

中国科学技术大学

《电磁学 B》期末论文

题目： 生物体中的电现象概述

姓名： 尚尔淦

学号： PB19010390

指导教师： 孙 霞

时间： 2020 年 11 月 1 日

摘 要

自 1786 年意大利医生与生物学家 Galvani 偶然观察到并提出生物体中拥有电现象，生物电的发现距今才经历了 200 多年，但是随着电磁学的蓬勃发展，物理学为医学，生物学等学科提供了更为丰富的科学理论。研究表明，生物电作为一种物理化学过程，其中各组织器官以及细胞在生命活动中伴随着电位和极性的变化。本文基于以上事实对生物界（尤其是人类）某些经典的生物电现象进行简要的理论分析，并在此过程中建立简要的模型，重点讨论人体骨骼的压电效应，神经元上兴奋的传导以及电鳗的放电机制，并应用所学的电磁学知识进行一定程度的解释，并结合国内某些文献进行阐述。

关键词 生物电；骨的压电效应；动作电位传导；电鳗放电；

1 骨的压电性能和在骨生长方面的应用

（本部分模型构建均为个人思考得出）

1.1 压电效应简介

压电效应分为正压电效应和逆压电效应。正压电效应是指是在无电场时某些各向异性的晶体在机械应变力下发生形变时，晶体的表面会出现极化电荷。而当这种晶体置于电场之下，晶体会发生几何形变，这种现象我们也称之为电致伸缩（逆压电效应）。

科学家研究发现骨在受力弯曲的时候若在其两端连接电压表可以观察到电压的变化，为了进行定量研究，我们可将骨切成近似立方体的形状，当所施加外力与骨轴成大约 45° 时，其压电效应最明显

，反压电效应同样可以用相同的方法进行验证。

我们定义压电常数 d_{14} 和 e_{14} 分别来表示压电效应极

化电荷和机械应力的比值和逆压电效应中机械应力

和所加电场的比值，两个常数在实验中均得到了很好的模拟，压电常数的计算很好地说明了人体的骨存在以上提及的压电效应，我们完全可以通过外界施加电场的方式来干预骨的形成和恢复。

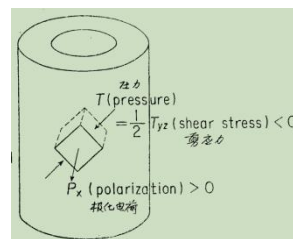


图 1.1 压电效应实验

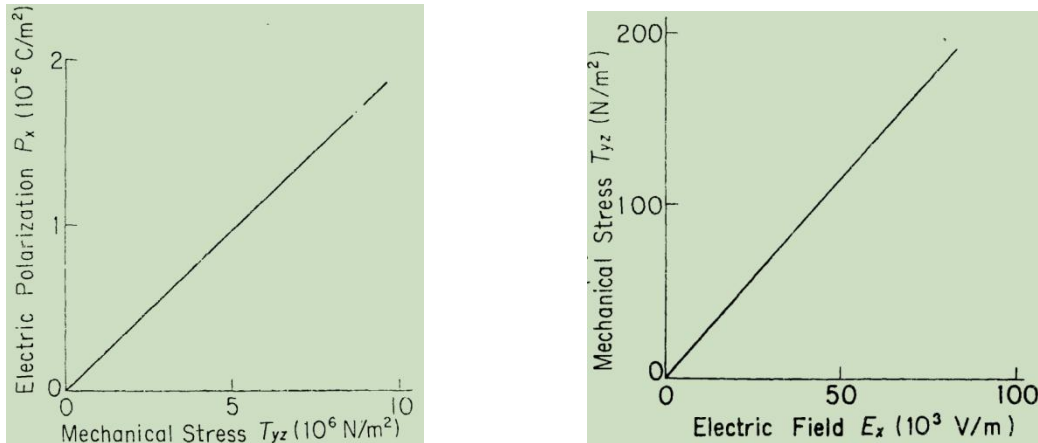


图 1.2 压电常数的模拟

1.2 骨的压电效应应用模型

实验发现压电聚合物膜可以用来诱导骨的生长，小片的聚合物膜覆盖在活骨的外侧有利于骨的再生和形成，早年科学家将 Teflon 驻极体膜（具有较好的生物相容性）包卷在兔子股骨的周围，观察到极好的骨痂生长，我们重点对这个试验进行模型研究。



