数分 A3（李）第二次习题课

2021.10.10

P194: 1(2,4,6), 2(2,3,4); P208: 2, 4, 5; P213: 1(1,3,6,8); P222: 1; 补充

1 P194

1. 判断绝对收敛与条件收敛

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cos nx$：

$|\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cos nx|\le\frac{1}{2^n}$ 比较判别法绝对收敛.

(4)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\cdot\frac{n^{10}}{a^n}:(a>1)$

$|(-1)^{n(n-1)/2}\cdot\frac{n^{10}}{a^n}|=\frac{n^{10}}{a^n}\le\frac{1}{n^2}$(n 充分大) 比较判别法绝对收敛.

(6)$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$：

$\frac{1}{\ln n}$ 随 n 单调递减趋于 0 且 $\sum_{n=2}^{N}\sin\frac{n\pi}{4}$ 有界 $\Rightarrow$ 由 Dirichlet 判别法该级数收敛; $|\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}|\ge\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{\ln n}=\frac{1}{2\ln n}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2\ln n}$，其中 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2\ln n}$ 发散而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2\ln n}$ 由 Dirichlet 判别法收敛 $\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}|\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}|$ 发散 $\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$ 条件收敛.

2. 讨论绝对收敛与条件收敛

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n^p}$：

若 $p\le 0$: $(-1)^n\frac{\cos 2n}{n^p}\nrightarrow 0(n\to\infty)$ 故该级数发散;

若 $p>1$: $|(-1)^n\frac{\cos 2n}{n^p}|\le\frac{1}{n^p}$ 故比较判别法该级数绝对收敛;

若 $0<p\le 1$: $(-1)^n\frac{\cos 2n}{n^p}=\frac{\cos(2+\pi)n}{n^p}$ 故 Dirichlet 判别法该级数收敛; $|(-1)^n\frac{\cos 2n}{n^p}|\ge\frac{\cos^2 2n}{n^p}=\frac{1}{n^p}+\frac{\cos 4n}{n^p}$ 故由该级数每项取绝对值后的级数发散 $\Rightarrow$ 该级数条件收敛.

(3)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(e-(1+\frac{1}{n})^n)$：

$e-(1+\frac{1}{n})^n$ 单调递减趋于 0$\Rightarrow$ 由 Leibniz 判别法该级数收敛; L'Hospital 法则计算得 $\lim_{n\to\infty}\frac{e-(1+\frac{1}{n})^n}{\frac{1}{n}}=\frac{e}{2}\Rightarrow e-(1+\frac{1}{n})^n\sim\frac{1}{n}(n\to\infty)$ 故由该级数每项取绝对值后的级数发散 $\Rightarrow$ 该级数条件收敛.

(4)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^{1/n}-1)$：

$n^{1/n}-1$ 在 $n>3$ 时单调递减趋于 0$\Rightarrow$ 由 Leibniz 判别法该级数收敛; 而 $n>3>(1+\frac{1}{n})^n\Leftrightarrow n^{1/n}-1>\frac{1}{n}$ 故由该级数每项取绝对值后的级数发散 $\Rightarrow$ 该级数条件收敛.

2 P208

2. 证明下列等式

(1)$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n(n+1)+1}{(n-1)n+1}=\lim\limits_{N\to\infty}\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n(n+1)+1}{(n-1)n+1}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{2}{N(N+1)}\cdot\frac{N^2+N+1}{3}=\frac{2}{3}.$

(2)$\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{2}{n(n+1)})=\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{n+2}{3}=\frac{1}{3}.$

(3)$\prod_{n=0}^{\infty}(1+(\frac{1}{2})^{2^n})=\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{2^0}}\cdot\lim\limits_{N\to\infty}[1-(\frac{1}{2})^{2^0}]\prod_{n=0}^{N}[1+(\frac{1}{2})^{2^n}]=\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{2^0}}\lim\limits_{N\to\infty}[1-(\frac{1}{2})^{2^{n+1}}]=2.$

4. 判断无穷乘积敛散性

(1)$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N!}=0$ 发散至 0.

