定义（度量空间）：设 X 是一个非空集合，若二元函数 $d: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$

满足：

① 正定性：$d(x,y)\geq 0$，$\forall x,y\in X$ 且 $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$.

② 对称性：$d(x,y)=d(y,x)$

③ 三角不等式：$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ $\forall x,y,z\in X$

则称 d 为 X 上的度量，(X,d) 称为度量空间.

如：$C[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上连续函数全体，$d(f,g)=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$

为度量，显然 $d(f_n,f)\longrightarrow 0$

$\Longleftrightarrow f_n \rightrightarrows f$

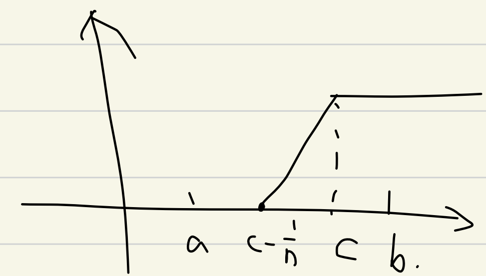
有了度量则可定义抽象空间上连续的概念.

定义(完备)：(X,d) 上称 X 中序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个 Cauchy 列是指 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}_+$，使 $d(x_n,x_m)<\varepsilon$，$\forall n,m>>1$，若 X 中任一 Cauchy 列均收敛，则称 (X,d) 完备.

例：① $(\mathbb{R},d)$ 完备，$(\mathbb{Q},d)$ 不完备：$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

② 在 $(C[a,b],\rho_1)$，$\rho_1(f,g)=\int_a^b|f(t)-g(t)|dt$ 不完备.

对 $f_n(t)=\begin{cases}0 & t\in[a,c-\frac{1}{n}]\\ n(t-c+\frac{1}{n}) & t\in[c-\frac{1}{n},c]\\ 1 & t\in[c,b]\end{cases}$.



$$\rho_1(f_n,f_m)=\int_{c-\frac{1}{m}}^{c}|f_n(t)-f_m(t)|dt$$

$$\leq\int_{c-\frac{1}{n}}^{c}|f_n(t)|dt+\int_{c-\frac{1}{m}}^{c}|f_m(t)|dt=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2m}\to 0\ (n,m\to\infty)$$

但收敛于阶梯函数.

定义（内积空间）：X 是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，若 $\langle \cdot,\cdot \rangle : X\times X \to \mathbb{K}$ 满足：

① （对第一个变元线性）$\langle \alpha x_1+\beta x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1, y\rangle + \beta\langle x_2, y\rangle$

② （对第二个变元共轭线性）$\langle x, \alpha y_1+\beta y_2\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y_1\rangle + \bar{\beta}\langle x, y_2\rangle$

③ 共轭对称：$\overline{\langle x,y\rangle} = \langle y,x\rangle$

④ $\langle x,x\rangle \geq 0$ 且 $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$

则称 $\langle \cdot,\cdot\rangle$ 是 X 上的一个内积

完备的内积空间称为 Hilbert 空间

定义（赋数空间）：设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，若函数 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$

满足 ① 正定性：$\|x\| \geq 0$，$\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

② 齐性：$\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

③ 三角不等式：$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

remark：我们可以用范数定义度量 $d(x,y) \triangleq \|x-y\|$

这使"向量可以平移"

我们也可以用内积定义范数： $\|x\| \triangleq \sqrt{\langle x, x\rangle}$

命题：内积在其诱导的范数拓扑下连续

Pf：设 $\|x_n - x\| \to 0$，$\|y_n - y\| \to 0$

则 $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leq \|\langle x_n - x, y_n\rangle\| + \|\langle x, y_n - y\rangle\|$

$\overset{C-S}{\leq} \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \leq C(\|x_n - x\| + \|y_n - y\|) \to 0.$

给定集合M，对于 $M^{\perp}$（是闭的）的含义不再赘述

定义：如果集合 $S = \{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq X$ 满足 $e_\alpha \perp e_\beta \ \forall \alpha, \beta \in \Lambda, \alpha \neq \beta$，则称 S 是X中的正交集，若还满足 $\|e_\alpha\| = 1$ 则称为规范正交集，若 $S^{\perp} = \{0\}$，则称S完备.

