中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

P161. 5. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散.

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum(a_n-b_n)$, $\sum a_n b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

均无法判定.

$\sum (-1)^n+(-1)^n$ 发　　类似　　$\sum \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{\pi^2}{6}$　$\sum \frac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ 发.

$\sum (-1)^n+(-1)^{n-1}$ 收　　　　$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发　$\sum \frac{1/n}{n}$ 收.

7. $\sum_n a_n$ 收 $\Rightarrow \sum_n (a_n+a_{n+1})$ 收.　逆不成立.

Pf: 设 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$.　　$a_n=(-1)^n$ 即为反例.

则 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

设 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+1}) = S_n+S_{n+1}-a_1 \longrightarrow 2S-a_1<\infty$.

8. $\{na_n\}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n+1})$ 均收敛 $\Rightarrow \sum_n a_n$ 收敛.

Pf: $\sum_{k=1}^{n} k(a_k-a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - na_{n+1}$ 知收敛.

#

P166.

2. (2). $\sum_n \frac{1}{n2^n} < \sum_n \frac{1}{n^2} < +\infty$

(4). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \sim \sum_n \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} < +\infty$

(6) $\sum_n \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

利用 $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = 1$.

与 $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$ 知发散.

(10). $\sum_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$

考虑 Taylor 展开.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right).$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$ 知收敛.

~~曲~~. 3. $\sum_n a_n$ 收敛. 则 $\sum_n a_n^2 < +\infty$.

$\because \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 知 $a_n^2 < a_n \ (n >> 1)$.

反之 取 $a_n = \frac{1}{n}$

4. 注意 $|a_n b_n| \le \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ 即可.

8. 问 p与 q 考虑 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

Pf: 熟知 $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^m}$ 当 $m>1$ 时收敛.

当 $p=1$ 时. 且注意 $(\ln\ln n)' = \frac{1}{n\ln n}$

则 $p=1$ & $\begin{cases} q>1 & \text{收敛} \\ q\le 1 & \text{发散} \end{cases}$

当 $p>1$ 时. 不论 q 均收敛.

因为 $\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q} < \frac{1}{n(\ln n)^{p-\varepsilon}}$

取 $0<\varepsilon<p-1$

而 $p<1$ 时 $\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q} > \frac{1}{n(\ln n)^{p+\varepsilon}}$ $(n>>1)$. $0<\varepsilon<1-p$.

$\Longrightarrow$ 发散.

$\int \frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$

$= \int \frac{1}{t^p(\ln t)^q}$

$p>1$ 时 $\frac{1}{x^p(\ln x)^q} < \frac{1}{x^p}$

$p<1$ 时 $\frac{1}{x^p(\ln x)^q} \ge \frac{1}{x^{p}\cdot x^{\varepsilon}}$

$\varepsilon>0$ 且 $p+\varepsilon<1$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ (正项) 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2a_n} < +\infty$.

Pf: 易见 $\frac{a_n}{1+n^2a_n} = \frac{1}{\frac{1}{a_n}+n^2} < \frac{1}{n^2}$

另一方面 若令 $b_n = \frac{a_n}{1+a_n} \Longrightarrow a_n = \frac{b_n}{1-b_n}$

若 $\sum_n b_n < +\infty \Longrightarrow b_n \to 0\ (n\to\infty)$ $\frac{a_n}{b_n} \to 1 \Longrightarrow \sum_n a_n < +\infty$ 矛盾

补充：1.（收敛最慢不存在—某年科大研究生入学考试）

4 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛正项级数，则存在收敛正项级数 $\sum_n b_n$

s.t. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. remark：并非所有可比较 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

P Pf：设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ 令 $\beta_n = S - S_{n-1}$ 这里 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，$S_0 = 0$

则 $\beta_n \to 0$ $(n\to\infty)$. $\beta_1 = S$

令 $b_n = \sqrt{\beta_n} - \sqrt{\beta_{n-1}}$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sqrt{\beta_1} - \lim_{n\to\infty} \sqrt{\beta_n} = \sqrt{S}$.

且 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{\beta_n} - \sqrt{\beta_{n-1}}} = a_n \frac{\sqrt{\beta_n} + \sqrt{\beta_{n-1}}}{\beta_n - \beta_{n-1}} = \sqrt{\beta_n} + \sqrt{\beta_{n-1}} \to 0$ #.

