P290.

1. 判断敛散性.

(2). $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$

$$=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$$

在$[0,1]$上 $\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\sim\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ 则 $\alpha-1<1$ $\alpha<2$ 收敛.

$[1,+\infty)$上 在$\alpha>1$时收敛. 这是因为（$\alpha\leq1$时 $\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\geq\frac{1}{x^\alpha}$ 发散）

$\alpha>1$ 可设 $\alpha\geq1+\varepsilon$. 当 $x>>1$时 $\ln(1+x)\leq x^{\varepsilon/2}$ $(\varepsilon>0)$

则 $\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\leq\frac{x^{\frac{\varepsilon}{2}}}{x^{1+\varepsilon}}=\frac{1}{x^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}$ 则 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}dx<+\infty$.

故上式在 $\alpha\in(1,2)$时收敛.

(4). $\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$

$e^{\sin x}-1=\sin x+o(\sin x)\sim x+o(x^2)$.

则 $\frac{\sqrt{x}}{x+o(x^2)}=\frac{1}{\sqrt{x}+o(x^{\frac{3}{2}})}$ $(x\to0)$ 故积分收敛.

(6). $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q}$

当 $x\to1$时 $\frac{1}{x^p(\ln x)^q}\to\frac{1}{(\ln x)^q}\sim\frac{1}{(x-1)^q}$

则 $q<1$ 时收敛.

而 $x\to+\infty$ 时我们仍可认为 $(\ln x)^q$ "不发挥什么作用"

当 $p>1$ 时 $\frac{1}{x^p(\ln x)^q} \le \frac{1}{x^p}$ 收敛 $(1>q\ge 0)$

而当 $q<0$ 时 $\frac{1}{x^p(\ln x)^q} = \frac{(\ln x)^{-q}}{x^p} \le \frac{x^{\frac{\varepsilon}{2}}}{x^{1+\varepsilon}}$ 收敛.

当 $p<1$ 时 $\frac{1}{x^p(\ln x)^q} \ge \frac{1}{x^{\delta}(\ln x)^q} \ge \frac{1}{x^{1-\varepsilon+\varepsilon}}$ $(\varepsilon-\delta<0)$ 发散.

$p=1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^q} = \int_1^{+\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^q} = \frac{1}{1-q}(\ln x)^{1-q}\Big|_1^{+\infty}$

则 $q>1$ 时收敛. 收敛 $\Longleftrightarrow \{p>1, q<1\}$.

2. 判断绝对收敛与条件收敛

(1). $\int_0^{+\infty} x^p \sin x^q\, dx \quad (q\ne 0)$

令 $u=x^q$ 则 $dx=\frac{1}{q}u^{\frac{1}{q}-1}du$.

得 $\int_0^{+\infty}$ 或 $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{q}u^{\frac{p+1}{q}-1}\sin u\,du$ 积分限只是正负号问题.

当 $u\to 0$ 时 $\sin u\sim u$ 则 $u^{\frac{p+1}{q}-1}\cdot u = u^{\frac{p+1}{q}}$

• 于是 $-\frac{p+1}{q}<1$ 即收敛(绝对收敛)

$u\to+\infty$ 时考虑 $\frac{\sin u}{u^{1-\frac{p+1}{q}}}$ (希望用Dirichlet)

• 当 $1-\frac{p+1}{q}>1$ 即 $\frac{p+1}{q}<0$ 时绝对收敛.

因而 $\left|\frac{\sin u}{u^{1-\frac{p+1}{q}}}\right| \le \frac{1}{u^{1-\frac{p+1}{q}}}$

• 当 $1-\frac{p+1}{q}\in[0,1)$ 时利用 $\frac{|\sin u|}{u^{1-\frac{p+1}{q}}} \ge \frac{1-\cos 2u}{2u^{1-\frac{p+1}{q}}}$ 知发散

再由 Dirichlet 知此时条件收敛.

综上 $-1<\frac{p+1}{q}<0$ 绝对收敛.

$0\leq\frac{p+1}{q}<1$ 条件收敛.

(2). $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx \quad (q\geq0)$.

