数理统计期末复习

尚尔淦, 李抒博

University of Science and Technology of China

November 23, 2022

Overview

1. 预备知识和数据压缩理论
   - 预备知识
   - 三大分布
   - 次序统计量
   - 充分与完全统计量
2. 点估计
   - 矩估计和 MLE
   - Cramer-Rao 不等式
   - 零无偏估计法
   - 充分完全统计量法
3. 假设检验
   - 功效函数
   - 似然比检验
   - 两样本正态检验
   - UMPT
4. 区间估计
5. 复习建议

概率论结论

- $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \mathcal{X}_n^2$.
- $\Gamma(1, \lambda) = Exp(\lambda)$. 如果 $X_1, \cdots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Exp(\lambda)$，则 $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$ 以及 $\bar{X} \sim \Gamma(n, n\lambda)$. 更一般的，若 $X \sim \Gamma(\alpha, \beta) \Rightarrow 2\beta X \sim \mathcal{X}_{2\alpha}^2$. 因此我们有 $2\lambda \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{X}_{2n}^2$.
- $X_1, \cdots, X_n, \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{Pois}(\lambda) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Pois}(n\lambda)$.
- $X_1, \cdots, X_n, \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{Geom}(p) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Geom}(np)$.

三大分布

上一页中已经介绍了 $\mathcal{X}_n^2$. 回忆:

- $t_n = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\mathcal{X}_n^2/n}} \to N(0,1)$, as $n \to \infty$.
- $F_{m,n} = \frac{\mathcal{X}_m^2/m}{\mathcal{X}_n^2/n}$.

同学们最容易忽略的一些问题:

- 若 $X \sim N(0,1)$, 则 $X^2 \sim \mathcal{X}_1^2$.
- 若 $X \sim N(0,1) \perp Y \sim N(0,1)$, 则 $\left(|\frac{X}{Y}|\right)^2 \sim F_{1,1}$. 如果考试问 $|\frac{X}{Y}|$ 的分布，要联想到 F 分布.

还有另外一些常用的推论:

- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}_{n-1}^2$ and $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}$ when $X_1, \cdots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$.
- 设 $X_1, \cdots, X_m \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 以及 $Y_1, \cdots, Y_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 且两样本独立，那么 $\frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} \sim F_{m-1,n-1}$.

连续情形

$X_{(1)},\cdots,X_{(n)}$ 的密度以及联合密度有如下表达式

- $f_j(x)=\frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}(F(x))^{j-1}(1-F(x))^{n-j}f(x).$
- $f_{ij}(x,y)=\frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}(F(x))^{i-1}(F(y)-F(x))^{j-i-1}(1-F(y))^{n-j}f(x)f(y)\quad j>i.$

同学们如果知道数学分析的结论

$$\int\cdots\int_{a>x_1>x_2>\cdots>x_n>0}f(x_1)\cdots f(x_n)dx_1\cdots dx_n=\frac{1}{n!}\left(\int_0^a f(t)dt\right)^n$$

，那么可以用联合密度来推得上述结论。

另外如果要求的极差的分布，一定要注意积分范围！

离散情形

我们记质量函数为 $P(X=x_i)=p_i$ 以及
$P_0=0, P_1=p_1, \cdots, P_i=\sum_{i=1}^{i} p_i$, 我们有如下离散情形的次序统计量分布

- $P(X_{(j)}=x_i)=\frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}\int_{P_{i-1}}^{P_i} t^{j-1}(1-t)^{n-j}dt.$

此公式一般及其难记忆，因此考试一般更倾向于考离散型下的 $X_{(1)}, X_{(n)}$, 这两个分布容易利用定义来给出，比如

$$P(X_{(1)}>t)=P(X_i>t\ \forall i)=\Pi_{i=1}^{n} P(X_i>t).$$

充分与完全统计量

从定义的角度出发

- 称 T 是参数 θ 的充分统计量是指 $P(X = x|T = t)$ 与参数 θ 的分布无关
- 称 T 是完全的是指 $\mathbb{E}[g(T)] = 0 \Rightarrow g \equiv 0.$
- 称 T 是辅助统计量是指 T 的分布与参数没有关系，注意 T 首先是统计量才能是辅助统计量，这个地方要与枢轴变量求区间估计区分，枢轴变量不是一个统计量。

