ШУТИС, Мэдээлэл Холбооны Технологийн Сургууль

# F.CS209 Компьютерийн график

## Лекц 2 - Шугаман алгебрийн үндсэн ойлголтууд

Dr. Juan Carlos Niebles
Stanford AI Lab

Prof. Fei–Fei Li
Stanford Vision Lab

Компьютерийн
Ухааны салбар
Х.Хулан

# Агуулга

- Вектор болон матриц
  - Мартицын үндсэн үйлдлүүд
  - Тусгай матриц
- Хувиргалтын матриц
  - Ижил(Homogeneous) координат
  - хувиргах
- Урвуу матриц
- Матрицын ранг
- Singular Value Decomposition- SVD
  - Зургын файлын хэмжээг шахахад хэрэглэх
  - Гол компонентийн дүн шинжилгээнд ашиглах (Principal Component Analysis-PCA)
  - Компьютер алгоритм

# Агуулга

- Вектор болон матриц
  - Мартицын үндсэн үйлдлүүд
  - Тусгай матриц
- Хувиргалтын матриц
  - Ижил(Homogeneous) координат
  - Шилжүүлэх
- Урвуу матриц
- Матрицын эгнээ
- Ганц тооны задаргаа (Singular Value Decomposition- SVD)
  - Зургын файлын хэмжээг шахахад хэрэглэх
  - Гол компонентийн дун шинжилгээнд ашиглах (Principal Component Analysis-PCA)
  - Компьютер алгоритм

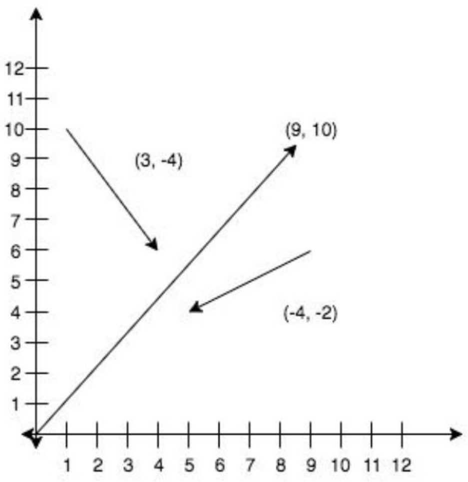
Вектор болон матрицууд нь ямар нэг зүйлийг илэрхийлэх дараалсан тоонуудын цуглуулга: орон зайн шилжилт, маштаблах хүчин зүйл, цэгийн тодрол гэх мэт. Бид эдгээр зүйлсийн нийтлэг хэрэглээ, стандарт үйлдлүүдийг тодорхойлно.

# Вектор

- Баганан вектор

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

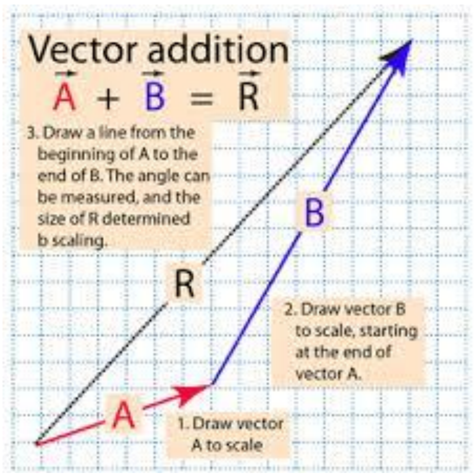
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$




- Мөрөн вектор

$$\mathbf{v}^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$$




$T$ Хувиргалтын үйлдлийг илэрхийлнэ.

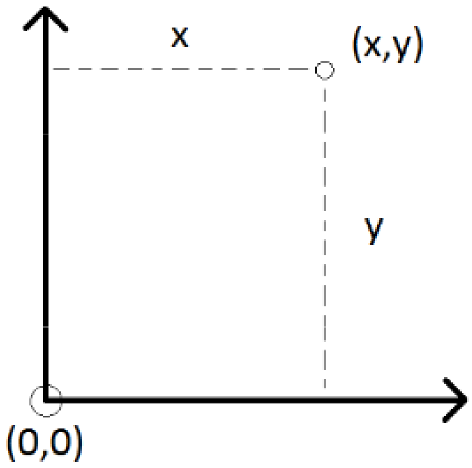
# Вектор

- Бид 2D point дүрслэхэд баганан векторыг (2x1) ашиглана.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

