

Modélisation d'une faille à proximité d'une zone d'injection de fluide (géothermie profonde)

Léonard Duval-Laude

Novembre 2025

1 Modèle avec la pression de fluide (cas horizontal $\phi = \pi/2$)

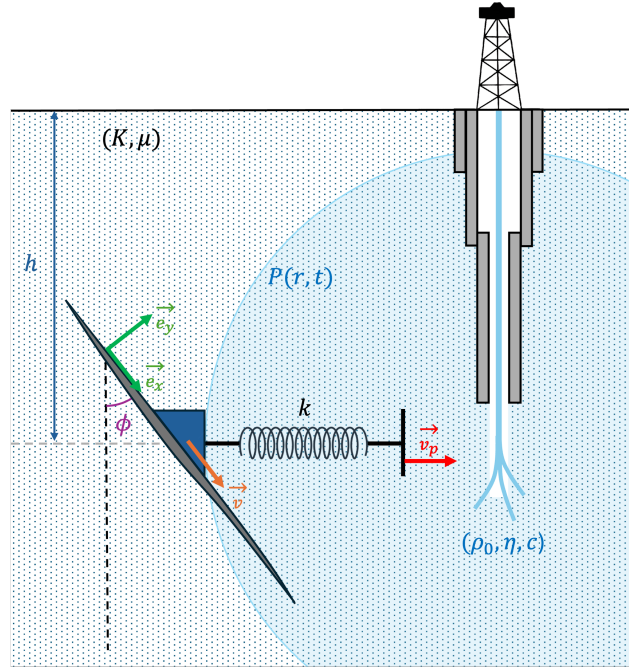


Figure 1: Modélisation d'une faille située à une distance r du point où le fluide est injecté par la centrale de géothermie profonde.

D'après l'article "JGR Solid Earth - 2015 - Segall - Injection induced seismicity Poroelastic and earthquake nucleation effects", on a l'expression de la pression fluide en fonction du temps t à une distance r du point d'injection (où q est le débit volumique, K la perméabilité du milieu, η la viscosité dynamique et ρ_0 la masse volumique du fluide) :

$$P(t) = \frac{q}{4\pi\rho_0 r} \frac{\eta}{K} \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{ct}}\right) = P_\infty \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\tau}{t}}\right) \quad (1)$$

avec :

$$P_\infty = \frac{q}{4\pi\rho_0 r} \frac{\eta}{K}, \quad \tau = \frac{r^2}{4c}$$

En l'absence de pression fluide, seule la pression lithostatique σ_0 s'exerce: $\sigma_0 = \rho gh$ (ρ la masse volumique moyenne de la croûte continentale)

La pression de fluide "soulage" la contrainte normale ($\sigma_{eff} = \sigma_0 - P(t)$) et on a:

$$\eta v = -k(l^* + \delta - v_p t) - f(t)(\sigma_0 - P(t)) \quad (2)$$

On dérive par rapport au temps :

$$\eta \frac{dv}{dt} = -k(v - v_p) - \left(\frac{df}{dt}(\sigma_0 - P(t)) - \frac{dP}{dt} f(t) \right) \quad (3)$$

On multiplie par $\frac{d_c}{v_p b \sigma_0}$ (idem que le cas sans pression de fluide) :

$$\left(\bar{\eta} + \frac{\alpha}{\bar{v}} \left(1 - \frac{P(t)}{\sigma_0} \right) \right) \frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} = -\kappa(\bar{v} - 1) + \left(\bar{v} - \frac{1}{\bar{\theta}} \right) \left(1 - \frac{P(t)}{\sigma_0} \right) + (f_0 + a \ln(\bar{v}) + b \ln(\bar{\theta})) \frac{d_c}{v_p b \sigma_0} \frac{dP}{dt} \quad (4)$$

Or, on a :

$$\frac{P(t)}{\sigma_0} = \bar{P}_\infty \operatorname{erfc}\left(\frac{\bar{r}}{2\sqrt{\bar{c}\bar{t}}}\right) = \bar{P}_\infty \operatorname{erfc}\left(\frac{\bar{\xi}}{2}\right) \quad (5)$$

$$\frac{d_c}{v_p b \sigma_0} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{b} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\bar{P}_\infty}{\bar{t}} \frac{\bar{r}}{\sqrt{\bar{c}\bar{t}}} e^{-\left(\frac{\bar{r}}{2\sqrt{\bar{c}\bar{t}}}\right)^2} = \frac{1}{b} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\bar{P}_\infty}{\bar{t}} \bar{\xi} e^{-\left(\frac{\bar{\xi}}{2}\right)^2} \quad (6)$$

Les variables adimensionnées étant:

$$\bar{r} = \frac{r}{L^*} = \frac{r}{\frac{\mu d_c}{b \sigma_0}}, \quad \bar{c} = c \frac{b^2 \sigma_0^2}{v_p \mu^2 d_c}, \quad \bar{P}_\infty = \frac{P_\infty}{\sigma_0}, \quad \bar{\xi} = \frac{\bar{r}}{\sqrt{\bar{c}\bar{t}}}$$