有一些有用的推论:

- 如果 T 是完全统计量，那么对于可测函数 ϕ，那么 $\phi(T)$ 也是完全统计量。
- 如果有一个充分统计量 T 使得存在一个可测函数 ϕ，具有性质 $T = \phi(W)$, 那么 W 是充分统计量。
- 如果存在一个可测函数 ϕ 使得 $\phi(T)$ 是辅助统计量，那么 T 一定不是完全统计量。

极小充分统计量

Definition

对于一个统计模型 $P=\{P_\theta : P_\theta \in \mathcal{F}\}$, 设 T 是充分统计量，则称 T 是极小的当且仅当，任意其他的充分统计量 S，均存在可测函数 ϕ 使得 $T=\phi(S)$.

Theorem

设 $f(x|\theta)$ 是概率密度函数，若存在函数 $T(x)$ 使得任意两个样本点 x, y 有

$$\frac{f(x|\theta)}{f(y|\theta)} \equiv \mathrm{const} \Leftrightarrow T(x)=T(y)$$

则 $T(x)$ 是极小的。

我们常常利用极小统计量来证明某个统计量不是充分的。

当统计模型存在充分完全统计量：那么充分完全统计量一定是极小充分的。如果 S 是极小充分的，由于 T 是充分的，那么存在 ϕ 使得 $S=\phi(T)$，再又 T 是完全的，那么知道 S 是完全的，那么此时极小充分 $\Rightarrow$ 充分完全。另一方面我们有定理 (不要求掌握证明)

Theorem

如果极小充分统计量存在，则任意充分完全统计量都是极小充分统计量，也即充分完全统计量 $\Rightarrow$ 极小充分统计量。

Theorem

(Basu) 辅助统计量与充分完全统计量相互独立。

判定定理

因子分解定理能够直接判断充分统计量。

Theorem

对于指数族的联合分布 $f(\mathbf{x}|\theta) = C(\theta)exp\left(\sum_{i=1}^{k}\theta_i T_i(\mathbf{x})\right)h(\mathbf{x})$ 为自然形式，令 $T(\mathbf{X}) = (T_i(\mathbf{X})$，若自然参数空间有内点，则 $T(\mathbf{X})$ 为完全统计量。

要注意判断指数族的时候要写出联合分布进行判断，不可以说单个密度函数的支撑与参数有关来判断不是指数族。

Theorem

设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 来自总体 *(population)* 的密度函数为 $f(x|\theta) = h(x)c(\theta)exp\left(\sum_{j=1}^{k}w(\theta_j)t_j(x)\right)$，如果参数空间 Θ 包含 $\mathbb{R}^k$ 的开集，那么统计量

$$T(\mathbf{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n}t_1(X_i), \cdots, \sum_{i=1}^{n}t_k(X_i)\right)$$

是完全统计量。

两种估计方法

对于矩估计，一定要利用 $\frac{1}{n}$ 而不是用 $\frac{1}{n-1}$，尤其是估计方差。

对于 MLE，一般从两个角度来结题：先看函数是否具有可导性 (要在密度函数中写出来示性函数)，若不具有可导性，要利用定义使得密度函数在参数空间取得最大；

当具有可导性的时候，求导后要再求两阶导判定一阶导数的零点确实是极大值点。

矩估计和极大似然估计具有 plug-in 性质。

贝叶斯估计

Definition

参数的贝叶斯估计 (Bayes Estimator) 是其后验分布的期望:

$$\widehat{\vartheta}_B = \mathbb{E}(\vartheta \mid \vec{X}),$$

一般步骤

(1) **求** $(\vec{X}, \vartheta)$ **的联合** p.d.f/p.m.f., $f(\vec{x}, \theta) = f(\vec{x} \mid \theta)\pi(\theta)$

(2) **求** $\vec{X}$ **的边缘** p.d.f/p.m.f., $f_X(\vec{x}) = \int_\Theta f(\vec{x}, \theta) d\theta$

(3) **后验分布** $\pi(\theta \mid \vec{x}) = \frac{f(\vec{x},\theta)}{f_X(\vec{x})} = \frac{f(\vec{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_\Theta f(\vec{x}|v)\pi(v)dv}$