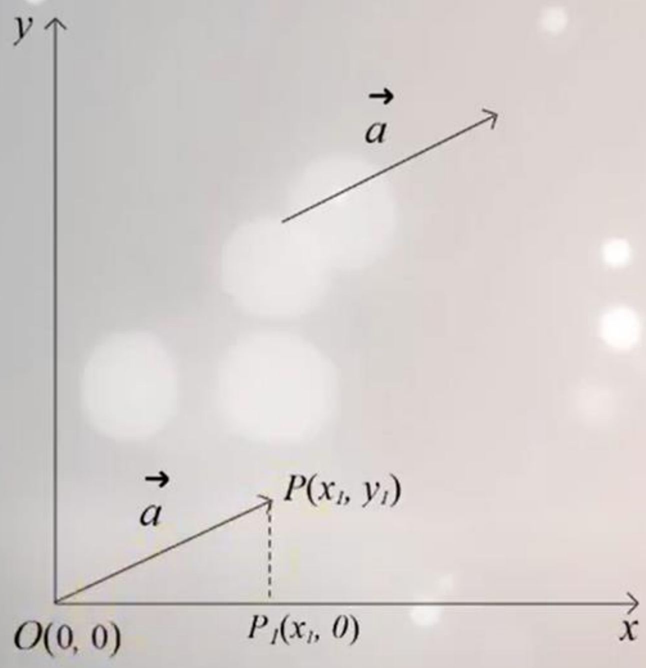
- MATLAB дээр програмчлахдаа векторын байршилыг мөрөн хэлбэрээр авч үзнэ.
- MATLAB дээр **V'** гэж бичин *V* векторыг шилжүүлнэ. (Гэвч хичээлийн материалд бид ихэнхдээ шилжилтийг заахдаа $V^T$ ашиглана. )

# Цэгийн дүрслэл (Point representation)




- Координат өнцөг (суурь вектор)
- Вектор нь 2D, 3D орон зай дахь эхлэлийг (offset) дүрслэнэ.

# Вектор

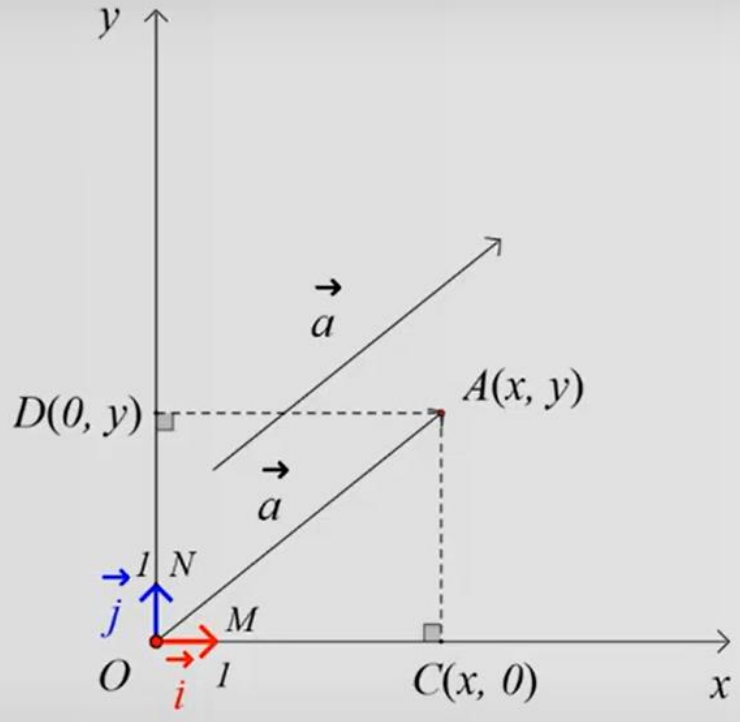



Хавтгайн системд $\vec{a}$ вектор өгөгдсөн байг. $\overrightarrow{OP}=\vec{a}$ байх $\overrightarrow{OP}$ векторыг байгуулъя.

$\overrightarrow{OP}$ векторын координатыг олъё.
Эхлэл төгсгөлийн цэгээр нь тэмдэглэсэн векторын координатыг олохдоо төгсгөлийн цэгийн координатаас эхлэлийн цэгийн координатыг хасдаг учир $\overrightarrow{OP}=(x_1 - 0, y_1 - 0)=(x_1, y_1)$ буюу $P$ цэгийн координат нь $\overrightarrow{OP}$ векторын координат болно.