图 1.3 骨的压电的圆筒形模拟

考虑到生物治疗过程中不可能将人的骨完全暴露在空气其中，我们在建立模型时可以认为在驻极体和骨之间有一层生物组织（例如手臂组织），由上图所示骨轴到外骨，组织外侧，驻极体的距离依次是 r_1 , r_2 , r_3 ，且三者的介电常数分别是 ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 ，我们注意到，这个是介质界面与等势面重合的模型，严格

满足以下公式：

$$D = \epsilon_0 E_0$$

其中 E_0 是撤去所有介质后由自由电激发的电场，我们考虑到骨中并非是由

钙类物质单纯组成，而是电解液和难溶性钙盐的混合体，可以认为自由电荷在骨和组织之中以电荷密度 ρ 均匀分布，通过做圆柱形高斯面可以得到如下公式：

$$E_0 = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} (0 < r < r_2)$$

$$E_0 = \frac{\rho r_2^2}{2r\epsilon_0} (r_2 < r < r_3)$$

再有 $D = \epsilon_i E_i$ 可得：

$$E = E_1 = \frac{\rho r}{2\epsilon_1} (0 < r < r_1)$$

$$E = E_2 = \frac{\rho r}{2\epsilon_2} (r_1 < r < r_2)$$

$$E = E_3 = \frac{\rho r_2^2}{2r\epsilon_3} (r_2 < r < r_3)$$

则

$$U = \int_0^{r_1} \frac{\rho r}{2\epsilon_1} dr + \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho r}{2\epsilon_2} dr + \int_{r_2}^{r_3} \frac{\rho r_2^2}{2r\epsilon_3} dr$$

该模型理论上讲，我们只要得到相对介电常数和细胞组织中的电荷密度，我们就能计算出骨组织中的电场强度，但事实上，骨和组织中的电解质溶液差异较大，不能过分认为电荷均匀分布，同时我们也不可能测出驻极体膜到骨轴的电势差，因而这个模型在实际操作上过于困难，我们对该模型进行适当改进



图 1.4 骨的压电平行板模型

我们在模拟过程中如果不是将驻极体膜以包卷的方式对骨进行贴合，而是采用两侧极板的方式进行贴合，由于手臂半径较小我们可以用平行板电容器中添加介质的模型进行拟合，且各极板间认为近似匀强电场，有如下公式：

$$U=2E_1d_1+2E_2d_2+2E_3d_3$$

$$D=\epsilon_0E_0=\epsilon_1E_1=\epsilon_2E_2=\epsilon_3E_3$$

则骨中的电场强度为

$$E_1=\frac{U}{2(d_1+\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}d_2+\frac{\epsilon_1}{\epsilon_3}d_3)}$$

这个结果在医学上有一定的应用价值，我们知道骨骼的组成是大量的沉淀性钙离子盐，而钙离子是带正电的，在外加电场中可以进行定向移动；同时利用骨的压电效应，人体运动时，骨受到各组织间一定的拉力或压力时产生压电效应，从而产生电场，电场从而促进了钙离子向骨的方向进行移动，从而更有利于钙离子沉积，我们对于病人也完全可以像以上模型中模拟的方式来促进骨骼的形成与恢复。