定理：任一个内积空间中一定有完备的正交集

定义：设 $S=\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 中的一个规范正交集，若 $\forall x\in X$ 都可表为

$$x=\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha$$ （注意，这是一个形式记号）

则称 S 是 X 的一个规范正交基

定理：（Bessel 不等式） $\forall x\in X$ $\sum_{\alpha\in\Lambda}|\langle x,e_\alpha\rangle|^2\le\|x\|^2$

pf： step 1：证明 $\forall\{\alpha_1,\cdots,\alpha_N\}\subseteq\Lambda$

有 $\sum_{i=1}^{N}|\langle x,e_{\alpha_i}\rangle|^2\le\|x\|^2$ 这是书上的定理.

step 2： $\Lambda'\triangleq\{\alpha\in\Lambda:\ \langle x,e_\alpha\rangle\neq0\}$ 是一个至多可数集

令 $\Lambda_n=\{\alpha\in\Lambda:|\langle x,e_\alpha\rangle|>\frac{1}{n}\}$

则 $\Lambda=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Lambda_n$， claim：$\forall n$， $\#\Lambda_n<+\infty$

假设不然，存在n_0使得Λ_{n_0}是无限集，则取$N>>1$ s.t. $\frac{N}{n_0^2}\geq\|x\|^2$

任取N个指标 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N\in\Lambda_{n_0}$

则 $\sum_{k=1}^{N}|\langle x,e_{\alpha_k}\rangle|^2\geq\frac{N}{n_0^2}\geq\|x\|^2$ 矛盾.

step 3：给Λ'一个序，$\Lambda'=\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$

则 $\forall N$ 有 $\sum_{k=1}^{N}|\langle x,e_{\alpha_k}\rangle|^2\leq\|x\|^2$

利用 Riemann 重排即可

但 $\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha$ 是否有意义？

命题：设X是Hilbert空间，$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是规范正交基，$\forall x\in X$，

$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k\in X$，进而令 $M=\overline{\mathrm{span}(\{e_k\}_{k=1}^{\infty})}$

则 $P_M(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$，$P_M$表示向子空间M进行投影

Pf: 由Bessel不等式知 $\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2<\infty$ 于是 $\sum_{k=n}^{m}|\langle x,e_k\rangle|^2$

$=\left\|\sum_{k=n}^{m}\langle x,e_k\rangle e_k\right\|^2\longrightarrow 0$

$\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k$ 是 Cauchy 列，由 X 完备知收敛

此外易知 $\langle x-\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k,\ e_j\rangle=0$.

$\Longrightarrow$ $x-\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k\in M^{\perp}$ 则 $P_M(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$.

命题：设 $\sigma: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是 $\mathbb{N}$ 的任意置换，则 $\forall x\in X$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_{\sigma(k)}\rangle e_{\sigma(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k.$$

这表明了求和的意义

Pf: 设 $M=\overline{\mathrm{span}(\{e_k\}_{k=1}^{\infty})}$

$\tilde{M}=\overline{\mathrm{span}(\{e_{\sigma(k)}\}_{k=1}^{\infty})}$

$M=\widetilde{M}$

则 $LHS=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_{\sigma(k)}\rangle e_{\sigma(k)}=P_{\widetilde{M}}(x)=P_M(x)=RHS.$

推论：$\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为规范正交集，$\forall x\in X$，$\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha\in X$

且 $\|x-\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in\Lambda}|\langle x, e_\alpha\rangle|^2$

定理：X 是 Hilbert 空间，$S=\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是规范正交集

S 完备 $\Longleftrightarrow$ S 是 O.N.B $\Longleftrightarrow$ 满足 Parseval 等式

Pf. ① S 完备 $\Longrightarrow$ S 是 O.N.B

否则：$\exists x_0\in X$ 使 $x_0\neq\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle x_0, e_\alpha\rangle e_\alpha$.

则考虑 $\langle x_0-\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle x_0, e_\alpha\rangle e_\alpha, e_j\rangle=0$ 这与 S 完备矛盾.

② S 是 O.N.B $\Longrightarrow$ Parseval 等式成立，只须利用推论

③ Parseval 等式 $\Longrightarrow$ 完备.