Gamma 分布和 Beta 分布是贝叶斯分析中常见的分布

UMVUE

Definition

若存在无偏估计 $\hat{g}^*(X)$ 使得对于任意 $g(\theta)$ 的无偏估计量 $\hat{g}(X)$ 有

$$\mathrm{Var}_\theta(\hat{g}^*(X)) \leq \mathrm{Var}_\theta(\hat{g}(X)).$$

则称 $\hat{g}^*(X)$ 为 $g(\theta)$ 的一致最小方差无偏估计。

C-R Inequality

- Fisher 信息量

$$I(\theta) = E\left[\frac{\partial \log f(X,\theta)}{\partial \theta}\right]^2.$$

如果要用 $I(\theta) = \mathbb{E}\left[-\frac{\partial^2 logf(X,\theta)}{\partial \theta^2}\right]$ 要先验证相关条件。

- Cramer-Rao Inequality: 若我们有样本 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$，对于任意 $g(\theta)$ 的无偏估计 $\hat{g}(X)$，我们有

$$\mathrm{Var}_\theta(\hat{g}(X)) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{nI(\theta)}.$$

- 一般用来确定某估计量是不是 UMVUE，而不会用来寻找 UMVUE。详见课本例题 3.5.1-3.5.4。
- 计算要准确，建议写好公式后代入计算，不要跳步；离散情形也要掌握。

同时建议同学们熟练掌握不寻常分布 (Geometry) 的方差和期望。

零无偏估计法

基本结论

- （课本引理 3.4.1）$\hat{g}(X)$ 为 $g(\theta)$ 的无偏估计，T 为一个充分统计量，则 $h(T)=E(\hat{g}(X)|T)$ 为 $g(\theta)$ 的无偏估计，且
$$\mathrm{Var}_\theta(h(T)) \leq \mathrm{Var}_\theta(\hat{g}(X))$$
- （课本定理 3.4.1）$\hat{g}(X)$ 为 $g(\theta)$ 的无偏估计，且方差有限。若对于任意 $\ell(X)$ 满足 $E_\theta(\ell(X))=0$ 对任意 $\theta\in\Theta$，我们都有
$$E_\theta(\hat{g}(X)\ell(X))=0.$$
则 $\hat{g}(X)$ 为 $g(\theta)$ 的 UMVUE。

Corollary

设 $T=T(\vec{X})$ 是 θ 的充分统计量, $h(T)$ 是 $\tau(\theta)$ 的一个无偏估计, $\mathrm{Var}(h(T))<\infty, \forall\theta\in\Theta$ 。则 $h(T)$ 是 $\tau(\theta)$ 的 *UMVUE*, 当且仅当 $h(T)$ 与任一零无偏估计 $U(T)$ 都不相关。

零无偏估计法

一般步骤

1. 随便构造一个关于 $g(\theta)$ 的无偏估计量，尽可能简单。
2. 根据引理 3.4.1，取这个统计量关于充分统计量 T 的条件期望。
3. 根据定理 3.4.1，判断其是否为 UMVUE。

Remark

- 对于较简单的情形，可以直接找 $g(\theta)$ 的充分无偏统计量，如书上例题 3.4.3-3.4.6，然后直接跳到第三步。对于较复杂的情形，则按照上面步骤，如习题 3.33 和 3.36。
- 第三步的一般套路是首先将 $E_\theta(\ell(X)) = 0$ 写成关于密度函数的积分，然后关于参数求导得到 $E_\theta(\hat{g}(X)\ell(X)) = 0$。写成积分那一步可以省略掉一些无关的项，如习题 3.30。

充分完全统计量法

基本结论

- （课本定理 3.4.2 - LS）若 $T(X)$ 为充分完全统计量，且 $\hat{g}(T(X))$ 为 $g(\theta)$ 的无偏估计，则 $\hat{g}(T(X))$ 为 $g(\theta)$ 唯一的 UMVUE。

一般方法

- 方法一
  1. 随便构造一个关于 $g(\theta)$ 的无偏估计量，尽可能简单。
  2. 根据定理 3.4.2，取这个统计量关于充分完全统计量 T 的条件期望。

  Remark：对于较简单情形，也可以直接写出无偏的充分完全统计量。
- 方法二
  1. 将充分完全统计量 T 的分布写出来。
  2. 展开成积分或者求和的形式，求相应的函数 h 使得 $E[h(T)] = g(\theta)$。