On en déduit la formule utilisée dans le programme Python :

$$\boxed{\frac{-\kappa(\bar{v} - 1) + \left(\bar{v} - \frac{1}{\bar{\theta}} \right) \left(1 - \bar{P}_\infty \operatorname{erfc}\left(\frac{\bar{\xi}}{2}\right) \right) + \left(\frac{f_0}{b} + \alpha \ln(\bar{v}) + \ln(\bar{\theta}) \right) \frac{\bar{P}_\infty}{\bar{t}} \frac{\bar{\xi}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\bar{\xi}}{2}\right)^2}}{\bar{\eta}\bar{v} + \alpha \left(1 - \bar{P}_\infty \operatorname{erfc}\left(\frac{\bar{\xi}}{2}\right) \right)} d\bar{t} = \frac{d\bar{v}}{\bar{v}}} \quad (7)$$

2 Modèle avec la pression de fluide (angle ϕ quelconque)

L'équation (3) devient alors:

$$\eta \frac{dv}{dt} = -k(v \sin(\phi) - v_p) \sin(\phi) - \left(\frac{df}{dt}(\sigma(t) - P(t)) + \frac{d(\sigma - P)}{dt} f(t) \right) \quad (8)$$

L'équation finale précédente (7) devient:

$$\boxed{\frac{-\kappa(\bar{v} \sin(\phi) - 1) \sin(\phi) + \left(\bar{v} - \frac{1}{\bar{\theta}} \right) \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} - \frac{P(t)}{\sigma_0} \right) - \left(\frac{f_0}{b} + \alpha \ln(\bar{v}) + \ln(\bar{\theta}) \right) \frac{d(\sigma - P)}{dt} \frac{d_c}{v_p \sigma_0}}{\bar{\eta}\bar{v} + \alpha \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} - \frac{P(t)}{\sigma_0} \right)} d\bar{t} = \frac{d\bar{v}}{\bar{v}}} \quad (9)$$

Sachant que :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\phi) - k(v_p t - \sin(\phi)\delta - l^*) \cos \phi \quad (10)$$

3 Prise en compte de la poro-élasticité du milieu

D'après l'article "JGR Solid Earth - 2015 - Segall - Injection induced seismicity Poroelastic and earthquake nucleation effects", la prise en compte de la poro-élasticité du milieu se traduit par l'ajout d'un tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$, dont on peut en déduire la traction \vec{T} associé:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \underline{\sigma} \vec{e}_y \\ \vec{T} &= \left((\sigma_{XX} - \sigma_{YY}) \frac{\sin(2\phi)}{2} - \sigma_{XY} \cos(2\phi) \right) \vec{e}_x + \left(\sigma_{XY} \sin(2\phi) + \sigma_{XX} \cos(\phi)^2 + \sigma_{YY} \sin(\phi)^2 \right) \vec{e}_y \\ \vec{T} &= \sigma_{pe}^{(x)} \vec{e}_x + \sigma_{pe}^{(y)} \vec{e}_y \end{aligned}$$

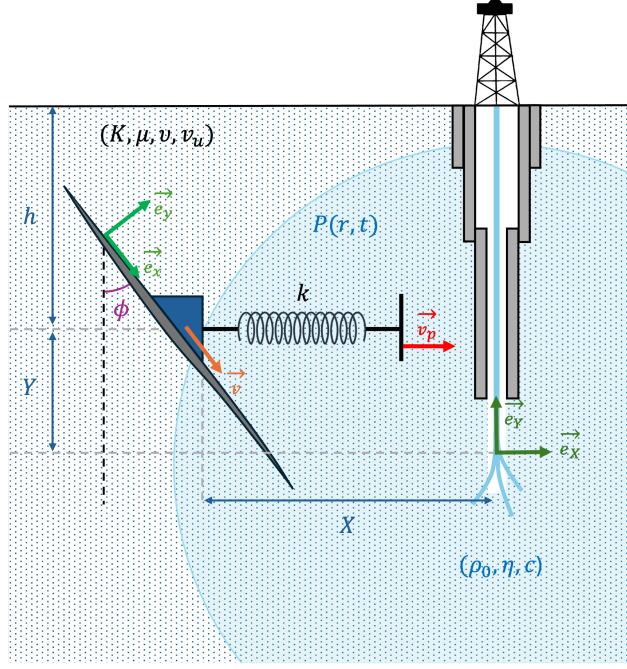


Figure 2: Modélisation d'une faille située à une distance r du point où le fluide est injecté par la centrale de géothermie profonde.

$$\sigma_{ij}(t) = -\frac{q(\lambda_u - \lambda)\mu}{4\pi\rho_0 c r \alpha(\lambda_u + 2\mu)} \left\{ \delta_{ij} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2}\right) - 2\frac{g(\xi)}{\xi^2} \right] + \frac{X_i X_j}{r^2} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2}\right) + 6\frac{g(\xi)}{\xi^2} \right] \right\}. \quad (11)$$

L'équation (8) devient alors:

$$\eta \frac{dv}{dt} = -k(v \sin(\phi) - v_p) \sin(\phi) - \left(\frac{df}{dt} (\sigma(t) + \sigma_{pe}^{(y)}(t) - P(t)) + \frac{d(\sigma + \sigma_{pe}^{(y)} - P)}{dt} f(t) \right) + \frac{d\sigma_{pe}^{(x)}}{dt} \quad (12)$$