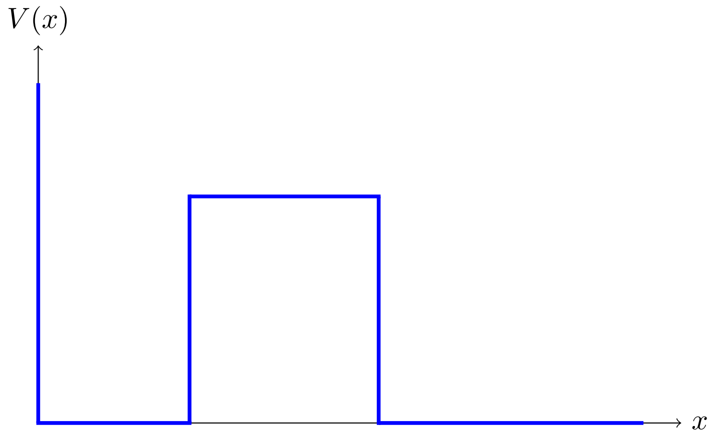
Anexo 1

Erwin Renzo Franco Diaz

1. Solución de la ESIT



$$-\frac{1}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\phi = E\phi = \frac{p^2}{2m}$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \left(2mV(x) - p^2\right)\phi$$

1.1. FV

$$\frac{d^2\phi_{\mathrm{FV}}}{dx^2} = -p^2\phi_{\mathrm{FV}}$$

$$\phi^{\mathrm{FV}}(x) = A\sin(px) + B\cos(px)$$

Como se tiene una barrera infinita en $x = 0$

$$\phi_{\mathrm{FV}}(0) = B = 0$$

$$\phi^{\mathrm{FV}}(x) = A\sin(px)$$

1.2. B

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \left(2mV_0 - p^2\right)\phi$$

Definimos

$$\kappa^2 = 2mV_0 - p^2$$

con $k > 0$

$$\phi^{\mathrm{B}}(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}$$

1.3. R

$$\frac{d^2\phi_{\mathrm{R}}}{dx^2} = -p^2\phi_{\mathrm{R}}$$

$$\phi^{\mathrm{R}}(x) = Ee^{\mathrm{i}px} + Fe^{-\mathrm{i}px}$$

1.4. Continuidad de $\phi(x)$

1.4.1. $x = a$

Continuidad de $\phi(x)$ en $x = a$

$$\begin{aligned} \phi^{\mathrm{FV}}(a) &= \phi^{\mathrm{B}}(a) \\ A\sin(pa) &= Ce^{\kappa a} + De^{-\kappa a} \end{aligned} \tag{1}$$

Continuidad de $\phi'(x)$ en $x = a$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi^{\mathrm{FV}}}{dx}(a) &= \frac{d\phi^{\mathrm{B}}}{dx}(a) \\ A\cos(pa) &= \frac{\kappa}{p}\left(Ce^{\kappa a} - De^{-\kappa a}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

(1) y (2) forman un sistema de ecuaciones lineales a partir del cual se puede obtener C y D en función A

$$\begin{aligned} e^{\kappa a}C + e^{-\kappa a}D &= A\sin(pa) \\ e^{\kappa a}C - e^{-\kappa a}D &= \frac{p}{\kappa}A\cos(pa) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{e^{-\kappa a}}{2}A\left(\sin(pa) + \frac{p}{\kappa}\cos(pa)\right) \\ D &= \frac{e^{\kappa a}}{2}A\left(\sin(pa) - \frac{p}{\kappa}\cos(pa)\right) \end{aligned}$$

1.4.2. $x = b$

Continuidad de $\phi(x)$ en $x = b$

$$\begin{aligned} \phi^{\mathrm{B}}(b) &= \phi^{\mathrm{R}}(b) \\ Ce^{\kappa b} + De^{-\kappa b} &= Ee^{\mathrm{i}pb} + Fe^{-\mathrm{i}pb} \end{aligned} \tag{3}$$

Continuidad de $\phi'(x)$ en $x = b$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi^{\mathrm{B}}}{dx}(b) &= \frac{d\phi^{\mathrm{R}}}{dx}(b) \\ Ce^{\kappa b} - De^{-\kappa b} &= \mathrm{i}\frac{p}{\kappa}\left(Ee^{\mathrm{i}pb} - Fe^{-\mathrm{i}pb}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

