ШУТИС, Мэдээлэл Холбооны Технологийн Сургууль

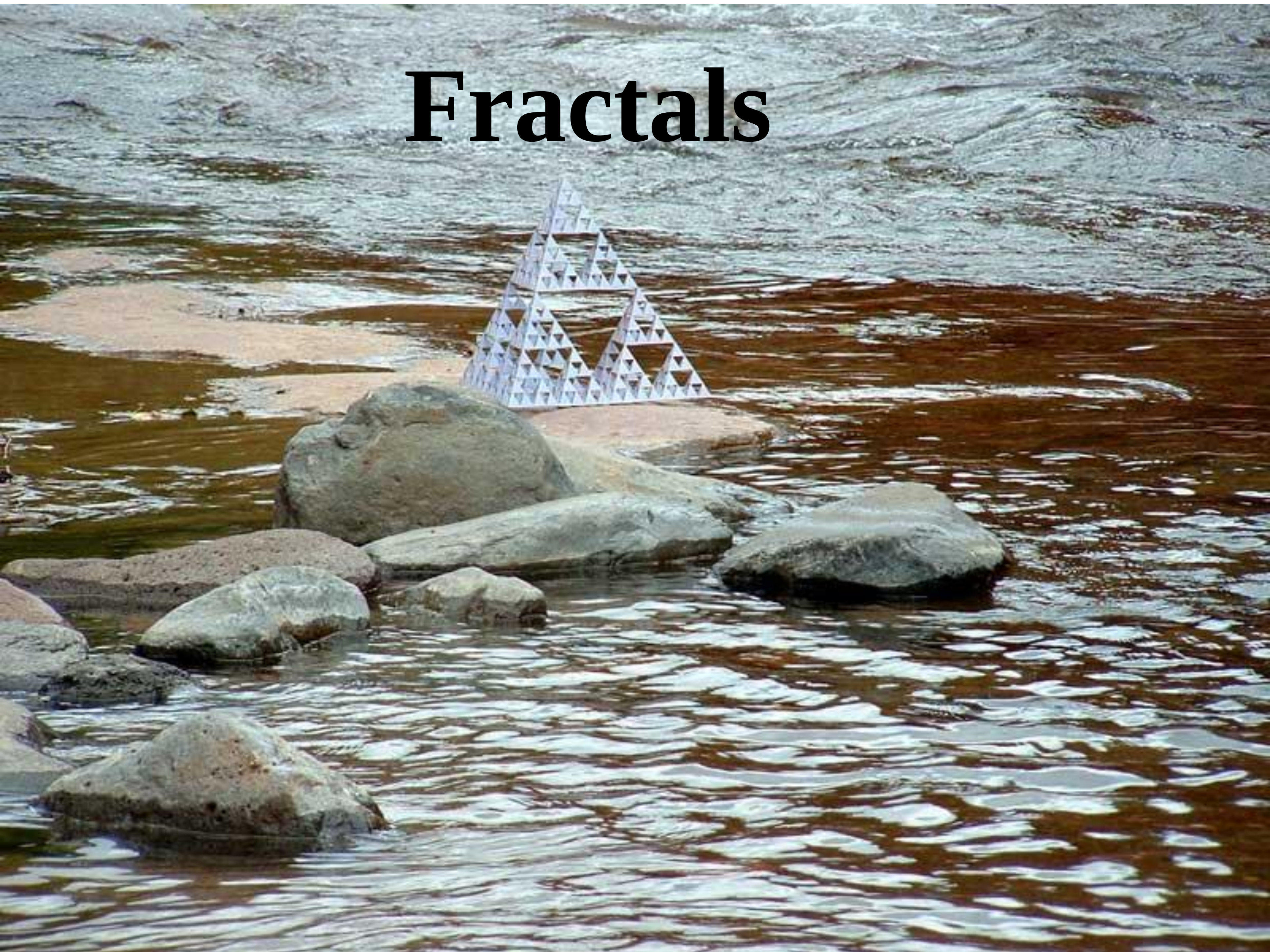
F.CS209 Компьютерийн график

Лекц 7 – Фрактал

Боловсруулсан багш: Х.Хулан