(2)$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\lim\limits_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{2(n+1)}{n+2}=2$ 收敛至 2.

(3)$\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$:该无穷乘积与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})$ 同敛散. 而 $\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n^2}(n\to\infty)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})$ 收敛 $\Rightarrow$ 原无穷乘积收敛.

5. 讨论无穷乘积敛散性

(1)$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$:

该无穷乘积与 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}})$ 同敛散. 而 $\ln(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}})=\ln(1-\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^2+1}})=\ln(1-\frac{1}{n^2+1+n\sqrt{n^2+1}})\sim\frac{1}{n^2+1+n\sqrt{n^2+1}}\sim\frac{1}{n^2}(n\to\infty)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}})$ 收敛 $\Rightarrow$ 原无穷乘积收敛.

(2)$\prod_{n=2}^{\infty}(\frac{n^2-1}{n^2+1})^p$:(p 为任意实数)

若 $p=0$: 该无穷乘积收敛至 1;

若 $p\neq 0$: 该无穷乘积与 $\sum_{n=2}^{\infty}p\ln(\frac{n^2-1}{n^2+1})$ 同敛散. 而 $p\ln(\frac{n^2-1}{n^2+1})=p\ln(1-\frac{2}{n^2+1})\sim\frac{2p}{n^2}(n\to\infty)\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}p\ln(\frac{n^2-1}{n^2+1})$ 收敛 $\Rightarrow$ 原无穷乘积收敛.

综上, 对任意实数 p 该无穷乘积总收敛.

(3)$\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$:$(x>0)$

对充分大的 $n\in\mathbf{N}^+$, $\ln(1+\frac{x}{n})<1\Rightarrow\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}-1=\sqrt[n]{\ln(1+\frac{x}{n})}-1<0\Rightarrow$ 该无穷乘积与 $\sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt[n]{\ln(1+\frac{x}{n})}-1]$ 同敛散. 而 $1-\sqrt[n]{\ln(1+\frac{x}{n})}\geq 1-\sqrt[n]{\frac{x}{n}}>1-\sqrt[n]{\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}}=\frac{1}{n+1}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}[1-\sqrt[n]{\ln(1+\frac{x}{n})}]$ 发散 $\Rightarrow$ 原无穷乘积发散.

3 P213

1. 求函数项级数的收敛点集

(1)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}(\frac{x}{3x+1})^n$:

若 $|\frac{x}{3x+1}|\geq 1\Leftrightarrow x\in[-1/2,-1/3]\cup[-1/3,-1/4]$: $\frac{n-1}{n+1}(\frac{x}{3x+1})^n\nrightarrow 0(n\to\infty)\Rightarrow$ 该级数不收敛.

若 $|\frac{x}{3x+1}|<1\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1/2)\cup(-1/4,+\infty)$: $\frac{n-1}{n+1}|\frac{x}{3x+1}|^n\sim|\frac{x}{3x+1}|^n\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}|\frac{x}{3x+1}|^n$ 收敛 $\Rightarrow$ 原级数收敛.

综上, 收敛点集 $x\in(-\infty,-1/2)\cup(-1/4,+\infty)$.

(3)$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x(x+n)}{n})^n$:

$(\frac{x(x+n)}{n})^n=x^n(1+\frac{x}{n})^n$, 其中 $(1+\frac{x}{n})^n\to e^x(n\to\infty)$ 为一有界量, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1+\frac{x}{n})^n$ 收敛 $\Leftrightarrow|x|<1$.

综上, 收敛点集 $x\in(-1,1)$.

(6)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}$: $(x>0,y>0)$

若 $0<x<1$: $\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}=\frac{x^n}{(\frac{x}{y})^n+1}<x^n\Rightarrow$ 比较判别法知该级数收敛. 对称地, 若 $0<y<1$ 该级数也收敛.

