Лекц №11

Муруй ба гадаргуу
Splines, Curves and Surfaces

Боловсруулсан багш: Х.Хулан, Ч.Цэнд-Аюуш

Гөлгөр муруй ба гадаргуу (Smooth Curves and Surfaces)

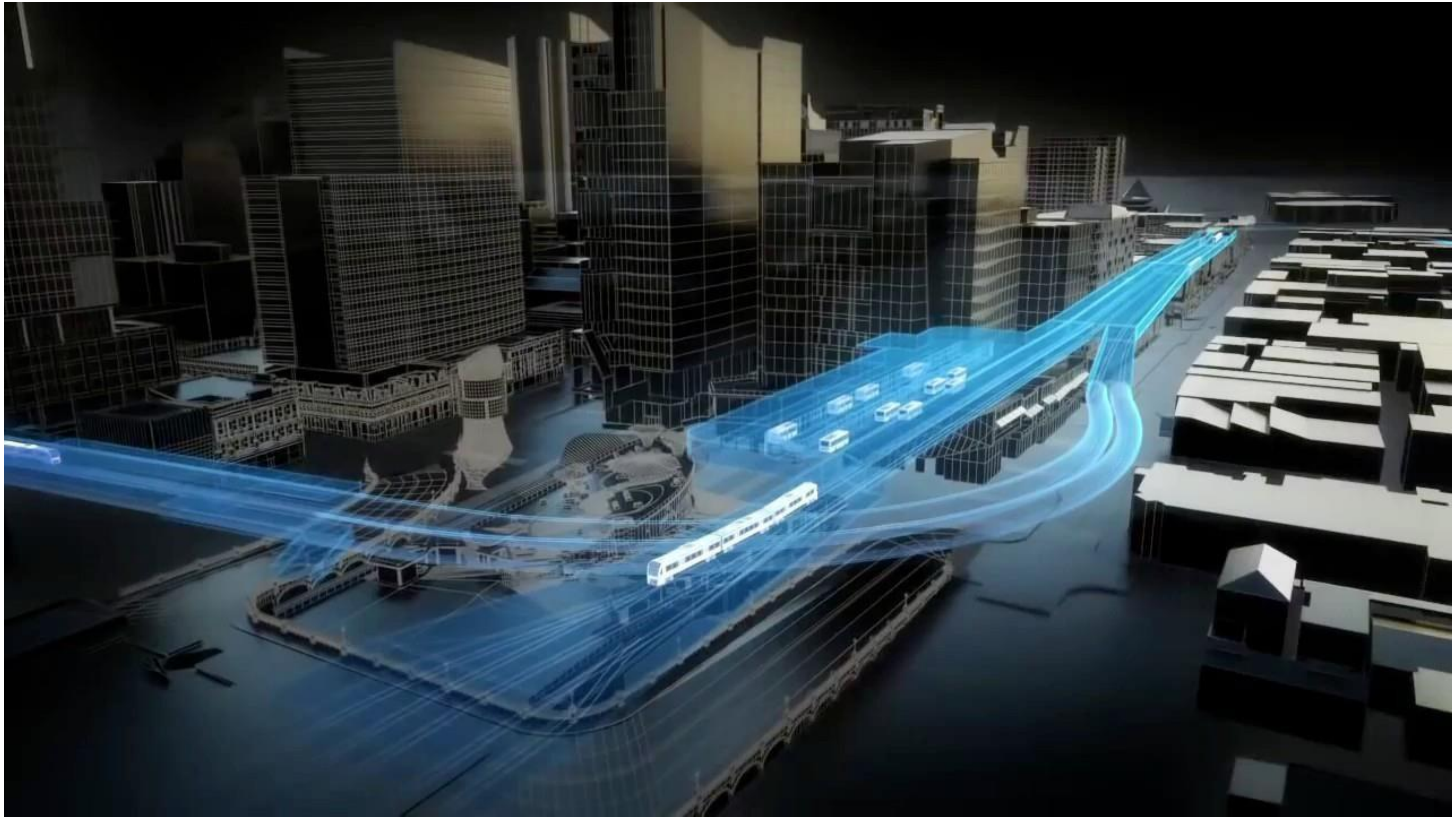
Одоогийн байдлаар бид дараах зүйлсийг хийж чадна:

- **Ирмэг, булан (lines, triangles, squares, …)**
- **Тусгай дүрс (circles, ellipses, …)**

Ихэнх аппликейшнууд нь нарийн, гөлгөр smooth хэлбэрийг шаарддаг.

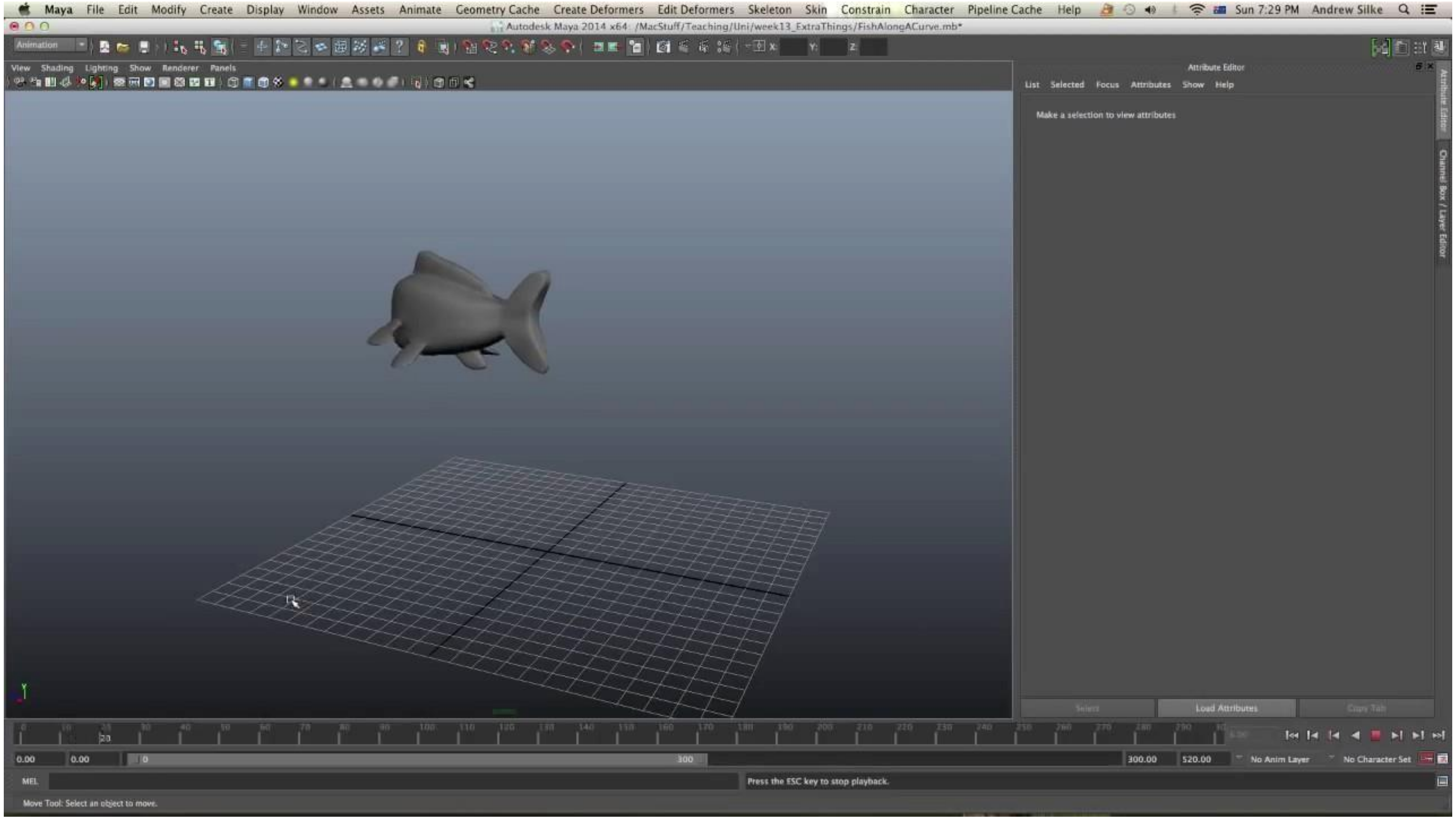
- **Camera paths (камерийн зам), vector fonts (вектор фонт), …**
- **Филтер функцүүдийг дахин тохируулах(filter functions)**
- **CAD design, object modeling (объект загварчлал), …**

Camera Paths/Камерийн зам



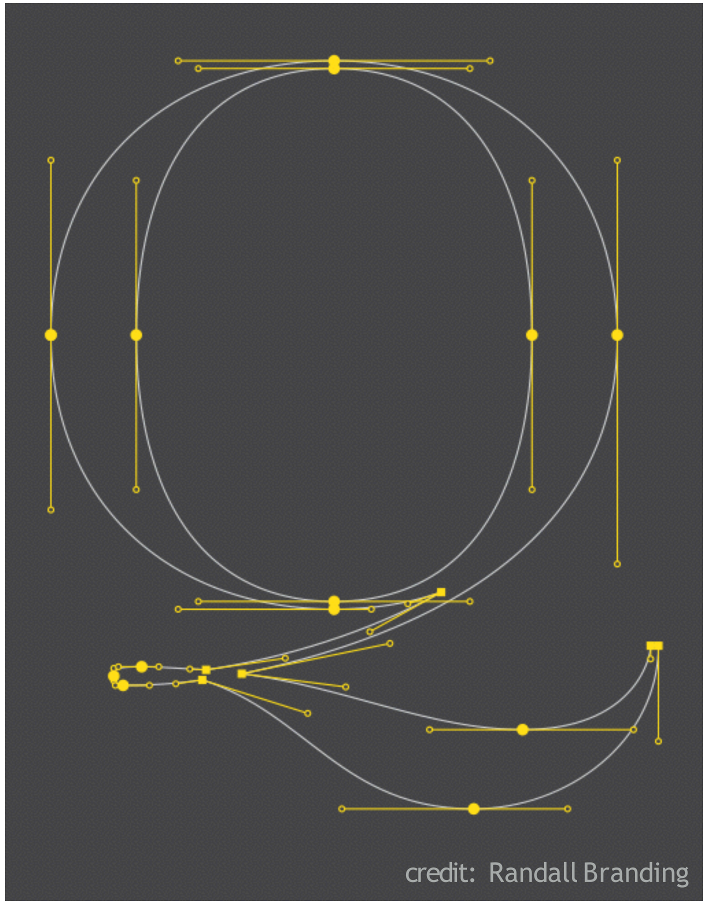
Flythrough of proposed Perth Citylink subway, https://youtu.be/rIJMuQPwr3E