Координатын эх дээр эхлэлтэй векторыг ***радиус вектор*** гэж нэрлэнэ. Ө.х $\overrightarrow{OP}$ нь радиус вектор юм.

# Вектор




Координатын хавтгайн системд $\vec{a}$ вектор авъя.
Координатын эх дээр эхлэл нь байх $\vec{a}$ вектортой тэнцүү $\overrightarrow{OA}$ вектор байгуулъя.

$A$ цэгээс координатын тэнхлэгүүдэд буулгасан перпендикулярын суурь $C(x, 0)$, $D(0, y)$ байг.
$M(1, 0)$, $N(0, 1)$ цэгт төгсгөлтэй $\vec{i}=\overrightarrow{OM}$, $\vec{j}=\overrightarrow{ON}$ суурь нэгж векторыг байгуулъя.

$\vec{a}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=x\cdot \vec{i}+y\cdot \vec{j}$ болно.

# Матриц

- A матриц нь m мөр n баганатай тоонуудын жагсаалт юм. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Хэрэв $m = n$, $\mathbf{A}$ матрицыг квадрат матриц гэж нэрлэнэ.

# Зураг

$$
= \begin{bmatrix} 193 & 180 & 210 & 112 & 125 \\ 189 & 8 & 177 & 97 & 114 \\ 100 & 71 & 81 & 195 & 165 \\ 167 & 12 & 242 & 203 & 181 \\ 44 & 25 & 9 & 48 & 192 \end{bmatrix}
$$

- MATLAB-д зургыг пикселийн тодролын матрицаар дүрсэлнэ.

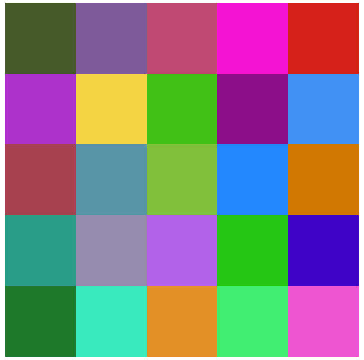
- Матрицын координат нь Декартын координат биш гэдгийг тэмдэглэж хэлэх нь зүйтэй. Зүүн дээд өнцөг нь [y,x] = (1,1)

# Өнгөт зураг

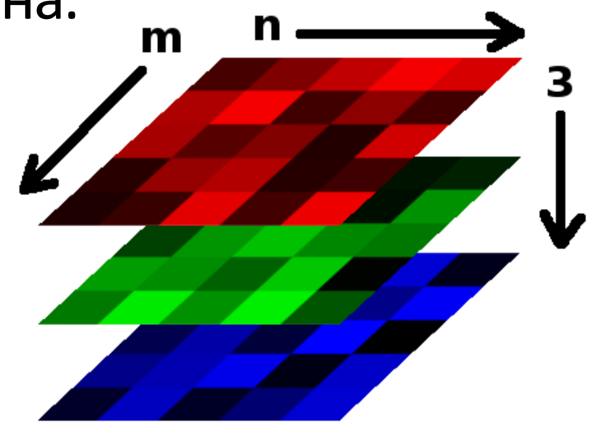
- Хар цагаан зураг пиксел бүр нэг тоо байх бөгөөд m × n матрицад хадаглагдана.

- Өнгөт зургийн хувьд пиксел бүрт 3 сувагтай байна – улаан,  ногоон, хөх өнгөний тодрол (RGB)

- m × n × 3 матрицад хадаглагдана.



Fei-Fei Li



# Матрицын үндсэн үйлдлүүд

Бид дараах  үйлдүүдийг авч үзнэ :

- Нэмэх
- Масштаблах
- Скаляр үржвэр
- Үржвэр
- Хөрвүүлэх (transpose)
- Урвуу / pseudoinverse
- Тодорхойлогч / trace

# Матриц дээрх үйлдлүүд

- Нэмэх

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1 & b+2 \\ c+3 & d+4 \end{bmatrix}$$

Зөвхөн скаляр болон тохирох хэмжигдэхүүнтэй матрицыг нэмнэ.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + 7 = \begin{bmatrix} a+7 & b+7 \\ c+7 & d+7 \end{bmatrix}$$