具体过程参考课本例题 3.4.8-3.4.12。

假设检验

一般形式

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_0^c.$$

H_0 和 H_1 的区别

- 原假设 H_0 一般是我们要保护的一方。
- 在我们有强烈的证据的时候，我们可以选择拒绝它。否则，我们也不能说接受它，因为我们同样的也没有太多的证据说它是对的。
- 原假设和备择假设应该结合问题实际情形来选取。一般而言，把想要证明正确的命题作为备择假设。
- 例子：检验“小麦亩产 1800”这句话的时候，我们的检验问题是

$$H_0 : \text{小麦亩产} \leq 1800 \longleftrightarrow H_1 : \text{小麦亩产} > 1800$$

- **上述内容和考试无关，供大家之后实际做研究解决问题的时候参考，考试的时候大家优先按照题目要求来!**

功效函数

- 两类错误
  - 第一类错误：零假设是对的，但样本落入了否定域。（冤枉好人）
  - 第二类错误：零假设不对，但样本落入了接受域。（浑水摸鱼）

  一般来说首先控制第一类错误，再找犯第二类错误概率尽可能小的检验。
- 检验函数

$$\phi(\mathbf{x}) = P(\text{得到样本 x 的情况下，否定}H_0\text{的概率})$$

- 功效函数

$$\beta_\phi(\theta) = E_\theta(\phi(\mathbf{x})) = P(\text{用检验}\phi\text{否定了}H_0)$$

- 水平为 α 的检测：ϕ 犯第一类出错误的概率不超过 α（对于任意 $\theta \in \Theta_0$，$\beta_\phi(\theta) \leqslant \alpha$）。

似然比检验

一般步骤如下

1. 求似然函数 $L(\theta|\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \theta)$。
2. 计算 $L_{\Theta}(\mathbf{x}) = \sup_{\theta\in\Theta} L(\theta|\mathbf{x})$ 和 $L_{\Theta_0}(\mathbf{x}) = \sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta|\mathbf{x})$
3. 计算似然比检验统计量 LRT 为 $\lambda(\mathbf{x}) = \frac{L_{\Theta_0}(\mathbf{x})}{L_{\Theta}(\mathbf{x})}$。$\lambda$ 越小，越倾向于拒绝 H_0。一般来说这样算出来的 $\lambda(\mathbf{x})$ 都会比较复杂，可以化简。
4. 确定 c 使得似然比检验 $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{(\lambda(\mathbf{x})\leq c)}$ 水平为 α

参考课本例题 5.3.1-5.3.5，总的来说除了计算没有太多困难的地方。

贝叶斯检验

Definition

对于检验问题 $H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$

(1) 分别计算 H_0 和 H_1 为真/成立的后验概率

$$\alpha_0 = \mathbb{P}(H_0 \mid \vec{x}) = \mathbb{P}(\theta \in H_0 \mid \vec{x})$$
$$\alpha_1 = \mathbb{P}(H_1 \mid \vec{x}) = \mathbb{P}(\theta \in H_1 \mid \vec{x})$$

(2) 设定检验法则: 当 $\frac{\alpha_0}{\alpha_1} < 1$ 时拒绝 H_0, 否则接受 H_0.

所有关于 ϑ 的统计推断都是基于后验分布进行。

两样本正态检验

主要记住以下表格 (真的可能会出背书题)

表 5.2.1　单个正态总体均值的假设检验

	H_0	H_1	检验统计量及其分布	否定域
σ^2 已知	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$U=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/\sigma$ $U\|\mu=\mu_0\sim N(0,1)$	$\|U\|>u_{\alpha/2}$
	$\mu\leqslant\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$U>u_\alpha$
	$\mu\geqslant\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$U<-u_\alpha$
σ^2 未知	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$T=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S$ $T\|\mu=\mu_0\sim t_{n-1}$	$\|T\|>t_{n-1}(\alpha/2)$
	$\mu\leqslant\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$T>t_{n-1}(\alpha)$
	$\mu\geqslant\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$T<-t_{n-1}(\alpha)$

