1

P222. 2. 研究一致收敛性.

(2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$ 由均值不等式 $\frac{nx}{1+n^5x^2}\le\frac{nx}{2\sqrt{n^5}x}=\frac{1}{2}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}<+\infty$ 由 Weierstrass 判别.

(4). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ 不用Dirichlet.

$\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\le\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 由 Weierstrass

(6). $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$ $\left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\right|$ 一致有界.

$f_n(x)=\frac{1}{n+\sin x}$ $|f_n(x)|\le\frac{1}{n-1}\longrightarrow 0$ 知 $f_n(x)\rightrightarrows 0$

由 Dirichlet....

(7). $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^nx}$ 显然由 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{1}{3^nx}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^nx}=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

但 $\beta_n=\sup\limits_{x}\left|2^n\sin\frac{1}{3^nx}-0\right|\ge\left|2^n\sin\frac{1}{3^n\cdot3^{-n}}\right|=2^n\sin1\to+\infty\ (n\to\infty)$

不一致收敛.

3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}$ 在$[0,+\infty)$一致收敛.

Pf: $|e^{-nx}|\le1$ 一致有界 且 x固定 $e^{-nx}\downarrow 0$

由Abel判别.

5. 说明 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛，一致收敛

但 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$ 不一致收敛.

Pf: $\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$ 收敛是显然的.

同时 $(-1)^n$ 的部分和一致有界

考虑 $f_n(x)=x^n(1-x)\longrightarrow 0$ (n 充分大, $\forall x\in\mathbb{R}$)

$\beta_n=\sup\limits_{x\in[0,1]}x^n(1-x)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$

即 $f_n(x)\rightrightarrows 0$ 由 Dirichlet 判别知一致收敛.

但 $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k(1-x)=1-x^n$ 而 x^n 在 $[0,1]$ 并不一致收敛

这可从和函数不连续看出.

6. $u_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & x=\frac{1}{n}\\ 0 & x\neq\frac{1}{n}\end{cases}$ $x\in[0,1]$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛

但无法用 Weierstrass 判别.

Pf: 若 $\forall x$ 有 $|u_n(x)|\leq a_n$ 则 $a_n\geq\frac{1}{n}$ 但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$

另一方面 考虑 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|=\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\leq P\cdot\frac{1}{n+1}\longrightarrow 0\ (\forall P,\ n\to\infty)$ $\forall x$

故一致收敛 #

3. $a_n\geq 0$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛 $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$.

$\Longrightarrow$ 一致收敛蕴含收敛, 令 $x=0$

$\Longleftarrow$ 用 $|a_n\cos nx|\leq a_n$ 由 Weierstrass 判别.

10. $\forall\ x\in[a,b]$，存在包含x的开区间I_x使$\{f_n\}$在I_x上一致收敛于f
则$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于f.

Pf: 设$[a,b]$有有限子覆盖$\{x_1,\cdots,x_N\}$使$\bigcup_{i=1}^{N}B(x_i,\varepsilon)\supseteq[a,b]$.
于是当ε足够小时 $\forall\ x\in[a,b]\ \exists\ x_i$ s.t. $|x-x_i|<\varepsilon$.
$|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$ 这是因为我们选取的有限子覆盖可以使
$\forall i$ f_n在$B(x_i,\varepsilon)$中$\rightrightarrows f$. #

11. $f_n(x)=xn^{-x}(\ln n)^\alpha$在$[0,+\infty)$一致收敛$\Leftrightarrow\alpha<1$

Pf: $f_n(x)=\dfrac{x(\ln n)^\alpha}{n^x}\longrightarrow0\ (n\to\infty)$.

考虑 $\beta_n=\sup\limits_{x}\dfrac{x(\ln n)^\alpha}{n^x}$ $\quad f_n'(x)=(\ln n)^\alpha\dfrac{1-x\ln n}{n^x}$

则取$x=\dfrac{1}{\ln n}$. $\quad\dfrac{(\ln n)^{\alpha-1}}{n^{\frac{1}{\ln n}}}=\dfrac{(\ln n)^{\alpha-1}}{e}\longrightarrow0$

$\Updownarrow$

$\alpha<1$ #

P231: 1. 确定存在域及连续性

(1). $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$.

