

DECAIMIENTO DEL FALSO VACÍO EN LA MECÁNICA CUÁNTICA

Erwin Renzo Franco Diaz

11 de julio de 2020

- Consideremos un potencial como el de la figura 1.

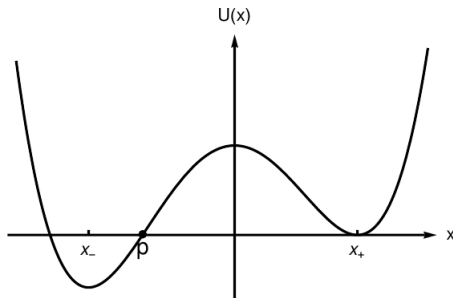


FIGURA 1: Potencial con un falso vacío

- Mecánica Clásica:** la partícula es estable en ambos mínimos.
- Mecánica Cuántica:** si la partícula se encuentra en el mínimo del potencial con mayor energía ($x = x_+$), va a decaer al de menor ($x = x_-$) por tunelamiento \Rightarrow el potencial posee un falso vacío.

- Una partícula cuya función de onda se encuentra concentrada en la región del falso vacío no es un autoestado de energía; es un estado metaestable con energía compleja.
- Probabilidad de que la partícula siga en la región del falso vacío luego de un tiempo T

$$P_{\text{FV}}(T) = \int_{\text{FV}} dx |\psi(x, T)|^2 \propto e^{-\Gamma T} \quad (1)$$

donde

$$\Gamma = -2\text{Im} \left(\frac{E_0}{\hbar} \right) \quad (2)$$

es la tasa de decaimiento del estado metaestable.

APROXIMACIÓN WKB (SEMICLÁSICA)

- La tasa de decaimiento es proporcional al coeficiente de transmisión a través de la barrera

$$\Gamma \propto T \propto e^{-B/\hbar}(1 + \mathcal{O}(\hbar)) \quad (3)$$

$$\Gamma = Ae^{-B/\hbar}(1 + \mathcal{O}(\hbar)) \quad (4)$$

donde

$$B = 2 \int_{x_+}^{x_0} dx \sqrt{2m(V(x) - E)} \quad (5)$$

- Cuando la partícula ($m = 1$) atraviesa la barrera en $x = x_0$, sale con energía cinética nula. Además en $V(x_0) = 0 \rightarrow E = 0$. En (5)

$$B = 2 \int_{x_+}^{x_0} dx \sqrt{2V(x)} \quad (6)$$

- Acción

$$S[x(t)] = \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] \quad (7)$$

- Rotación de Wick: $t = -i\tau \rightarrow$ Acción Euclidea

$$S_E[x(\tau)] = \int d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] \quad (8)$$

- Ecuación de movimiento

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dV(x)}{dx} = -\frac{d(-V(x))}{dx}. \quad (9)$$

Equivalente a una partícula moviéndose en el potencial $-V(x)$ en tiempo real.

- Energía Euclidea

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \quad (10)$$

- Solución a (9) con las siguientes condiciones

$$\mathcal{E}_B = 0 \quad (11a)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} x_B = x_{\pm} \quad x_B(0) = x_0 \quad (11b)$$

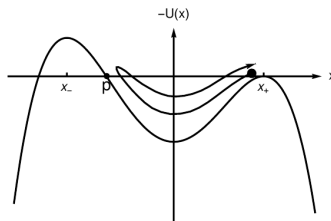


FIGURA 2: Bounce

- En $\tau = 0$: $V(x_0) = 0$. De (11a)

$$\left. \frac{dx_B}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (12)$$

ACCIÓN DEL BOUNCE

- Acción del bounce

$$S_B = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 + V(x_B) \right] \quad (13)$$

- De (11a)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx_B}{d\tau} \right)^2 = V(x_B) \quad (14)$$

- Usando (14) en (13)

$$S_B = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau (2V(x_B)) \quad (15)$$

- El movimiento de la partícula es simétrico.

$$S_B = \int_{-\infty}^0 d\tau (2V(x_B)) + \int_0^{+\infty} d\tau (2V(x_B)) = 2 \int_{-\infty}^0 d\tau (2V(x_B)) \quad (16)$$

- Haciendo el cambio de variable $\tau \rightarrow x_B$. De (14)

$$d\tau = \frac{dx_B}{\sqrt{2V(x_B)}} \quad (17)$$

- Reemplazando (17) en (16)

$$S_B = 2 \int_{x_+}^{x_0} dx \sqrt{2V(x)} \quad (18)$$

- Comparando (18) con (6)

$$\boxed{B = S_B} \quad (19)$$

INTEGRAL DE CAMINO EUCLIDEANA

- Amplitud de transición Euclideana (por conveniencia $\tau_f = T/2$ y $\tau_i = -T/2$)

$$I = \langle x_f, T/2 | e^{-HT/\hbar} | x_i, -T/2 \rangle = N \int \mathcal{D}[x] e^{-S_E/\hbar} \quad (20)$$