2 生物放电的电机制和模型（模型均是个人思考得出）

电鳗是目前已知的放电能力最强的淡水鱼类，其短时间激发的电流完全可使入昏厥，本部分重点讨论：电鳗的发电原理，电鳗对其它生物的感知机制，

以及细胞内外的电场分布模型。

2.1 电鳗的发电机制及外场分布

由中学知识我们知道电池组的串联可以增强电源的电压，而电池组的并联可以增强电源发出的电流强度，生物研究发现电鳗尾部两侧的肌肉规则排列着 6000-10000 枚肌肉薄片，每枚肌肉薄片相当于一个小电池，这些电池组的不断并联与串联构成了电鳗的机体发电组，许多薄片与中枢神经系统相连，致使电鳗的头部作为正极，尾部作为负极。下图是电鳗内部的电路模拟机制。

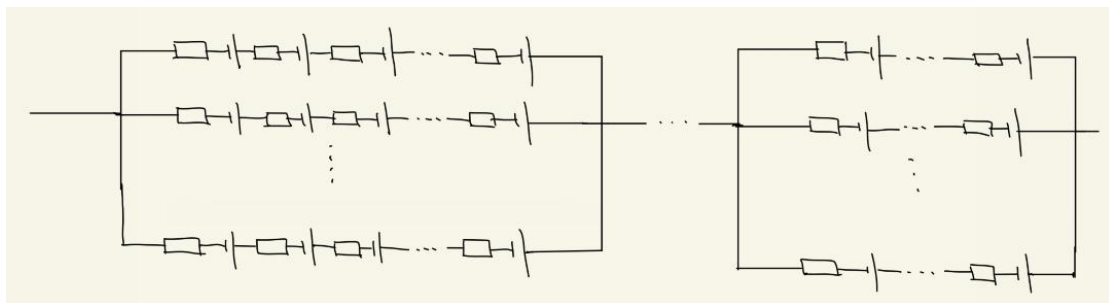


图 2.1 电鳗内部电路模拟

电鳗通过神经系统控制头（正极）发出电场分布在空间当中，再由尾部（负极）接受这种电场，当外界生物电（生物内部生物电）干扰到这种电场时，电鳗就能立刻感知到周围生物的存在。

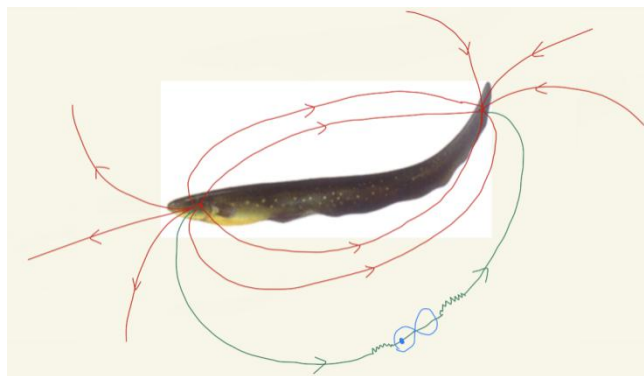


图 2.2 电鳗周围电场模拟

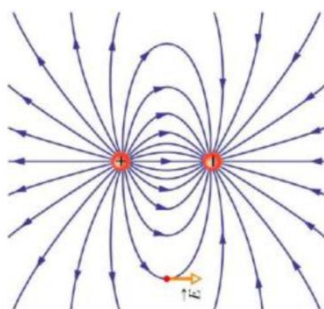


图 2.3 电偶极子电场示意图

通过以上两图的对比我们可以发现，电鳗的外部电场分布几乎可以认为是电偶极子产生的电场，其大小为：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{e}_r(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) - \vec{p}}{r^3}$$