Animation Curves/Хөдөлгөөнт муруй



Maya Animation Tutorial: https://youtu.be/b-o5wtZlJPc

Vector Fonts/Вектор фонт



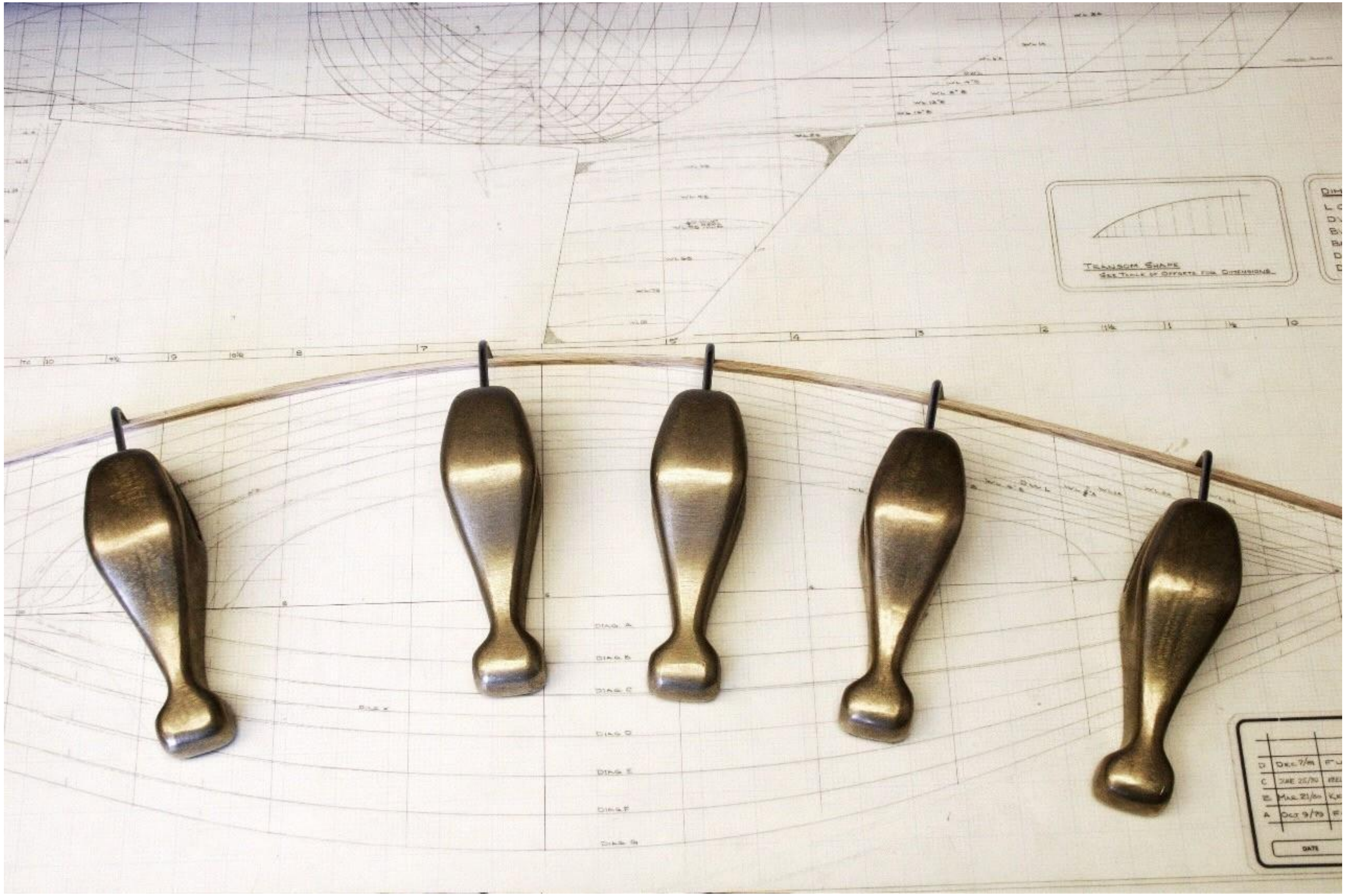
Baskerville font - represented as cubic Bézier splines

CAD Design/CAD дизайн

3D Car Modeling with Rhinoceros

Splines

Бодит зураачийн Spline



http://www.alatown.com/spline-history-architecture/

Spline Topics/Spline сэдвүүд

Интерполяци

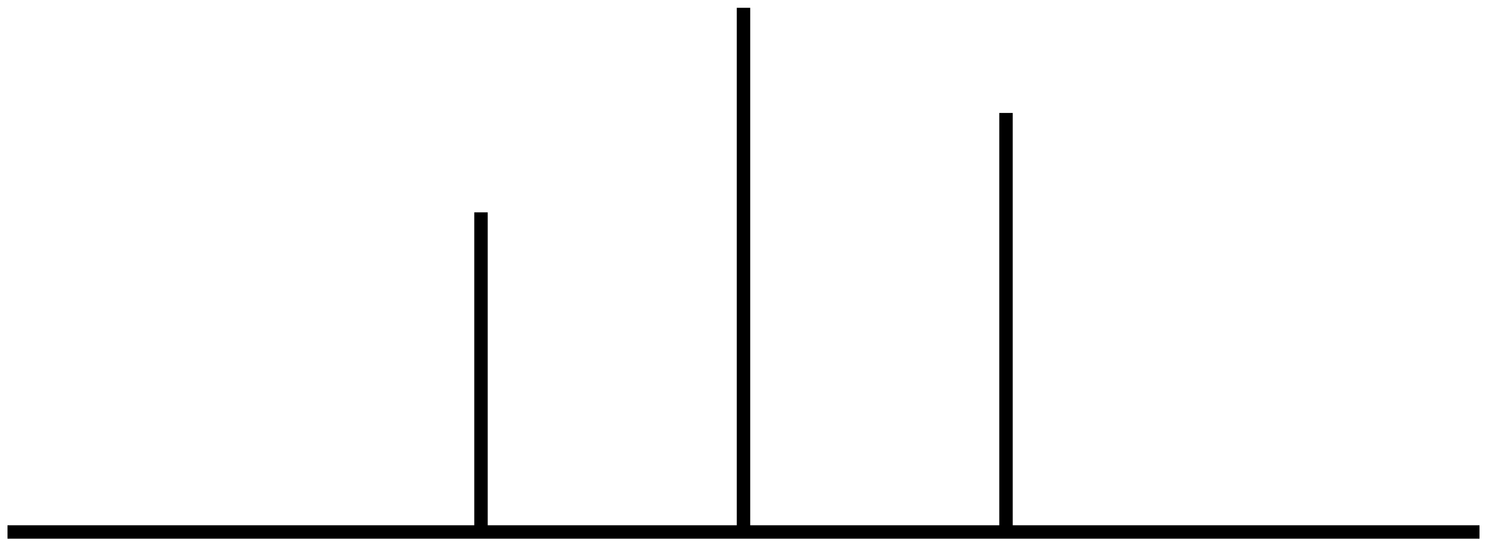
- **Cubic Hermite интерполяци**
- **Catmull-Rom интерполяци**