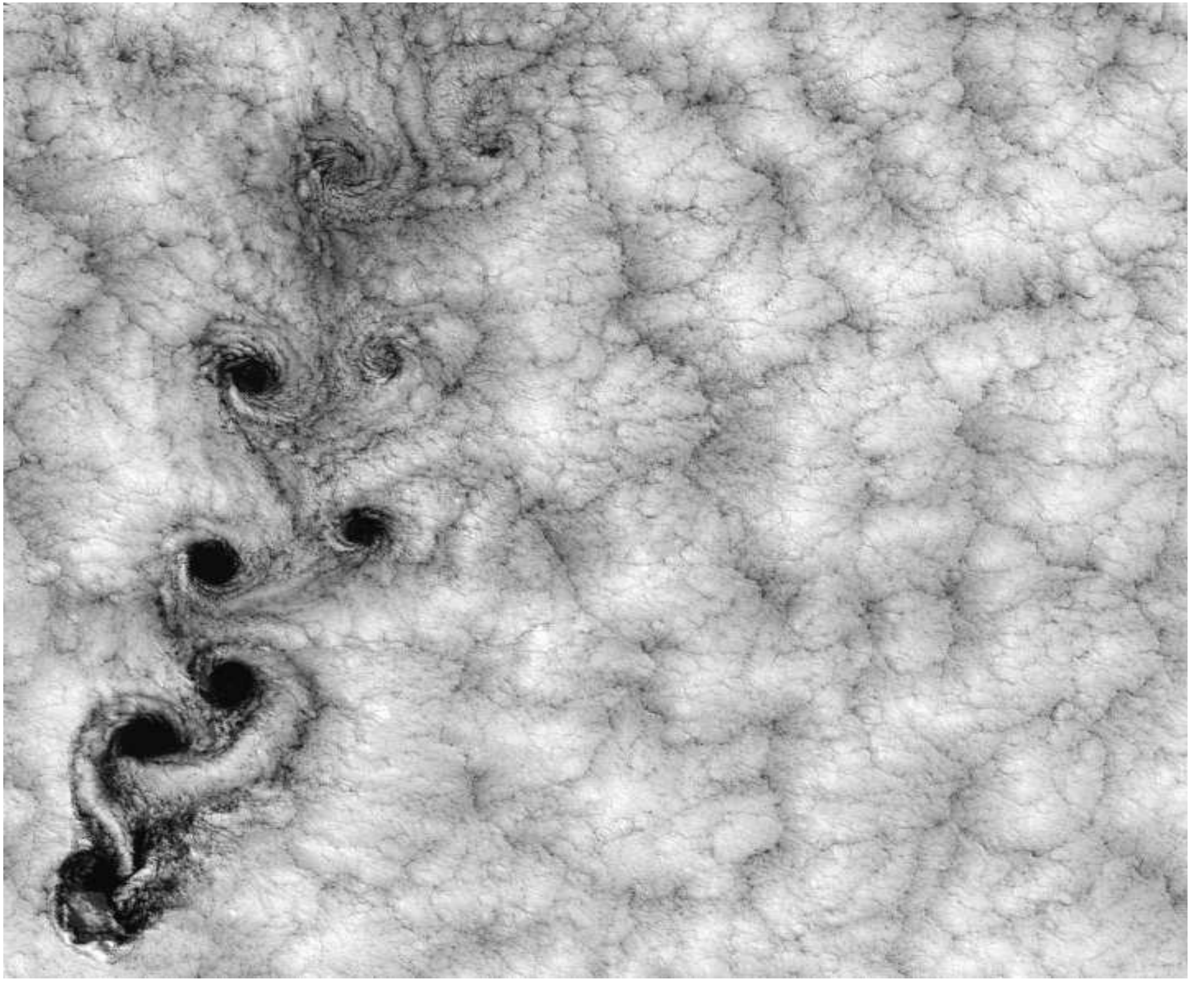
2022 он

Fractals



Fractals

- Fractals янз бүрийн түвшинд (ямар ч масштабт) өөрийгөө ижил төстэй харуулдаг объект юм.



