期中复习课 2021.11.4

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

[P224 问题15.2.7] 设$\{a_n\}$是递减的正数列，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛的充分必要条件是$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

证：①必要性：由Cauchy收敛定理 对$\forall \varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^+$，当$n>N(\varepsilon)$：$|a_{n+1}\sin(n+1)x+\cdots+a_{n+p}\sin(n+p)x|<\frac{\sqrt{2}}{4}\varepsilon$

对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$p\in\mathbb{N}^+$成立.

令$x=\frac{\pi}{4n}$，$p=n$. 则 $\frac{\sqrt{2}}{4}\varepsilon > a_{n+1}\sin\frac{n+1}{4n}\pi + a_{n+2}\sin\frac{n+2}{4n}\pi+\cdots+a_{2n}\sin\frac{2n}{4n}\pi > \frac{\sqrt{2}}{2}(a_{n+1}+\cdots+a_{2n}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}na_{2n}$

$\Rightarrow 2na_{2n}<\varepsilon \Rightarrow 2na_{2n}\to 0,\ n\to\infty$.

而 $(2n+1)a_{2n+1} \leq \underset{\substack{\downarrow\\0}}{2na_{2n}} + \underset{\substack{\downarrow\,(a_n\sin nx\rightrightarrows 0)\\0}}{a_{2n+1}} \to 0,\ n\to\infty$. 故综上 $na_n\to 0,\ n\to\infty$. □

②充分性：对$\forall n\leq m$，设$S_{n,m}(x)=\sum_{k=n}^{m} a_k\sin kx$. $(0\leq x\leq\pi)$

$\because \left|\sum_{k=n}^{m}\sin kx\right| = \left|\frac{\cos(n-\frac{1}{2})x-\cos(m+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$，由Abel引理 $|S_{n,m}(x)| = \left|\sum_{k=n}^{m}a_k\sin kx\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}(|a_n-a_m|+|a_m|) = \frac{a_n}{\sin\frac{x}{2}}$.

设$\mu_n=\sup\limits_{m\geq n}\{ma_m\}$，$n\in\mathbb{N}^+$. 则由$na_n\xrightarrow{n\to\infty}0$ 知$\{\mu_n\}$递减趋于0.

i) 当$\frac{\pi}{n}\leq x\leq\pi$：由不等式"$\sin\theta\geq\frac{2}{\pi}\theta$，$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$"和 $|S_{n,m}(x)| \leq \frac{a_n}{\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{a_n}{\cancel{\sin}\, x/\pi} \leq na_n \leq \mu_n$.

ii) 当$0\leq x\leq\frac{\pi}{m}$：由不等式"$\sin\theta\leq\theta$，$\theta\in[0,\pi]$"和 $|S_{n,m}(x)| = \left|\sum_{k=n}^{m}a_k\sin kx\right| \leq x\sum_{k=n}^{m}ka_k \leq \frac{\pi}{m}\sum_{k=n}^{m}\mu_n \leq \frac{\pi}{m}\cdot m\mu_n = \pi\mu_n$.

iii) 当$\frac{\pi}{m}\leq x\leq\frac{\pi}{n}$：$n\leq\frac{\pi}{x}\leq m$. 记$l=[\frac{\pi}{x}]$. 则 $l\leq\frac{\pi}{x}<l+1 \Rightarrow x\leq\frac{\pi}{l}$.

由 i) 知 $|S_{l+1,m}(x)| \leq \frac{a_{l+1}}{\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{a_{l+1}}{x/\pi} \leq (l+1)a_{l+1} \leq \mu_n$.

由 ii) 知 $|S_{n,l}(x)|\leq\pi\mu_n$.

故 $|S_{n,m}(x)| \leq |S_{n,l}(x)| + |S_{l+1,m}(x)| \leq (\pi+1)\mu_n$.

综上当$x\in[0,\pi]$时总有 $|S_{n,m}(x)| \leq (\pi+1)\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. 由Cauchy收敛定理 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$在~~$[0,\pi]$上~~ $(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

$(-\infty,+\infty)$上由三角函数对称性、周期性不等式也成立 □

[P224 练习题15.2.13] 证明：当$\alpha>2$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha}e^{-nx^2}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

法1：Weierstrass判别法，对$x\geq 0$，$e^{2nx^2/\alpha}\geq e\cdot\frac{2nx^2}{\alpha} \Rightarrow e^{-nx^2}\leq\left(\frac{\alpha}{2enx^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow x^{\alpha}e^{-nx^2}\leq\left(\frac{\alpha}{2e}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{n^{\alpha/2}}$，$\frac{\alpha}{2}>1$. □