- Insertando un conjunto completo de autoestados de energía $\{|n\rangle\}$ en (20)

$$I = \sum_n e^{-E_n T/\hbar} \phi_n^*(x_f, T/2) \phi_n(x_i, -T/2) \quad (21)$$

- En el límite $T \rightarrow \infty$, el estado de menor energía domina la integral de camino en (20)

$$\frac{E_0}{\hbar} = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln I}{T} \quad (22)$$

APROXIMACIÓN DE PUNTO ESTACIONARIO

- El cálculo semiclásico de la integral de camino Euclideana en (20) requiere encontrar las soluciones a (9) que cumplan con las condiciones dadas. Estas corresponden a los puntos estacionarios (*saddle point*) de la acción euclideana (13).
- La integral de camino Euclideana se puede aproximar como la suma de las contribuciones de estos puntos.
- Equivalente a la aproximación WKB.

APROXIMACIÓN DE PUNTO ESTACIONARIO

- La acción Euclideana es estacionaria para la trayectoria clásica

$$\frac{\delta S_E[x_{\text{cl}}]}{\delta x(\tau)} = 0. \quad (23)$$

- Expandiendo la acción alrededor de la trayectoria clásica

$$x(\tau) = x_{\text{cl}}(\tau) + \eta(\tau), \quad \eta(\tau_i) = \eta(\tau_f) = 0 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} S_E[x] &= S_E[x_{\text{cl}}(\tau) + \eta(\tau)] \\ &= S_E[x_{\text{cl}}(\tau)] + \frac{1}{2} \iint d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1) \frac{\delta^2 S_E[x_{\text{cl}}]}{\delta x_{\text{cl}}(\tau_1) \delta x(\tau_2)_{\text{cl}}} \eta(\tau_2) \\ &\quad + \mathcal{O}(\eta^3) \\ &\approx S_E^{\text{cl}} + S_E^{(2)}[\eta(\tau)] \end{aligned} \quad (25)$$

APROXIMACIÓN DE PUNTO ESTACIONARIO

- Usando (25) en (20)

$$I \approx N e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \int \mathcal{D}[x] e^{-S_E^{(2)}/\hbar} \quad (26)$$

- Para calcular $S_E^{(2)}$ partimos de (13) y tomamos las derivadas funcionales

$$\frac{\delta^2 S_E[x_{\text{cl}}]}{\delta x_{\text{cl}}(\tau_1) \delta x_{\text{cl}}(\tau_2)} = \left(-\frac{d}{d\tau_1} + V''(x_{\text{cl}}(\tau_1)) \right) \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (27)$$

donde la prima denota la derivada respecto a $x(\tau)$.

- Reemplazando (27) en (25) y aplicando el delta de Dirac

$$S_E^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau \eta(\tau) \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{\text{cl}}) \right) \eta(\tau) \quad (28)$$

APROXIMACIÓN DE PUNTO ESTACIONARIO

- Introducimos un conjunto completo ortonormal de autofunciones del operador en (28)

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl})\right) \eta_\lambda(\tau) = \lambda \eta_\lambda(\tau) \quad (29)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} d\tau \eta_i(\tau) \eta_j(\tau) = \delta_{ij} \quad (30)$$

- Descomponemos $\eta(\tau)$ en función de estas autofunciones

$$\eta(\tau) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \eta_{\lambda}(\tau) \quad (31)$$

- Usando (29), (30) y (31) en (28)

$$S_E^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \lambda a_{\lambda}^2 \quad (32)$$

APROXIMACIÓN DE PUNTO ESTACIONARIO

- Haciendo el cambio de variable $x(\tau) \rightarrow \eta(\tau)$ con la medida

$$\mathcal{D}[\eta] = \prod_{\lambda} \frac{da_{\lambda}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (33)$$

(se incluye el factor de $\sqrt{2\pi\hbar}$ por conveniencia).

- Reemplazando (32) y (33) en (26), y desarrollando

$$I = N e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \prod_{\lambda} \lambda^{-1/2} \quad (34)$$

- $\prod_{\lambda} \lambda^{-1/2}$ es el determinante del operador en (29) por ser el producto de sus autovalores.

$$I = N e^{-S_E^{\text{cl}}/\hbar} \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{\text{cl}}) \right) \right]^{-1/2} \quad (35)$$

INTEGRAL DE CAMINO Y DECAIMIENTO DEL FV

- Existen algunos problemas con (35)
 - Es real, por lo que la energía asociada no tiene parte imaginaria.
 - Es válida solo cuando los autovalores son no negativos.
- En el decaimiento del falso vacío $x_i = x_f = x_+$.
- Existen 3 soluciones que cumplen con (11): la solución constante $x(\tau) = x_+$, el bounce (de los cuales hay múltiples) y el shot. Solo se consideran las contribuciones de las dos primeras soluciones puesto que el shot da la energía del estado fundamental global y no la del falso vacío.

