

with pressure(t)

Léonard Duval-laude

Novembre 2025

1 Cas horizontal

D'après l'article "JGR Solid Earth - 2015 - Segall - Injection induced seismicity Poroelastic and earthquake nucleation effects", on a l'expression de la pression fluide en fonction du temps t à une distance r du point d'injection (où q est le débit volumique, k la perméabilité, η la viscosité dynamique et ρ_0 la masse volumique du fluide) :

$$P(t) = \frac{q}{4\pi\rho_0 r} \frac{\eta}{k} erfc(\frac{r}{2\sqrt{ct}}) = P_\infty erfc(\frac{r}{2\sqrt{ct}}) \quad (1)$$

La pression de fluide "soulage" la contrainte normale et on a:

$$\eta v = -k(l^* + \delta - v_p t) - f(t)(\sigma - P(t)) \quad (2)$$

On dérive par rapport au temps :

$$\eta \frac{dv}{dt} = -k(v - v_p) - \left(\frac{df}{dt}(\sigma_0 - P(t)) - \frac{dP}{dt}f(t) \right) \quad (3)$$

On multiplie par $\frac{d_c}{v_p b \sigma_0}$ (idem que le cas sans pression de fluide) :

$$\left(\bar{\eta} + \frac{\alpha}{\bar{v}} (1 - \frac{P(t)}{\sigma_0}) \right) \frac{d\bar{v}}{dt} = -\kappa(\bar{v} - 1) + (\bar{v} - \frac{1}{\bar{\theta}})(1 - \frac{P(t)}{\sigma_0}) + (f_0 + a \ln(\bar{v}) + b \ln(\bar{\theta})) \frac{d_c}{v_p b \sigma_0} \frac{dP}{dt} \quad (4)$$

Or, on a:

$$\frac{P(t)}{\sigma_0} = \bar{P}_\infty erfc(\frac{\bar{r}}{2\sqrt{\bar{c}\bar{t}}}) \quad (5)$$

$$\frac{d_c}{v_p b \sigma_0} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{b} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\bar{P}_\infty}{\bar{t}} \frac{\bar{r}}{\sqrt{\bar{c}\bar{t}}} e^{-\left(\frac{\bar{r}}{2\sqrt{\bar{c}\bar{t}}}\right)^2} \quad (6)$$

Les variables adimensionnées étant:

$$\bar{r} = \frac{r}{L^*} = \frac{r}{\frac{\mu d_c}{b \sigma_0}}, \quad \bar{c} = c \frac{b^2 \sigma_0^2}{v_p \mu^2 d_c}, \quad \bar{P}_\infty = \frac{P_\infty}{\sigma_0}$$

$$\frac{-\kappa(\bar{v} - 1) + (\bar{v} - \frac{1}{\bar{\theta}})(1 - \bar{P}_\infty erfc(\frac{\bar{r}}{2\sqrt{\bar{c}\bar{t}}})) + \left(\frac{f_0}{b} + \alpha \ln(\bar{v}) + \ln(\bar{\theta}) \right) \frac{\bar{P}_\infty}{\bar{t}} \frac{\bar{r}}{2\sqrt{\bar{c}\bar{t}}} e^{-\left(\frac{\bar{r}}{2\sqrt{\bar{c}\bar{t}}}\right)^2}}{\bar{\eta}\bar{v} + \alpha(1 - \bar{P}_\infty erfc(\frac{\bar{r}}{2\sqrt{\bar{c}\bar{t}}}))} d\bar{t} = \frac{d\bar{v}}{\bar{v}} \quad (7)$$

2 En rajoutant un angle ϕ

L'équation (3) devient alors:

$$\eta \frac{dv}{dt} = -k(v \sin(\phi) - v_p) \sin(\phi) - \left(\frac{df}{dt}(\sigma(t) - P(t)) + \frac{d(\sigma - P)}{dt}f(t) \right) \quad (8)$$

L'équation finale précédente (7) devient:

$$\boxed{\frac{-\kappa(\bar{v} \sin(\phi) - 1) \sin(\phi) + (\bar{v} - \frac{1}{\theta})(\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} - \frac{P(t)}{\sigma_0}) - \left(\frac{f_0}{b} + \alpha \ln(\bar{v}) + \ln(\bar{\theta})\right) \frac{d(\sigma-P)}{dt} \frac{d_c}{v_p \sigma_0}}{\bar{\eta}\bar{v} + \alpha(\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} - \frac{P(t)}{\sigma_0})} d\bar{t} = \frac{d\bar{v}}{\bar{v}}} \quad (9)$$

Sachant que :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\phi) - k(v_p t - \sin(\phi)\delta - l^*) \cos \phi \quad (10)$$