表 5.2.2　单个正态总体方差的假设检验

	H_0	H_1	检验统计量及其分布	否定域
μ 已知	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi_\mu^2=nS_\mu^2/\sigma_0^2$ $\chi_\mu^2\|\sigma_0^2\sim\chi_n^2$	$nS_\mu^2/\sigma_0^2<\chi_n^2(1-\alpha/2)$ 或 $nS_\mu^2/\sigma_0^2>\chi_n^2(\alpha/2)$
	$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$nS_\mu^2/\sigma_0^2>\chi_n^2(\alpha)$
	$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$nS_\mu^2/\sigma_0^2<\chi_n^2(1-\alpha)$
μ 未知	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ $\chi^2\|\sigma_0^2\sim\chi_{n-1}^2$	$(n-1)S^2/\sigma_0^2<\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)$ 或 $(n-1)S^2/\sigma_0^2>\chi_{n-1}^2(\alpha/2)$
	$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$(n-1)S^2/\sigma_0^2>\chi_{n-1}^2(\alpha)$
	$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$(n-1)S^2/\sigma_0^2<\chi_{n-1}^2(1-\alpha)$

两样本正态检验

表 5.2.3　两个正态总体均值差的假设检验

	H_0	H_1	检验统计量及其分布	否定域
σ_1^2 σ_2^2 已知	$\mu_2-\mu_1=\mu_0$	$\mu_2-\mu_1\neq\mu_0$	$U=\dfrac{\bar{Y}-\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}$, $U\|\mu_0\sim N(0,1)$	$\|U\|>u_{\alpha/2}$
	$\mu_2-\mu_1\leqslant\mu_0$	$\mu_2-\mu_1>\mu_0$		$U>u_\alpha$
	$\mu_2-\mu_1\geqslant\mu_0$	$\mu_2-\mu_1<\mu_0$		$U<-u_\alpha$
σ_1^2 σ_2^2 未知	$\mu_2-\mu_1=\mu_0$	$\mu_2-\mu_1\neq\mu_0$	$T_w=\dfrac{\bar{Y}-\bar{X}-\mu_0}{S_w}\sqrt{\dfrac{mn}{m+n}}$, $T_w\|\mu_0\sim t_{n+m-2}$, $S_w^2=\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{n+m-2}$	$\|T_w\|>t_{n+m-2}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$
	$\mu_2-\mu_1\leqslant\mu_0$	$\mu_2-\mu_1>\mu_0$		$T_w>t_{n+m-2}(\alpha)$
	$\mu_2-\mu_1\geqslant\mu_0$	$\mu_2-\mu_1<\mu_0$		$T_w<-t_{n+m-2}(\alpha)$

两样本正态检验

表 5.2.4　两个正态总体方差比的假设检验

	H_0	H_1	检验统计量及其分布	否定域
μ_1 μ_2 已知	$\sigma_2^2=\sigma_1^2$	$\sigma_2^2\neq\sigma_1^2$	$F_*=S_{2*}^2/S_{1*}^2$ $F_*\vert_{\sigma_2^2=\sigma_1^2}\sim F_{n,m}$	$F_*<F_{n,m}(1-\alpha/2)$ 或 $F_*>F_{n,m}(\alpha/2)$
	$\sigma_2^2\leqslant\sigma_1^2$	$\sigma_2^2>\sigma_1^2$	$S_{1*}^2=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2$	$F_*>F_{n,m}(\alpha)$
	$\sigma_2^2\geqslant\sigma_1^2$	$\sigma_2^2<\sigma_1^2$	$S_{2*}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2$	$F_*<F_{n,m}(1-\alpha)$
μ_1 μ_2 未知	$\sigma_2^2=\sigma_1^2$	$\sigma_2^2\neq\sigma_1^2$	$F=S_2^2/S_1^2$ $F\vert_{\sigma_2^2=\sigma_1^2}\sim F_{n-1,m-1}$	$F<F_{n-1,m-1}(1-\alpha/2)$ 或 $F>F_{n-1,m-1}(\alpha/2)$
	$\sigma_2^2\leqslant\sigma_1^2$	$\sigma_2^2>\sigma_1^2$	$S_1^2=\dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2$	$F>F_{n-1,m-1}(\alpha)$
	$\sigma_2^2\geqslant\sigma_1^2$	$\sigma_2^2<\sigma_1^2$	$S_2^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2$	$F<F_{n-1,m-1}(1-\alpha)$