Fractal Үүл

Grass

Coastline

Fire

- Уулс
- Модны мөчир
- Хөвөн гадаргуу
- Хучилтын хагарал
- Антен дизайн хийх (www.fractenna.com)

Clouds

Fractals-ын чухал шинж чанарууд

- Тэд рекурсив байна. Өөрөөр хэлбэл, тэднийг бий болгох үйл явц төгсгөлгүй давтагдана.

P1=F(P0), P2=F(P1), P3=F(P2), . . .

- Self-similarity

Объектуудын эд анги, ерөнхий шинжүүд хоорондоо ижил төстэй байна.

Fractals-ын ангилал

- Self-similar fractals

бүх хувилбарууд нь объектын жижигрүүлсэн масштабтай хэсгүүд байна.

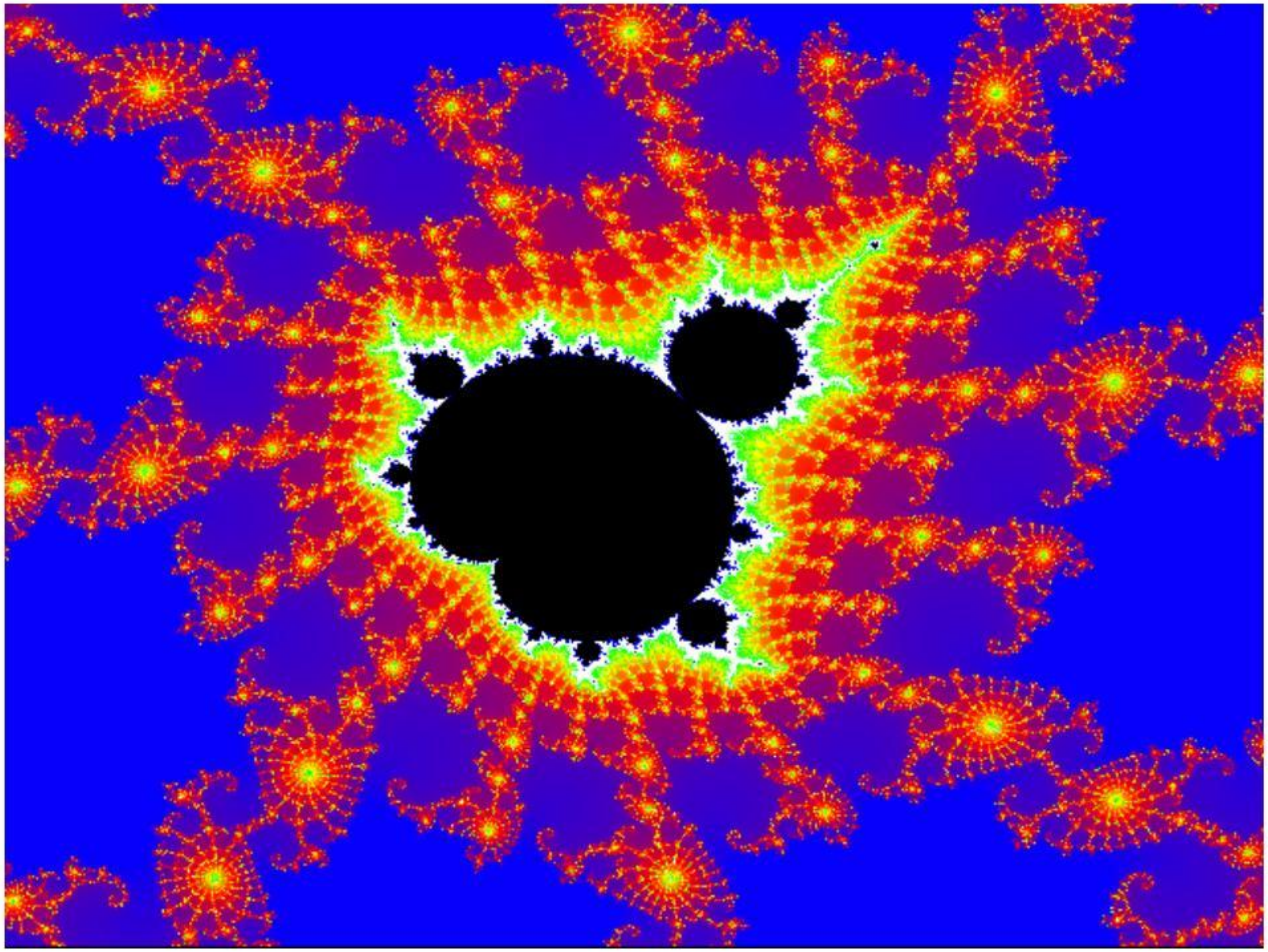
- Self-affine fractals

sx,sy,sz зэрэг өөр өөр координатын дагуу масштабладаг утга бүхий хэсэгүүдтэй.

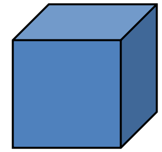
- Invariant fractals

шугаман бус өөрчлөлтийн хамт бий болж байна. Энэ ангилалд Mandelbrot багц болгон self squaring fractals орно. https://mathigon.org/course/fractals/mandelbrot

Mandelbrot Set



Жишээ:



Хэрэв шооны урт = 3, өргөн = 3, өндөр = 3 бол self-similarity ол.

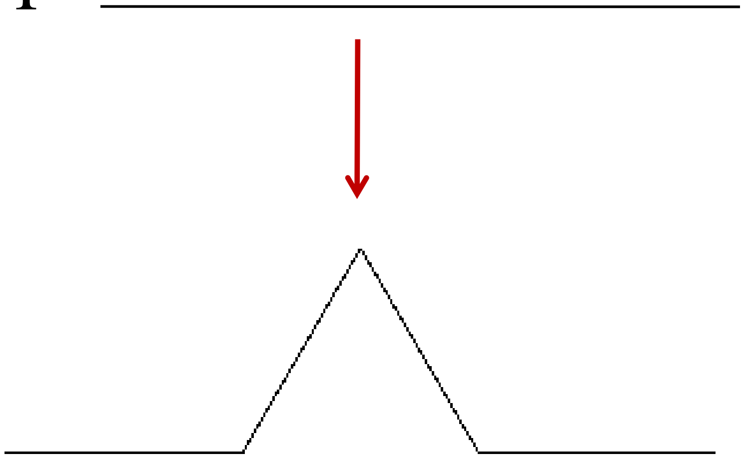
Бид шоог 27 жижиг шоо буюу "хэсэг" хүртэл хувааж болно. Мөн жижиг шоо нэгийг авч 3-аар талыг өсгөвөл эх шоотой ижил хэмжээтэй байх шоо олдоно. Тиймээс "өсгөлтийн коэффициент" нь 3 байна.

$$\text{Self-similarity dimension} = \frac{\log(\text{number of pieces})}{\log(\text{magnification factor})}$$

$$\text{Self-similarity dimension} = \frac{\log(27)}{\log(3)} = \frac{\log(3)^3}{\log(3)} = \frac{3\log(3)}{\log(3)} = 3$$

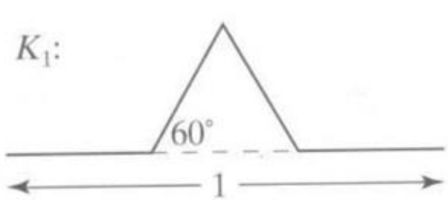
Self-similar fractals

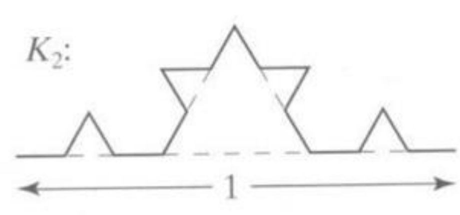
- Эхний геометрийн хэлбэр
- Үүсгүүр



Koch цасан ширхэг

- ❑ 1904 онд Хельге фон Кох нээсэн.
- ❑ 1 урттай шулуун шугамаас эхэлнэ.
- ❑ Рекурсив байдлаар:
- Мөрийг 3 тэнцүү хэсэгт хуваана
- Middle Дунд хэсгийг 1/3 урттай гурвалжин овойлтоор солино
- Length Шинэ урт = 4/3