Bezier curves/Bezier муруй

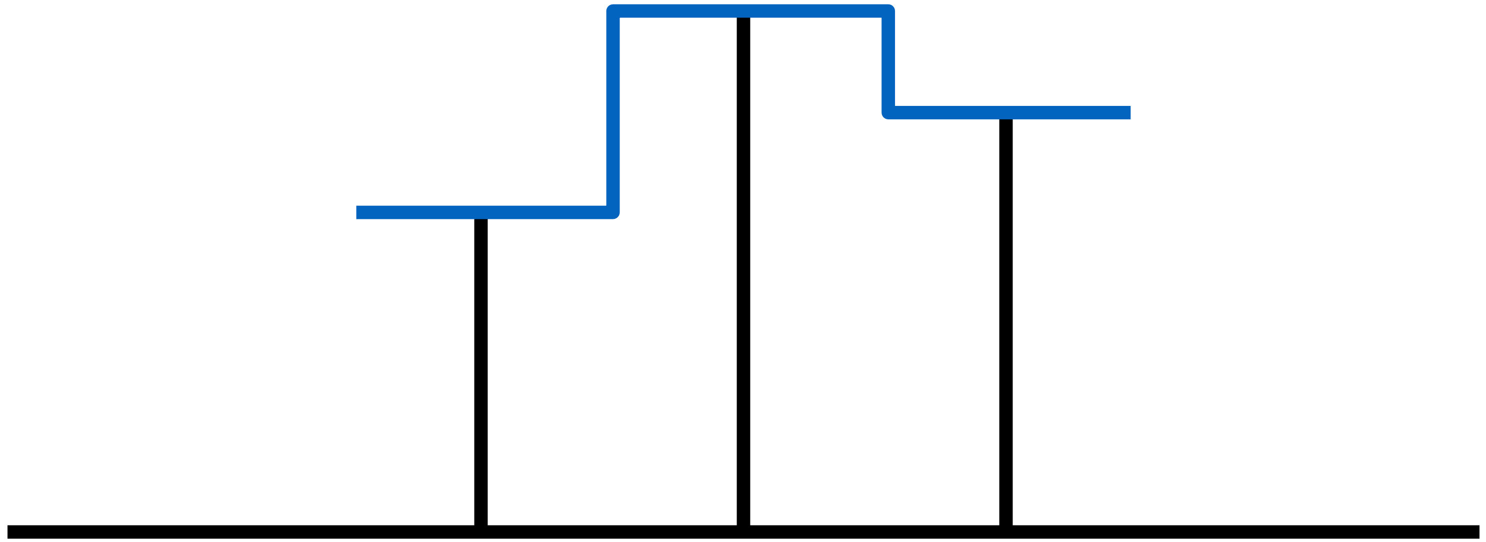
Bezier surfaces/Bezier гадаргуу

Cubic Hermite Interpolation

Зорилго: Утгуудыг интерполяцлах

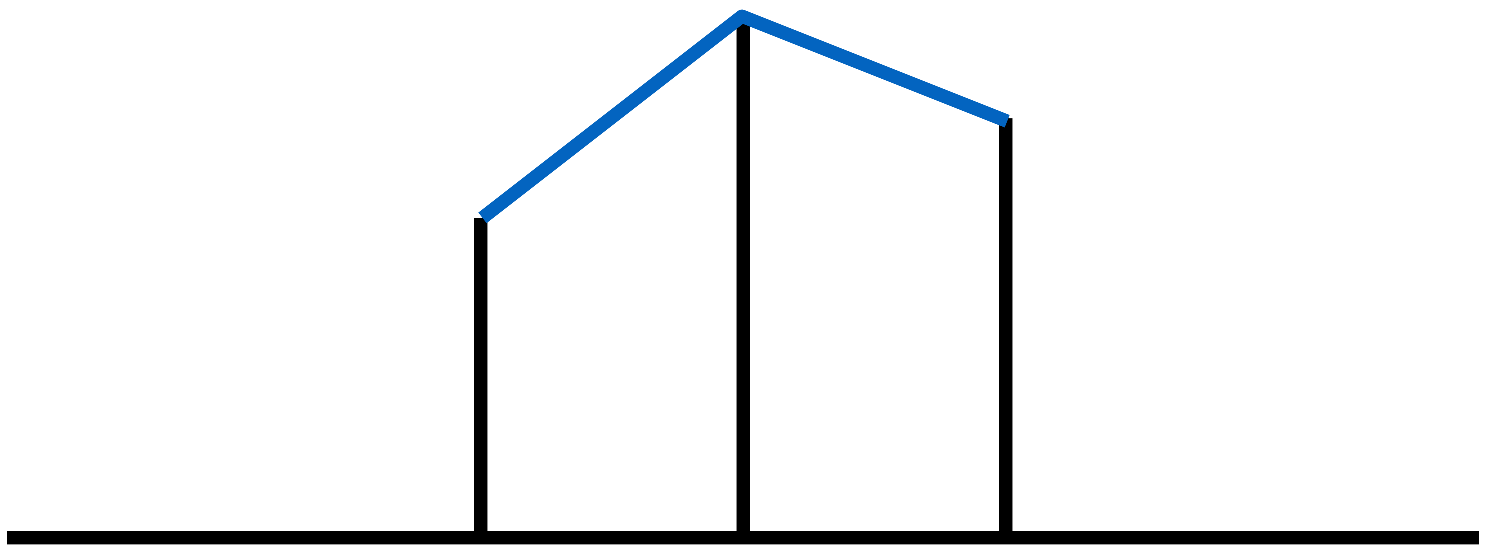


Ойролцоох хөрш интерполяци



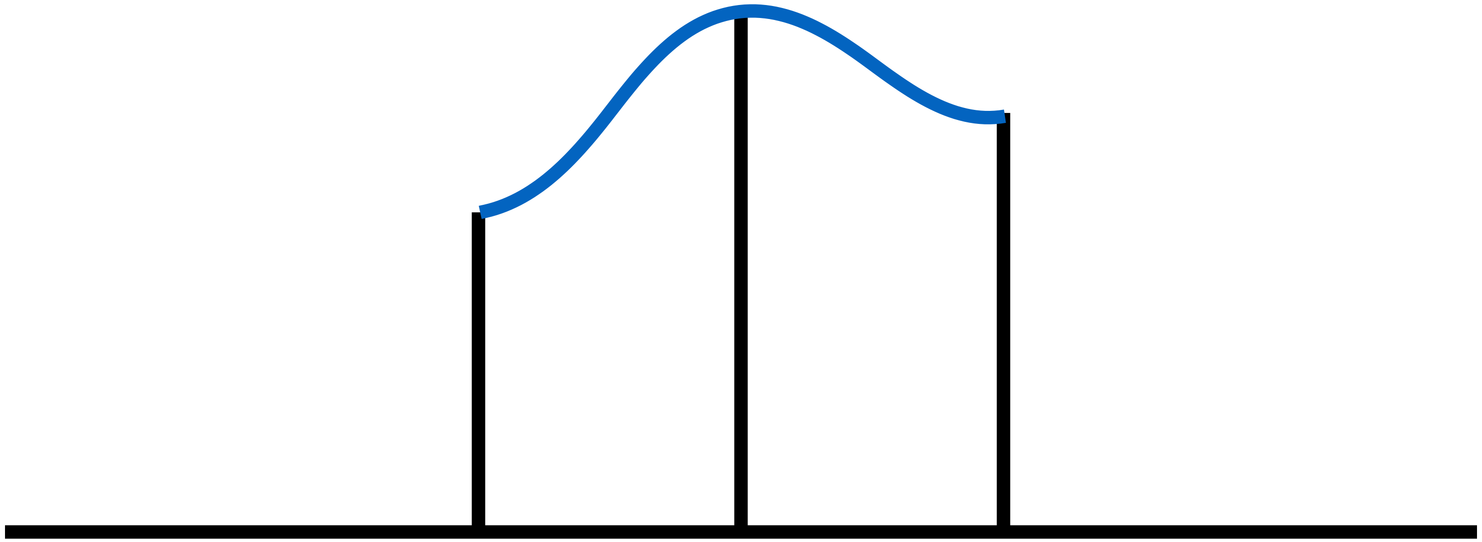
Асуудал: утгууд нь тасралтгүй байна

Linear Interpolation/Шугаман интерполяци

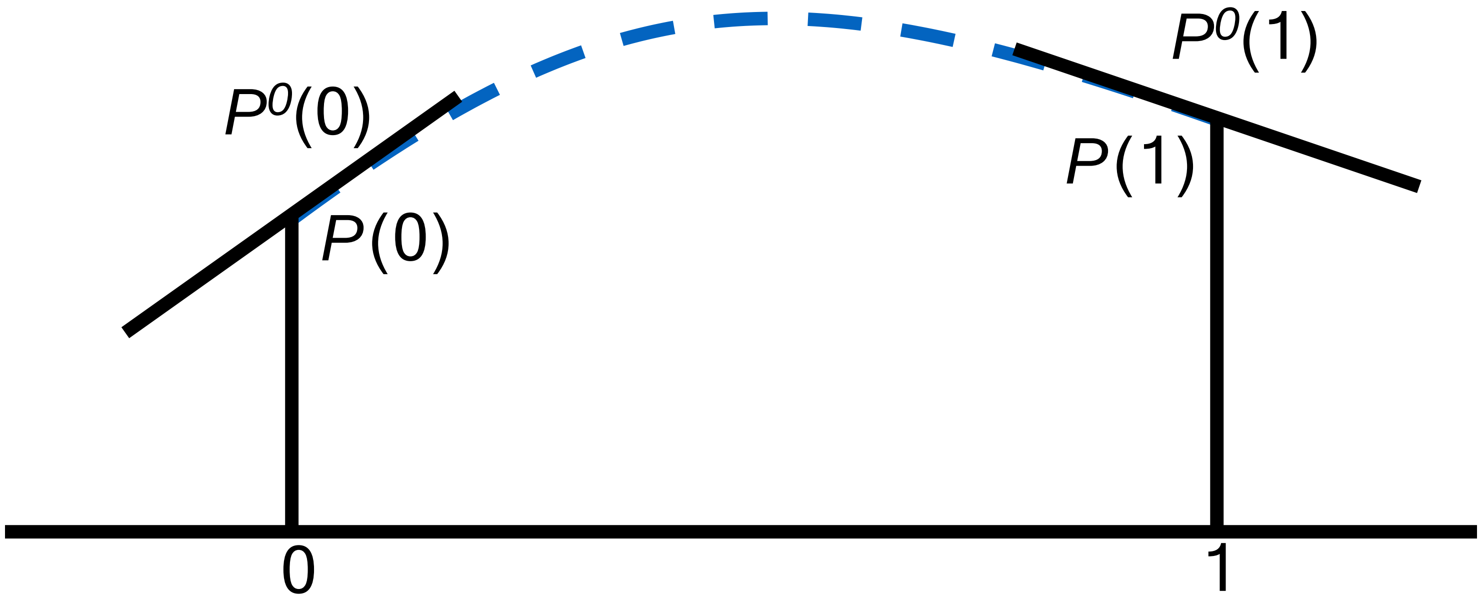


Асуудал: Уламжлал тасралтгүй биш байна

Smooth Interpolation?



Cubic Hermite Interpolation



Оролт: values and derivatives at endpoints
төгсгөлийн цэгүүд дэх утга уламжлалын утгууп байна.

Cubic Polynomial Interpolation

Cubic polynomial

$$P(t) = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$$

Why cubic?