法2：Cauchy收敛定理. $x^{\alpha}[e^{-(n+1)x^2}+\cdots+e^{-(n+p)x^2}] = x^{\alpha}e^{-(n+1)x^2}\cdot\frac{1-e^{-px^2}}{1-e^{-x^2}} \leq \frac{x^{\alpha}e^{-(n+1)x^2}}{1-e^{-x^2}} = \frac{x^{\alpha}e^{-nx^2}}{e^{x^2}-1} \leq x^{\alpha-2}e^{-nx^2}$，$\forall x\geq 0$，$p\in\mathbb{N}^+$

而 $\sup\limits_{x\geq 0}\{x^{\alpha-2}e^{-nx^2}\} = \left(\frac{\alpha-2}{2n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}e^{-\frac{\alpha-2}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

[P233 问题15.3.3] 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$满足下列条件：(a) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上收敛于$f(x)$；

(b) 级数的每一项$u_n(x)$在$x=x_0$处可微；

(c) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}$在$0<|x-x_0|<\delta$上一致收敛.

证明：f在x_0处可微，而且$f'(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x_0)$.

证：设$E=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$. x_0为E的极限点. 设$g_n(x)=\frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}$，则$\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$在$E$上一致收敛. (c)

且 $\lim\limits_{x\to x_0}g_n(x)\xlongequal{(b)}u_n'(x_0)$. 故由练习题15.3.6 $\lim\limits_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x_0)$收敛.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}(u_n(x)-u_n(x_0))}{x-x_0} \overset{(a)}{=\!=} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0)$，即f在$x_0$处可导且 $f'(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0)$. □

（引理·练习题15.3.6：设E是$(-\infty,+\infty)$中的一个点集，x_0是E的一个极限点.（x_0可以是$\pm\infty$），如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在E上一致收敛，而且 $\lim_{x\to x_0} u_n(x)=a_n$ $(x\in E, n=1,2,\dots)$，证明：(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；(2) $\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(x\in E)$.）

[P252 习题15.5.2] 设f及其所有导数在区间$[0,r]$上都是非负的. 证明：f能在$[0,r)$上展开为Taylor级数.

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. $(0\le x<r)$.

证：由Taylor公式 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)$, $x\in[0,r]$.

余项$R_n(x)$的三种表示：

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $\xi\in(0,x)$ Lagrange余项
$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n x$, $\eta\in(0,x)$ Cauchy余项 } 不精确

$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$. 积分余项

$\overset{t=x(1-u)}{=\!=} \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u))du \Rightarrow \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}=\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u))du$ 随x递增.

∴对$\forall\, 0\le x<r$, $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}\le\frac{R_n(r)}{r^{n+1}}\le\frac{f(r)}{r^{n+1}} \Rightarrow R_n(x)\le\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}f(r)\xrightarrow{n\to\infty}0$. 故f能在$[0,r)$上展开为Taylor级数. □

- 设f在$x=0$邻近可展为 $1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，求证其倒数$\frac{1}{f}$也可在$x=0$邻近展为幂级数.

证：由 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$，R为收敛半径可取 $r=\frac{1}{R}+\delta$ $(\delta>0)$. 则当n充分大时 $|a_n|<r^n$. 不妨令$n\in N^+$时均满足.

考虑 $(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)=1$. 由 $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=0$ $(a_0=b_0=1, \forall n\in N^+)$ 得需构造的$\{b_n\}$满足：

$b_1=-a_1$, $b_2=-a_1b_1-a_2$, ……, $b_n=-a_1b_{n-1}-a_2b_{n-2}-\cdots-a_n$.

用归纳法证明 $|b_n|<2^{n-1}r^n$：假设$n=k-1$时成立，则当$n=k$时有 $|b_k|\le|a_1b_{k-1}|+|a_2b_{k-2}|+\cdots+|a_{k-1}b_1|+|a_k|\le r\cdot 2^{k-2}r^{k-1}+r^2 2^{k-3}r^{k-2}+\cdots+r^k=2^{k-1}r^k$. ✓

∴当$|x|<\frac{1}{2r}$时，$|b_nx^n|\le\frac{1}{2}|2rx|^n\xrightarrow{n\to\infty}0$. 从而 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 在$|x|<\frac{1}{2r}$时收敛.

则当$|x|<\min\{r,\frac{1}{r}\}$时 $\frac{1}{f}$有展开式 $\frac{1}{f}=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$. □

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

- 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$，定义 $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})$，证明：$\{f_n(x)\}$在$\mathbb{R}$上内闭一致收敛.

