνει αποδεκτό.

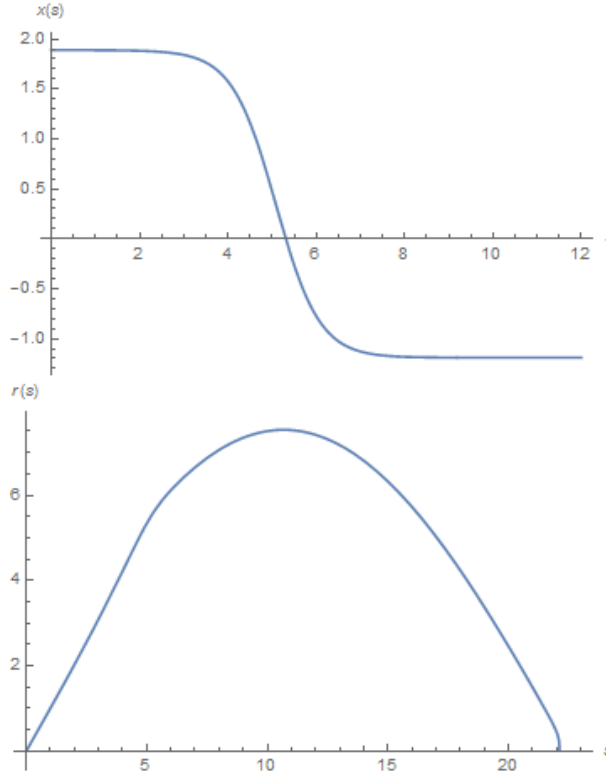
Συγκεκριμένα, επιλέγοντας, για παράδειγμα, τις παραμέτρους $(a, b, z) = (1.5, 0.7, 0.5)$, το δυναμικό παίρνει τη μορφή του σχήματος (4.7). Επειδή η μετάβαση είναι $dS \rightarrow AdS$, το r θα έχει και δεύτερο σημείο μηδενισμού. Η μορφή του x και του r για $\varepsilon = 0.15$ φαίνονται στο σχήμα (4.8).

Μπορούμε αμέσως να δούμε ότι πρόκειται για μία bounce τύπου A, διότι το r αυξάνεται σε μία μεγάλη περιοχή μετά το τείχος, το οποίο βρίσκεται κοντά στο $s = 5$. Αυξάνοντας το ε σταδιακά, το μέγιστο του r όλο και πλησιάζει την περιοχή

¹⁵Καθώς το b μειώνεται, μειώνεται και η ενεργειακή διαφορά Δv , άρα η κρίσιμη τιμή ε_{cr} μικραίνει. Επομένως, για να βρούμε αποδεκτές λύσεις bounce τύπου A για μικρές τιμές του b , πρέπει να μειώσουμε αντίστοιχα και το ε .



Σχήμα 4.7: Το δυναμικό $v(x)$ για $(a, b, z) = (1.5, 0.7, 0.5)$.

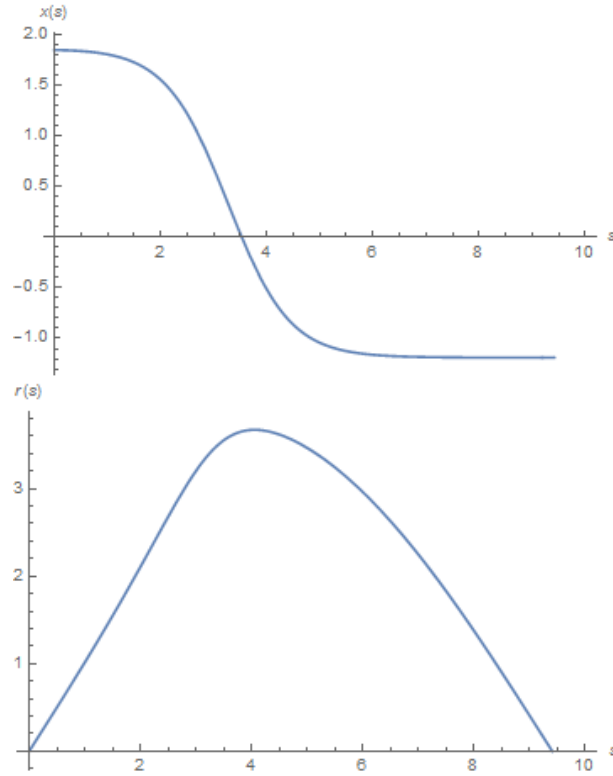


Σχήμα 4.8: Το πεδίο $x(s)$ και ο συντελεστής κλίμακας $r(s)$ για $(a, b, z) = (1.5, 0.7, 0.5)$ και $\varepsilon = 0.15$.

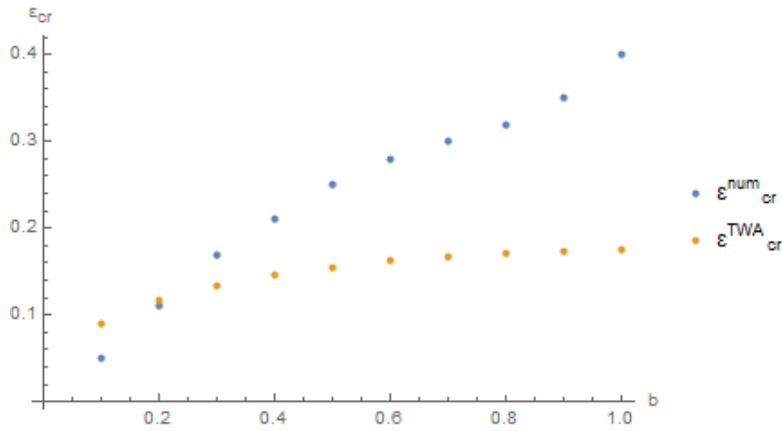
του τείχους και τελικά βρίσκουμε ότι για $\varepsilon = 0.3$ η bounce γίνεται τύπου B, επειδή το r' αλλάζει πρόσημο αμέσως μετά το τείχος (σχήμα (4.9)).

Οι κρίσιμες τιμές ε_{cr} που προκύπτουν από την αριθμητική μέθοδο και την TWA φαίνονται στο σχήμα (4.10). Για μικρές τιμές του b , η αριθμητική κρίσιμη τιμή ε_{cr}^{num} υπολείπεται της σωστής κρίσιμης τιμής ε_{cr}^{TWA} , διότι η εύρεση bounce τύπου A μέσω της αριθμητικής επίλυσης είναι δύσκολη για σχεδόν εκφυλισμένα κενά. Για μεγαλύτερες τιμές του b , η κρίσιμη τιμή που προκύπτει από την TWA, ε_{cr}^{TWA} , υπερβαίνει τη σωστή κρίσιμη τιμή ε_{cr}^{num} , επειδή πλέον η TWA δεν είναι έγκυρη.

Συνεπώς, για την εξαγωγή σωστών αποτελεσμάτων απαιτούνται και οι δύο μέθοδοι. Για τιμές του b μικρότερες του 0.4 (για να συμπεριλάβουμε και τους δύο τύπους bounces) χρησιμοποιούμε την TWA, ενώ για μεγαλύτερες την αριθμητική



Σχήμα 4.9: Το πεδίο $x(s)$ και ο συντελεστής κλίμακας $r(s)$ για $(a, b, z) = (1.5, 0.7, 0.5)$ και $\varepsilon = 0.3$.

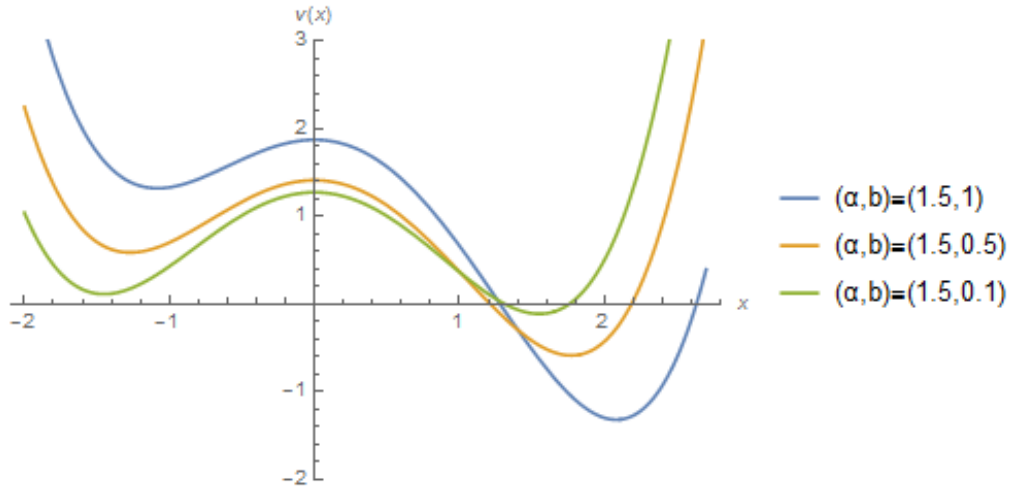


Σχήμα 4.10: Οι κρίσιμες τιμές του ε_{cr} στην TWA και στην αριθμητική μέθοδο συναρτήσει του b , για $\alpha = 1.5$. Για μικρές τιμές του b , η αριθμητική κρίσιμη τιμή ε_{cr}^{num} υπολείπεται της σωστής κρίσιμης τιμής ε_{cr}^{TWA} , διότι η εύρεση bounce τύπου A μέσω της αριθμητικής επίλυσης είναι δύσκολη για σχεδόν εκφυλισμένα κενά. Για μεγαλύτερες τιμές του b , η κρίσιμη τιμή που προκύπτει από την TWA, ε_{cr}^{TWA} , υπερβαίνει τη σωστή κρίσιμη τιμή ε_{cr}^{num} , επειδή πλέον η TWA δεν είναι έγκυρη.