当周围有生物时则会改变该电场被电鳗感知到，下面我们研究一下电鳗内部的生物电场分布情况。

2.2 电鳗细胞内部电场分布模型

由细胞的流动镶嵌模型可知，细胞膜可认为是双层结构



图 2.4 细胞膜的双层结构

我们不妨研究一个肌肉薄片细胞内部的电场分布，将上图左侧的模型简化为两侧由圆形电偶极子层构成的圆柱长筒，示意图如下图所示：

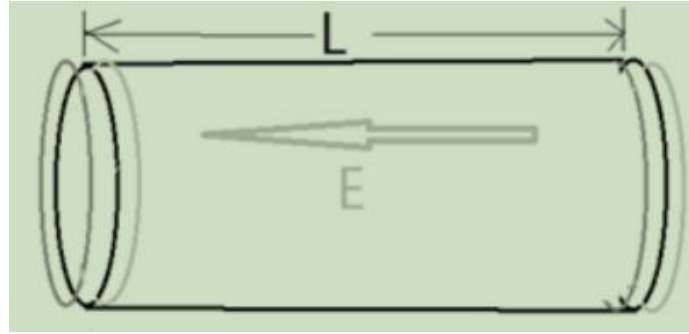


图 2.5 细胞内电场模拟示意图

注意，我们这个模型不仅仅是有限大圆盘对于盘外电场的分布，我们将这个模型严格化，认为是“电偶极子层”对于层外一点的电场作用，我们不妨先研究一个电偶极子层对轴线上一点的电场强度大小，为了研究电偶极子层的电场分布，我们先来讨论一个电偶极子的电场分布

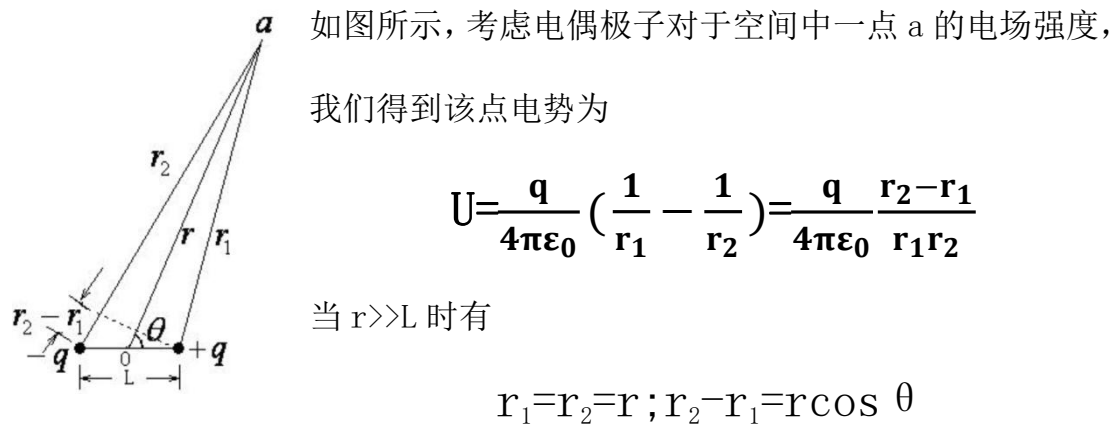


图 2.6 电偶极子示意

于是对于电偶极子有：

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cos \theta}{r^2}$$

其中 P 是电偶极矩，对于电偶极子层我们认为是众多电偶极子的叠加，

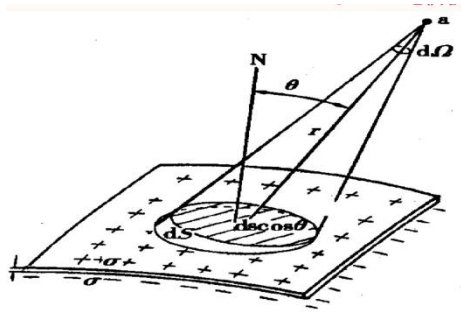


图 2.7 电偶极子层示意

对于圆盘型电偶极子层，我们取每一周圆环作为微元

$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \cos\theta \cdot d$$

$$dS = 2\pi r dr$$

这里 $\cos\theta$ 是处于半径为 r 处的微元电偶极子到轴线上的角度，则：

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$U = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{x^2 + r^2} \cdot d \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

$$U = \frac{x\sigma d}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

从而由 $E = -\nabla U$ 有：

$$E = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

从而对于细胞内一点 A，设该点距膜一侧距离为 x ，假设该细胞的长度为 L ，

那么该点的电场强度为：

$$E = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{R^2}{((L-x)^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