4 input constraints – need 4 degrees of freedom

$$P(0) = h_0$$

$$P(1) = h_1$$

$$P^{0}(0) = h_2$$

$$P^{0}(1) = h_3$$

Cubic Polynomial Interpolation

Cubic polynomial

$$P(t) = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$$

$$P'(t) = 3a\,t^2 + 2b\,t + c$$

Set up constraint equations

$$P(0) = h_0 = d$$

$$P(1) = h_1 = a + b + c + d$$

$$P'(0) = h_2 = c$$

$$P'(1) = h_3 = 3a + 2b + c$$

Solve for Polynomial Coefficients/Олон гишүүнт коэффициентийн шийдэл

$$h_0 = d$$
$$h_1 = a + b + c + d$$
$$h_2 = c$$
$$h_3 = 3a + 2b + c$$

$$\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Solve for Polynomial Coefficients/Олон гишүүнт коэффициентийн шийдэл

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Inverse matrix

Hermite функцын матриц хэлбэр

$$
\begin{aligned}
P(t) &= a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d \\
&= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \\
&= H_0(t)\,h_0 + H_1(t)\,h_1 + H_2(t)\,h_2 + H_3(t)\,h_3
\end{aligned}
$$

Hermite функцын матрицын хэлбэр

$$P(t) = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$= H_0(t)\,h_0 + H_1(t)\,h_1 + H_2(t)\,h_2 + H_3(t)\,h_3$$

Matrix rows = coefficient formulas

Hermite функцын матрицын хэлбэр

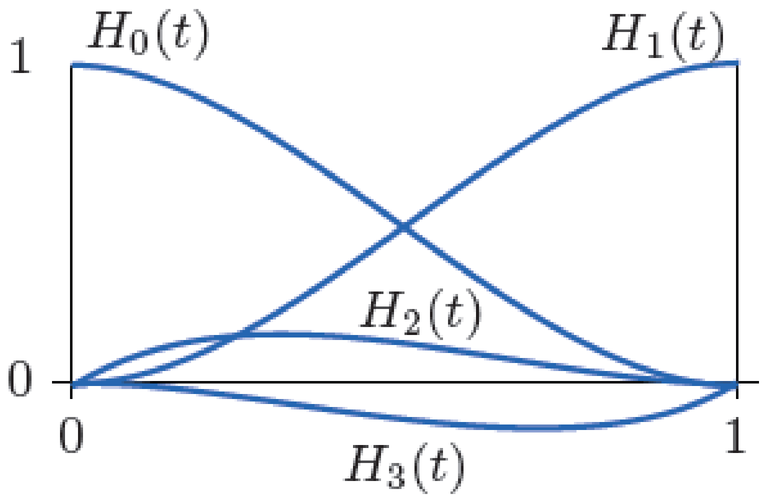
$$P(t) = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$= H_0(t)\;h_0 + H_1(t)\;h_1 + H_2(t)\;h_2 + H_3(t)\;h_3$$

Matrix columns = Hermite basis functions
Call this matrix the Hermite basis matrix

Hermite Үндсэн функц

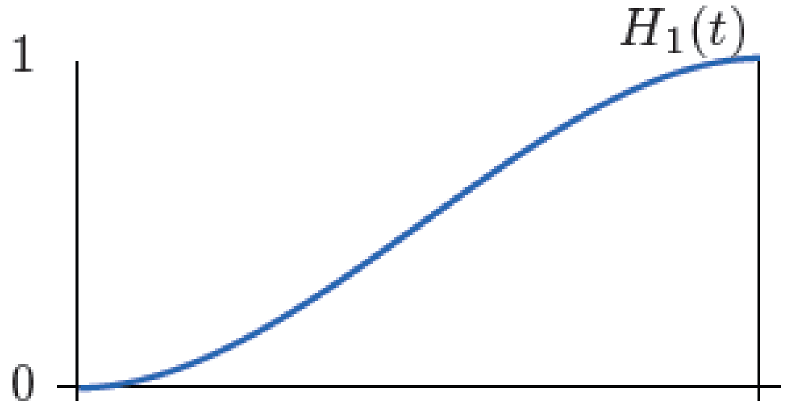


$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$
$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$
$$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$$
$$H_3(t) = t^3 - t^2$$

Хялбар функц

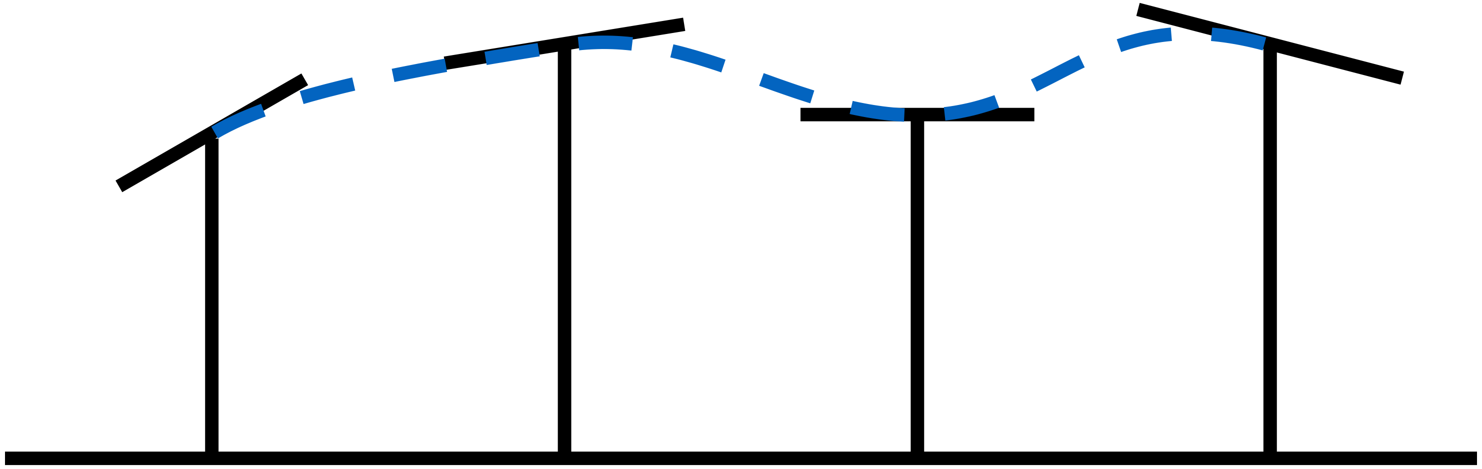
Хамгийн өргөн хэрэглэгддэг функц

Хөдөлгөөнд аажуухан эхлээд аажуухан зогсоох (zero velocity)