μέθοδο.

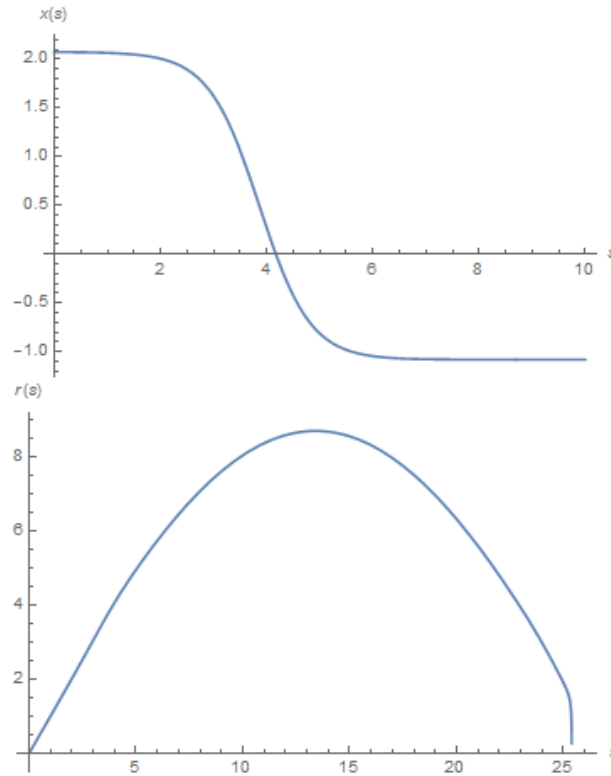
Θα μελετήσουμε την περίπτωση του υπόβαθρου de Sitter, για τη συγκεκριμένη τιμή των παραμέτρων $(a, z) = (1.5, 0.5)$. Το δυναμικό για τρεις τυπικές τιμές του b φαίνεται στο σχήμα (4.11).

Για να αντιληφθούμε ποιοτικά τις διαφοροποιήσεις των δύο τύπων bounces, θεωρούμε την περίπτωση $b = 1$. Στα επόμενα σχήματα παρουσιάζονται οι λύσεις



Σχήμα 4.11: Το δυναμικό $v(x)$ για τρεις διαφορετικές τιμές του b , για $z = 0.5$.

για τέσσερις διαφορετικές τιμές του ε .

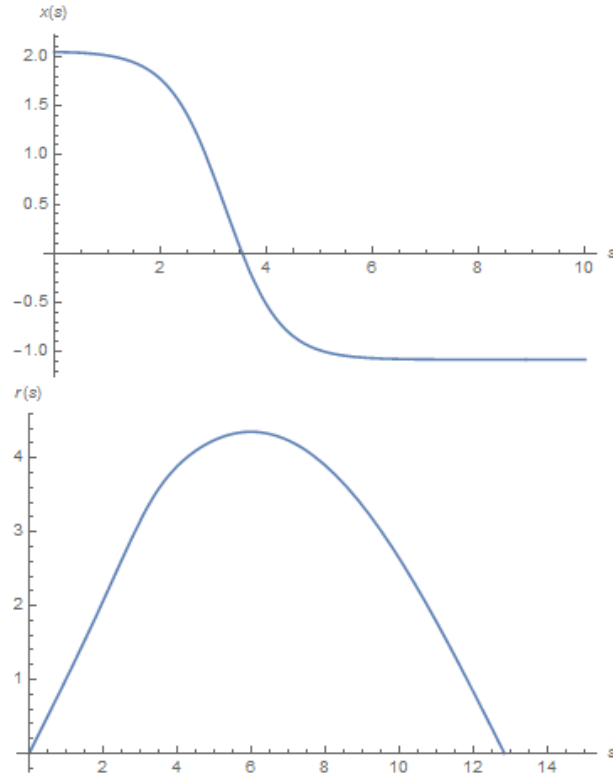


Σχήμα 4.12: Το πεδίο $x(s)$ και ο συντελεστής κλίμακας $r(s)$ για $(a, b, z) = (1.5, 1, 0.5)$ και $\varepsilon = 0.1$.

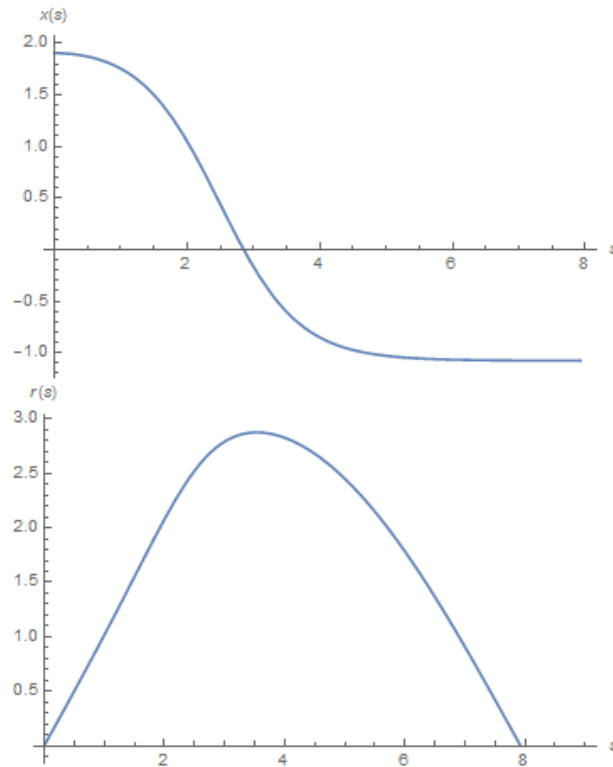
Καταρχάς, παρατηρούμε πως, καθώς αυξάνουμε το ε , το μέγιστο του r όλο και πλησιάζει την περιοχή του τείχους και τελικά βρίσκουμε ότι για $\varepsilon = 0.4$ η bounce γίνεται τύπου B. Παράλληλα, βλέπουμε ότι η τελική και η αρχική θέση του πεδίου, όπως επίσης και το μέγιστο του r , το οποίο αντιστοιχεί στον ορίζοντα του χώρου, όλο και μειώνονται.

Πράγματι, η αύξηση του ε ισοδυναμεί με την αύξηση των βαρυτικών φαινομένων, με συνέπεια την όλο και αυξανόμενη ανάδειξη των θερμικών διαδικασιών που σχετίζονται με τη γεωμετρία de Sitter. Μία κλειστή πολλαπλότητα είναι τοπολογικά

4.5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

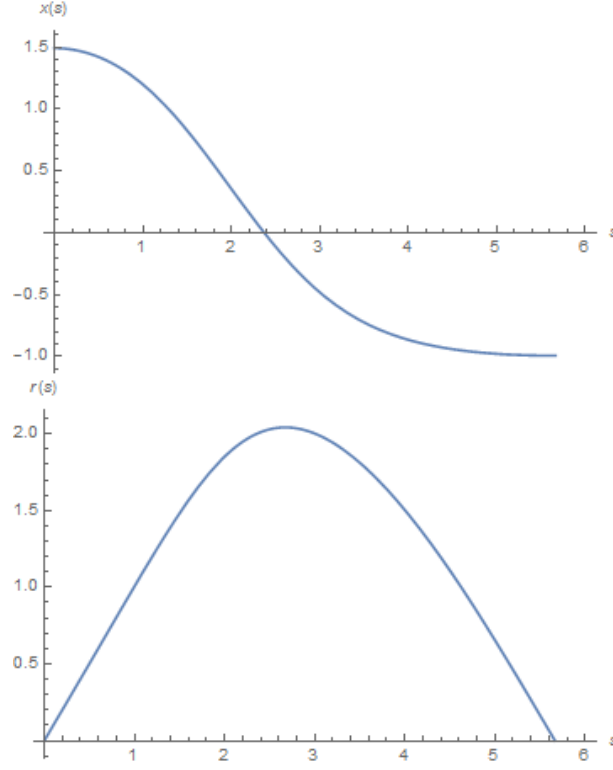


Σχήμα 4.13: Το πεδίο $x(s)$ και ο συντελεστής κλίμακας $r(s)$ για $(a, b, z) = (1.5, 1, 0.5)$ και $\varepsilon = 0.2$.