当 $x\to0$ 时 $\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\sim x^{p+1}$.

于是 $-(p+1)<1$ 即 $p>-2$ 时绝对收敛.

当 $x\to\infty$ 时. 希望用 Dirichlet.

$$\left|\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right|\leq\frac{x^p}{1+x^q}\sim\frac{1}{x^{q-p}}$$ 则 $q-p>1$ 绝对收敛.

当 $q-p\leq0$ 时. 考虑 $\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx\geq\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\frac{x^p}{1+x^q}dx$ 利用 Cauchy 收敛定理知发散.

当 $q-p\in(0,1]$ 时. $\left|\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right|\geq\frac{x^p}{1+x^q}\frac{1}{2}(1-\cos2x)$

可知发散，但 $\frac{x^p\sin x}{1+x^q}=\frac{\sin x}{x^{-p}+x^{q-p}}$

对于 $f(x)=x^{-p}+x^{q-p}$ 当 $x>1$ 时递减 $\downarrow 0$

利用 Dirichlet 知收敛.

综上知 $p>-2$ & $q-p>1$ 绝对收敛.

$p>-2$ & $q-p\in(0,1]$ 时条件收敛.

第16章 反常积分

一、无穷积分

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛：指 $\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ 有有限的极限，f 在 [a, A] 上可积。

① 非负函数：1) 单调有界定理 收敛 $\Leftrightarrow$ $F(A)=\int_a^A f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 有界 → 要加

2) 比较判别法. $0\le f(x)\le g(x)$（充分大 x）：$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

极限形式 $\frac{f(x)}{g(x)}\to l\ (x\to+\infty)$ $\begin{cases} 0<l<+\infty：同敛散. \\ l=0 \\ l=+\infty： \end{cases}$

f~g，[不要用 $\int f(x)dx \sim \int g(x)dx$]

若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$\{A_n\}$（$A_1=a$）递增 ↗ $+\infty$，

则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)dx$.

（若存在某个 $\{A_n\}$ ↗ $+\infty$ 使右端收敛，左端收敛？）× 反例

① 要对任意 $\{A_n\}$ ↗ $+\infty$ 成立！（练习16.1.4）

② f 非负，也成立！

• $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$？

× 反例. 作业题误用

但 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$，则 $l=0$.（用 Cauchy 收敛原理可证）

② 一般函数.

1) Cauchy 收敛原理 收敛：$\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0>a$，若 $A', A''>A_0$，有 $\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right|<\varepsilon$
$\qquad = F(A'')-F(A')$ 不要乱写，都用

$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ $\begin{cases} 2)\ \text{Dirichlet 判别法} & g 在 [a,+\infty) 单调 \xrightarrow{x\to+\infty} 0，F(A)=\int_a^A f(x)dx 在 [a,+\infty) 有界 \\ 3)\ \text{Abel 判别法} & g 在 [a,+\infty) 单调有界. \int_a^{+\infty} f(x)dx 收敛. \end{cases}$

要加绝对值！

$\Rightarrow$ $\begin{cases} 绝对收敛：若 \int_a^{+\infty}|f(x)|dx 收敛 \\ 条件收敛：若 \int_a^{+\infty}|f(x)|dx 发散，\int_a^{+\infty} f(x)dx 收敛 \end{cases}$

很多同学忘了证

经典例子. $\int_1^{+\infty} x^a \sin x\,dx$.

二、瑕积分

假设：f 定义在 (a, b] 上，$x\to a^+$ 时 f 无界.

$\int_a^b f(x)dx$ 收敛：$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ 有有限的极限.

① 非负：比较判别，直接

一般：1) Cauchy 收敛原理：收敛：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 $0<A'<\delta$，$0<A''<\delta$，有 $\left|\int_{a+A'}^{a+A''} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

2) 转化为无穷积分后 Dirichlet，Abel 判别.

一步一步，写清依据，不要靠肉眼判断，不要"显然"！

写到底　"~"不是"="：要带"$x\to\cdots$"，且要带x范围：不等式

练习题16.3　p290.

1. (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$.