$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2 = t^2(3 - 2t)$$

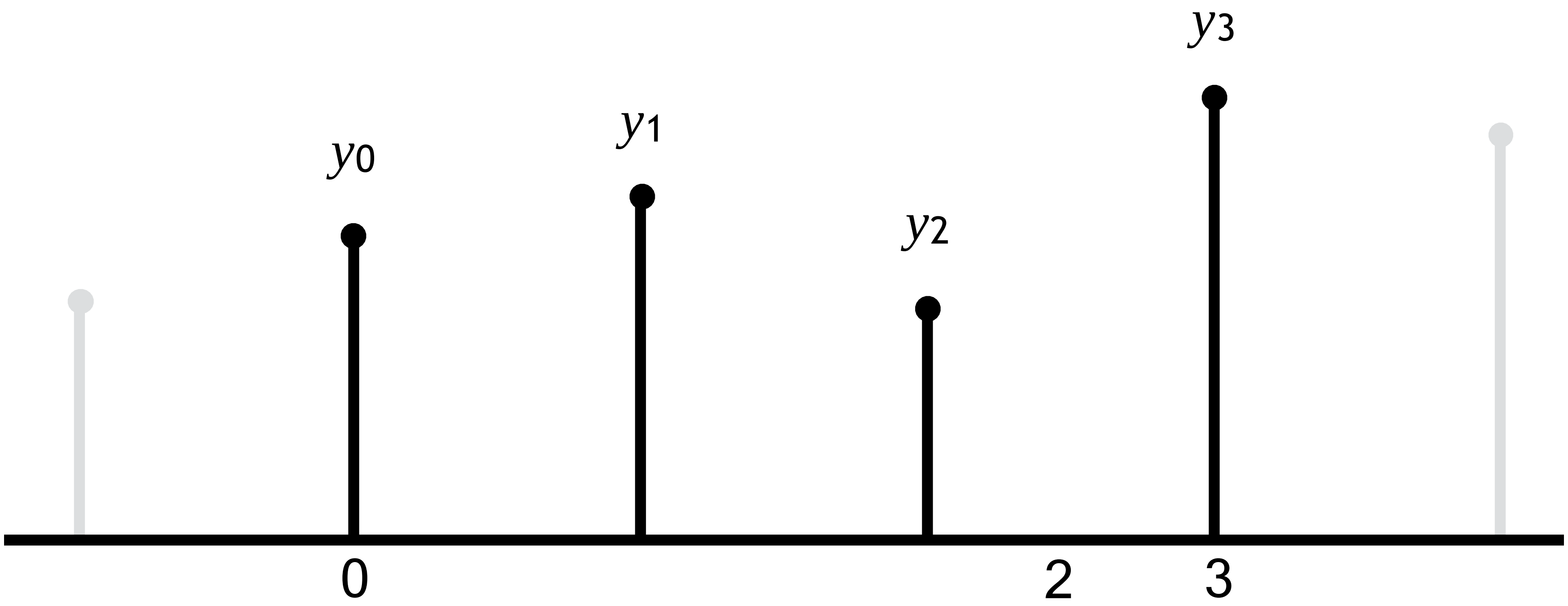
Hermite Spline Интерполяци



Оролт: sequence of values and derivatives

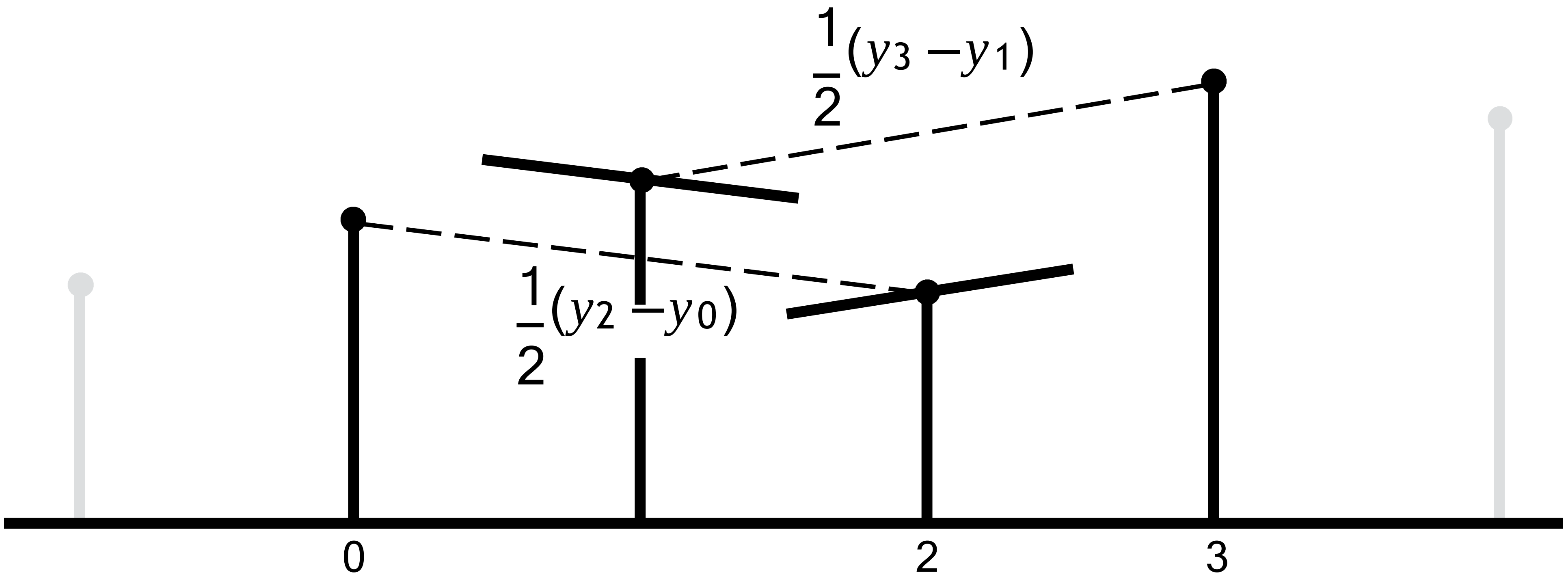
Catmull-Rom Интерполяци

Catmull-Rom Интерполяци



Оролт: sequence of values

Catmull-Rom Интерполяци

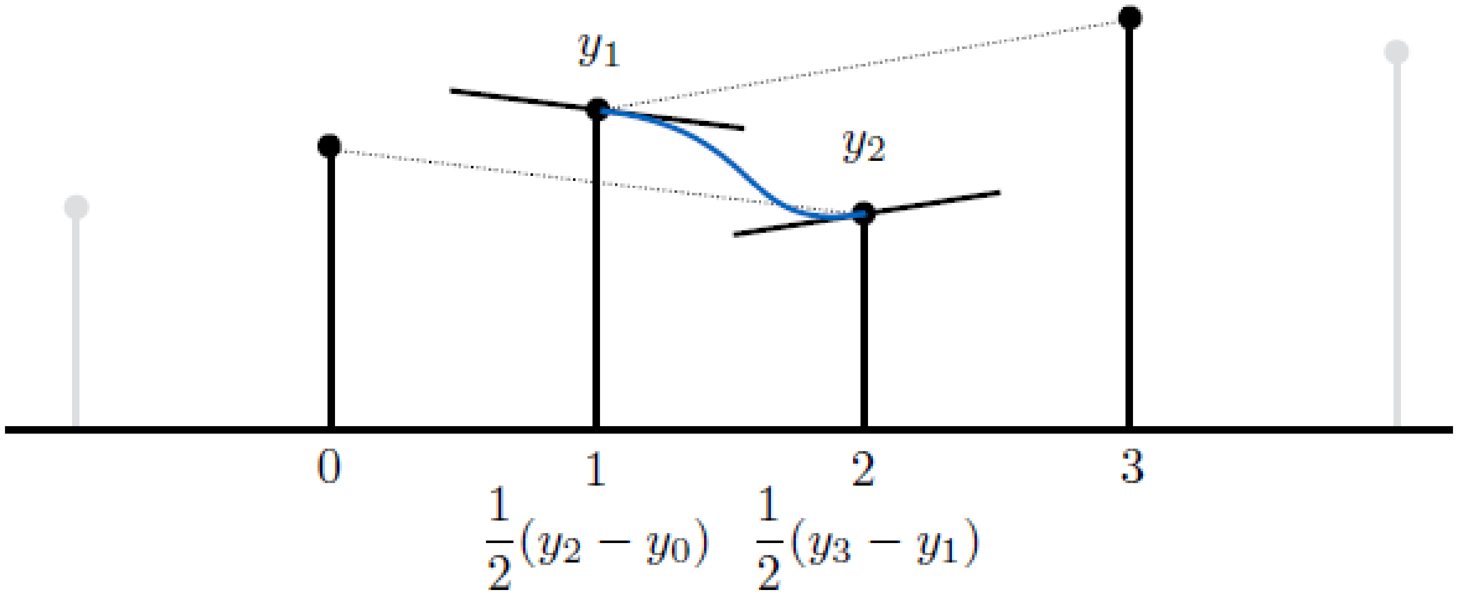


Rule for derivatives:

Match slope between previous and next values

Өмнөх болон дараагийн утгуудын хоорондох налууг тааруулна

Catmull-Rom Interpolation

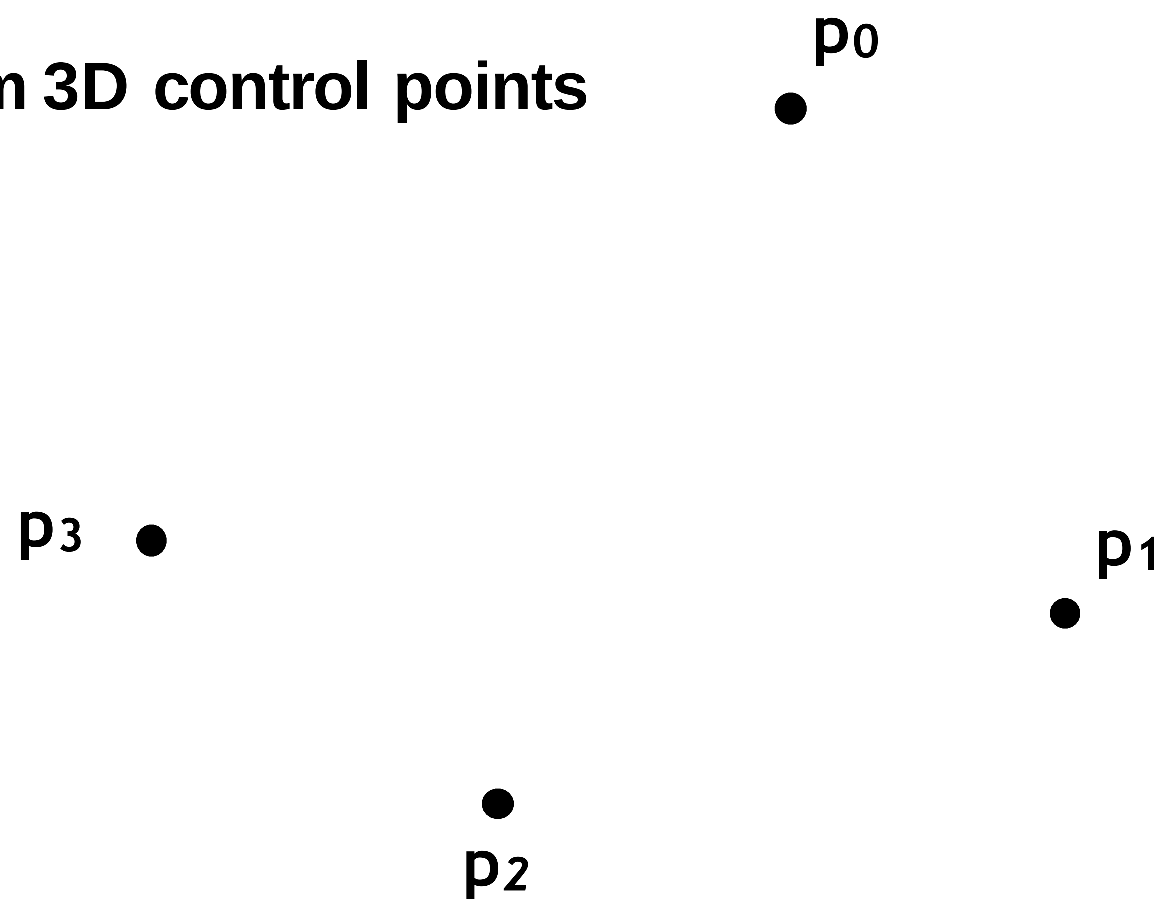


Дараагаар нь Hermite интерполяци ашиглана.

Цэг болон векторуудыг интерполяцлах

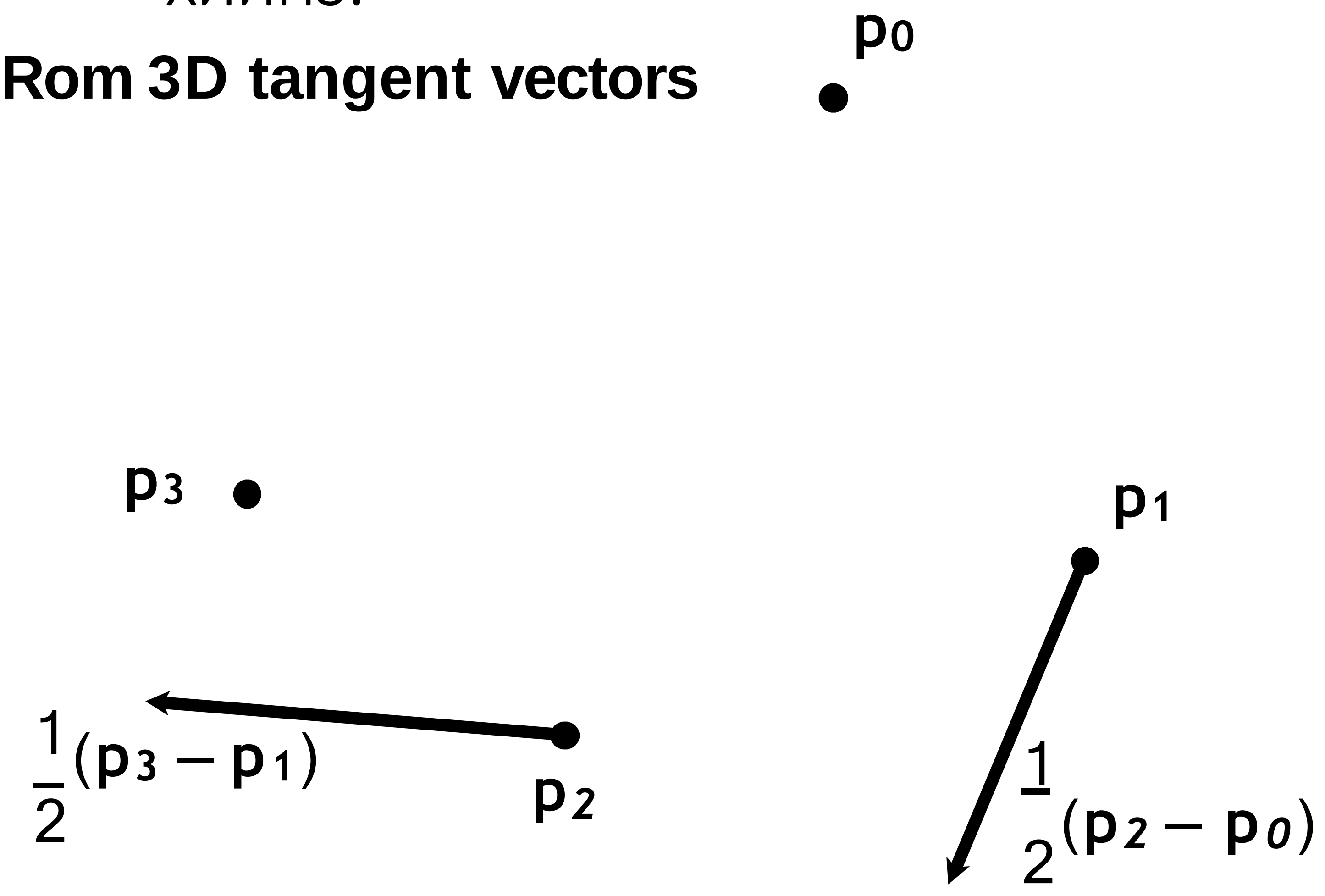
Цэгүүдийг утгуудын адил хялбар интерполяци хийнэ.