证：注意到 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})=\int_0^1 f(x+t)dt$，即 $f_n(x)\longrightarrow\int_0^1 f(x+t)dt$，$n\to\infty$.

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x+\frac{k}{n})dt\longrightarrow\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x+t)dt$，$n\to\infty$. 考虑 $\frac{k-1}{n}\le t<\frac{k}{n}$ 情景.

∵ f在闭区间$[a,b]$上一致连续，故对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当取 $N=[\frac{1}{\delta}]+1$ 且 $n>N$ 时：$|(x+t)-(x+\frac{k}{n})|=|t-\frac{k}{n}|<\frac{1}{n}<\delta$：

有 $|f(x+\frac{k}{n})-f(x+t)|<\varepsilon$. $\forall x\in[a,b]$.

此时 $|f_n(x)-\int_0^1 f(x+t)dt|\le\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|f(x+\frac{k}{n})-f(x+t)|dt<\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\varepsilon dt=\varepsilon$. 即 $f_n(x)\rightrightarrows\int_0^1 f(x+t)dt$ on $x\in[a,b]$. □

- $f_n(x)$连续，且$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，$x\in[a,b]$、$g(x)$在$\mathbb{R}$上连续、证明：$\{g(f_n(x))\}$在$[a,b]$上一致收敛于$g(f(x))$.

证：取$\varepsilon_0=1$，$\exists N_1\in\mathbb{N}^+$，当$n>N_1$时：$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon_0=1$. 则 $|f_n(x)|\le|f_n(x)-f(x)|+|f(x)|\le 1+|f(x)|$，$\forall x\in[a,b]$.

注意$f(x)$与$f_n(x)$均连续，且目前已找到$f_n(x)$ $(n>N_1)$之界.

记 $M=\max\{\max_{a\le x\le b}(1+|f(x)|),\max_{a\le x\le b}|f_1(x)|,\dots,\max_{a\le x\le b}|f_{N_1}(x)|\}$，从而$|f_n(x)|\le M$一致有界.（一致收敛且分别有界之过渡到一致有界）

而$g(x)$在$\mathbb{R}$上连续 $\Rightarrow$ $[-M,M]$上一致连续.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 有 $|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon$.（$x_1,x_2\in[-M,M]$）

当n充分大（$\exists N_2\in\mathbb{N}^+$ 当 $n>N_2$ 时）$|f_n(x)-f(x)|<\delta$，$\forall x\in[a,b]$. ∴ $|g(f_n(x))-g(f(x))|<\varepsilon$. 即 $g(f_n(x))\rightrightarrows g(f(x))$. □

- 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})^2$ 均收敛，设 $a_n(a_n+b_n)\ne0$，$\forall n\in\mathbb{N}^+$. 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+b_n}$收敛.

证：记 $x_n=\frac{a_n}{b_n}$，则 $\sum x_n$收敛，$\sum x_n^2$收敛，有 $x_n\longrightarrow0$，$n\to\infty$. $x_n(x_n+1)\ne0$.

则要证 $\sum\frac{x_n}{1+x_n}$收敛.

$\frac{x_n}{1+x_n}=\frac{x_n(1-x_n)}{1-x_n^2}=\frac{x_n-x_n^2}{1-x_n^2}=(x_n-x_n^2)(1+\frac{x_n^2}{1-x_n^2})=x_n-x_n^2+\frac{x_n^2(x_n-x_n^2)}{1-x_n^2}$. 只需证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^2(x_n-x_n^2)}{1-x_n^2}$收敛.

我们证其绝对收敛. 当n充分大时，$|x_n|\le\frac{1}{2}$. ∴ $\left|\frac{x_n^2(x_n-x_n^2)}{1-x_n^2}\right|\le\frac{4}{3}(|x_n|^3+|x_n|^4)\le\frac{4}{3}(|x_n|^2+|x_n|^2)=\frac{8}{3}x_n^2$. □

- 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2})$ $(a>0,b>0,c>0)$的绝对与条件收敛性.

由 $a^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln a}=1+\frac{\ln a}{n}+\frac{(\ln a)^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$ 代入得 $a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}=\frac{\ln\frac{a^2}{bc}}{2n}+\frac{2(\ln a)^2-(\ln b)^2-(\ln c)^2}{4n^2}+o(\frac{1}{n^2})$

∴ 当 $a^2=bc\Leftrightarrow a=\sqrt{bc}$ 时绝对收敛；当 $a\ne\sqrt{bc}$ 时 ~~级数~~ 恒为正/负项级数，从而发散.