Σχήμα 4.14: Το πεδίο $x(s)$ και ο συντελεστής κλίμακας $r(s)$ για $(a, b, z) = (1.5, 1, 0.5)$ και $\varepsilon = 0.3$.

ισοδύναμη με έναν Ευκλείδειο χώρο de Sitter, ο οποίος υπενθυμίζουμε ότι έχει θερμοκρασία:



Σχήμα 4.15: Το πεδίο $x(s)$ και ο συντελεστής κλίμακας $r(s)$ για $(a, b, z) = (1.5, 1, 0.5)$ και $\varepsilon = 0.4$.

$$T = \frac{2\pi}{\Lambda}, \quad (4.91)$$

όπου Λ ο ορίζοντας του χώρου. Επομένως, μείωση του ορίζοντα συνεπάγεται αύξηση της θερμοκρασίας. Επιβεβαιώνουμε, δηλαδή, ότι η διάσπαση κενού σε χώρο de Sitter έχει πάντα θερμικά χαρακτηριστικά, και συγκεκριμένα για $\varepsilon \gg \varepsilon_{cr}$ οι θερμικές διαδικασίες γίνονται όλο και πιο έντονες. Οι CDL bounces για πολύ μεγάλο ε γίνονται θερμικές λύσεις, δηλαδή δεν ξεκινούν από το αληθές κενό και σταματούν στο ψευδές κενό, αλλά, αντί αυτού, ξεκινούν από ένα σημείο όλο και ψηλότερο και σταματούν σε ένα άλλο επίσης όλο και ψηλότερο στο φράγμα. Όταν το ε μεγαλώσει ακόμα περισσότερο, το αρχικό και το τελικό σημείο συγκλίνουν προς το μέγιστο του φράγματος, οπότε πλέον η λύση αντιστοιχεί στην Hawking-Moss bounce.

Για τον υπολογισμό του εκθέτη διάσπασης B , πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί όσον αφορά την επιλογή της μεθόδου υπολογισμού του. Για να δούμε πιο συγκεκριμένα πώς μεταφράζεται η συνθήκη εγκυρότητας της TWA για τις αδιάστατες μεταβλητές που έχουμε ορίσει, ξεκινάμε από την (4.86) διαιρώντας την με r^2 :

$$\frac{1}{r^2} \dot{r}^2 = \frac{1}{r^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 - v \right). \quad (4.92)$$

Η TWA μας λέει ότι η ενέργεια $E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - v$ είναι σταθερή σε όλες τις περιοχές που ορίζει η προσέγγιση και η απόλυτη τιμή της είναι πάντα μικρότερη του Δv . Επομένως, στο τείχος, το r αντικαθίσταται με το \bar{r} και το E με το Δv . Για να ικανοποιείται η συνθήκη της TWA, $\Delta v \ll 1$,¹⁶ απομένει να εξασφαλίσουμε ότι το \bar{r} και το $(\varepsilon \sqrt{\Delta v})^{-1}$

¹⁶Υπενθυμίζουμε ότι στην TWA θεωρούμε αμελητέο τον όρο $\frac{\dot{r}}{r}$.

4.5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

είναι μεγάλα για τις τιμές των ε και z που επιλέγουμε.

Καταρχάς, το $(\varepsilon\sqrt{\Delta v})^{-1}$ είναι μεγάλο όταν $\varepsilon \ll (\Delta v)^{-1}$. Επειδή $\varepsilon_{cr}^{TWA} \approx \sqrt{\Delta v}$, η συνθήκη γράφεται ως $\varepsilon \ll (\varepsilon_{cr}^{TWA})^{-1}$, που ικανοποιείται πάντα για $\varepsilon \leq \varepsilon_{cr}^{TWA}$. Είναι πιθανόν, επίσης, να ικανοποιείται και για κάποια $\varepsilon > \varepsilon_{cr}^{TWA}$. Επιπλέον, το \bar{r} θα είναι μεγάλο για $(\varepsilon^2 - \varepsilon_{cr}^2)^2 + 4\varepsilon_{cr}^2\varepsilon^2z \ll 1$ (βλ. εξίσωση (4.89)). Η ανισότητα αυτή, ομοίως, ισχύει πάντα για $\varepsilon \leq \varepsilon_{cr}^{TWA}$ και είναι δυνατόν να ικανοποιείται και για κάποια $\varepsilon > \varepsilon_{cr}^{TWA}$.

Συνεπώς, η TWA είναι έγκυρη για ε μικρότερα και λίγο μεγαλύτερα του ε_{cr}^{TWA} , όπως προσδιορίζεται από τις ανισότητες $\varepsilon \ll (\varepsilon_{cr}^{TWA})^{-1}$ και $(\varepsilon^2 - \varepsilon_{cr}^2)^2 + 4\varepsilon_{cr}^2\varepsilon^2z \ll 1$. Η δεύτερη ανισότητα είναι περισσότερο ισχυρή, καθώς $\varepsilon_{cr}^{TWA} \ll 1$. Συνοψίζοντας, οι ανισότητες ικανοποιούνται για $\varepsilon \leq \varepsilon_{cr}^{TWA}$ και $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_{cr}^{TWA}$, ενώ για $\varepsilon \gg \varepsilon_{cr}^{TWA}$, που αντιστοιχεί σε θερμικές λύσεις με όριο την Hawking-Moss bounce, η προσέγγιση δεν είναι αξιόπιστη (Espinosa et al., 2016).

Καταλήγοντας, επιλέγουμε την TWA για μικρές τιμές του b και του ε (έτσι ώστε να λάβουμε υπ' όψιν και τους δύο τύπους bounces), όπως αυτές προσδιορίζονται από την καμπύλη του σχήματος (4.10). Για μεγαλύτερες τιμές των παραμέτρων, ακολουθούμε την αριθμητική μέθοδο.

Ο υπολογισμός του εκθέτη διάσπασης B έγινε για $b \leq 0.35$ με τη σχέση (4.88), ενώ για $b > 0.35$ με την πρώτη εξίσωση από τις σχέσεις (4.87). Στους παρακάτω πίνακες βλέπουμε τη διακύμανση του B (σε μονάδες $(M/\mu)^4$) για διάφορες τιμές των παραμέτρων b και ε .

Τιμή του b	Εκθέτης διάσπασης B_{TWA}	Εκθέτης διάσπασης B_{TWA}^{flat}
0.1	877617	1.8×10^6
0.15	401135	634820
0.2	223008	308746
0.25	140285	180085
0.3	96048.4	117614
0.35	69916.3	82947.8

Πίνακας 4.1: Ο εκθέτης διάσπασης B_{TWA} στην TWA για διάφορες τιμές του $b \leq 0.35$, για $\varepsilon = 0.1$, σε σύγκριση με τον αντίστοιχο στον επίπεδο χώρο, B_{TWA}^{flat} .

Τιμή του b	Εκθέτης διάσπασης B_{TWA}
0.1	117378
0.15	71226.7
0.2	49064.6
0.25	36344.5
0.3	28246.7
0.35	22724.9

Πίνακας 4.2: Ο εκθέτης διάσπασης B_{TWA} στην TWA για διάφορες τιμές του $b \leq 0.35$, για $\varepsilon = 0.2$.

Καταρχάς, βλέπουμε ότι η παρουσία βαρύτητας αυξάνει την πιθανότητα διάσπασης κενού σε σχέση με την απουσία βαρύτητας, διότι το B μικραίνει. Παρατηρούμε, επίσης, πως, για σταθερό ε , σε αντιστοιχία με την περίπτωση του επίπεδου χώρου, καθώς η ενεργειακή διαφορά των δύο κενών b μειώνεται, το

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΚΕΝΟΥ ΒΑΘΜΩΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΕ
ΚΑΜΠΥΛΩΜΕΝΟ ΧΩΡΟΧΡΟΝΟ

Τιμή του b	Εκθέτης διάσπασης B_{num}
0.4	10465
0.5	4214.9
0.7	1285.9
1	419.1

Πίνακας 4.3: Ο εκθέτης διάσπασης B_{num} στην αριθμητική μέθοδο για διάφορες τιμές του $b > 0.35$, για $\varepsilon = 0.3$.

Τιμή του b	Εκθέτης διάσπασης B_{num}
0.4	2184.1
0.5	1236.1
0.7	517.4
1	198.4

Πίνακας 4.4: Ο εκθέτης διάσπασης B_{num} στην αριθμητική μέθοδο για διάφορες τιμές του $b > 0.35$, για $\varepsilon = 0.4$.