反之, 若 $x\geq 1$ 且 $y\geq 1\Rightarrow(x^n-1)(y^n-1)\geq 0\Rightarrow\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}\geq\frac{x^n+y^n-1}{x^n+y^n}=1-\frac{1}{x^n+y^n}\geq 1-\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\nrightarrow 0(n\to\infty)\Rightarrow$ 该级数不收敛.

综上, 收敛点集 $\{(x,y)|0<x<1\text{或}0<y<1\}$.

(8)$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^x$: $(x>0)$

$\sqrt[n]{n}-1=e^{\frac{\ln n}{n}}-1=\frac{\ln n}{n}+o(\frac{\ln n}{n})(n\to\infty)\Rightarrow(\sqrt[n]{n}-1)^x\sim(\frac{\ln n}{n})^x(n\to\infty)$

故若 $0<x\leq 1$: $(\frac{\ln n}{n})^x\geq\frac{\ln n}{n}\Rightarrow$ 比较判别法知该级数发散.

若 $x>1$: 取 $\alpha=\frac{x-1}{2x}>0$. 对充分大的 $n\in\mathbf{N}^+$, $(\frac{\ln n}{n})^x<(\frac{n^\alpha}{n})^x=\frac{1}{n^{(1-\alpha)x}}$, 其中 $(1-\alpha)x=\frac{x+1}{2}>1\Rightarrow$ 比较判别法知该级数收敛.

综上, 收敛点集 $x\in(1,+\infty)$.

4 P222

1. 判断函数列在指定区间上的一致收敛性

下面统一记 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$.

(1)$f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$:

(a) 若 $0<x<+\infty$:

对 $\forall x\in(0,+\infty)$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+nx}=0$. 则 $\sup_{0<x<+\infty}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{0<x<+\infty}|\frac{1}{1+nx}|=1\nrightarrow 0(n\to\infty)\Rightarrow$ 该函数列非一致收敛.

(b) 若 $0<\lambda<x<+\infty$:

对 $\forall x\in(\lambda,+\infty)$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+nx}=0$. 则 $\sup_{\lambda<x<+\infty}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{\lambda<x<+\infty}|\frac{1}{1+nx}|=\frac{1}{1+n\lambda}\to 0(n\to\infty)\Rightarrow$ 该函数列一致收敛.

(2)$f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$:

(a) 若 $0\le x\le 1-\lambda \quad (\lambda>0)$:

对 $\forall x\in[0,1-\lambda]$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\frac{0}{1+0}=0$. 则 $\sup_{0\le x\le 1-\lambda}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{0\le x\le 1-\lambda}|\frac{x^n}{1+x^n}|=\frac{(1-\lambda)^n}{1+(1-\lambda)^n}\to 0(n\to\infty)\Rightarrow$ 该函数列一致收敛.

(b) 若 $1-\lambda\le x\le 1+\lambda$:

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\begin{cases}0, & 1-\lambda\le x<1\\ 1/2, & x=1\\ 1, & 1<x\le 1+\lambda\end{cases}$. 则 $|f_n(x)-f(x)|=\begin{cases}\frac{x^n}{1+x^n}, & 1-\lambda\le x<1\\ 0, & x=1\\ \frac{1}{1+x^n}, & 1<x\le 1+\lambda\end{cases}\Rightarrow$ $\sup_{1-\lambda\le x\le 1+\lambda}|f_n(x)-f(x)|=1/2\nrightarrow 0(n\to\infty)\Rightarrow$ 该函数列不一致收敛.

(c) 若 $1+\lambda\le x<+\infty$:

对 $\forall x\in[1+\lambda,+\infty)$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=1$. 则 $\sup_{1+\lambda\le x<+\infty}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{1+\lambda\le x<+\infty}|\frac{1}{1+x^n}|=\frac{1}{1+(1+\lambda)^n}\to 0(n\to\infty)\Rightarrow$ 该函数列一致收敛.