注意 $(x+\frac{1}{n})^n=x^n\left((1+\frac{1}{nx})^{nx}\right)^{\frac{1}{x}}$ 当 $x=0$ 时 由Cauchy根式判别…，知收敛

$x\neq0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{nx})^{nx}=e$.

于是若收敛必有 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$ 则定有 $x\in(-1,1)$.

当 $x\in(0,1)$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\left((x+\frac{1}{n})^n\right)^{\frac{1}{n}}=x<1$ 知收敛.

$x\in(-1,0)$ 可利用 $|(x+\frac{1}{n})^n|\underset{\cdots}{=}(|x|-\frac{1}{n})^n\ (n>>1)$ 知绝对收敛.

于是 $x\in(-1,1)$ 为定义域 且 $\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|<\delta^n\ (n>>1)\ (\delta<1)$ (考虑内闭). ④

由 Weierstrass 判别知一致收敛 $\Rightarrow$ 连续.

(2). $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{x^2+n^2}$.

第一项绝对收敛 $\forall x$ 固定，而 $\frac{n}{x^2+n^2}=\frac{1}{\frac{x^2}{n}+n}$

当 $n>>1$ 时 $\frac{1}{\frac{x^2}{n}+n}\downarrow 0$ 由 Leibniz 判别知收敛.

即存在域为 $\mathbb{R}$. 取 $[-N,N]$

$\left|\frac{x}{x^2+n^2}\right|\leq\frac{N}{n^2}$, $\quad\sup\frac{n}{x^2+n^2}=\frac{n}{n^2}\to 0\ (n\to\infty)$.

$\Downarrow$ Weierstrass $\qquad\qquad \Downarrow$ Dirichlet

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{x^2+n^2}$ 均一致收敛 on $[-N,N]$

$\Downarrow$

连续 #

remark: $f_n(x)$, $g_n(x)$ 均一致收敛 $\Rightarrow f_n(x)+g_n(x)$ 一致收敛.

3. $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 连续，且有各阶连续导数.

Pf: $[\delta,+\infty)$ 上 $\delta>1$ $\frac{1}{n^x}\leq\frac{1}{n^\delta}$ 由 Weierstrass 判别知内闭一致收敛

$\Rightarrow (1,+\infty)$ 连续.

考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$. $n>>1$ 时 $\ln n\leq n^\varepsilon$ 则 $\frac{1}{n^{x-\varepsilon}}$ 当 $x-\varepsilon>1$ 时

有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 一致收敛，以后各阶导数类似，且连续.

4. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}\ (x>0)$ 求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)dx$

解：先算再解释 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\ln 2}^{\ln 3}ne^{-nx}dx=\sum_{n=1}^{\infty}-e^{-nx}\Big|_{\ln 2}^{\ln 3}=\frac{1}{2}$

注意 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{nx}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛

remark: 在 $\int_0^t f(x)dx$ 也可交换 $t>0$，因为 $[0,\delta]$ 中可使积分值很小

6. $E\subseteq\mathbb{R}$，$x_0\in E'$（x_0可为$\pm\infty$），若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在E上一致收敛，且 $\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)=a_n$ $(x\in E,\ n=1,2,\cdots)$ 则

(1). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2). $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $(x\in E)$

5

Pf: (1). 由 Cauchy 收敛准则 $\forall p$, $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon$ $\forall x\in E$ 令 $x\to x_0$ 由 $\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)=a_n$.

回忆课上一个判断不一致收敛的条件

知 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|\le\varepsilon$ 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2).（仿照书上对连续性的证明）

$\forall\varepsilon>0$ 当 $|x-x_0|<\delta$ 时.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|\le\sum_{n=1}^{N}|u_n(x)-a_n|+\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}u_n(x)\right|+\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\right|$$

有限项 $<\frac{\varepsilon}{3}$

一致收敛 $<\frac{\varepsilon}{3}$

Cauchy 收敛 $<\frac{\varepsilon}{3}$. #

7. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n\cos\frac{n\pi}{x}$ 求 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

由 $\left|\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n\cos\frac{n\pi}{x}\right|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\forall x>0$，由 Weierstrass 判别知.

一致收敛 on $(0,+\infty)$ 且由6知 ∞ 的极限可取.

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cos n\pi=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n=-\frac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$

8. 证明：$\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 6

Pf：首先 $\lim_{x\to1}\frac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}}=\frac{1}{2}\frac{1}{n}$.