Catmull-Rom 3D control points



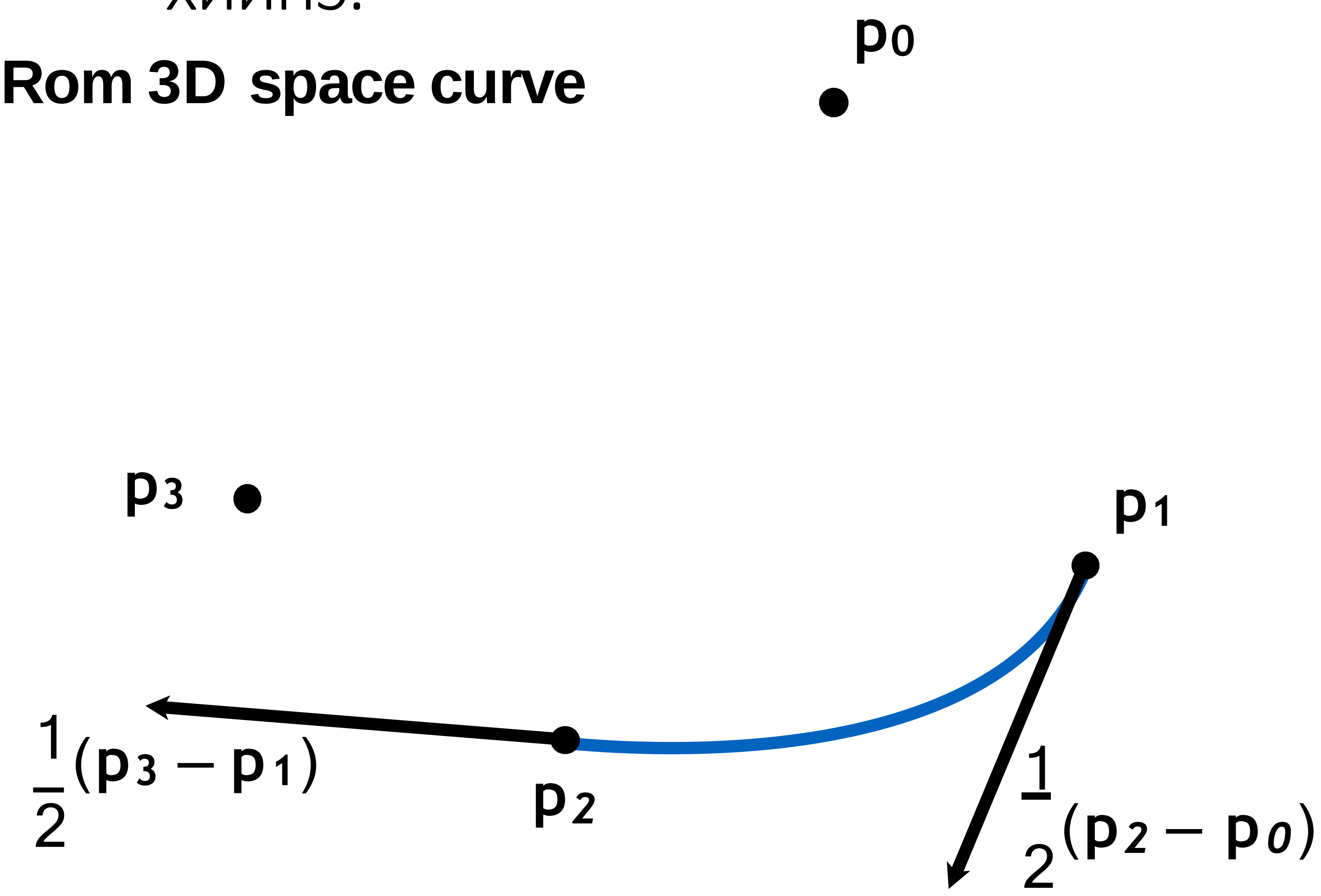
хялбар
интерполяци
хийнэ.

Catmull-Rom 3D tangent vectors



хялбар
интерполяци
хийнэ.

Catmull-Rom 3D space curve



Муруйг тодорхойлоход үндсэн функцүүд ашиглах нь

Иртерполяцийн ерөнхий томъёо

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_i F_i(t)$$

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i F_i(t) \qquad y(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i F_i(t) \qquad z(t) = \sum_{i=0}^{n} z_i F_i(t)$$

Коэффициент p_i нь цэг & вектор, Зөвхөн Fi (t) утга бус харин интерполяцийн схемд зориулсан үндсэн функцүүд байна.

$H_i(t)$ Hermite интерполяцыг бид өмнө үзсэн. Ci (t) Catmull-Rom -ын **$C_i(t)$** удахгүй үзэх ба Bézier схемийн **$B_i(t)$** хувьд дараа үзнэ. Үндсэн функц нь интерполяцийн схемийн шинж чанар(properties) юм.

Catmull-Rom муруйн матриц хэлбэр?

Hermite матриц хэлбэрийг ашигладаг.

- **Цэг ба шүргэгч нь Catmull-Rom дүрмээр өгөгдсөн байна.**

Hermite points

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{p}_1$$

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{p}_2$$

Hermite tangents

$$\mathbf{h}_2 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)$$

$$\mathbf{h}_3 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$$

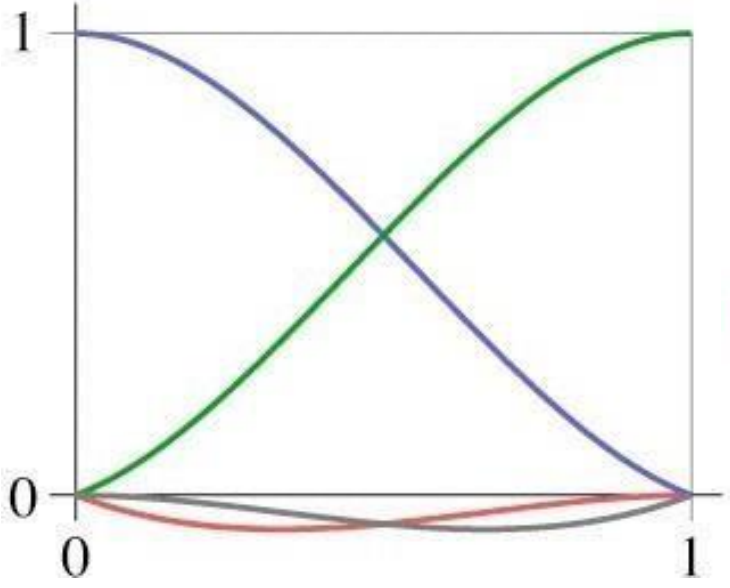
Catmull-Rom муруйн матриц хэлбэр

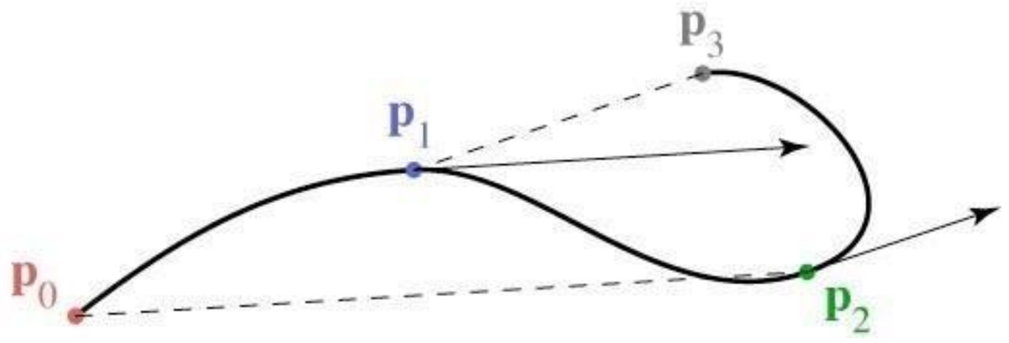
$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$$

$$= C_0(t)\ \mathbf{p}_0 + C_1(t)\ \mathbf{p}_1 + C_2(t)\ \mathbf{p}_2 + C_3(t)\ \mathbf{p}_3$$