B αυξάνεται, επομένως ο ρυθμός διάσπασης μικραίνει. Επιπλέον, αύξηση του ε συνεπάγεται μείωση του B , άρα αύξηση του ρυθμού διάσπασης. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι όσο πιο ισχυρή είναι η βαρύτητα τόσο περισσότερο αυξάνεται η πιθανότητα δημιουργίας φυσαλίδας.

Επιπλέον, βλέπουμε ότι υπάρχει μία καλή αντιστοιχία μεταξύ της TWA και της αριθμητικής μεθόδου. Το B , καθώς μεταβαίνουμε από την TWA στην αριθμητική μέθοδο, συμπεριφέρεται όπως αναμενόταν. Συγκεκριμένα, μειώνεται επειδή αφενός αύξηση του b συνεπάγεται μείωση του B και αφετέρου, ομοίως, αύξηση του ε συνεπάγεται μείωση του B . Συμπεραίνουμε ότι η αριθμητική μέθοδος δίνει καλά αποτελέσματα για τιμές του ε μεγαλύτερες του 0.3. Θεωρούμε, επίσης, πως μία βελτίωση στην ακρίβεια του κώδικα για μικρές τιμές του ε θα παρέχει ακόμα πιο αξιόπιστα αποτελέσματα, καθώς θα καταστεί δυνατή η σύγκριση του B για πολύ μεγάλο εύρος τιμών του ε με χρήση της ίδιας μεθόδου, με αποτέλεσμα το σχετικό σφάλμα για κάθε υπολογισμό να είναι αντίστοιχης τάξης μεγέθους.

Παράρτημα Α΄

Αναλυτική συνέχιση των μετρικών

Στο παράρτημα αυτό, θα δούμε τη συγκεκριμένη μορφή που παίρνει η Lorentzian μετρική για τις δύο περιοχές του χώρου, μετά τον σχηματισμό της φυσαλίδας.

A.1 Επίπεδος χώρος

Ξεκινάμε από τη μετρική Minkowski:

$$ds_M^2 = dt^2 - dr_M^2 - r_M^2 d\Omega_2^2. \quad (\text{A.1})$$

Χωροειδής περιοχή, εκτός του κώνου φωτός, $r_M > t$:

Η αντικατάσταση

$$\begin{aligned} t &= r \sinh \theta_1 \\ r_M &= r \cosh \theta_1, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

στην (A.1) δίνει τη μετρική Rindler:

$$\begin{aligned} ds_M^2 &= -dr^2 - r^2(-d\theta_1^2 + \cosh^2 \theta_1 d\Omega_2^2) \\ &= -dr^2 - r^2 d\Omega_S^2, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

η οποία περιγράφει τον χώρο εκτός του κώνου φωτός. Το $d\Omega_S^2$ είναι η μετρική του μοναδιαίου χρονοειδούς υπερβολοειδούς. Ο χώρος Rindler είναι ο χώρος που "βλέπει" ένας ομοιόμορφα επιταχυνόμενος παρατηρητής (Carroll, 2004). Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε εάν κάνουμε την αναλυτική συνέχιση:

$$\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2} - i\theta_1 \quad (\text{A.4})$$

στην Ευκλείδεια μετρική:

$$ds_E^2 = -dr^2 - r^2 d\Omega_3^2 = -dr^2 - r^2(d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\Omega_2^2), \quad (\text{A.5})$$

όπου το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στη σύμβαση $(+ - - -)$ της υπογραφής της μετρικής Minkowski (A.1).

Χρονοειδής περιοχή, εντός του κώνου φωτός, $r_M < t$:

Για την περιγραφή του χώρου εντός του κώνου φωτός, κάνουμε την αντικατάσταση:

$$\begin{aligned} t &= \tilde{t} \cosh \theta_1 \\ r_M &= \tilde{t} \sinh \theta_1, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

οπότε παίρνουμε:

$$ds_M^2 = d\tilde{t}^2 - \tilde{t}^2(d\theta_1^2 + \sinh^2 \theta_1 d\Omega_2^2), \quad (\text{A.7})$$

η οποία είναι η μετρική του χώρου Milne. Ορίζοντας την ακτίνα της 2-σφαίρας $\rho = \sinh \theta_1$, η μετρική Milne γράφεται:

$$\begin{aligned} ds_M^2 &= d\tilde{t}^2 - \tilde{t}^2 \left(\frac{d\rho^2}{1 + \rho^2} + \rho^2 d\Omega_2^2 \right) \\ &\equiv d\tilde{t}^2 - \tilde{t}^2 d\Omega_T^2. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

απ' όπου βλέπουμε ότι το εσωτερικό της φουσαλίδας είναι ένα επίπεδο, χωρικά ανοικτό, FRW σύμπαν. Ως γνωστόν, για σταθερό χρόνο, η μετρική αυτή περιγράφει χωροειδείς υπερβολοειδείς επιφάνειες (το $d\Omega_T^2$ είναι η μετρική του μοναδιαίου χωροειδούς υπερβολοειδούς). Τέλος, σημειώνουμε ότι η αντικατάσταση (A.6) είναι ισοδύναμη με την αναλυτική συνέχιση:

$$\begin{aligned} \theta_1 &\rightarrow i\theta_1 \\ r &\rightarrow i\tilde{t}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

στην Ευκλείδεια μετρική (A.5).

A.2 Καμπυλωμένος χώρος

Χωροειδής περιοχή, εκτός του κώνου φωτός, $r_M > t$:

Εάν επιλέξουμε τις συντεταγμένες (τ, r_M) (Burda et al., 2016) με:

$$\begin{aligned} \tau &= f(\xi) \cos r \\ r_M &= f(\xi) \sin r, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

όπου $f(\xi)$ μία συνάρτηση που ικανοποιεί την $f' = f/\rho$, με $f(0) = 0$ και $f'(0) > 0$, τότε η μετρική (4.3) γίνεται σύμμορφα επίπεδη (conformally flat):

$$ds_M^2 = \frac{\rho^2}{f^2}(-d\tau^2 - dr_M^2 - r_M^2 d\Omega_2^2), \quad (\text{A.11})$$

όπου το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στη σύμβαση $(+ - - -)$ της υπογραφής της Lorentzian μετρικής. Με την αναλυτική συνέχιση $t = -i\tau$, η παραπάνω μετρική γίνεται Lorentzian με χρονική συντεταγμένη $t = -i\tau$:

$$ds_M^2 = \frac{\rho^2}{f^2}(dt^2 - dr_M^2 - r_M^2 d\Omega_2^2). \quad (\text{A.12})$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η αναλυτική συνέχιση αυτή ταυτίζεται με την αντικατάσταση

$$\begin{aligned} t &= f(\xi) \sinh \psi_+ \\ r_M &= f(\xi) \cosh \psi_+, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

όπου $\psi_+ = -i(\pi/2 - r)$, στη μετρική (4.3). Οι σχέσεις αυτές καλύπτουν μόνο τη χωροειδή περιοχή.

Επομένως, η αναλυτική συνέχιση

$$r \rightarrow \pi/2 - i\psi_+ \quad (\text{A.14})$$

στη μετρική (4.3) δίνει την $O(3, 1)$ μετρική για τη χωροειδή περιοχή:

$$\begin{aligned} ds_M^2 &= -d\xi^2 - \rho^2(\xi)(-d\psi_+^2 + \cosh^2 \psi_+ d\Omega_2^2) \\ &= -d\xi^2 - \rho^2(\xi)d\Omega_S^2, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

όπου και εδώ το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στη σύμβαση $(+ - - -)$ της υπογραφής της Lorentzian μετρικής.

Η επιφάνεια $\tau = t = 0$ που αναπαριστά τη φουσαλίδα τη στιγμή του σχηματισμού της ταυτίζεται με την επιφάνεια $r = \pi/2$ στο σύστημα (ξ, r) και με την επιφάνεια $\psi_+ = 0$ στο σύστημα (ξ, ψ_+) . Αφού το ξ δεν επηρεάζεται από την αναλυτική συνέχιση και επειδή η αντίστροφη f^{-1} υπάρχει ($f' = f/\rho > 0$), από τις εξισώσεις (A.13) παίρνουμε:

$$\xi = f^{-1} \left[(r_M^2 - t^2)^{1/2} \right]. \quad (\text{A.16})$$

Επομένως, το πεδίο φ και ο παράγοντας κλίμακας ρ θα ικανοποιούν τις ίδιες εξισώσεις με αυτές που ικανοποιεί η bounce, δηλαδή τις (4.7), (4.12) αντίστοιχα.

Το σύστημα συντεταγμένων επεκτείνεται μέσω του κώνου φωτός και ορίζει τις αρχικές συνθήκες $\xi = 0$ (άρα και $\rho = 0$) για την εξέλιξη της φουσαλίδας στη χωροειδή περιοχή.