- Масштаблах (Scaling)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times 3 = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}$$

# Матриц дээрх үйлдлүүд

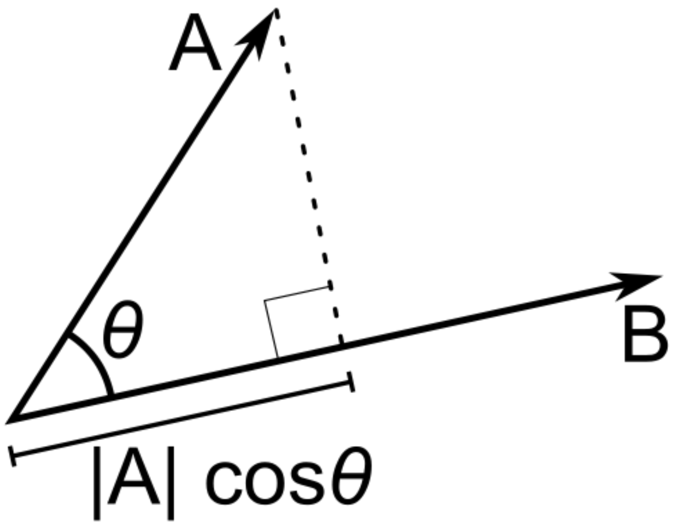
Скаляр үржвэр

x·y = |x||y|Cos( *x ба y хоорондох өнцөг*)

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{(scalar)}$$

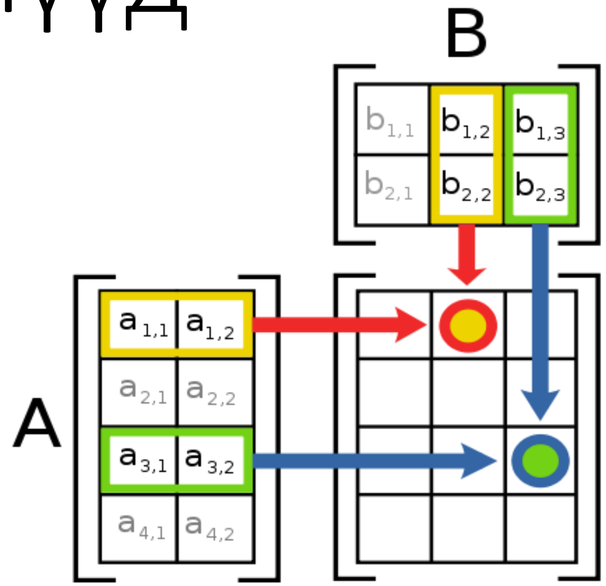
# Матриц үйлдлүүд

- Векторын скаляр үржвэр (Inner product)
  - Хэрэв B нэгж вектор бол A·B нь B чиглэлд орших A-ын уртыг авна.



# Матриц үйлдлүүд

- Үржүүлэх
- AB –ын үр дүн:




- Утга бүр нь A-ын мөр ба B-ын баганы элементүүдийн скаляр үржвэрийн үр дүн юм.

# Матриц үйлдлүүд

- Үржвэрийн жишээ:

A x B

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 6\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}10 & 14\\ 34 & 54\end{bmatrix}$$

$$0 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 14$$

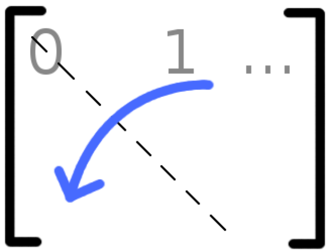
  – Матрицын гарах утга бүр нь зүүн матрицын мөрийн элементүүдийг баруун матрицын баганын элементүүдтэй харгалзуулсан  скаляр үржвэрийн үр дүн байна.

# Матриц үйлдлүүд

- Зэрэг дэвшүүлэх
  - Тогтсон журмын дагуу, АА марицыг $A^2$ , ААА матрицыг $A^3$ гэх мэтээр авч үзнэ.
  - Мэдээж зөвхөн квадрат матрицыг ингэж үржүүлж болно.

