2. f是周期为2λ的可积且绝对可积函数

(1). f在$[-\lambda,\lambda]$上有 $f(x+\lambda)=f(x)$

则 $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$.

Pf: $a_{2n-1}=\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda}f(x)\cos(2n-1)x\,dx$ 令 $x=\lambda+t$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_{-2\lambda}^{0}f(t+\lambda)\cos(2n-1)(\lambda+t)\,dt$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\int_{-2\lambda}^{0}f(t)\cos(2n-1)t\,dt$$

注意 f 以 2λ 为周期

$$=-\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda}f(t)\cos(2n-1)t\,dt$$

$$=-a_{2n-1}\Rightarrow a_{2n-1}=0$$

同理 $b_{2n-1}=0$.

(2). f在$[-\lambda,\lambda]$上满足 $f(x+\lambda)=-f(x)$

那么 $a_{2n}=b_{2n}=0$.

Pf: $a_{2n}=\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda}f(x)\cos 2nx\,dx$ $x=\lambda+t$.

$$=\frac{1}{\lambda}\int_{-2\lambda}^{0}f(\lambda+t)\cos 2nt\,dt$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\int_{-2\lambda}^{0}f(t)\cos 2nt\,dt$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda}f(t)\cos 2nt\,dt=-a_{2n}$$

$\Rightarrow a_{2n}=0$

②

4. $\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)<+\infty$

则 $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 必为某周期 2π 的函数的 Fourier 级数.

Pf: 由 Weierstrass 判别知 $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=f(x)$ 是一致收敛的.

由一致收敛性, 积分与级数可换次序则有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=a_n,\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=b_n.$$

5. $\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 \ln x\cdot\cos^2\lambda x\,dx.$

考虑 $\int_0^1\ln x\,\frac{1+\cos 2\lambda x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1\ln x\cos 2\lambda x\,dx$

其中 $\int_0^1\ln x\,dx=x\ln x-x\big|_0^1=-1$

则 $\ln x$ 在 $[0,1]$ 上绝对可积

则 $\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1\ln x\cos 2\lambda x\,dx=0$

$\Rightarrow \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1\ln x\cdot\cos^2\lambda x\,dx=-1$

6. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可导, f' 可积且绝对可积, 若 $f(-\pi)=f(\pi)$

证明: $a_n=o(\frac{1}{n})$ $b_n=o(\frac{1}{n})$

Pf: $na_n=n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\left(\sin nx\cdot f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,dx\right)$

利用 R-L 引理即可.

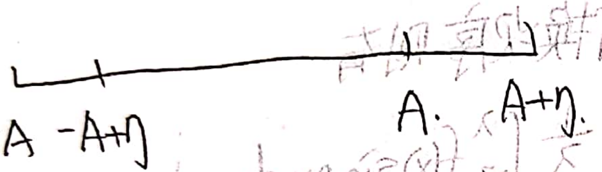
补充：

1. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$，$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$ 存在.

证明：$\forall \eta>0$ 有 $\int_{\mathbb{R}}\left(f(x+\eta)-f(x)\right)dx=\eta(a-b)$.

考虑：$\int_{-A}^{A}\left(f(x+\eta)-f(x)\right)dx-\eta(a-b)$

$$=\int_{-A+\eta}^{A+\eta} f(x)dx-\int_{-A}^{A} f(x)dx-\eta(a-b)$$



$$=\int_{A}^{A+\eta} f(x)dx-\int_{-A}^{-A+\eta} f(x)dx-\eta(a-b)$$

$$=\int_{A}^{A+\eta}\left(f(x)-a\right)dx-\int_{-A}^{-A+\eta}\left(f(x)-b\right)dx$$

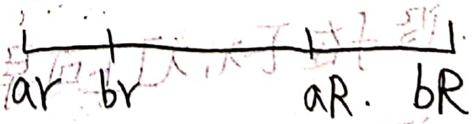
令 $A\to\infty$ 即可.

2. (伏汝兰尼) f 在 $[0,+\infty)$ 连续且 $\lim_{x\to\infty} f(x)=f(+\infty)$ 存在，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\left(f(0)-f(+\infty)\right)\ln\frac{b}{a}$$

Pf：$LHS=\int_r^R \frac{f(ax)}{x}dx-\int_r^R\frac{f(bx)}{x}dx$

$$=\int_{ar}^{aR}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{br}^{bR}\frac{f(x)}{x}dx$$



$$=\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}dx \quad \text{用中值定理}$$

$$=f(\xi)\int_{ar}^{br}\frac{dx}{x}-f(\eta)\int_{aR}^{bR}\frac{dx}{x}$$

$$=f(\xi)\ln\frac{b}{a}-f(\eta)\ln\frac{b}{a}\longrightarrow\left(f(0)-f(+\infty)\right)\ln\frac{b}{a}\quad(r\to0,\ R\to\infty)$$

扫描全能王 创建

期中试卷简略答案

1. (1). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ $\frac{1}{n+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{n}$ 发散.