Matrix columns = Catmull-Rom basis functions

Catmull-Rom Үндсэн Функц

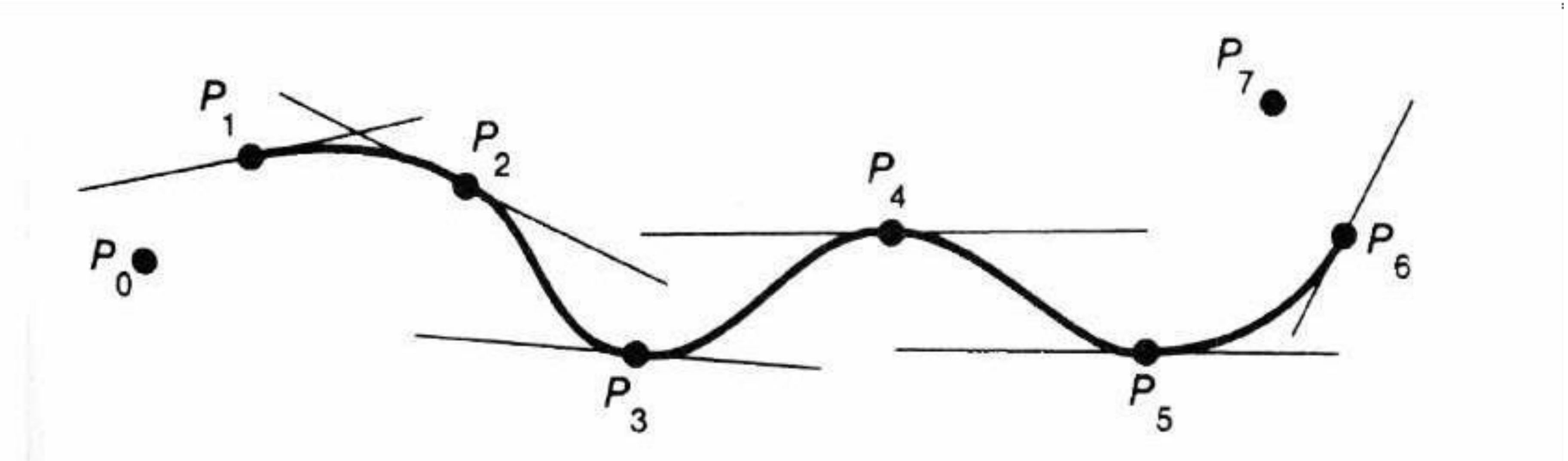




Catmull-Rom Spline

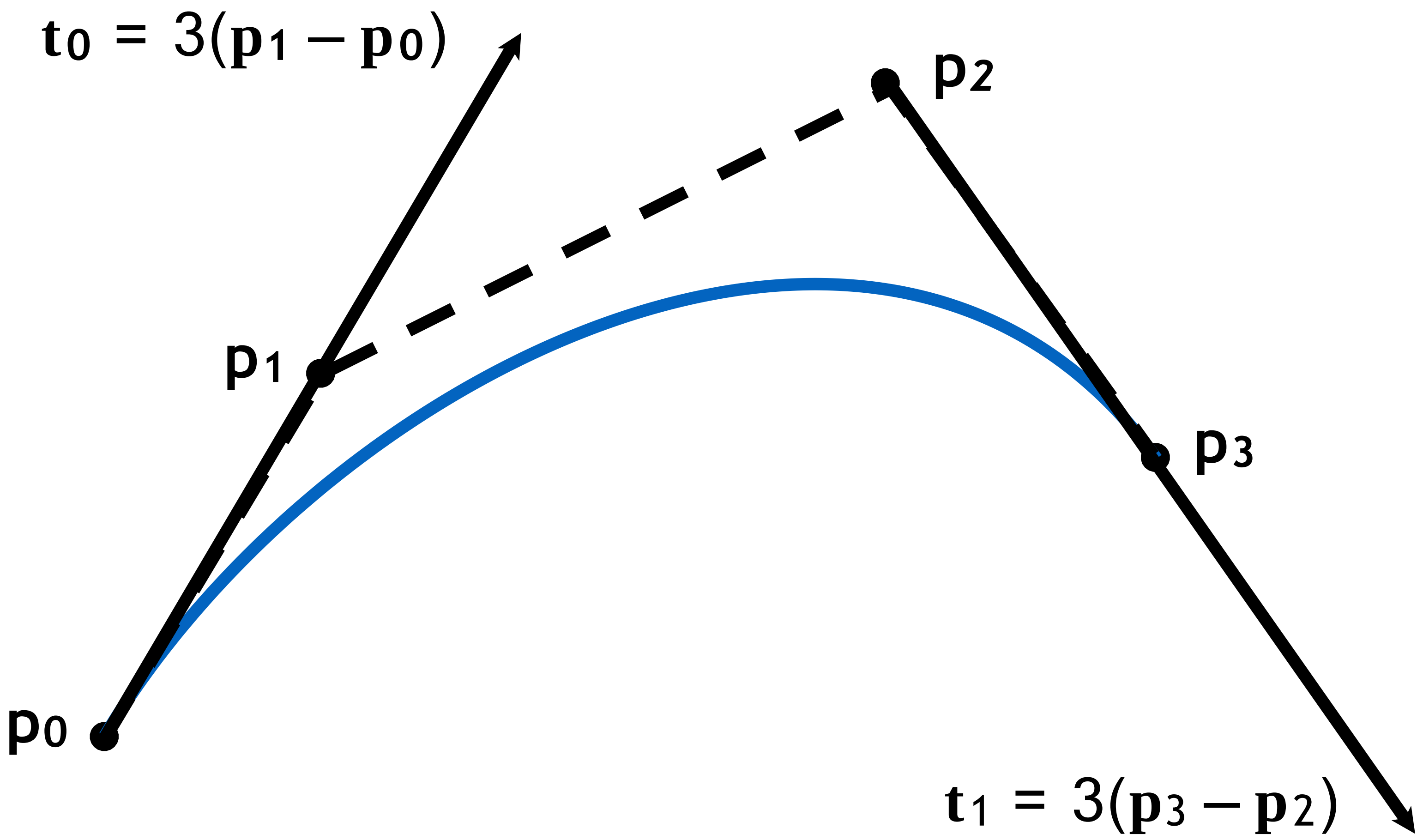
Оролт: sequence of points

Гаралт: spline that interpolates all points with C1 continuity



Bézier Curves/ Bézier муруй

Defining Cubic Bézier Curve With Tangents



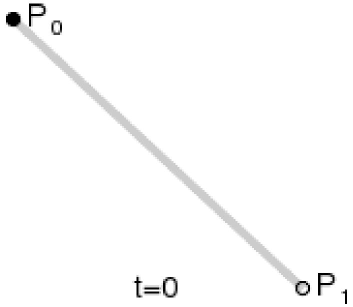
Cubic Bézier муруйн матриц хэлбэр?

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$$

$$= B_0^3(t)\ \mathbf{p}_0 + B_1^3(t)\ \mathbf{p}_1 + B_2^3(t)\ \mathbf{p}_2 + B_3^3(t)\ \mathbf{p}_3$$

Bézier Curves – de Casteljau Алгоритм

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 \quad t \in [0,1].$$



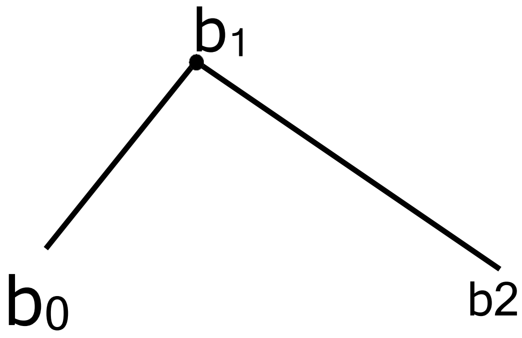
Pierre Bézier
1910 – 1999

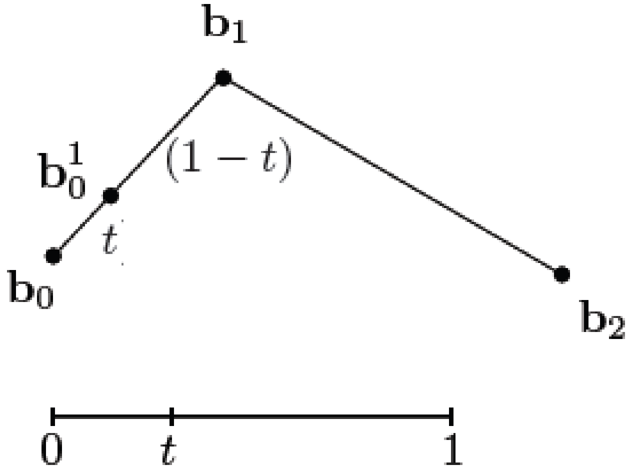
Paul de Casteljau
b. 1930

Bézier Curves – de Casteljau Алгоритм

3 цэг авч үзнэ.

Шугаман интерполяц ашиглан цэг оруулах



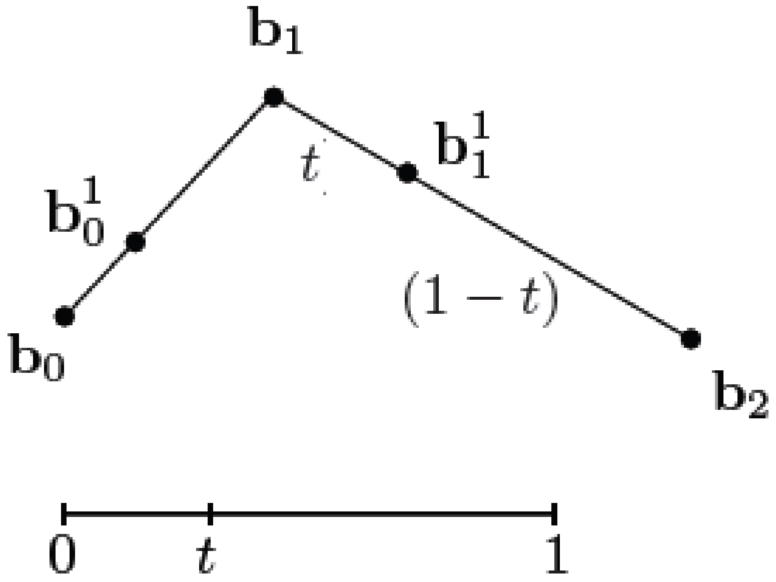


Pierre Bézier
1910 – 1999

Paul de Casteljau
b. 1930

Bézier Curves – de Casteljau Алгоритм

2 ирмэгийг оруулна.