Χρονοειδής περιοχή, εντός του κώνου φωτός, $r_M < t$:

Για την περιγραφή του χώρου εντός του κώνου φωτός, ορίζουμε τις συντεταγμένες (\tilde{t}, ψ_-) :

$$\begin{aligned} t &= f(\tilde{t}) \cosh \psi_- \\ r_M &= f(\tilde{t}) \sinh \psi_-, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

με $\tilde{t} = -i\xi$, $\psi_- = -ir$ και $\alpha(\tilde{t}) = -i\rho(\xi) = -i\rho(it)$. Η αντικατάσταση αυτή καλύπτει μόνο τη χρονοειδή περιοχή. Είναι επίσης εύκολο να δειχθεί ότι η μετρική (4.3) γίνεται $O(3, 1)$ και conformally flat:

$$ds_M^2 = \frac{\alpha^2(\tilde{t})}{f^2} (d\tilde{t}^2 - dr_M^2 - r_M^2 d\Omega_2^2). \quad (\text{A.18})$$

Επομένως, η αναλυτική συνέχιση (Dong and Harlow, 2011)

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow i\tilde{t} \\ r &\rightarrow i\psi_- \\ \rho(\xi) &\rightarrow i\alpha(\tilde{t}) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

στη μετρική (4.3) δίνει την $O(3, 1)$ μετρική για τη χρονοειδή περιοχή:

$$\begin{aligned} ds_M^2 &= d\tilde{t}^2 - \alpha^2(\tilde{t})(d\psi_-^2 + \sinh^2 \psi_- d\Omega_2^2) \\ &= d\tilde{t}^2 - \alpha^2(\tilde{t})d\Omega_T^2, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

όπου και εδώ το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στη σύμβαση $(+ - - -)$ της υπογραφής της Lorentzian μετρικής.

Συνεπώς, το εσωτερικό της φουσαλίδας είναι ένα ανοικτό FRW σύμπαν. Ο παράγοντας κλίμακας α υπακούει στην εξίσωση Friedmann:

$$\alpha'^2 = 1 + \frac{\kappa}{3}\rho^2 \left(\frac{1}{2}\varphi'^2 + V \right) \quad (\text{A.21})$$

και το πεδίο φ την:

$$\varphi'' + 3\frac{\rho'}{\rho}\varphi' = -\frac{dV}{d\varphi} \quad (\text{A.22})$$

με αρχικές συνθήκες $\xi = \tilde{t} = 0$, όπως αναφέραμε παραπάνω.

Παράρτημα Β΄

Κώδικας shooting Mathematica

Στο παράρτημα αυτό, παρουσιάζεται ο κώδικας shooting του [Nicholas \(2014\)](#) που χρησιμοποιήσαμε για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων bounce παρουσία βαρύτητας.

```

f[x_] := -a^2/2 x^2 - b/3 x^3 + 1/4 x^4;
W[x_] := f[x] - (1 - z) f[-1.0811388300841898` ] - z f[2.0811388300841895` ];
dY[x_] = D[W[x], x];
|μερική παράγωγος
Vo = W[x[so]]
Vop = dY[x[so]];
eq1 = x'[so] + 3 r'[so] x'[so] / r[so] - Vop;
eq2 = r''[so] + ε^2 r[so] ((x'[so])^2 + Vo);
- (0.341559 - 0.584431 a^2 + 0.421234 b) (1 - z) -
(4.68969 - 2.16557 a^2 - 3.00457 b) z - 1/2 a^2 x[so]^2 - 1/3 b x[so]^3 + x[so]^4/4

```

The expansions read:

```

x[so] = x0 + x2 so^2 + x3 so^3 + x4 so^4 + x5 so^5 + x6 so^6 + x7 so^7 + x8 so^8;
x'[so] = D[x[so], so]
|μερική παράγωγος
x''[so] = D[x'[so], so];
|μερική παράγωγος
r[so] = so + r2 so^2 + r3 so^3 + r4 so^4 + r5 so^5 + r6 so^6 + r7 so^7 + r8 so^8;
r'[so] = D[r[so], so]
|μερική παράγωγος
r''[so] = D[r'[so], so];
|μερική παράγωγος
2 so x2 + 3 so^2 x3 + 4 so^3 x4 + 5 so^4 x5 + 6 so^5 x6 + 7 so^6 x7 + 8 so^7 x8
1 + 2 r2 so + 3 r3 so^2 + 4 r4 so^3 + 5 r5 so^4 + 6 r6 so^5 + 7 r7 so^6 + 8 r8 so^7

```

Expand the equations:

```

SolveAlways[
|τιμές παραμέτρων εξισώσεων
{Normal[Series[eq1, {so, 0, 2}]] == 0, Normal[Series[eq2, {so, 0, 2}]] == 0}, so]
|κανονικό |δημιουργία σειράς |κανονικό |δημιουργία σειράς
{ {x4 → 5.31604 × 10-51 x0 (-1. a^2 - 1. b x0 + x0^2)
(-9.7974 × 1047 a^2 - 1.95948 × 1048 b x0 + 2.93922 × 1048 x0^2 - 6.69278 × 1047 ε^2 +
1.14518 × 1048 a^2 ε^2 - 8.25399 × 1047 b ε^2 - 9.7974 × 1047 a^2 x0^2 ε^2 - 6.5316 × 1047 b x0^3 ε^2 +
4.8987 × 1047 x0^4 ε^2 - 8.52008 × 1048 z ε^2 + 3.09821 × 1048 a^2 z ε^2 + 6.71279 × 1048 b z ε^2),
r4 → 0., x3 → 0., r3 → 8.50566 × 10-50 (6.69278 × 1047 - 1.14518 × 1048 a^2 +
8.25399 × 1047 b + 9.7974 × 1047 a^2 x0^2 + 6.5316 × 1047 b x0^3 - 4.8987 × 1047 x0^4 +
8.52008 × 1048 z - 3.09821 × 1048 a^2 z - 6.71279 × 1048 b z) ε^2,
x2 → 0.125 (-1. a^2 x0 - 1. b x0^2 + x0^3), r2 → 0.} }

```

We don't want the trivial solution, so

```

r2 = 0;
x2 = 0.125` (-1.` a^2 x0 - 1.` b x0^2 + x0^3);
r3 = -8.50565633407978` *^-50 ε^2 (-6.692783704135558` *^47 + 1.1451802620182205` *^48 a^2 -
      8.253992324759232` *^47 b - 8.520078897987321` *^48 z + 3.098210508359026` *^48 a^2 z +
      6.712789434777891` *^48 b z - 9.797401877082667` *^47 a^2 x0^2 -
      6.531601251388445` *^47 b x0^3 + 4.898700938541334` *^47 x0^4);
x3 = 0;
r4 = 0;
x4 = 5.3160352087998626` *^-51 x0 (-1.` a^2 - 1.` b x0 + x0^2)
      (-9.797401877082667` *^47 a^2 - 6.692783704135558` *^47 ε^2 +
      1.1451802620182205` *^48 a^2 ε^2 - 8.253992324759232` *^47 b ε^2 -
      8.520078897987321` *^48 z ε^2 + 3.098210508359026` *^48 a^2 z ε^2 +
      6.712789434777891` *^48 b z ε^2 - 1.9594803754165335` *^48 b x0 +
      2.939220563124801` *^48 x0^2 - 9.797401877082667` *^47 a^2 ε^2 x0^2 -
      6.531601251388445` *^47 b ε^2 x0^3 + 4.898700938541334` *^47 ε^2 x0^4);

Needs["DifferentialEquations`NDSolveProblems`"];
⏟ υποχρεωτικά
Needs["DifferentialEquations`NDSolveUtilities`"];
⏟ υποχρεωτικά
Needs["FunctionApproximations`"];
⏟ υποχρεωτικά
Needs["DifferentialEquations`InterpolatingFunctionAnatomy`"];
⏟ υποχρεωτικά
Needs["GUIKit`"];
⏟ υποχρεωτικά
$MaxExtraPrecision = 250;
⏟ μέγιστη επιπλέον ακρίβεια
ClearAll[x0, sol, smax, so, a, b, β, ε]
⏟ διαγραφή ιδιοτήτων συμβόλων

xo = x0 + x2 so^2 + x3 so^3 + x4 so^4;
xodot = 2 x2 so + 3 x3 so^2 + 4 x4 so^3;
xo'' = D[xo', so];
⏟ μερική παράγωγος
ro = so + r2 so^2 + r3 so^3 + r4 so^4;
rodot = 1 + 2 r2 so + 3 r3 so^2 + 4 r4 so^3;
ro'' = D[ro', so];
⏟ μερική παράγωγος

V = W[x[s]];
Vp = dV[x[s]];
eqq1 = x''[s] + 3 r'[s] x'[s] / r[s] - Vp
eqq2 = r''[s] + ε^2 r[s] ((x'[s])^2 + V)
a^2 x[s] + b x[s]^2 - x[s]^3 +  $\frac{3 r'[s] x'[s]}{r[s]}$  + x''[s]

ε^2 r[s] (- (0.341559 - 0.584431 a^2 + 0.421234 b) (1 - z) -
      (4.68969 - 2.16557 a^2 - 3.00457 b) z -  $\frac{1}{2}$  a^2 x[s]^2 -  $\frac{1}{3}$  b x[s]^3 +  $\frac{x[s]^4}{4}$  + x'[s]^2) + r''[s]