反证：若 $x_0 \neq 0$，$x_0 \in S^{\perp}$ $\Longrightarrow$ $\langle x_0, e_\alpha \rangle = 0$

于是 $0 = \sum_{\alpha \in \Lambda} |\langle x_0, e_\alpha \rangle|^2 = \|x_0\|^2 \Longrightarrow x_0 = 0$ 矛盾.

- - - - - - - - - Fejer 核

• Fourier 级数

考虑 $e_k(x) = e^{2\pi i k x}$ $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$

我们想说明 $\{e_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ 是 L^2 的 O.N.B $\Longleftrightarrow (\{e_k\})^{\perp} = \{0\}$.

$\Longleftrightarrow \overline{\mathrm{span}\{e_k\}} = L^2$ 即三角多项式在 L^2 中稠密

对 $f\in L^2$，它的Fourier系数为 $\hat{f}(k)=\langle f,e_k\rangle=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)e^{-2\pi ikx}\,dx$

则 $S_N(f)(x)=\sum_{k=-N}^{N}\hat{f}(k)e^{2\pi ikx}$

$$\sigma_N(f)(x)=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}S_k(f)(x) \quad (\text{Cesaro 和})$$

Aim: $\|\sigma_N(f)(x)-f\|_2\longrightarrow 0 \quad (N\to\infty)$

而 $\sigma_N(f)(x)$ 正好是三角多项式

$$S_N(f)(x)=\sum_{k=-N}^{N}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)e^{-2\pi ikt}\,dt\right)e^{2\pi ikx}$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\sum_{k=-N}^{N}e^{2\pi ik(x-t)}\,dt \triangleq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)D_N(x-t)\,dt.$$

这里 Dirichlet 核为 $D_N(t)=\sum_{k=-N}^{N} e^{2\lambda ikt}=\dfrac{\sin(2N+1)\lambda t}{\sin(\lambda t)}$

于是利用卷积的符号

$$S_N(f)(x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)D_N(x-t)\,dt=(f*D_N)(x)$$

考虑 $F_N=\dfrac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(t)$

$$=\frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin\lambda t}\sum_{k=0}^{N}\sin(2k+1)\lambda t$$

$$=\frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2\lambda t}\sum_{k=0}^{N}\sin(2k+1)\lambda t\sin\lambda t$$

$$=\frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2\lambda t}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2}\left(\cos 2k\lambda t-\cos(2k+2)\lambda t\right)$$

$$=\frac{1}{N+1}\frac{\sin^2(N+1)\lambda t}{\sin^2(\lambda t)}$$

Fejer 核

因此有 $\sigma_N(f)(x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)F_N(x-t)\,dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t)F_N(t)\,dt$

$=(f*F_N)(x)$

引理 (Good kernel) ① $\|F_N\|_1=1$

② $\forall\,\delta>0\quad \lim\limits_{N\to\infty}\int_{\delta<|t|<\frac{1}{2}} F_N(t)\,dt=0$

Pf: $\|F_N\|_1=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F_N(t)\,dt=\frac{1}{N+1}\sum\limits_{k=0}^{N}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_k(t)\,dt$

而 $D_N(t)=\sum\limits_{k=-N}^{N} e^{2\pi ikt}$ 注意 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi ikt}\,dt=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0.\end{cases}$

另外: $\delta<|t|<\frac{1}{2}$, $F_N(t)\leq\frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2\delta\pi}\longrightarrow 0\ (N\to\infty)$.

引理： Minkowski 积分不等式

$$\left(\int_Y \left|\int_X |f(x,y)|\,dx\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} dx$$

定理：$\forall f\in L^2$，$\|\sigma_N(f)-f\|_2 \longrightarrow 0 \ (N\to\infty)$

Pf: $\|\sigma_N(f)-f\|_2$

$$= \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(x-t)-f(x))F_N(t)dt\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x-t)-f(x)|^2 |F_N(t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt\, |F_N(t)|\ \|f(\cdot-t)-f(\cdot)\|_2$$

$$= \underbrace{\int_{|t|\le\delta}}_{<\frac{\varepsilon}{2}\ (\delta\ll 1)} + \int_{\delta<|t|<\frac{1}{2}} .$$

$$\Longrightarrow \le 2\|f\|_2 \int_{\delta<|t|<\frac{1}{2}} F_N(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

常义积分连续性

#