(3)$f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$:

(a) 若 $-l<x<l \quad (l>0)$:

$\forall x\in(-l,l)$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-(x-n)^2}=0$. 则 $\sup_{-l<x<l}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{-l<x<l}e^{-(x-n)^2}=e^{-(l-n)^2}\to 0(n\to\infty)\Rightarrow$ 该函数列一致收敛.

(b) 若 $-\infty<x<+\infty$:

$\forall x$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-(x-n)^2}=0$. 则 $|f_n(n)-f(n)|=|e^{-0}-0|=1\nrightarrow 0(n\to\infty)\Rightarrow$ 该函数列不一致收敛.

5 补充

1. 设集合 $\Omega=\{x\in\mathbf{R}|\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n!\pi x)$收敛$\}$. 求证: $\mathbf{Q}\subseteq\Omega$ 且 $\Omega\cap(\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q})\neq\emptyset$.

简证: $\forall x=\frac{p}{q}(p,q\in\mathbf{Z},q\neq 0)\in\mathbf{Q}$: 当 $n>q$ 时 $n!x\in\mathbf{Z}\Rightarrow\sin(n!\pi x)=0$.

取 $x=e\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$, 则 $\sin(n!\pi e)=\sin(n!\pi[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+O(\frac{1}{(n+2)!})])=\sin(n\pi+\pi+\frac{\pi}{n+1}+O(\frac{1}{(n+1)(n+2)}))=(-1)^{n+1}\sin(\frac{\pi}{n+1}+O(\frac{1}{(n+1)(n+2)}))\Rightarrow$ 由 Leibniz 判别法级数收敛 $\Rightarrow e\in\Omega$.

2. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少趋于 0, 且存在 $M>0, s.t.\forall n\in\mathbf{N}^+$, $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_n)\le M$. 求证 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

简证: 设 $b_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_n)=a_1+...+a_n-na_n\in[0,M]$. 则 $\forall p\ge 2, b_{n+p}-b_n=na_n+a_{n+1}+...+a_{n+p-1}-(n+p-1)a_{n+p}\ge na_n-na_{n+p}\Rightarrow a_n\le\frac{b_{n+p}-b_n}{n}+a_{n+p}\le\frac{M-b_n}{n}+a_{n+p}$.

令两端 $p\to\infty$: $a_n\le\frac{M-b_n}{n}\Rightarrow na_n+b_n=a_1+...+a_n\le M,\forall n\in\mathbf{N}^+$.

3. 设函数列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 在区间 I 上一致收敛. 如果对每个 $n=1,2,...,f_n$ 和 g_n 都是 I 上的有界函数 (不要求一致有界), 证明: $\{f_n g_n\}$ 在 I 上必一致收敛.

简证: 设 f_n 与 g_n 一致收敛于 f, g.

取 $\epsilon_0=1$, $\exists N_1 \in \mathbf{N}^+ s.t. |f(x)-f_{N_1}(x)|<\epsilon_0=1, \forall x\in I$.

因为 $f_{N_1}(x)$ 有界, 故 $\exists M_1>0, s.t. |f_{N_1}(x)|\le M_1, \forall x\in I$. $\Rightarrow |f(x)|\le 1+M_1, \forall x\in I$. 同理 $\exists M_2 > 0, s.t. |g(x)|\le 1+M_2$.

$\exists N_2\in\mathbf{N}^+$, 当 $n>N_2: |g(x)-g_n(x)|<\epsilon_0=1, \forall x\in I \Rightarrow |g_n(x)|\le 2+M_2, \forall x\in I$.

因此当 $n>N_2$: $|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)|\le |f(x)||g_n(x)-g(x)|+|g_n(x)||f_n(x)-f(x)|\le (1+M_1)|g_n(x)-g(x)|+(2+M_2)|f_n(x)-f(x)|\to 0(n\to\infty), \forall x\in I$.