中国科学技术大学2021年秋数学分析A3期末考试答案（李）

1. (1) 对 $\forall x>1$，$x\sqrt{x^2+\cos x}/x^2=\sqrt{1+\frac{\cos x}{x^2}}\longrightarrow 1$，$x\to+\infty$.

故 $\frac{1}{x\sqrt{x^2+\cos x}}\sim\frac{1}{x^2}$，而 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，由比较判别法该积分收敛.

(2) $\frac{|\sin x|+1}{x^2+1}\leqslant\frac{2}{x^2+1}$，而 $\int_0^{+\infty}\frac{2}{x^2+1}dx=\pi<+\infty$ 收敛. 由比较判别法该积分收敛.

2. 当 $x\to0$ 时 $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\sim\sqrt{x}\longrightarrow0$，故0不是瑕点，₍₎只需考虑 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ 收敛性.

对 $\forall A>1$，$\left|\int_1^A\sin x\,dx\right|=|\cos A-\cos1|\leqslant2$，故 $\int_1^{+\infty}\sin x\,dx$ 有界且 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 单调下降趋于0.

故由Dirichlet判别法原积分收敛.

而 $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|\geqslant\frac{\sin^2x}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\cos2x}{2\sqrt{x}}$，同理 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos2x}{2\sqrt{x}}dx$ 收敛而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ 发散，

故由比较判别法 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|dx$ 发散.

即原积分条件收敛.

3. (1) 注意到 $1+\alpha$ 在 $\alpha\in\mathbb{R}$ 上连续，$\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 在 $(x,\alpha)\in[0,1+\alpha]\times\mathbb{R}$ 上连续，

故 $\lim\limits_{\alpha\to0}\int_0^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

(2) $f'(x)=\int_0^x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln(1+xt)}{t}\right)dt+\frac{\ln(1+x^2)}{x}\cdot1-0=\int_0^x\frac{1}{1+xt}dt+\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\frac{2\ln(1+x^2)}{x}$.

(3) 记 $I(b)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$，$b>0$.

对 $\forall\delta>0$，$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right)dx=\int_0^{+\infty}e^{-bx}dx$ 关于 $b\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛（$e^{-bx}\leq e^{-\delta x}$ 再由 $\int_0^{+\infty}e^{-\delta x}dx<+\infty$）

故 $I'(b)=\int_0^{+\infty}e^{-bx}dx=\frac{1}{b}$，$b\in[\delta,+\infty)$. 由 δ 任意性对 $\forall b>0$ 故式均成立. 自然 $I(b)$ 也在 $(0,+\infty)$ 连续

$\therefore I(b)=\ln b+C$（常数），$I(b)\Big|_{b=a}=\ln a+C=0\Rightarrow C=-\ln a$.

$\therefore I(b)=\ln\frac{b}{a}$.

(4) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}\xlongequal{t=x^4}\int_0^1\frac14t^{-\frac34}(1-t)^{-\frac14}dt=\frac14B(\frac14,\frac34)=\frac14\Gamma(\frac14)\cdot\Gamma(\frac34)\xlongequal{\text{余元公式}}\frac14\frac{\pi}{\sin\frac14\pi}=\frac{\sqrt2}{4}\pi$.

4. 设 $\mu(A)=\sup\limits_{u\in E}\left|\int_A^{+\infty}ue^{-xu}dx\right|$，$A>0$. 进一步简化得 $\mu(A)=\sup\limits_{u\in E}e^{-Au}$.

当 $E=(0,1)$：$\mu(A)=e^{-A\cdot0}=1\overset{A\to+\infty}{\not\longrightarrow}0$，故该积分在 $(0,1)$ 上不一致收敛.

当 $E=(1,+\infty)$：$\mu(A)=\lim\limits_{u\to+\infty}e^{-Au}=0$. 故该积分在 $(1,+\infty)$ 上一致收敛.

5. 设 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，$-\pi<x<\pi$.

计算得 $a_0=\frac1\pi\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2\pi^2}{3}$，$a_n=\frac1\pi\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}(-1)^n$，$b_n=\frac1\pi\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac2n(-1)^n$

$n=1,2,\ldots$

$\because f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上连续可微，故由Dini定理 $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx+\frac2n(-1)^n\sin nx\right)$，$-\pi<x<\pi$

（在 $-\pi,\pi$ 上不成立）

代入 $x=0$ 得 $0=\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

6. 注意到 f' 的 Fourier 系数为 $nb_n, -na_n$（要写出具体计算过程）（分部积分）

由 Riemann-Lebesgue 引理有 $\lim_{n\to\infty} nb_n = \lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

则 $a_n = o(\frac{1}{n})$，$b_n = o(\frac{1}{n})$

remark: 计算 $\frac{a_n}{n} \to 0$ 以及 $na_n \le C$ 者不得分.

7. (1). 由6题方法可设 $f \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx + B_n\sin nx)$.

则 $f' \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-nA_n\sin nx + nB_n\cos nx)$.

$f'' \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-n^2A_n\cos nx - n^2B_n\sin nx)$.

由 Fourier 系数唯一性 $\Rightarrow f \sim \frac{a_0}{2\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{\lambda-n^2}\cos nx + \frac{b_n}{\lambda-n^2}\sin nx\right)$

（这里 ~ 写 = 应指明理由，否则扣2分）

(2). 由 f'' 存在知 f' 连续，由 Fourier 收敛定理知 f 的 Fourier 系数收敛至 f

（若只证 Fourier 系数收敛，要指明收敛至 f）

8. (1). 由 $|f(t)e^{-iut}| \le |f(t)| \le \frac{A}{t^2+1}$ 与 $\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2+1}dt$ 存在

及 Weierstrass 判别知 $\hat{f}(u)$ 存在 (6')

(2). 分段进行估计： $f(x+h) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u)e^{iux} - \hat{f}(u)e^{iu(x+h)}du$.

我们只须估计 $(\cos u(x+h) - \cos ux)\hat{f}(u)$ 的积分大小.

事实上只需考虑 $\int_{\frac{1}{h}}^{+\infty} + \int_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}} (\cos u(x+h) - \cos ux)\hat{f}(u)du$.

而利用 $\cos u(x+h) - \cos ux = -2\sin u(x+\frac{h}{2})\sin\frac{uh}{2}$

有 $\left|\int_{\mathbb{R}}(\cos u(x+h) - \cos ux)\hat{f}(u)\,du\right| \le 4\left|\int_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}}\sin\frac{uh}{2}\hat{f}(u)\,du\right|$

$+ 8\int_{\frac{1}{h}}^{+\infty}\frac{C}{|u|^{1+\alpha}}du$ 同时只须注意在 $[-\frac{1}{h}, \frac{1}{h}]$ $\hat{f}(u)$ 有界即可