(3) y (4) forman un sistema de ecuaciones lineales a partir del cual se puede obtener E y F en función de C y D y por lo tanto en función de A

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}pb}E + e^{-\mathrm{i}pb}F &= Ce^{\kappa b} + De^{-\kappa b} \\ e^{\mathrm{i}pb}E - e^{-\mathrm{i}pb}F &= -\mathrm{i}\frac{\kappa}{p}\left(Ce^{\kappa b} - De^{-\kappa b}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{e^{-\mathrm{i}bp}}{2}\left(\left(1-\mathrm{i}\frac{\kappa}{p}\right)Ce^{b\kappa}+\left(1+\mathrm{i}\frac{\kappa}{p}\right)De^{-b\kappa}\right)\\
F &= \frac{e^{\mathrm{i}bp}}{2}\left(\left(1+\mathrm{i}\frac{\kappa}{p}\right)Ce^{b\kappa}+\left(1-\mathrm{i}\frac{\kappa}{p}\right)De^{-b\kappa}\right)
\end{aligned}
$$

Como todas las constantes contienen un factor de A, esta puede ser absorbida en la constante de normalización por lo que podemos hacerla igual a 1.

$$
\begin{aligned}
C\left(p\right) &= \frac{e^{-\kappa a}}{2}\left(\sin\left(pa\right)+\frac{p}{\kappa}\cos\left(pa\right)\right)\\
D\left(p\right) &= \frac{e^{\kappa a}}{2}\left(\sin\left(pa\right)-\frac{p}{\kappa}\cos\left(pa\right)\right)\\
E\left(p\right) &= \frac{e^{-\mathrm{i}bp}}{2}\left(\left(1-\mathrm{i}\frac{\kappa}{p}\right)C(p)e^{b\kappa}+\left(1+\mathrm{i}\frac{\kappa}{p}\right)D(p)e^{-b\kappa}\right)\\
F\left(p\right) &= \frac{e^{\mathrm{i}bp}}{2}\left(\left(1+\mathrm{i}\frac{\kappa}{p}\right)C(p)e^{b\kappa}+\left(1-\mathrm{i}\frac{\kappa}{p}\right)D(p)e^{-b\kappa}\right)
\end{aligned}
$$

andreesen define las constantes de manera distinta

1.5. Normalización

Como los autovalores de momento p son continuos

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} dx\phi_{p'}^*(x)\phi_p(x) = N\left(p\right)\delta(p-p')
$$

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} dx\phi_{p'}^*(x)\phi_p(x) = \int_0^a dx\left(\phi_{p'}^{\mathrm{FV}}(x)\right)^*\phi_p^{\mathrm{FV}}(x)+\int_a^b dx\left(\phi_{p'}^{\mathrm{B}}(x)\right)^*\phi_p^{\mathrm{B}}(x)+\int_b^{+\infty} dx\left(\phi_{p'}^{\mathrm{R}}(x)\right)^*\phi_p^{\mathrm{R}}(x)
$$

Las dos primeras integrales dan un valor finito, por lo que la delta de Dirac solo puede resultar de la última integral en la región R.

$$
\begin{aligned}
\int_b^{+\infty} dx\left(\phi_{p'}^{\mathrm{R}}(x)\right)^*\phi_p^{\mathrm{R}}(x) &= \int_b^{+\infty} dx\left(E\left(p'\right)e^{\mathrm{i}p'x}+F\left(p'\right)e^{-\mathrm{i}p'x}\right)^*\left(E\left(p\right)e^{\mathrm{i}px}+F\left(p\right)e^{-\mathrm{i}px}\right)\\
&= \int_b^{+\infty} dx\left(E^*\left(p'\right)e^{-\mathrm{i}p'x}+F^*\left(p'\right)e^{\mathrm{i}p'x}\right)\left(E\left(p\right)e^{\mathrm{i}px}+F\left(p\right)e^{-\mathrm{i}px}\right)\\
&= \int_b^{+\infty} dx\left(E^*\left(p'\right)E\left(p\right)e^{\mathrm{i}(p-p')x}+F^*\left(p'\right)F\left(p\right)e^{-\mathrm{i}(p-p')x}+E^*\left(p'\right)F\left(p\right)e^{-\mathrm{i}(p+p')x}+F^*
\end{aligned}
$$

1.6. Cálculo de Γ usando los Autovalores de Energía