2.（Kronecker 引理）.

设 $b_n \downarrow 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛 则 $\lim_{n\to\infty} (a_1 + \cdots + a_n) b_n = 0$

Pf：$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_n\right| \le \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{N} a_k b_n\right|}_{\text{有限}} + \cancel{\left|\sum_{k=N+1}^{n} a_k b_n\right|}$ 见君羊

$< \sum_{k=N+1}^{n} a_k b_k < \varepsilon$ 收敛. Kronecker Lemma.

感谢某同学指出错误

3.（由上）设 $b_n \uparrow +\infty$ 的正项且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

则 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{b_n} = 0$

Pf：由 $\frac{1}{b_n} \downarrow 0 \implies \sum a_n = \sum (a_n b_n) \frac{1}{b_n}$ 收敛

则 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k b_k) \frac{1}{b_n} = 0$.

4. (du Bois Reymond). 设 $\sum_n a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Pf: 由 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 收敛知 $\lim_n b_n$ 存在 令 $|b_n|\le M$.

由 $\sum_n a_n$ 收敛 则设 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{1+M}$.

则又由 $\sum_{k=n+1}^{n+p}|b_{k+1}-b_k|<1$.

设 $S_{n+i}=\sum_{k=n+1}^{n+i} a_k$ (仿照Abel).

有 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(b_k-b_{k+1}) + S_{n+p}b_{n+p}\right|$

$\le \frac{\varepsilon}{1+M}(1+M)=\varepsilon$ #

5. (Dedekind) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 绝对收敛, $\lim_n a_n=0$.

且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 部分和有界 则 $\sum_n a_n b_n$ convergence.

Pf: 设 $S_m=\sum_{k=n+1}^{m} b_k$ 设 $|S_m|\le M$.

则 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(a_k-a_{k+1}) + S_{n+p}a_{n+p}\right|$

$\le M \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|a_k-a_{k+1}|}_{\text{绝对收敛}} + M\underbrace{|a_{n+p}|}_{\lim_n a_n=0} < \varepsilon.$

P178. 1.

(1). $\sum_n n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}\frac{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}\longrightarrow 1\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1$$ 收敛

(2). $\sum_n \frac{n^2}{3^n}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{3n^2}\longrightarrow\frac{1}{3}<1$ 收敛

(3). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^n}(\sqrt{3}+(-1)^n)^n$ $\sqrt[n]{a_n}=\frac{\sqrt{3}+(-1)^n}{3}\sqrt[n]{n^5}$ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sqrt{3}+1}{3}<1$ 收敛.

(4). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+\frac{1}{n})^n}$ $\sqrt[n]{a_n}=\frac{\sqrt[n]{n^2}}{1+\frac{1}{n}}\longrightarrow 1$ (无法判定).

但事实上 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\infty}{e}\not\to 0$ 发散.

(5). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

$$a_n=\frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n}=\left(\frac{n}{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}}>\left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{1}{n}}\longrightarrow 1$$ 发散.

(6). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\sqrt[n]{a_n}=\frac{x}{\sqrt[n]{n!}}\sim\frac{x}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}}\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$.

$\therefore\ \forall x\in\mathbb{R}$ 收敛 (remark: $e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$).

(7). $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-4}{3n+1}\right)^n$ $\sqrt[n]{a_n}\longrightarrow\frac{1}{3}<1$ 收敛.

(8). $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\ln n}{n}\cdot\ln n - \ln\ln n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp \frac{(\ln n)^2 - n\ln\ln n}{n}.$$

$$\overset{洛}{=} \lim_{n\to\infty} \exp\ 2\ln n\cdot\frac{1}{n} - \ln\ln n - n\frac{1}{\ln n\, n} = 0 \quad \therefore 收敛.$$

P185. 1. 用Cauchy收敛原理.

(2). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$

即 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k}{2^k}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} \longrightarrow 0 \ (n\to\infty, \forall p)$.

(4). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\cos n + b\sin n}{n(n+\sin n!)}$.

即 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a\cos k + b\sin k}{k(k+\sin k!)}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{k(k-1)} \longrightarrow 0 \ (n\to\infty, \forall p)$.