# Матриц үйлдлүүд

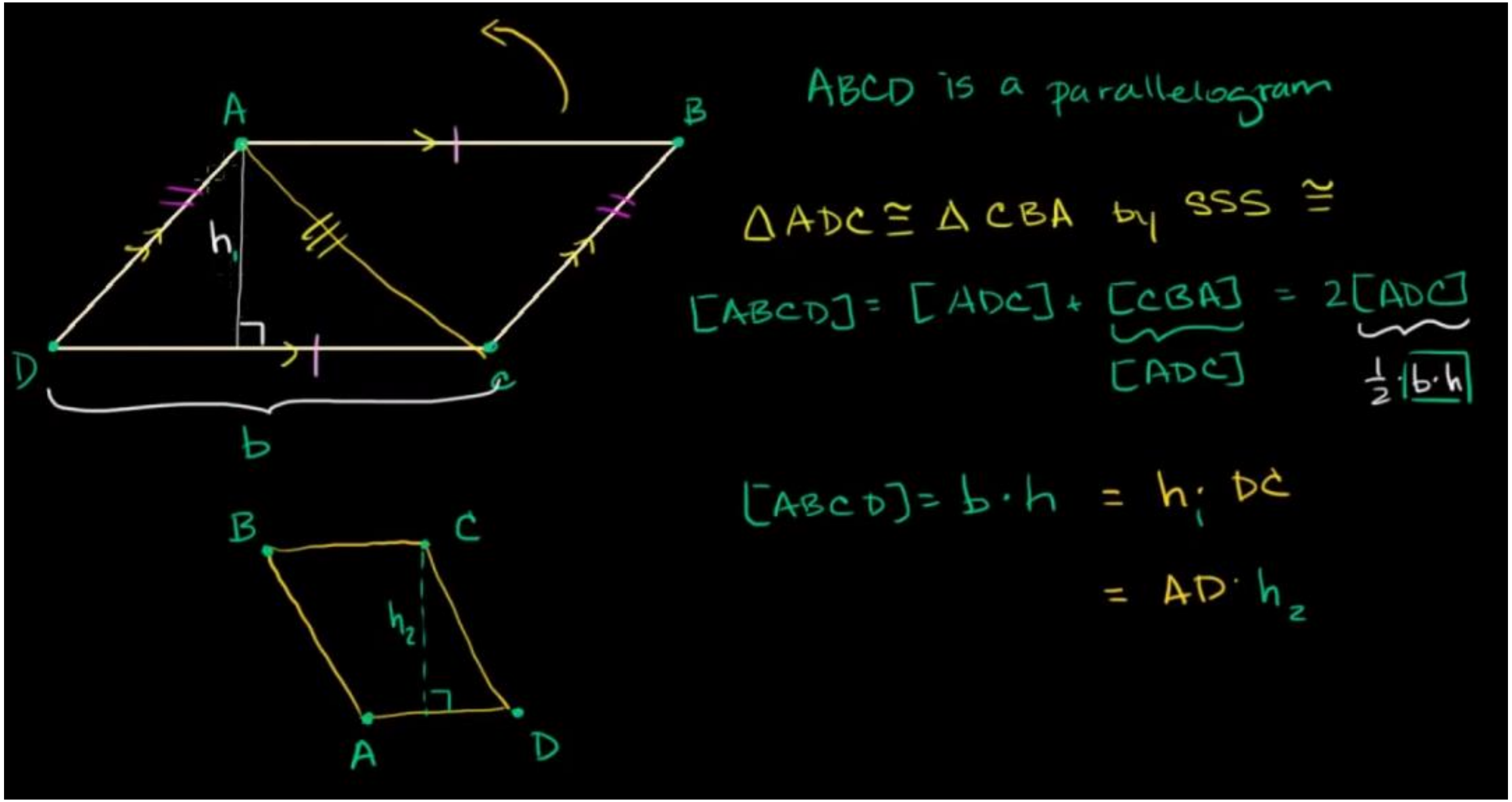
- Хөрвүүлэлт – матриц эргүүлэх, мөр нь багана  болно.