错误做法：$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\le\frac{x}{x^\alpha}=\frac{1}{x^{\alpha-1}}$.

$\alpha-1<1$ 收敛

$\alpha-1>1$ 发散 ×

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx:=I_1+I_2.$$

① 在$[0,1]$上：$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\sim\frac{1}{x^{\alpha-1}}\ (x\to0)$. 故$I_1$收敛 $\Leftrightarrow\alpha-1<1\Leftrightarrow\alpha<2$.

错误做法：$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\sim\frac{1}{x^\alpha}\ (x\to+\infty)$

② 在$[1,+\infty)$上：若$\alpha\le1$：$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\ge\frac{1}{x^\alpha}\ge\frac{1}{x}$，由比较判别法$I_2$发散 ($\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=+\infty$)

若$\alpha>1$：当x充分大时$\ln(1+x)\le x^{\frac{\alpha-1}{2}}\Rightarrow\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\le\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}$. 其中$\frac{\alpha+1}{2}>1$. 由比较判别法$I_2$收敛. ($\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}<+\infty$)

$\therefore$原积分收敛当且仅当$1<\alpha<2$.

(4) $e^{\sin x}-1=e^{x+o(x)}-1=1+(x+o(x))+\frac{(x+o(x))^2}{2}+o(x)-1=x+o(x)\quad(x\to0)$

$\therefore\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}=\frac{1}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}\ (x\to0)$，由比较判别法知原积分收敛.

有问题做法：$\sin x>x-\frac{x^3}{6}\cdots$ 很麻烦.

(6) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q}=\int_1^e\frac{dx}{x^p(\ln x)^q}+\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q}:=I_1+I_2$

① 在$[1,e]$上：当$x\to1$：$\frac{1}{x^p(\ln x)^q}\to\frac{1}{(\ln x)^q}\sim\frac{1}{(x-1)^q}$，故$I_1$收敛$\Leftrightarrow q<1$.

② 在$[e,+\infty)$上：($(\ln x)^q$在$x\to+\infty$时不发挥什么作用！)

若$p>1$：当x充分大时$\frac{1}{(\ln x)^q}\le x^{\frac{p-1}{2}}\Rightarrow\frac{1}{x^p(\ln x)^q}\le\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}$. 其中$\frac{p+1}{2}>1$. 由比较判别法$I_2$收敛. 不要省！

若$p=1$：$I_2=\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^q}=\frac{1}{1-q}(\ln x)^{1-q}\Big|_e^{+\infty}$. 故$I_2$收敛$\Leftrightarrow1-q<0$. 与①矛盾！故$I_2$发散

若$p<1$：$\frac{1}{x^p(\ln x)^q}\ge\frac{1}{x(\ln x)^q}$，由比较判别法$I_2$发散.

$\therefore$原积分收敛当且仅当$\begin{cases}p>1\\q<1\end{cases}$.

错误做法：当$x\to0$时$x^p\sin x^q\to x^{p+q}$. ×　一上来

2. (1) $\int_0^{+\infty}x^p\sin x^q\,dx$，($q\ne0$)

设$t=x^q$代入：原式$=\frac{1}{q}\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt\ (q>0)$ 或 $\frac{1}{q}\int_{+\infty}^0t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt\ (q<0)$.

积分限只是符号问题，故不妨只考虑$q>0$情形.

设$\alpha=\frac{p+1}{q}-1$，~~原式~~ $\int_0^{+\infty}t^\alpha\sin t\,dt=\int_0^1t^\alpha\sin t\,dt+\int_1^{+\infty}t^\alpha\sin t\,dt:I_1+I_2$.

① 在$[0,1]$上：$t^\alpha\sin t\sim t^{\alpha+1}\ (t\to0)$，故$I_1$收敛$\Leftrightarrow\alpha+1>-1\Leftrightarrow\alpha>-2$ $\Leftrightarrow$ I_1绝对收敛. ~~$\Leftrightarrow I_1$绝~~

② 在$[1,+\infty)$上：

错误做法：$t^\alpha\sin t\xrightarrow{t\to+\infty}\!\!\!\!\!\!/\ \ 0$ $\Rightarrow\int_1^\infty t^\alpha\sin t\,dt$ 发散.