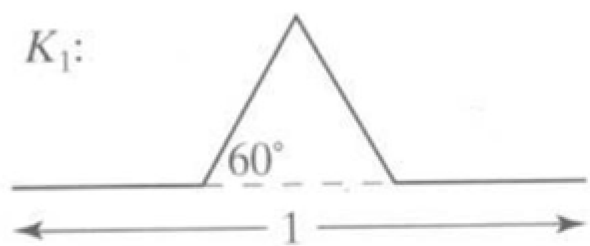




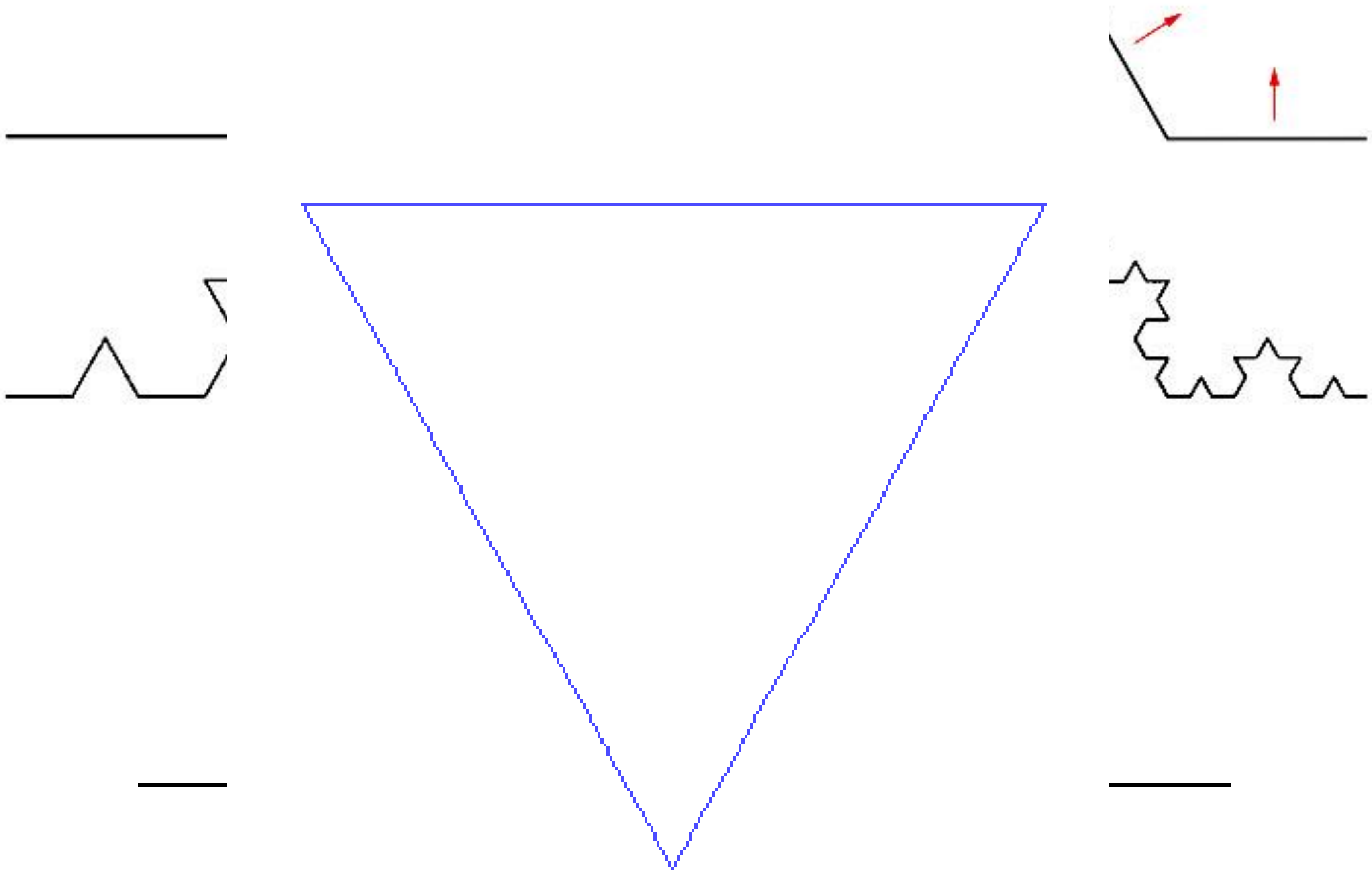
Koch цасан ширхэг зурах псевдо код

Pseudocode, to draw K_n:

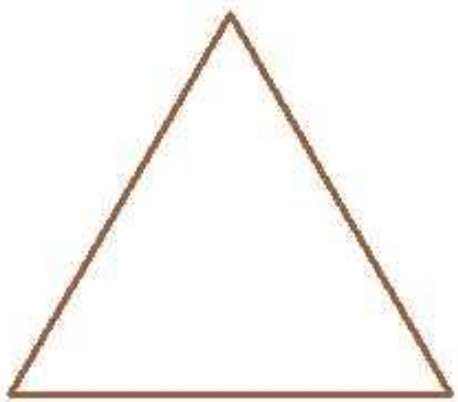
```
If (n equals 0) draw straight line
Else{
        Draw K_{n-1}
        Turn left 60∘
        Draw K_{n-1}
        Turn right 120∘
        Draw K_{n-1}
        Turn left 60∘
        Draw K_{n-1}
}
```



Koch цасан ширхэг: Бүтэц

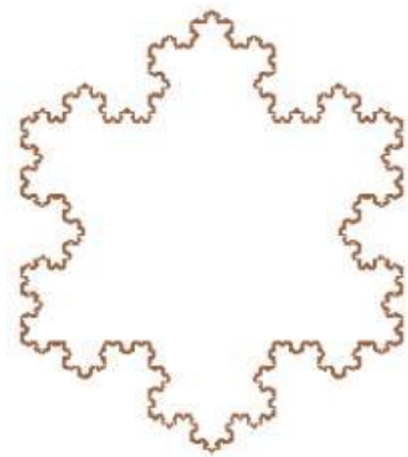


Koch цасан ширхэгийн fractal хэмжээс