(2). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{n}{n+1}$ Leibniz 判别法条件要写全

(3). $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n+1}}-1)$ 考虑 $\exp\left(\frac{\ln n}{n+1}\right)-1=\frac{\ln n}{n+1}+o\left(\frac{\ln n}{n+1}\right)$ 发散.

(4). $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+(-1)^n\frac{1}{n}\right)$ $\ln\left(1+(-1)^n\frac{1}{n}\right)=(-1)^n\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛.

2. (1) × : $a_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$.

(2). √ 作业题

(3). × ne^{-n^2x} 取 $x=\frac{1}{n^2}$ 可知 $f_n(x)=ne^{-n^2x}$ 并不一致收敛于 0

(4). √ 书中定理证明. 在用 Lebesgue 引理前先说明收敛函数有界

3. (1). 利用结论 $(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ 或直接求收敛半径.

$R=1$, 注意使用 stirling 公式 收敛点集 $[-1,1)$.

(2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n-1)!}x^n=e^x(x^3+4x^2+2x)$ $\boxed{x\in\mathbb{R}}$!

$g(x)=\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}x^2\frac{x^n}{n!}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+3}+x^2e^x=e^x(x^3+x^2)\Rightarrow f(x)=e^x(x^3+4x^2+2x)$ $x\in\mathbb{R}$.

4. 作业题+课上例题.

5. 证明: 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上能用多项式一致逼近 则 f 为多项式.

pf: $|f(x)-P_n(x)|<\frac{1}{n}$ 则 $|P_n(x)-P_m(x)|<\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$

则 $P_n(x)-P_m(x)\equiv C_{n,m}$

而 $|f(0)-P_n(0)|<\frac{1}{n}$

有 $|(f(x)-f(0))-(P_n(x)-P_n(0))|\leq\frac{2}{n}$ (*).

而 $P_n(x)-P_n(0)$ 常数项为0　　有 $|P_n(x)-P_n(0)-(P_m(x)-P_m(0))|\leq\frac{4}{n}$

则 $P_n(x)-P_n(0)=P_m(x)-P_m(0)\triangleq P(x)$.

即 $|f(x)-P(x)-f(0)|\leq\frac{2}{n}\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$

即 $f(x)=P(x)+f(0)$.

6. $a_n(x)=\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)x)}-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$.

$S_n(x)=1-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\longrightarrow 1\ (n\to\infty)$.

在 $(0,\delta)$ 上取 $x=\frac{1}{n^2}$ 可知不一致收敛

$[\delta,+\infty)$ 上一致收敛.

1、p

证：

考虑函数 $p: [0,1] \to [0,1]$

$x \longmapsto \sqrt{x}$.

由 Weierstrass 一致逼近知，

则 p 在 $[0,1]$ 上连续. 记 $h = f \circ p : [0,1] \to \mathbb{R}$.

则由 f 连续，知. h 在 $[0,1]$ 上也连续.

则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n > 0$，及多项式. $g_1(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$，其中 $b_0, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$. $b_n \neq 0$.

s.t $|h(x) - g_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. $\forall x \in [0,1]$.

又 $b_1, b_2 \cdots b_k \in \mathbb{R}$，$\exists\, a_0, a_1, a_2 \cdots a_n \in \mathbb{Q}$. s.t $|a_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$ $\forall\, 0 \le i \le n$.

则 令 $g_2(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$$|g_2(x) - g_1(x)| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k - b_k| \cdot x^k \le (n+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(n+1)} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad \forall x \in [0,1].$$

$$\Rightarrow |h(x) - g_2(x)| < |h(x) - g_1(x)| + |g_1(x) - g_2(x)| < \varepsilon.$$

又 $h(x) = f(\sqrt{x})$.

则 $\forall x \in [0,1]$, $|f(x) - g_2(x^2)| = |h(x^2) - g(x^2)| < \varepsilon$.

令 $g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k} = g_2(x^2)$. 即符合题意所求. $\square$