```

The following code will shoot for:

Shooting ["value of z to shoot for", "number of bounces", "how many decimal places to shoot to",
"range of r for shooting"]

```

Shooting[zetaIn_, maxzerosIn_, degreeofaccuracyIn_, smaxIn_] :=
(
ClearAll[x0, sol, smax, so, a, b, z, ε];
_διαγραφή ιδιοτήτων συμβόλων

z = zetaIn;
a = 1.5;
b = 0.7;
ε = 0.3;
smax = smaxIn;
so = 10-16;
Beep[]
_μπιπι

ClearAll[fraction, n, zeros, maxzeros, degreeofaccuracy];
_διαγραφή ιδιοτήτων συμβόλων

x0 =  $\frac{b + \sqrt{4 a^2 + b^2}}{2} (1 - \text{fraction})$ ; (*  $\frac{(xt-x0)}{xt} = \text{fraction}$  *)

fraction = 0;
n = 1;
zeros = 0;
maxzeros = maxzerosIn;
degreeofaccuracy = degreeofaccuracyIn;
Print["Begin"];
_εκτύπωση... _αρχή
Print["Solving for ", maxzeros, "-bounce solution"];
_εκτύπωση
While[n < degreeofaccuracy + 1,
_ενώ
Print[">>Current degree of accuracy: 10-", n, """];
_εκτύπωση
zeros = 0;
While[zeros < maxzeros + 1,
_ενώ
zeros = 0;
fraction += 10-n;
sol = NDSolve[{eqq1 == 0, eqq2 == 0, x[so] == x0, x'[so] == x0dot,
_αριθμητική λύση διαφορικής εξίσωσης
r[so] == ro, r'[so] == rodott}, {r, x}, {s, so, smax}, MaxSteps → 1000000,
_μέγιστος αριθμός βημάτων
Method → {"EventLocator", "Event" → x[s], "EventAction" :> zeros++},
_μέθοδος
WorkingPrecision → 100];
_λειτουργική ακρίβεια
Print[Plot[{x[s] /. sol}, {s, so, smax}]];
_διάγραμμα
];
fraction -= 10-n;
Print[">>>For degree of accuracy = ", n, ", (xt-x0)/xtv: ", N[fraction, 50]];
_εκτύπωση _βρόχος For _αριθμητική τιμή
Print[Plot[{x[s] /. sol}, {s, so, smax}]];
_εκτύπωση... _διάγραμμα
n++;
];

```

```

Print[Plot[{r[s] /. sol}, {s, so, smax}]];
|εκτύπωση |διάγραμμα
Print[">>>For degree of accuracy = ", n - 1, ", (xt-x0)/xtv: ", N[fraction, 50]];
|εκτύπωση |βρόχος For |αριθμητική τιμή
Print["x0= ", N[x0, 50]];
|εκτύπωση |αριθμητική τιμή
Print["x[s]= ", x[s] /. sol];
|εκτύπωση
Print["r[s]= ", r[s] /. sol];
|εκτύπωση
x1 = x[s] /. sol;
Save["φ1(a=1.5, b=0.7, ε=0.3, z=0.5)", x1];
|αποθήκευση
r1 = r[s] /. sol;
Save["ρ1(a=1.5, b=0.7, ε=0.3, z=0.5)", r1];
|αποθήκευση
κ = 3 ε2;
Print["DONE"];
|εκτύπωση

```

For example : for z = 0.5, 1 - bounce, degree of accuracy = 20, smax = 50 :

|βρόχος For

Shooting[0.5, 1, 20, 50]

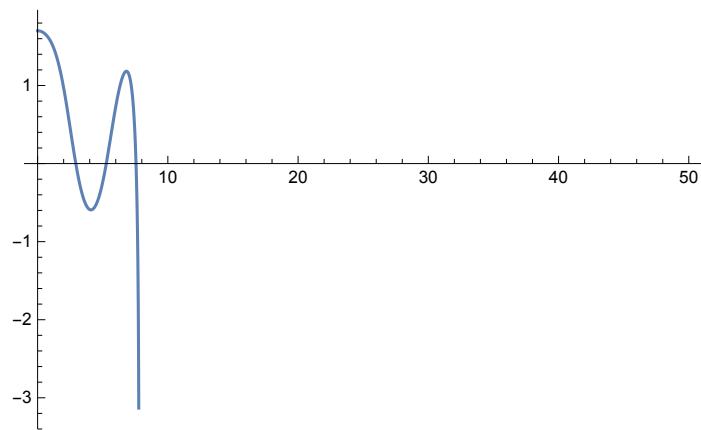
Begin

Solving for 1-bounce solution

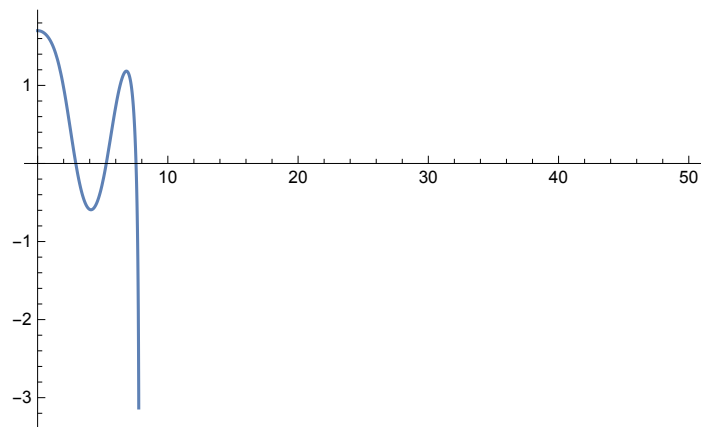
>>Current degree of accuracy: 10⁻¹

NDsolve: At s ==

7.7946718652667263867465046312402784622729351569396148233640962516410147487120134290110223301292`.
980601428742434137124`100., step size is effectively zero; singularity or stiff system suspected.



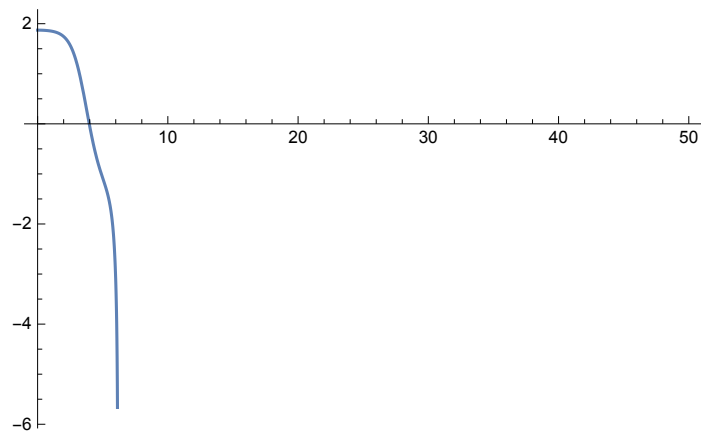
>>>For degree of accuracy = 1, (xt-x0)/xtv: 0



>>Current degree of accuracy: 10^{-2}

*** NDSolve: At s ==

6.1645926026034442975821786835529806002009334496017256542246881071611653431012208172096407151217':
254550082244305782231`100., step size is effectively zero; singularity or stiff system suspected.