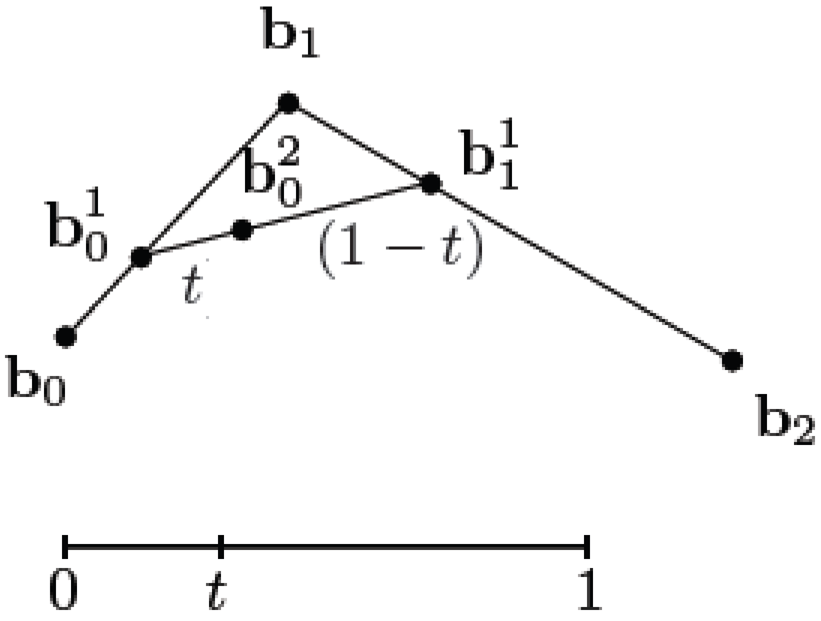


Pierre Bézier
1910 – 1999

Paul de Casteljau
b. 1930

Bézier Curves – de Casteljau Алгоритм

Рекурсив давталт



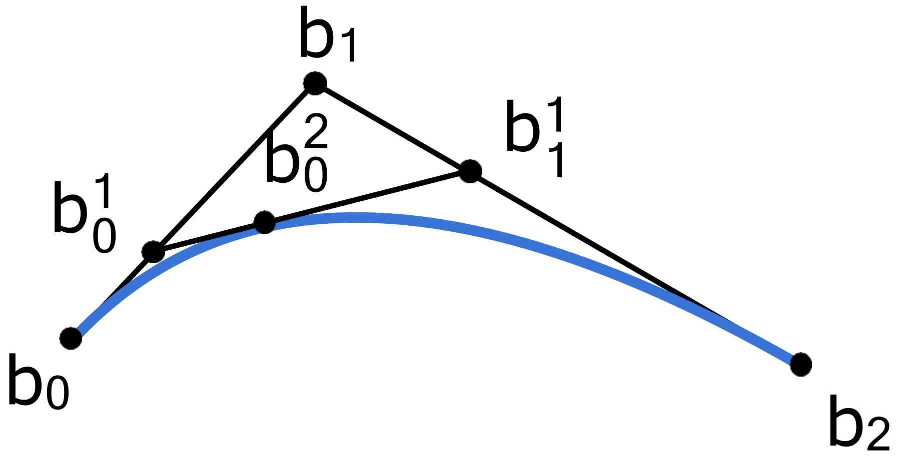
Pierre Bézier
1910 – 1999

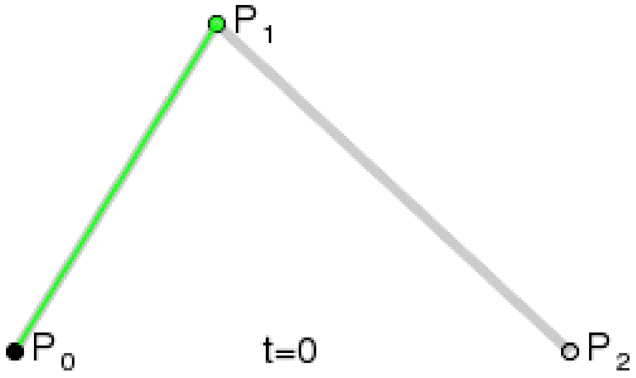
Paul de Casteljau
b. 1930

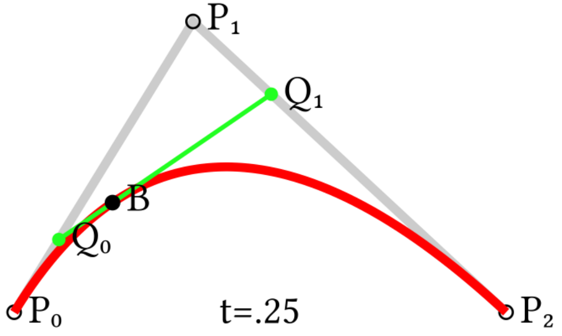
Bézier Curves – de Casteljau Алгоритм

Муруйг тодорхойлох алгоритм

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2t(1-t)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2, \quad t \in [0,1].$$

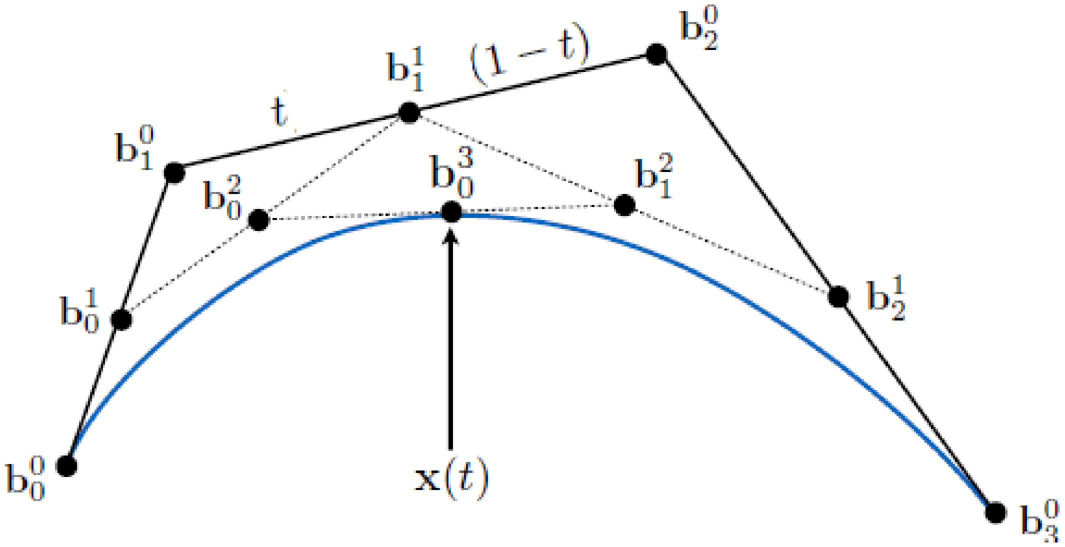






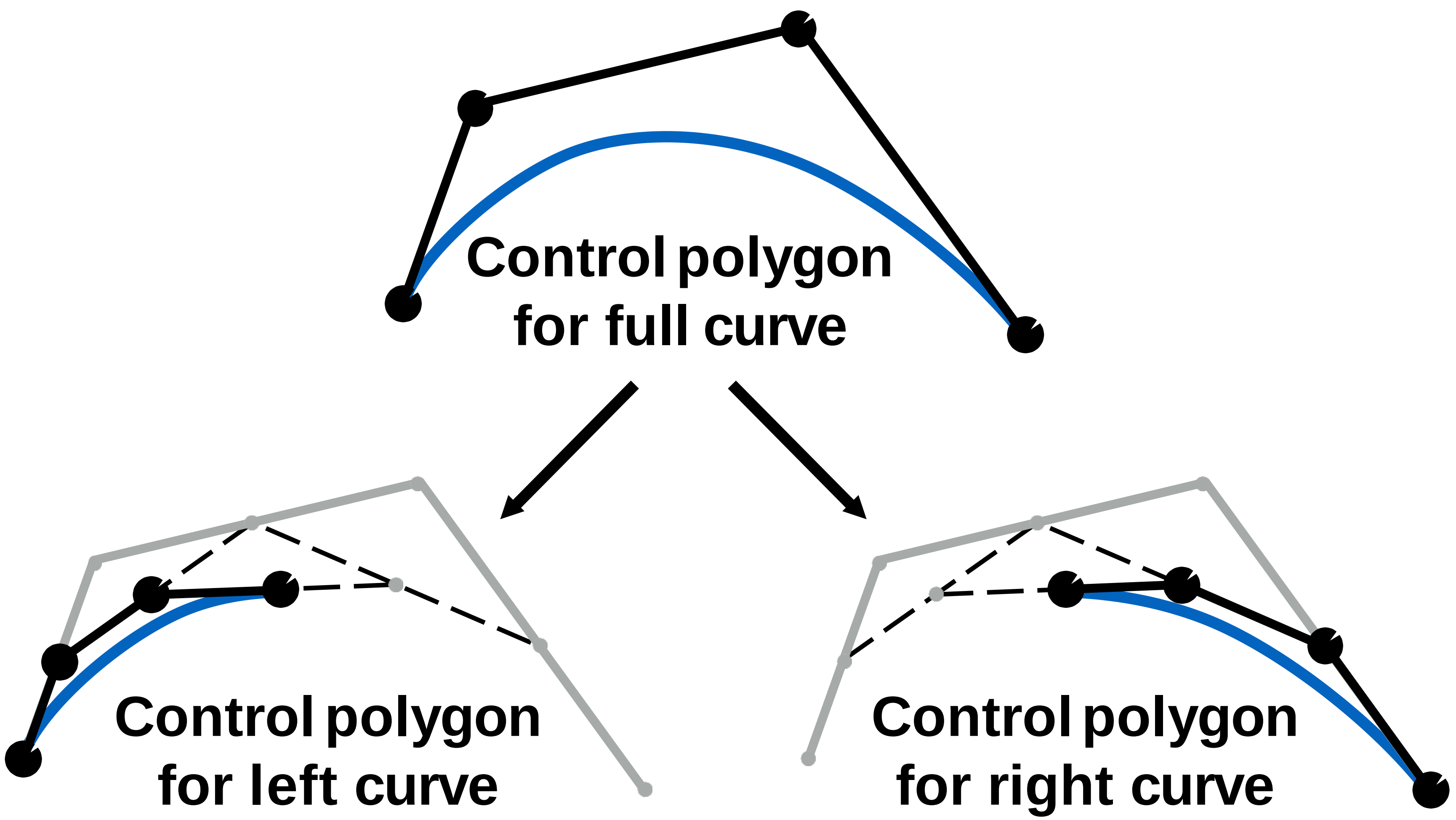
Cubic Bézier Curve – de Casteljau

4 цэг авч үзнэ.
Рекурсив шугаман интерполяци ижил байна



$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3, \quad t \in [0,1].$$

Муруйг дэд хэсгүүдэд хуваах de Casteljau Алгоритм



Дээд эрэмбийн (куб, 4 зэрэгт г.м) муруйнууд