3. $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ $\sum_n a_n$ 与 $\sum_n b_n$ 收敛 则 $\sum_n c_n$ 收敛.

pf: 由 ~~易~~ $(b_n - c_n) \leqslant (b_n - a_n)$.

即 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

反之不可: $a_n = -1$, $b_n = 1$ $c_n = 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

5.(2). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow$ 不收敛.

(3). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$. $\sin\frac{1}{n}$ 随 n 递减于0.

由 Leibniz 知收敛.

7.(一般级数慎用"比较判别法") 再如 $\begin{cases} b_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n} \\ a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n} \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 由 Leibniz 知收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$ 发散 但 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}}=1.$

8. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$

Pf:

由 Abel 求和 $\sum_{k=1}^{n}ka_k=-\sum_{k=1}^{n-1}S_k+S_nb_n.$ 这里 $b_n=n.$
$S_k=a_1+\cdots+a_k.$

$$=-\sum_{k=1}^{n-1}S_k+nS_n$$

则 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1}S_k}{n}+S_n\right)$ 对 $\lim_{n\to\infty}\frac{-\sum_{k=1}^{n-1}S_k}{n}$ 用 stolz.

$=\lim_{n\to\infty} S_n-S_n=0.$

10. $a_n \downarrow 0$，$p\in N_+$ 证明 $a_1+\cdots+a_p-a_{p+1}-a_{p+2}-\cdots-a_{2p}+a_{2p+1}+\cdots+a_{3p}-\cdots$ 收敛.

Pf: 由条件 $a_n \geq 0$.

考虑求和 $(a_1+\cdots+a_p)-(a_{p+1}+\cdots+a_{2p})+(a_{2p+1}+\cdots+a_{3p})-(\cdots)\cdots$

记 $b_1=a_1+\cdots+a_p \quad b_2=a_{p+1}+\cdots+a_{2p} \cdots$

由定理 14.1.4 构造 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 同敛散

且 $b_n \downarrow 0$ 由 Leibniz 判别知收敛

补

f

11. (1). $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

事实上 $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$

$$=(-1)^n\sin\frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}}$$ 用Leibniz.

(2). $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}$.

考虑 $a_n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \quad \lim_{n\to\infty}a_n\overset{\text{stolz}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

而 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}\left(1+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n}\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

$$=\frac{1}{n(n+1)}\left[n+\frac{n}{2}+\cdots+\frac{n}{n+1}-(n+1)-\frac{n+1}{2}-\cdots-\frac{n+1}{n}\right].$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}\left(-\ln n-\gamma+o(1)+\frac{n}{n+1}\right)<0 \quad (n>>1).$$

确为递减.

$\therefore$ 由 Dirichlet 判别可判定.

14.4.(12). $a_n>0$ 若 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛

Pf：思路来自 Leibniz 判别，只须说明 $a_n\downarrow 0$ （累乘）.

由 $\left|n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-\lambda\right|<\varepsilon$ 先取 $\varepsilon=\lambda>0$

则 $\frac{a_n}{a_{n+1}}\geq 1 \Rightarrow a_n\downarrow$ 再取 $\varepsilon=\frac{1}{2}\lambda$

则 $1+\frac{\lambda}{2n}<\frac{a_n}{a_{n+1}}<1+\frac{3\lambda}{2n}$. 累乘有

$$\frac{a_{N+1}}{\left(1+\frac{3\lambda}{2n}\right)\cdots\left(1+\frac{3\lambda}{2N}\right)}<a_{n+1}<\frac{a_{N+1}}{\left(1+\frac{\lambda}{2n}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{2N}\right)}\quad \therefore a_{n+1}\geq\frac{a_{N+1}}{\exp\left(\sum\limits_{k=N}^{n}\log\left(1+\frac{3\lambda}{2k}\right)\right)}$$

换成指数

且 $a_{n+1} \leq \dfrac{a_{N+1}}{\exp\left(\sum_{k=N}^{n} \log\left(1+\frac{\lambda}{2k}\right)\right)}$ 而 $\log\left(1+\frac{\lambda}{2k}\right) \sim \frac{\lambda}{2k}$ $(k \gg 1)$

则知 $\sum_{k=N}^{n} \log\left(1+\frac{\lambda}{2k}\right) \longrightarrow \infty$ $(n \to \infty)$.

则 $a_{n+1} \longrightarrow 0$ $(\downarrow 0)$. #