*** General: Further output of NDSolve::precw will be suppressed during this calculation.

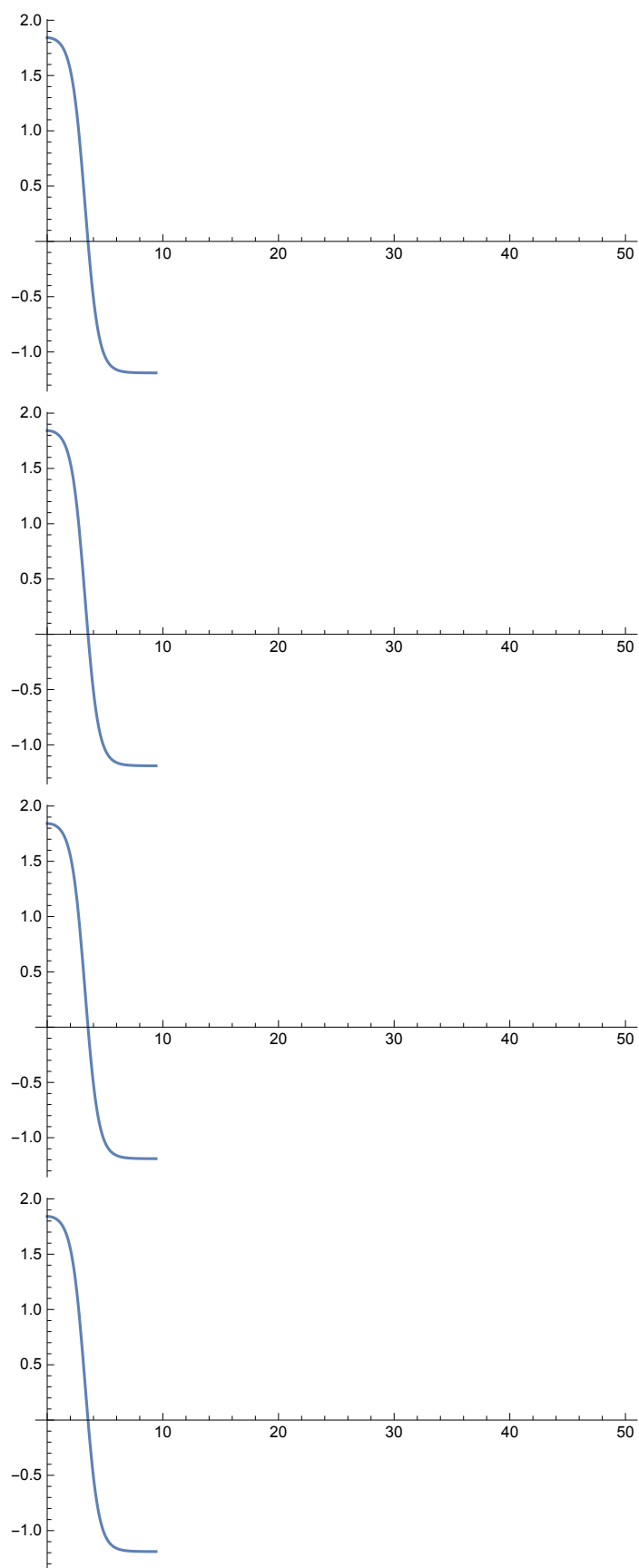
*** NDSolve: At s ==

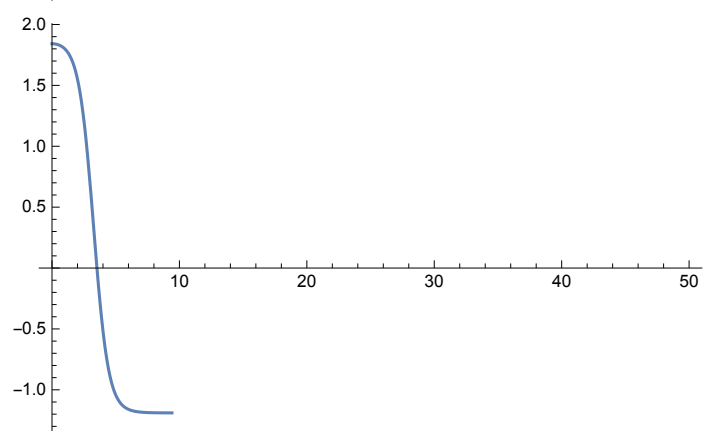
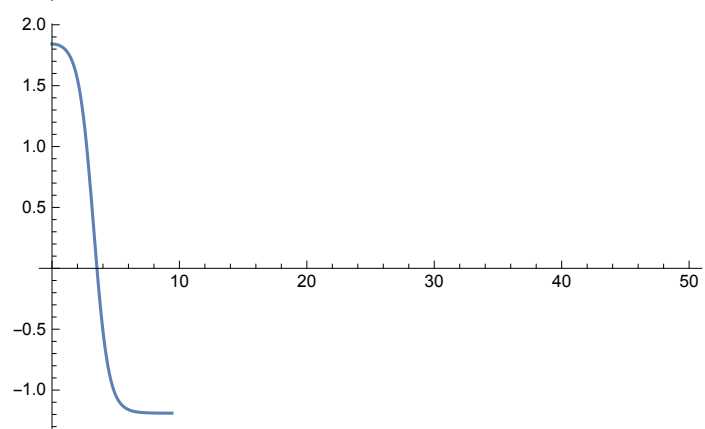
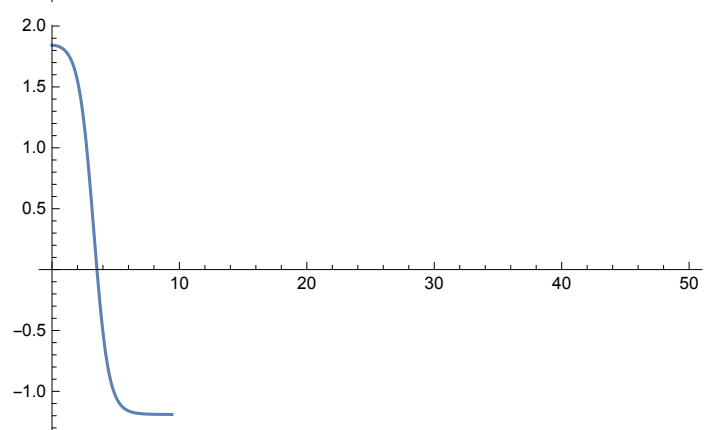
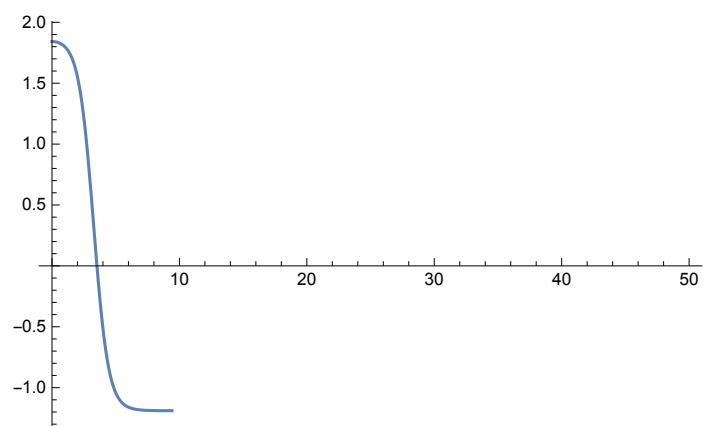
6.4939863652201157973904585330535360581502839405742032518867003880317220220677475860727933071067':
27501040446119589622`100., step size is effectively zero; singularity or stiff system suspected.

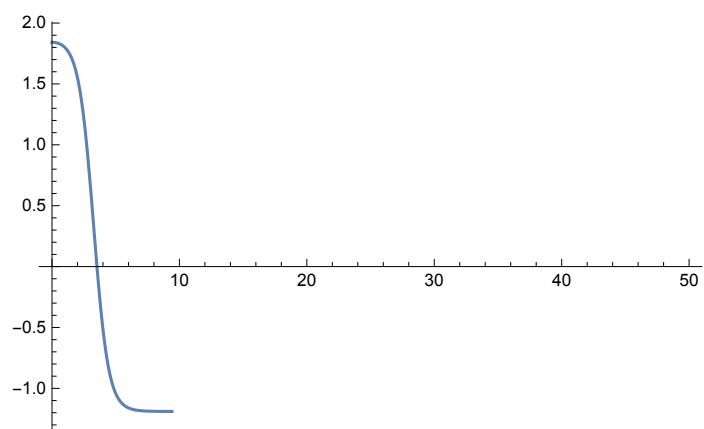
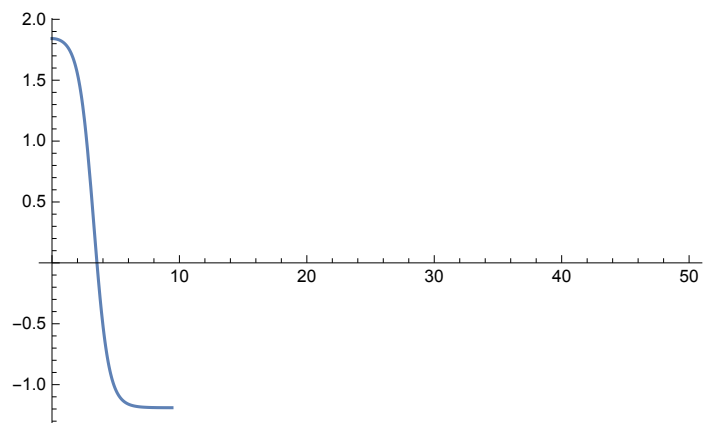
*** General: Further output of NDSolve::ndsz will be suppressed during this calculation.