$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

- Тэнцэтгэл нь:

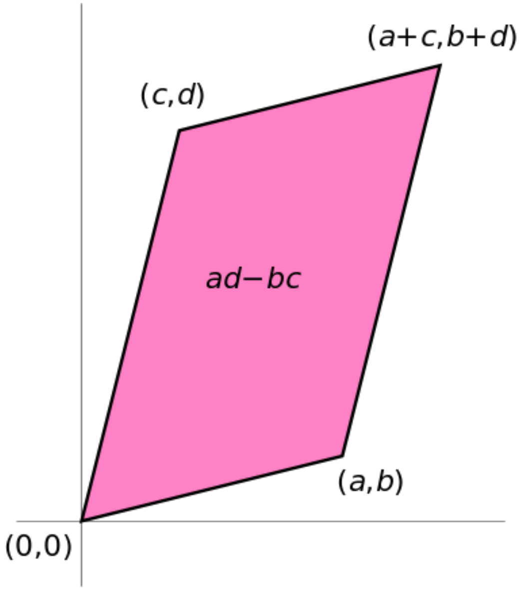
$$(ABC)^T = C^T B^T A^T$$



ABCD is a parallelogram
ΔADC ≅ ΔCBA by SSS ≅
[ABCD] = [ADC] + [CBA] = 2[ADC]
[ADC]
1/2 · b · h
[ABCD] = b · h = h1 · DC
= AD · h2
A
B
C
D
h1
b
h2

# Матриц үйлдлүүд

- Тодорхойлогч
  - det(A) нь скаляр утгыг буцаана.
  - Параллелограммын талбай нь матрицын мөрийн вектороор тодорхойлогдоно.




  - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$-ын хувд, $\det(\mathbf{A}) = ad - bc$
  - Шинж чанар:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$$

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$$

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ is singular}$$

# Матриц үйлдэлүүд

- Trace

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \text{sum of diagonal elements}$$

$$\mathbf{tr}(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}) = 1 + 7 = 8$$

  – Өөрчлөлтийн талаар маш олон вариантууд бий тул зарим тохиолд туршилтын маягаар хэрэглэдэг. (Хичээлийн туршид цөөн яригдана.)

  – Шинж чанар:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B})$$

# Тусгай матриц

- Нэгж матриц **I**
  - Квадрат матриц, диагональ утга 1 бусад нь 0 байх матрицыг хэлнэ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Диагональ матриц
  - Диагоналийн утгуудтай квадрат матриц, бусад нь 0 байна.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

# Тусгай матриц

- Тэгш хэмт матриц

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

- Налуу - тэгш хэмт матриц

$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -7 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

# Агуулга

- Vectors and matrices
  - Basic Matrix Operations
  - Special Matrices
- Transformation Matrices
  - Homogeneous coordinates
  - Translation
- Matrix inverse
- Matrix rank
- Singular Value Decomposition (SVD)
  - Use for Principal Component Analysis (PCA)
  - Use for image compression
  - Computer algorithm