若$\alpha\ge0$：对$k>0$，$\left|\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}t^\alpha\sin t\,dt\right|\ge(2k\pi)^\alpha\left|\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\sin t\,dt\right|=2(2k\pi)^\alpha\ge2\xrightarrow{k\to+\infty}\!\!\!\!\!\!/\ \ 0$，由Cauchy收敛定理$I_2$发散.

若$-1\le\alpha<0$：t^α随t递减趋于0，由Dirichlet判别法 注意同学论证 I_2收敛.

扫描全能王 创建

但 $|t^\alpha \sin t| \geq t^\alpha \sin^2 t = \frac{1}{2}t^\alpha - \frac{1}{2}t^\alpha\cos 2t$，同理由Dirichlet判别法 $\int_1^{+\infty} t^\alpha \cos 2t$ 收敛
而 $\int_1^{+\infty} t^\alpha dt$ 发散。

$\therefore \int_1^{+\infty} |t^\alpha \sin t| dt$ 发散 $\Rightarrow$ I_2 条件收敛。

若 $\alpha < -1$：$|t^\alpha \sin t| \leq t^\alpha$，由比较判别法，$I_2$ 绝对收敛。

综上，$-2 < \alpha < -1$ 绝对收敛，$-1 \leq \alpha < 0$ 条件收敛

$\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$

$-1 < \frac{p+1}{q} < 0$ $\qquad$ $0 \leq \frac{p+1}{q} < 1$.

[Remark：要简化思路，
不要过度分情况讨论]，
注意！

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q}\sin x\, dx$. $(q \geq 0)$

解 原式 $= \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^q}\sin x\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q}\sin x\, dx := I_1 + I_2$.

① 在 $[0,1]$ 上：$\frac{x^p}{1+x^q}\sin x \sim x^p \sin x \sim x^{p+1}$（当 $x \to 0$），故 I_1 收敛 $\Leftrightarrow$ I_1 绝对收敛 $\Leftrightarrow$ $p+1 > -1$ $\Leftrightarrow$ $p > -2$

② 在 $[1,+\infty)$ 上：当 $x \to +\infty$：$\frac{x^p}{1+x^q}\sin x = \frac{x^{p-q}}{x^{-q}+1}\sin x \sim x^{p-q}\sin x$.

由 (1)：若 $p-q < -1$：I_2 绝对收敛。
若 $-1 \leq p-q < 0$：I_2 条件收敛。
若 $p-q \geq 0$：I_2 发散。

综上，$\begin{cases} p > -2 \\ p-q < -1 \end{cases}$ 时绝对收敛，$\begin{cases} p > -2 \\ -1 \leq p-q < 0 \end{cases}$ 时条件收敛。

$\to -2 < p < q-1$ $\qquad$ $\to p < q \leq p+1$

练习题 16.2 P283 前述

1. (5) $\int_0^{+\infty} \frac{[t]-t+a}{t+x}dt$ $(x > 0, a \neq \frac{1}{2})$.

对 $\forall n \in \mathbb{N}^+$，$a_n = \int_n^{n+1} \frac{[t]-t+a}{t+x}dt = \int_n^{n+1}\frac{n-t+a}{t+x}dt = (n+x+a)\ln(1+\frac{1}{n+x}) - 1$

$= (n+x+a)\left[\frac{1}{n+x} - \frac{1}{2(n+x)^2} + o(\frac{1}{(n+x)^2})\right] - 1 \quad (n \to \infty)$

$= \frac{a-\frac{1}{2}}{n+x} + o(\frac{1}{n+x})$. $(n \to \infty)$.

如果原式收敛，则 $\int_0^{+\infty}\frac{[t]-t+a}{t+x}dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{[t]-t+a}{t+x}dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\because a - \frac{1}{2} \neq 0$，$\therefore$ n 充分大时恒有 $a_n > 0$ 或 $a_n < 0$ $\Rightarrow$ 恒为正 or 负级数，
由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a-\frac{1}{2}}{n+x}$ 发散知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow$ 原积分发散。