(παραλείπουμε μέρος του κώδικα για λόγους συντομίας)

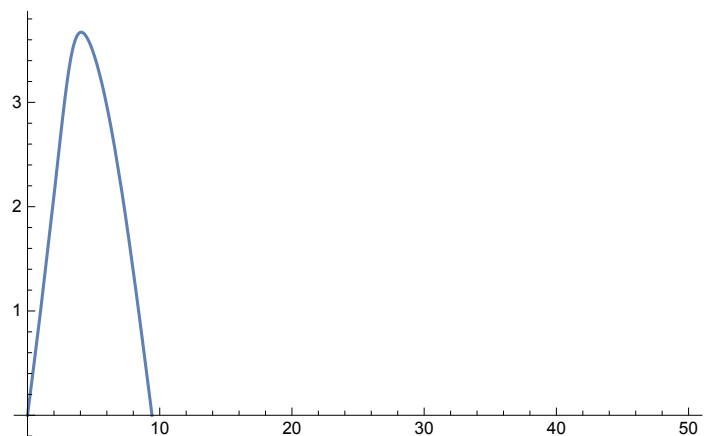
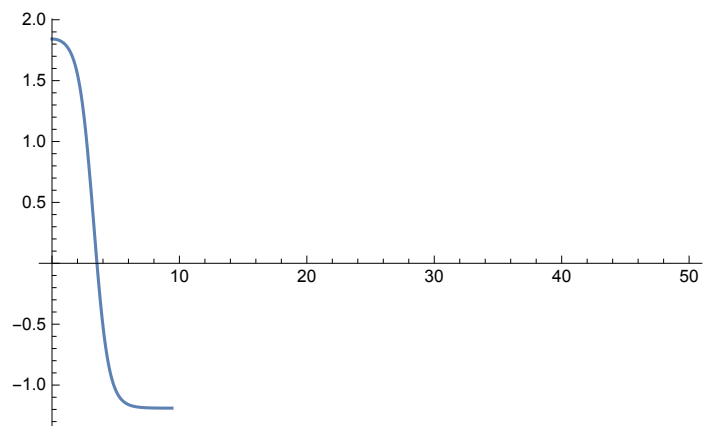
>>Current degree of accuracy: 10^{-20}







```
>>>For degree of accuracy = 20, (xt-x0)/xtv:  
0.0255582555291878999990000000000000000000000000000000000
```



```
>>>For degree of accuracy = 20,(xt-x0)/xtv:  
    0.0255582555291878999900000000000000000000000000000  
x0= 1.84198
```

$$\mathbf{x}[\mathbf{s}] = \left\{ \text{InterpolatingFunction} \left[\right. \right.$$


Domain:

[illegible]

Output: scalar

$$\mathbf{r}[\mathbf{s}] = \left\{ \text{InterpolatingFunction} \left[\right. \right.$$


Domain:

[illegible]

Output: scalar

DONE

Βιβλιογραφία

- L. F. Abbott and S. Coleman. The collapse of an anti-de Sitter bubble. *Nuclear Physics B*, 259(1):170–174, 1985.
- T. Banks. Heretics of the false vacuum: gravitational effects on and of vacuum decay 2. *arXiv preprint hep-th/0211160*, 2002.
- T. Banks and C. M. Bender. Coupled anharmonic oscillators. II. Unequal-mass case. *Physical Review D*, 8(10):3366, 1973.
- T. Banks, C. M. Bender, and T. T. Wu. Coupled anharmonic oscillators. I. Equal-mass case. *Physical Review D*, 8(10):3346, 1973.
- P. Batra and M. Kleban. Transitions between de Sitter minima. *Physical Review D*, 76(10):103510, 2007.
- A. Brown. Hubble, bubble, toil and trouble: Vacuum decay in the early universe, 2009.
- P. Burda, R. Gregory, and I. G. Moss. The fate of the Higgs vacuum. *Journal of High Energy Physics*, 2016(6):25, 2016.
- J. Callan, G. Curtis, and S. Coleman. The fate of the false vacuum. II. First quantum corrections. *Physical Review*, D16(6):1762, 1977.
- S. M. Carroll. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. 2004.
- S. Coleman. The fate of the false vacuum: Semiclassical theory. *Physical Review*, D15(10):2929, 1977.
- S. Coleman. The uses of instantons. In *The whys of subnuclear physics*, pages 805–941. Springer, 1979.
- S. Coleman. Quantum tunneling and negative eigenvalues. *Nuclear Physics B*, 298(1):178–186, 1988.
- S. Coleman and F. De Luccia. Gravitational effects on and of vacuum decay. *Physical Review*, D21(12):3305, 1980.
- S. Coleman, V. Glaser, and A. Martin. Action minima among solutions to a class of Euclidean scalar field equations. *Communications in Mathematical Physics*, 58(2):211–221, 1978.
- A. Das. *Field theory: a path integral approach*, volume 52. World Scientific, 1993.

- X. Dong and D. Harlow. Analytic Coleman-de Luccia geometries. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(11):044, 2011.
- B. Κυριάκος. Ολοκληρώματα δρόμου στην Κβαντική Μηχανική και στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου. Master's thesis, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2012.
- Σ. Τραχανάς. *KBANTOMHXANIKH II. Θεμελιώδεις αρχές και μέθοδοι - Κβαντικοί υπολογιστές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.
- I. Δ. Γιαλαμάς. Φαινόμενο σήραγγος του πεδίου Higgs στο υπόβαθρο μελανής οπής. Master's thesis, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2017.
- J. R. Espinosa, J.-F. Fortin, and M. Trépanier. Consistency of scalar potentials from quantum de Sitter space. *Physical Review D*, 93(12):124067, 2016.
- G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Action integrals and partition functions in quantum gravity. *Physical Review D*, 15(10):2752, 1977.
- A. H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, 23(2):347, 1981.
- J. C. Hackworth and E. J. Weinberg. Oscillating bounce solutions and vacuum tunneling in de Sitter spacetime. *Physical Review D*, 71(4):044014, 2005.
- S. W. Hawking and I. L. Moss. Supercooled phase transitions in the very early universe. *Physics Letters B*, 110(1):35–38, 1982.
- L. G. Jensen and P. J. Steinhardt. Bubble nucleation and the Coleman-Weinberg model. *Nuclear Physics B*, 237(1):176–188, 1984.
- L. G. Jensen and P. J. Steinhardt. Bubble nucleation for flat potential barriers. *Nuclear Physics B*, 317(3):693–705, 1989.
- M. C. Johnson. *Vacuum transitions and eternal inflation*. PhD thesis, 2007.
- H. J. Lee. *Negative modes in vacuum decay*. PhD thesis, 2014.
- K. Lee and E. J. Weinberg. Decay of the true vacuum in curved space-time. *Physical Review D*, 36(4):1088, 1987.
- W. Lee, B.-H. Lee, C. H. Lee, and C. Park. False vacuum bubble nucleation due to a nonminimally coupled scalar field. *Physical Review D*, 74(12):123520, 2006.
- R. MacKenzie. Path integral methods and applications. *arXiv preprint quant-ph/0004090*, 2000.
- M. Mariño. *Instantons and large N: an introduction to non-perturbative methods in quantum field theory*. Cambridge University Press, 2015.
- A. Masoumi. *Topics in vacuum decay*. PhD thesis, Columbia University, 2013.
- A. Masoumi, S. Paban, and E. J. Weinberg. Tunneling from a Minkowski vacuum to an AdS vacuum: A new thin-wall regime. *Physical Review D*, 94(2):025023, 2016.

- A. Masoumi, S. Paban, and E. J. Weinberg. Generalized surface tension bounds in vacuum decay. *Physical Review D*, 97(4):045017, 2018.
- W. W. K. Nicholas. Fluctuation about Cosmological Instantons. Master’s thesis, National University of Singapore, 2014.
- V. Novikov, M. Shifman, A. Vainshtein, and V. Zakharov. ABC of Instantons. In *ITEP Lectures on Particle Physics and Field Theory: Volume 1*, pages 201–299. World Scientific, 1999.
- M. Paranjape. *The Theory and Applications of Instanton Calculations*. Cambridge University Press, 2017.
- S. J. Parke. Gravity, the decay of the false vacuum and the new inflationary universe scenario. *Physics Letters*, B121(313), 1983).
- R. Rosenfelder. Path Integrals in Quantum Physics. *arXiv 1209.1315*, 2012.
- G. S. Watson. Inflation and Scalar Fields. http://ned.ipac.caltech.edu/level5/Watson/Watson5_3.html, 2014.
- E. J. Weinberg. Hawking-Moss bounces and vacuum decay rates. *Physical review letters*, 98(25):251303, 2007.
- E. J. Weinberg. *Classical solutions in quantum field theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Berlin and Heidelberg, 2015.
- A. Wickens. False Vacuum Decay and Tunnelling in Euclidean Space. Master’s thesis, Imperial College London, 2017.
- N. Zettili. *Quantum mechanics: concepts and applications*. John Wiley & Sons, 2009.