我们利用软件描绘一下这个电场的分布：

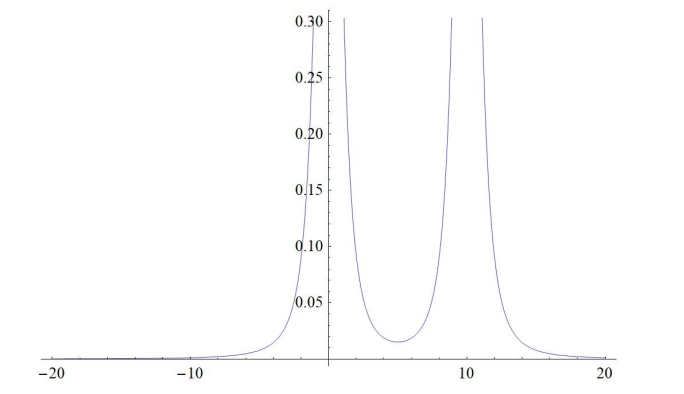


图 2.8 电场强度分布示意

该图像描绘了 $y = \frac{1}{(x^2+1)^{1.5}} + \frac{1}{((10-x)^2+1)^{1.5}}$ 的函数图像，我们可以看到当 $x=L/2$ 时有电场强度的极小值：

$$E\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \frac{R^2}{\left(\frac{1}{4}L^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

当然对于本模型应该提出相关问题与不足，我们假定了电荷在细胞膜上是均匀分布的，该均匀分布的面电荷密度不易测量，同时我们也并未考虑细胞内部的电场分布，因而计算出的电场强度并不是十分准确的，尽管目前细胞的长度可以通过精确地光学手段进行测量，但是认为细胞是长轴圆筒形也有可能过于草率。本模型代入数值之后，结合电鳗皮肤以及细胞内部脂质的绝缘性就可以看出，尽管电鳗可以放电击昏周围物体，但是对自身的损伤远没有想象中巨大。

3 动作电位在神经纤维传导速率模型

3.1 概述

之前两个模型都论述了生物细胞中都存在着生物电，其中有一种细胞——神经细胞，他的电信号传导与其他细胞大有不同，神经纤维细胞依靠着细胞膜对于钠离子和钾离子的通透性来传导兴奋，研究发现，在神经纤维的轴突上存在着周期性的包裹于轴突上面的薄——髓鞘，目前的髓鞘被认为具有两种作用：第一是防止其他神经细胞的突触传导的兴奋误碰到神经纤维，起到绝缘的作用；另一方面就是促进动作电位在神经纤维轴突上的传导，起到加快传导的作用。

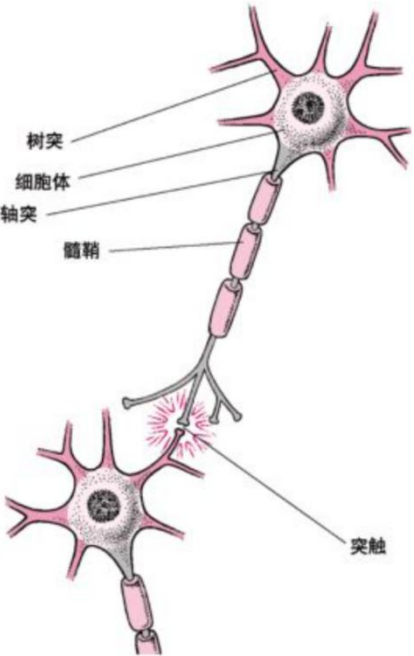


图 3.1 神经纤维示意图

本文章该部分着重讨论和研究髓鞘加快动作电位传导的模型和机制，由于本人能力有限，以学习的方式参考国内文献，并作出相应的模型分析解释。

3.2 动作电位传导速率的计算

我们称髓鞘与髓鞘之间的周期性暴露点为 Ranvier 结，由中学知识知，静息电位是细胞膜显现外正内负的电位状态，动作电位则是显现外负内正的电位状态，基于此产生了动作电位的传导。