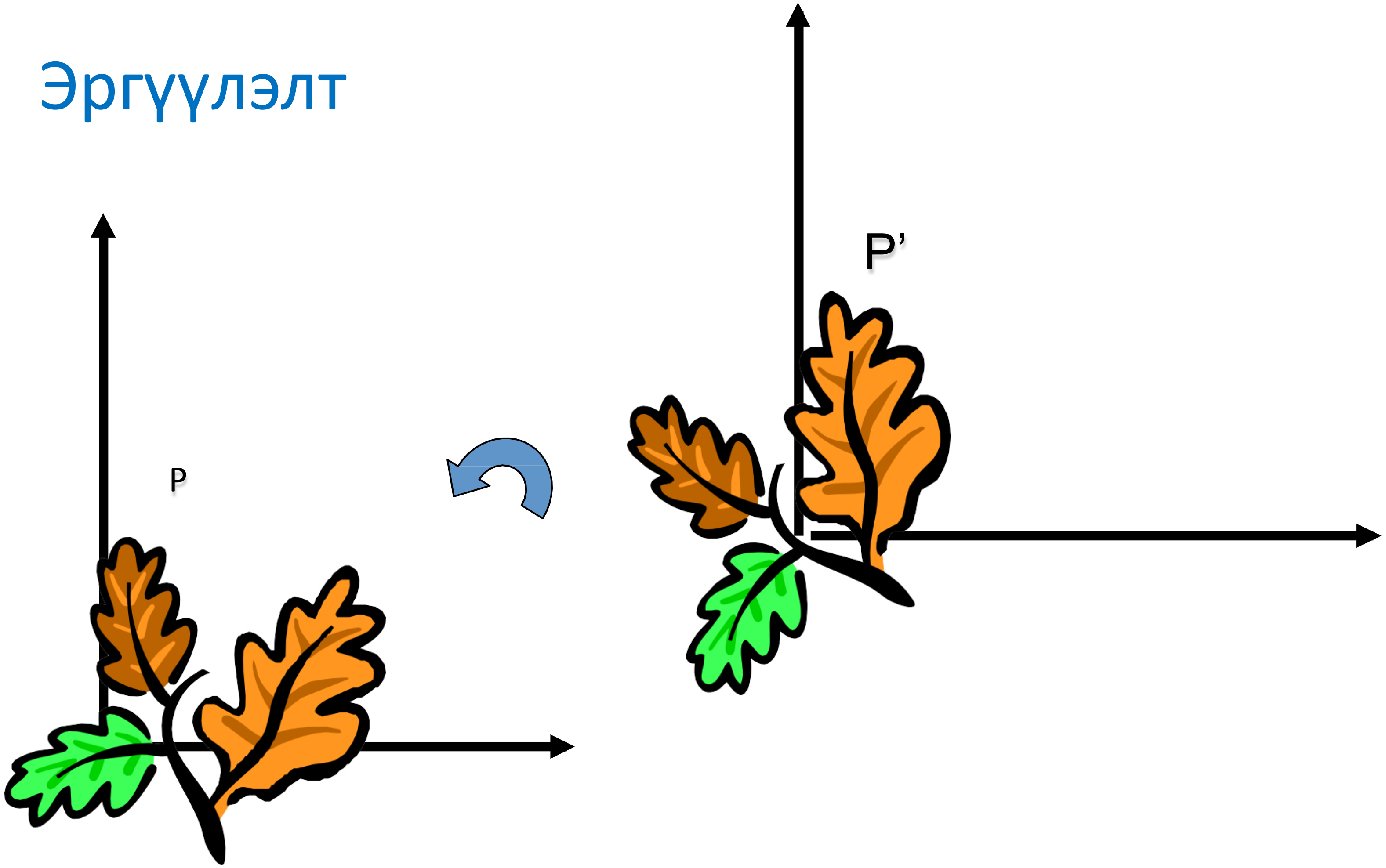
Матриц үржүүлэг нь векторуудыг хувиргахад хэрэглэгдэнэ. Энэ тохиолдолд А матрицыг хувиргалт-
-ын матриц гэж нэрлэнэ.

# Хувиргалт (Transformation)

- Матрицууд нь үржих үйлдлээр векторуудыг хувиргахад хэрэглэгдэнэ: x’= Ax
- Хамгийн энгийн нь масштабаар тооцох:

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x \\ s_y y \end{bmatrix}$$

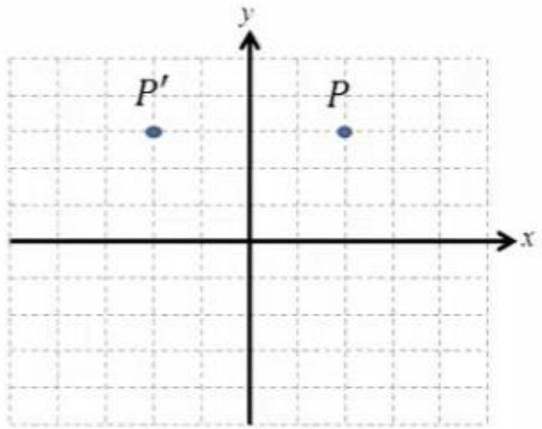
# Эргүүлэлт



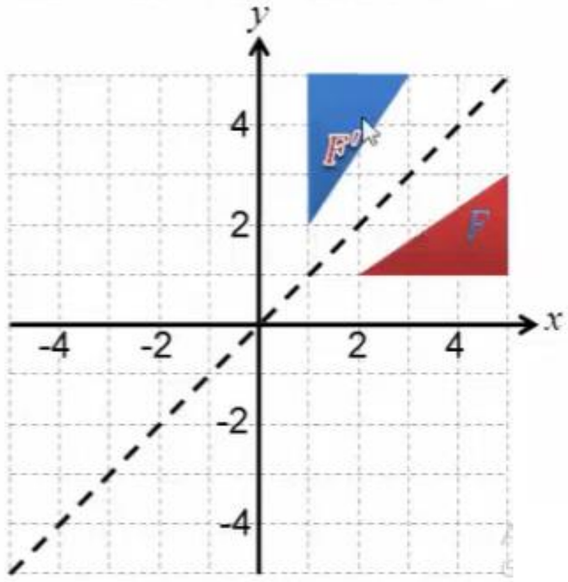

[Эргүүлэлт хувиргалтын матриц – GeoGebra]

# Эргүүлэлт

Хэрэв хавтгай дээрх хувиргалтаар $P$ цэг $P'$ цэгт шилжсэн бол $P'$ цэгийг $P$ цэгийн дүр гэнэ.