我们由6题可观注 $\hat{B}(1,\varepsilon)$ 的去心邻域的一致收敛.

事实上 $[\frac{1}{2},2]\setminus\{1\}$ 上 $\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\frac{x^n}{n(1+x+\cdots+x^{2n-1})}$

记 $f_n(x)=\frac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}}$ 若 $x\in(\frac{1}{2},\delta)$ $\delta<1$

则 $|f_n(x)|\leq\frac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}}\leq\frac{\delta^n\frac{1}{2}}{1-\delta^{2n}}$ 而 $\delta<1$ 当 $n>>1$ 时.

$\delta^{2n}\leq\frac{1}{2}$ $1-\delta^{2n}\geq\frac{1}{2}$ 则 $\frac{\delta^n\frac{1}{2}}{1-\delta^{2n}}\leq\delta^n$.

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\delta^n<+\infty$ $\delta<1$ 于是再由 1 是 $(\frac{1}{2},\delta)$ 极限点

及题6得证 #

P243. 习题15.4.

1. 收敛半径及端点性质:

(1). $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$. $R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}$.

$x=\frac{1}{e}$ $(1+\frac{1}{n})^{n^2}(\frac{1}{e})^n=e^{n^2\log(1+\frac{1}{n})-n}$

$=e^{n^2(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))-n}=\exp(-\frac{1}{2}+o(1))\not\to 0$.

同理于 $x=-\frac{1}{e}$. 两端均发散.

(2). $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$.

$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1)$.

则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n+\gamma}=1$ 则 $(-1,1)$

$x=1$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n+\gamma$ 发散. 同理在 -1

(3). $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2})x^n$.

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n$ $R_1=\frac{1}{a}$ $R_2=\frac{1}{b}$.

则为 $(-\frac{1}{\max(a,b)},\frac{1}{\max(a,b)})$

不妨设 $a<b$ 则收敛半径 $R=\frac{1}{b}$.

若 $x=\frac{1}{b}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2})\frac{1}{b^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a}{b})^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

(4). $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{e})^n x^n$ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e}=\infty$ 则收敛点集 $\{0\}$

2. 求幂级数收敛点集.

(1). $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

8

$R=1/\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}=1$ 则 $\frac{1-x}{1+x}\in(-1,1)$

$\Rightarrow x\in(0,+\infty)$

(2). $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}(e^{-x})^n$.

$R=1/\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$. 则 $e^{-x}\in(-e,e)$

$\therefore x\in(-1,+\infty)$ 而 $x=-1$ 时

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n=\exp\left(n-n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

$=\exp\left(n-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\not\to 0$ 故发散.

(3). $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n\sin\frac{\lambda}{2^n}$ $R=1/\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\lambda}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}}=1/\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}}=2$

则 $\frac{1}{x}\in(-2,2)\Rightarrow x\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$

而 $\frac{1}{x}=\pm 2$ 时. $\lim_{n\to\infty}(\pm 2)^n\sin\frac{\lambda}{2^n}=\pm\lambda\neq 0$.

补充题：

1. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 内收敛，令

$E=\{x\in(-R,R) \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\}$

则：若 E 有一个聚点 $\in(-R,R)$ 则 $a_n=b_n$，$\forall n$.

Pf：令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)x^n$ $\quad a_n-b_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

则 E 是其 $f(x)$ 的零点集，利用 Rolle 定理可进行如下构造.

zero-point: $x_1^1 \quad x_2^1 \quad x_3^1 \quad x_4^1 \quad x_5^1 \cdots \longrightarrow x_0$

$\downarrow$

一阶导 zero $\quad x_1^2 \quad x_2^2 \quad x_3^2 \quad x_4^2 \cdots \longrightarrow x_0$

$\downarrow$

二阶: $\quad x_1^3 \quad x_2^3 \quad x_3^3 \cdots \longrightarrow x_0.$

$\downarrow$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

是 $\lim_{n\to\infty} f^{(k)}(x_i^k)=\lim_{n\to\infty} 0=0=f^{(k)}(x_0)$ (连续性).

是 $\exists x_0\in(-R,R)$ s.t. $\forall n$ $f^{(n)}(x_0)=0$

用 f 在 x_0 处展开 知 $f\equiv 0$ 则 $a_n-b_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=0$

#

2. 设 ...

