with pressure(t)

Léonard Duval-laude

Novembre 2025

1 Cas horizontal

D'après l'article "JGR Solid Earth - 2015 - Segall - Injection induced seismicity Poroelastic and earthquake nucleation effects", on a l'expression de la pression fluide en fonction du temps t à une dsitance r du point d'injection (où q est le débit volumique, k la perméabilité, η la viscosité dynamique et ρ_0 la masse volumique du fluide) :

$$P(t) = \frac{q}{4\pi\rho_0 r}\frac{\eta}{k} erfc(\frac{r}{2\sqrt{ct}}) = P_\infty erfc(\frac{r}{2\sqrt{ct}}) \tag{1}$$

La pression de fluide "soulage" la contrainte normale et on a:

$$\eta v = -k\left(l^* + \delta - v_p t\right) - f(t)(\sigma - P(t)) \tag{2}$$

On dérive par rapport au temps :

$$\eta\frac{dv}{dt} = -k(v - v_p) - \left(\frac{df}{dt}(\sigma_0 - P(t)) - \frac{dP}{dt}f(t)\right) \tag{3}$$

On multiplie par $\frac{d_c}{v_p b\sigma_0}$ (idem que le cas sans pression de fluide) :

$$\left(\bar{\eta} + \frac{\alpha}{\bar{v}}(1 - \frac{P(t)}{\sigma_0})\right)\frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} = -\kappa(\bar{v} - 1) + (\bar{v} - \frac{1}{\bar{\theta}})(1 - \frac{P(t)}{\sigma_0}) + \left(f_0 + a\ln(\bar{v}) + b\ln(\bar{\theta})\right)\frac{d_c}{v_p b\sigma_0}\frac{dP}{dt} \tag{4}$$

Or, on a:

$$\frac{P(t)}{\sigma_0} = \bar{P_\infty} erfc(\frac{\bar{r}}{2\sqrt{\bar{c}\bar{t}}}) \tag{5}$$

$$\frac{d_c}{v_p b\sigma_0}\frac{dP}{dt} = \frac{1}{b}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\bar{P_\infty}}{\bar{t}}\frac{\bar{r}}{\sqrt{\bar{c}\bar{t}}}e^{-\left(\frac{\bar{r}}{2\sqrt{\bar{c}\bar{t}}}\right)^2} \tag{6}$$

Les variables adimensionnées étant:

$$\bar{r} = \frac{r}{L^\star} = \frac{r}{\frac{\mu d_c}{b\sigma_0}}, \qquad \bar{c} = c\frac{b^2\sigma_0^2}{v_p\mu^2 d_c}, \qquad \bar{P_\infty} = \frac{P_\infty}{\sigma_0}$$

$$\boxed{\frac{-\kappa(\bar{v} - 1) + (\bar{v} - \frac{1}{\bar{\theta}})(1 - \bar{P_\infty} erfc(\frac{\bar{r}}{2\sqrt{\bar{c}\bar{t}}})) + \left(\frac{f_0}{b} + \alpha\ln(\bar{v}) + \ln(\bar{\theta})\right)\frac{\bar{P_\infty}}{\bar{t}}\frac{\bar{r}}{2\sqrt{\pi\bar{c}\bar{t}}}e^{-\left(\frac{\bar{r}}{2\sqrt{\bar{c}\bar{t}}}\right)^2}}{\bar{\eta}\bar{v} + \alpha(1 - \bar{P_\infty} erfc(\frac{\bar{r}}{2\sqrt{\bar{c}\bar{t}}}))}d\bar{t} = \frac{d\bar{v}}{\bar{v}}} \tag{7}$$

2 En rajoutant un angle ϕ

L'équation (3) devient alors:

$$\eta\frac{dv}{dt} = -k(v\sin(\phi) - v_p)\sin(\phi) - \left(\frac{df}{dt}(\sigma(t) - P(t)) + \frac{d(\sigma - P)}{dt}f(t)\right) \tag{8}$$

L'équation finale précédente (7) devient:

$$\boxed{\frac{-\kappa(\bar{v}\sin(\phi)-1)\sin(\phi)+(\bar{v}-\frac{1}{\bar{\theta}})(\frac{\sigma(t)}{\sigma_0}-\frac{P(t)}{\sigma_0})-\left(\frac{f_0}{b}+\alpha\ln(\bar{v})+\ln(\bar{\theta})\right)\frac{d(\sigma-P)}{dt}\frac{d_c}{v_p\sigma_0}}{\bar{\eta}\bar{v}+\alpha(\frac{\sigma(t)}{\sigma_0}-\frac{P(t)}{\sigma_0})}d\bar{t}=\frac{d\bar{v}}{\bar{v}}} \tag{9}$$