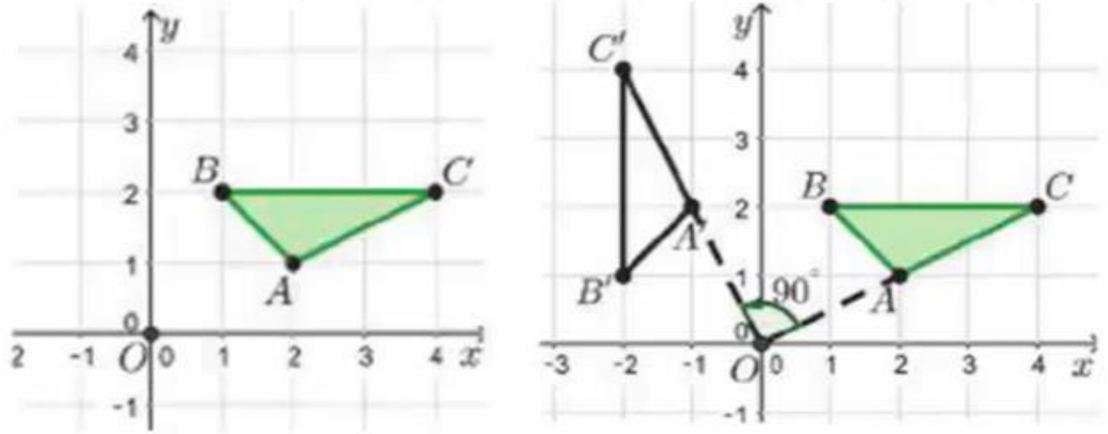

Хувиаргалтаар гарах дүр нь өөрөө байх цэгийг үл хөдлах цэг гэнэ.




$F$ дүрсийн бүх цэгийн дүрийн олонлог болох $F'$ дүрсийг $F$ дүрсийн дүр гэнэ.

# Эргүүлэлт

$ABC$ гурвалжныг координатын эх дээр төвтэй цагийн зүүний эсрэг $90^0$ өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлтээр гарах дүрийг зур.

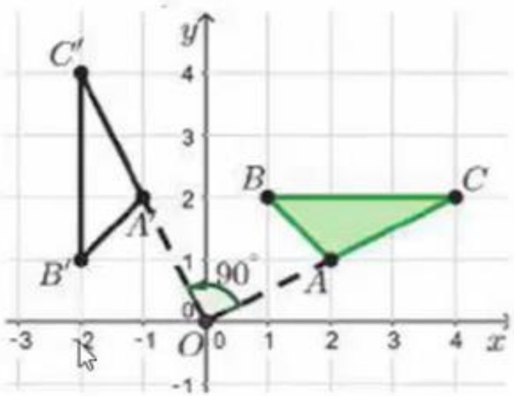



$ABC$ гурвалжны хувиргалтын матрицыг зохиоё:

$$R = \begin{pmatrix} \cos 90^0 & -\sin 90^0 \\ \sin 90^0 & \cos 90^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ болно.

# Эргүүлэлт – Хувиргалтын матриц

$ABC$ гурвалжныг координатын эх дээр төвтэй цагийн зүүний эсрэг $90^0$ өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлтээр гарах дүрийг зур.




$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ хувиргалтын матриц

$A(2;1), B(1;2), C(4;2)$ цэгүүд дээр орой гурвалжин байна.

Өгсөн цэгүүдээр матриц зохиовол $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ болно.

$ABC$ дүрсийн дүрийг $A'B'C'$ гэвэл $A', B', C'$ цэгүүдийн кординатыг олоё.

$$R \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} A' & B' & C' \\ \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$A'(-1;2), B'(-2;1), C'(-2;4)$ цэгүүд дээр орой гурвалжин нь $ABC$ гурвалжны дүр болно.