特殊情形

- 数据成对出现时需要成对比较（课本例题 5.2.5）。

Definition

假设 ϕ 为水平 α 的检验，假如对于任何其他水平 α 的检验 ϕ_1，我们有

$$\beta_\phi(\theta) > \beta_{\phi_1}(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta_0^c$$

则 ϕ 为水平 α 的一致最优检验（UMPT）。

Neyman Pearson

- 针对简单假设
$$H_0 : \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1.$$
- 如果一个检验对应的拒绝域 R 满足对于某个常数 $k > 0$
$$\left.\begin{array}{ll} \text{若} f(\vec{x} \mid \theta_1) > kf(\vec{x} \mid \theta_0), & \text{则} \vec{x} \in R \\ \text{若} f(\vec{x} \mid \theta_1) < kf(\vec{x} \mid \theta_0), & \text{则} \vec{x} \in R^c \end{array}\right\} \text{而且 } \mathbb{P}_{\theta_0}(\vec{X} \in R) = \alpha$$
- 这样的检验为上述问题的 UMPT。

Remark

- 也可以考虑充分统计量 T 并且写出其密度函数 $g(T, \theta_0)$ 和 $g(T, \theta_1)$，在采用和上面相同的步骤。
- 详见课本例题 5.4.1-5.4.3。

Karlin-Rubin

- 考虑单边检验问题

$$H_0 : \theta \le \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0.$$

- T 为充分统计量，其密度函数为 $g(t|\theta)$，且关于 θ 有非降的单调似然比（即对于 $\theta_2 > \theta_1$，$\frac{g(t|\theta_2)}{g(t|\theta_1)}$ 关于 t 单调非降）。
- 对于任意 t_0，拒绝域为 $T > t_0$ 的检验为水平为 α 的 UMPT，其中 $\alpha = P_{\theta_0}(T > t_0)$。

Remark

- $H_0 : \theta \ge \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta < \theta_0$，拒绝域变为 "$T < t_0$"。
- 若密度函数有非增的单调似然比，可以把参数取相反数。
- 详见课本例题 5.4.4-5.4.8。

双边检验的 UMPT

- 考虑双边检验问题

$$H_0 : \theta \le \theta_1 \text{ or } \theta \ge \theta_2 \longleftrightarrow H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2.$$

- 随机样本 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布为单参数指数族

$$f(x|\theta) = C(\theta) \exp(Q(\theta) T(x)) h(x).$$

- $Q(\theta)$ 关于 θ 严格增。
- 其水平为 α 的 UMPT 的拒绝域为 $t_1 < T < t_2$，且 $P_{\theta_1}(t_1 < T < t_2) = P_{\theta_2}(t_1 < T < t_2) = \alpha$。

区间估计

关注以下几点

- 枢轴变量法：难点在于如何找到枢轴变量。例如以下几种情形给出分布 X，枢轴变量可能会比较难看出来。

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1} 1(0 \le x \le 1) \quad \text{where } \theta > 0$$

$$f(x|\theta) = \frac{e^x}{1-e^\theta} 1(\theta \le x \le 0) \quad \text{where } \theta < 0$$

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x} 1(1 \le x \le e^{1/\theta}) \quad \text{where } \theta > 0$$

- 通过反转检验统计量得到区间估计。
- 最短枢轴区间的求法（只可能出好算的情形）。

预测考点

按照往年期末考应该是八道题，可能/大概/或许会在以下部分出题

- 大概率会考
  - Cramer-Rao 不等式（计算是否有效）
  - 求 UMVUE（充分完全/零无偏）
  - 似然比检验
  - 求 UMPT
  - 枢轴变量找（最短）置信区间
  - 正态检验
  - 三大分布 (凑分布尤其是这个课件提到的那种不起眼的小技巧)
  - 极大似然估计/矩估计
  - 功效函数 (尤其是定义)

以上内容纯属个人猜测，仅供大家参考。理论上复习大纲所涉及内容都可能会出题。三大分布的分布表要会看。

复习建议

按照重要性从高到低排列：

- 兰老师 ppt+ 复习大纲
- 课本例题
- 作业
- 18 年期末卷（难度较大）

复习建议

如果复习时间紧张

复习建议

复习建议

- 其实也不用慌，这门课内容相对较少。平时作业认真写并且都能掌握的话，考前花个一两天看就够了。
- 把课本基本的概念掌握，作业和例题的方法会用，考试就基本没问题了。

谢谢!