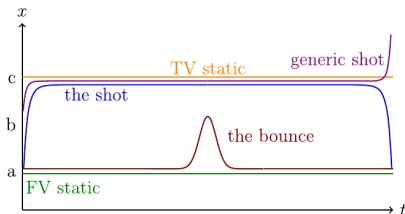


FIGURA 3: Soluciones a las ecuaciones de movimiento Euclidean

- Derivando (9) respecto a τ

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \frac{dx_B}{d\tau} = 0 \quad (36)$$

$\rightarrow dx_B/d\tau$ es un modo cero del operador.

- Normalizando esta autofunción

$$x^{(0)}(\tau) = B^{-1/2} \frac{dx_B}{d\tau} \quad (37)$$

- La presencia de este modo cero se debe a la invariancia ante translaciones temporales del centro del bounce. Una variación de la forma $\delta\eta(\tau) \propto x^{(0)}(\tau)$ no cambia $S_E^{(2)}$.

- Si se integra el modo cero de la misma manera que el resto de autovalores no negativos, la integral en (26) diverge.
- Para integrar el modo cero introducimos la coordenada colectiva τ_0 que corresponde al centro del bounce. Expandiendo la trayectoria usando esta nueva coordenada

$$x(\tau) = x_B(\tau - \tau_0) + \eta(\tau - \tau_0) \quad (38)$$

$$x(\tau + \tau_0) = x_B(\tau) + \eta(\tau) = x_B(\tau) + \sum_{\lambda} a_{\lambda} \eta_{\lambda}(\tau) \quad (39)$$

- Separando a_0 en (31) y usando (38)

$$a_0(\tau_0) = \int_{-T/2}^{T/2} d\tau x(\tau + \tau_0) x_0(\tau) \quad (40)$$

- Derivando (40) respecto a τ_0

$$\frac{da_0}{d\tau_0} = \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \frac{dx(\tau + \tau_0)}{d\tau_0} x_0(\tau) = \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \frac{dx(\tau + \tau_0)}{d\tau} x_0(\tau) \quad (41)$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \left(\frac{dx_B(\tau)}{d\tau_0} + \sum_{\lambda} a_{\lambda} \frac{d\eta_{\lambda}(\tau)}{d\tau} \right) x_0(\tau) \quad (42)$$

$$\approx \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \frac{dx_B(\tau)}{d\tau_0} x^{(0)}(\tau) \quad (43)$$

$$= B^{1/2} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau x_0^2(\tau) \quad (44)$$

$$= B^{1/2} \quad (45)$$

$(x_0(\tau))$ esta normalizado)

- Haciendo el cambio de variable $a_0 \rightarrow t_0$ en (33) y desarrollando

$$I_1 = \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \right]^{-1/2} T e^{-B/\hbar} \quad (46)$$

donde \det' indica que no se considera el modo cero en la determinante (se elige la normalización de tal manera que $N = 1$ en (26)). El subíndice indica que esta contribución corresponde a la de un único bounce.

- De (12) notamos que $x_0(\tau)$ tiene un nodo. Sabemos (por ejemplo) de la ecuación de Schrödinger que la autofunción correspondiente a la energía fundamental no tiene nodos. Eso implica que el operador en (35) posee una autofunción con autovalor negativo \rightarrow modo negativo.
- Al igual que el modo cero, el modo negativo hace que la integral en (26) diverga. En este caso para realizar la integración se introduce un parámetro en la acción y se hace la continuación analítica del contorno de integración al plano complejo.
- Esto da como resultado un factor de $i/2$ en (46)

$$I_1 = \frac{i}{2} \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right) \right]^{-1/2} T e^{-B/\hbar} \quad (47)$$

donde \det' indica ahora que solo se consideran los autovalores mayores que cero.

CONTRIBUCIÓN DE MÚLTIPLES BOUNCES

- En (20) se debe considerar la contribución de un número arbitrario de bounces.
- Definiendo

$$K = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[\frac{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right]^{-1/2} \quad (48)$$

donde $\omega^2 = V''(x_+)$ podemos escribir la contribución de un número arbitrario de bounces como

$$I_n = \frac{1}{n!} (iKT e^{-B})^n I_0 \quad (49)$$

donde I_0 es la contribución de la solución constante y se incluye factor de $n!$ debido a que los bounces son indistinguibles.

CONTRIBUCIÓN DE MÚLTIPLES BOUNCES

- Sumando todas las contribuciones

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} I_n = I_0 \exp \left\{ \left(iKT e^{-B/\hbar} \right) \right\} \quad (50)$$

- Finalmente, reemplazando (50) en (22) y luego en (2) (I_0 no posee parte imaginaria)

$$\Gamma = \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[\frac{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x_{cl}) \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right]^{-1/2} e^{-B/\hbar} (1 + \mathcal{O}(\hbar)). \quad (51)$$