= 好...

易知：

②

③.

Pf

由

则

3. (...

Pf

2. 设 $H^2(D)$ 表示 $D=B(0,1)$ 内满足 $\iint |u(z)|^2 dxdy<\infty$ 的"好函数"全体 $(z=x+yi)$ 定义内积 $\langle u,v\rangle=\iint_D u(z)\overline{v(z)}dxdy$.

易知：① 若 $u(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ 则 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|b_k|^2}{1+k}<+\infty$，$u(z)\in H^2(D)$.

② 若 $u(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$，$v(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$

则 $\langle u,v\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi a_k \overline{b_k}}{k+1}$.

③. 设 $u(z)\in H^2(D)$ 求证：$|u(z)|\leq\frac{\|u\|}{\sqrt{\pi}(1-|z|)}$.

Pf 对 ③ 注意 $\sum_{n=0}^{\infty}|z|=\frac{1}{1-|z|}$

由级数乘法 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|z|^n=\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n=\left(\frac{1}{1-|z|}\right)^2$

则 $|u(z)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\right|\leq\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z|^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n||z|^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n+1}}\sqrt{n+1}\,|z|^{\frac{n}{2}}$

$\overset{C-S}{\leq}\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2|z|^n}{n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|z|^n\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ $\quad |z|\leq 1$

$=\sqrt{\left(\frac{1}{1-|z|}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}}$ 而 $\|u\|=\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi|a_n|^2}{n+1}}$ 即证.

3. (Bendixon) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 为 $[a,b]$ 可微函数项级数，且 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 的部分和一致有界，若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛，则一定一致.

Pf: 设 $\exists C>0$，$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k'(x)\right|<C \quad \forall n$.

给出 $[a,b]$ 的等距分划 $\{x_0,x_1,\cdots,x_m\}$ 使 $m\gg1$ s.t. $\Delta x_i=\frac{b-a}{m}<\frac{\varepsilon}{4C}$

由 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_i)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ 则 $\forall x\in[a,b]$ 不妨设 $x\in[x_{i-1},x_i]$

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|\leq\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_i)\right|+\underbrace{\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(u_k(x)-u_k(x_i))\right|}_{=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\max_i u_k'(\xi_i)\right||x-x_i|}<\varepsilon$

4. 设 $\forall n$ 固定时 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 单调. 设 $f_n(x) \to f(x)$ on $[a,b]$.
$\in C[a,b]$.

则 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ on $[a,b]$.

Pf: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 一致连续 则可分割 $[a,b]$ 使 $f(x)$ 在子区间振幅 $<\frac{\varepsilon}{2}$.

设分点为 $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ 记 $|f_n(x_j)-f(x_j)|<\frac{\varepsilon}{2}$ when $n>N_j$.

则取 $N=\max\limits_i N_i$ 此时分点一致收敛.

而 $\forall x$ 有 $|f_n(x)-f(x)| \overset{\text{单调性}}{\leq} \max\{|f_n(x_i)-f(x)|, |f_n(x_{i+1})-f(x)|\}$

$x\in[x_i, x_{i+1}]$ 而 $|f(x)-f_n(x_i)| \leq \underbrace{|f(x)-f(x_i)|}_{\text{一致连续}} + \underbrace{|f(x_i)-f_n(x_i)|}_{\text{一致收敛}(n>N)}$.

5. 设 $\{f_n(x)\}$ 与 $\{g_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛, 则 $f_n(x)$ 与 $g_n(x)$ 有界 (不要求一致). 则 $\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛.

Pf: 不妨设 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$、$g_n(x) \rightrightarrows g(x)$

Aim: $f_n(x)g_n(x) \rightrightarrows f(x)g(x)$

而 $|f(x)g(x)-f_n(x)g_n(x)| \leq |f(x)||g(x)-g_n(x)|+|g_n(x)||f(x)-f_n(x)|$

希望 $f(x)$ 与 $g_n(x)$ 有界

事实上 $|f(x)| \leq |f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)| \leq 1+M_1$ 取 $\varepsilon=1$ $n_0>N_1$

于是 $g(x)$ 亦有界 M_2

则 $|g_n(x)| \leq |g_n(x)-g(x)|+|g(x)| \leq 1+M_2$ $\varepsilon=1$, $n>N_2$.

#.