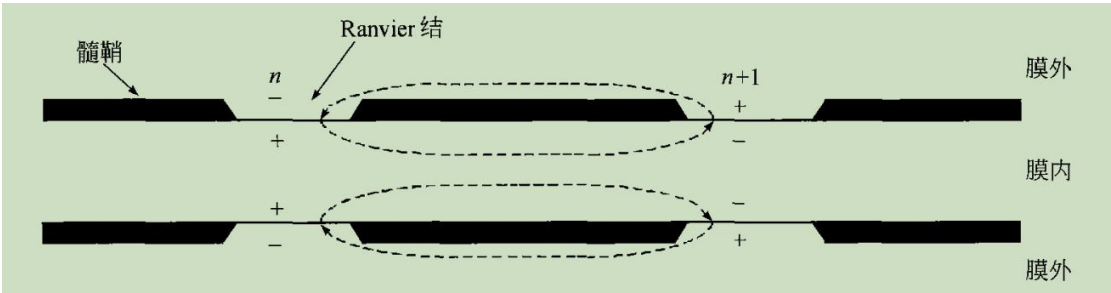


图3.2 动作电位跳跃式传导示意

如上图所示，当兴奋传导至第 n 个Ranvier结时，由于髓鞘的不绝缘性，考虑到第 $(n+1)$ 个Ranvier的静息电位，可以认为相邻两个Ranvier结产生了局部闭合回路，从而实现了兴奋的跳跃式传导。

我们参考之前学者提出的CRRSS模型，对静息的Ranvier结和兴奋的Ranvier结进行如下模拟：



图 3.3 兴奋的 Ranvier 结（左）和静息的 Ranvier 结（右）

上图中的左图的 g_{Na} 和 g_l 分别表示钠电导（即对钠离子通透性的模拟）和其它离子电导， E_{Na} 和 E_l 分别表示钠的平衡电位和使所有静息离子电流之和为 0 的电位， C_m 表示双层细胞膜的电容大小，右图 g_m 表示对所有离子通透性的描述。

考虑到电流的跳跃式传导做变量代换：

$$X = \frac{x}{L}$$

其中 L 是每两个相邻 Ranvier 结的距离，我们模拟出如下电路：

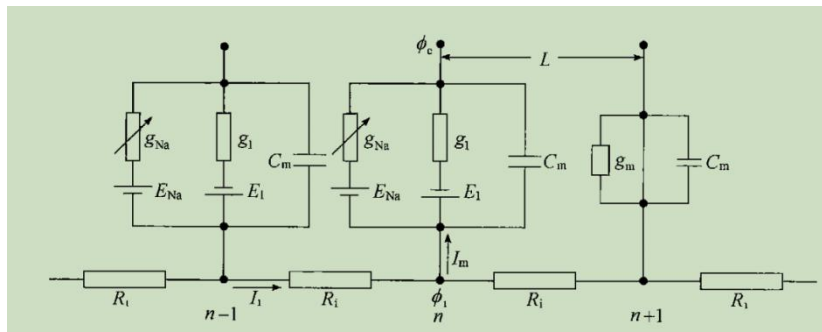


图 3.4 动作电位传导模拟电路图

该电路满足如下等式：

$$\frac{dI_i}{dx} = -I_m$$

$$\frac{d\phi_i}{dx} = -I_i R_i$$

上述两式分别表示干路电流减少量为支路电流，电压的减少量的欧姆定律表达。根据CRRSS模型的假设有如下等式：

$$C_m \frac{dV_m}{dt} + g_{Na}(V_m - E_{Na}) + g_1(V_m - E_1) = I_m$$

对上式两侧对X求二阶导数得到：

$$\frac{d^2 I_m}{dx^2} = C_m R_i \frac{dI_m}{dt} + (g_{Na} + g_1) I_m R_i \quad (*)$$

设速度 $v = \frac{dx}{dt}$ 则有：

$$X = \frac{vt}{L}$$

注意到 $\frac{dI_m}{dx} = \frac{dI_m}{dt} \frac{dt}{dx}$ 代入 (*) 有：

$$\frac{L^2 d^2 I_m}{v^2 dt^2} = C_m R_i \frac{dI_m}{dt} + (g_{Na} + g_1) I_m R_i$$

这是二阶非齐次线性方程，解之得：

$$I_m(t) = C_1 \exp \left[\frac{1}{2} \frac{(C_m R_1 v^2 + s)t}{L^2} \right] + C_2 \exp \left[\frac{1}{2} \frac{(C_m R_1 v^2 - s)t}{L^2} \right]$$

$$\text{其中 } s = \sqrt{C_m^2 R_i^2 v^4 + 4L^2 R_i v^2 g_{Na} + 4L^2 R_i v g_1}$$

我们根据具体情况分析知，动作电位的传播速度应该只是时间的函数，因而必有

$$\frac{(C_m R_1 v^2 + s)}{L^2} = K_1$$

$$\frac{(C_m R_1 v^2 - s)}{L^2} = K_2$$

经实验证明（不详细展开）拉氏结（Ranvier结）的间距L正比于神经纤维的直径D，即满足

$$L=92D$$

代入上式则有：

$$v=92D\sqrt{\frac{K_1^2}{4R_i g_{Na}+4R_i g_1+2K_1 C_m R_i}}$$

至此我们只需通过测量一组数据的神经纤维直径，动作电位传导速度，髓鞘电阻，钠电导，其他离子漏电电导，膜电容即能确定未知常数 K_1 ，此后我们就可以利用上式来计算动作电位在神经纤维上传导的速率了。

4 总结和展望

在本文中主要提出三个模型：利用电介质模型计算压电效应中骨中电场强度，利用电偶极子模型计算放电细胞中的电场强度，利用电路模型和微分方程理论求解动作电位的传导速度。上述一，三两个模型有利于我们对现代医学中骨骼治疗和神经兴奋传导机制进行了解和学习，同时第二个模型也有利于我们研究生物体内复杂的电场分布情况（即通过将生物细胞模拟为学习过的高度对称的带电模型进行电场分布求解），对于我们的学习生活都具有一定的积极意义。然而上述三个模型均具有一定的不足之处，在每一部分笔者也进行了简要的说明，但是该模型的建立满足现在学习要求，但也**欢迎老师和同学**

们进行相关的批评指正，本人乐意对本文进行进一步的修改与更正，最后也感谢孙霞老师在上课时给予我的启迪，也感谢我校往期电磁学论文选题对我的启发，最后感谢其他同学对本人部分图解的提供与帮助。

参考文献

- [1]叶邦角. 电磁学. 第2版[M]. 中国科学技术大学出版社, 2018.
- [2]深田荣一, 钱民全. 骨的压电性和压电膜对骨生长的影响[J]. 北京生物医学工程, 1983 (Z1): 80-98.
- [3]许微, 王江, 费向阳. 动作电位在有髓鞘神经纤维上传递速度的计算模型及分析[J]. 自然科学进展, 2005, 15 (005): 604-610.

(后附英文摘要)

Abstract

It has been more than 200 years since Galvani, an Italian doctor and biologist, observed and proposed the existence of electricity in organisms in 1786. However, with the vigorous development of electromagnetism, physics has provided more abundant scientific theories for medicine and Biology. Studies have shown that bioelectricity is a kind of physicochemical process, in which the organelles and cells are accompanied by potential and polarity changes in life activities. Based on the facts above, this paper makes a brief theoretical analysis of some classic bioelectrical phenomena in the biological world (especially human beings) and establishes a brief

model in the process. The focus is to discuss the piezoelectric effect of human bones, the conduction of excitations on neurons and the discharge mechanism of electric eel in some of the literature described.