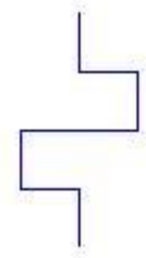
Koch Snowflake Base

Koch Snowflake Motif

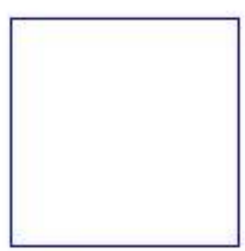


Self-similarity dimension $= \dfrac{\log(4)}{\log(3)} = 1.26$

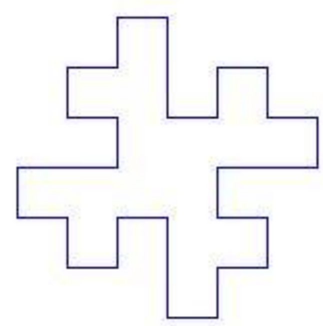
Koch Island Fractal self-similarity dimension

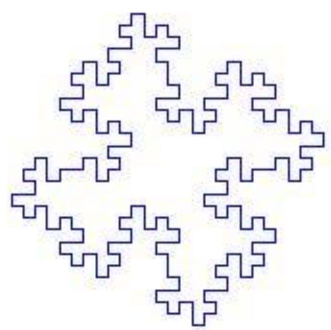


Koch Island Motif



Koch Island Base





$$\text{Self-similarity dimension} = \frac{\log(\text{ number of pieces })}{\log(\text{ magnification factor })}$$

$$\text{Self-similarity dimension} = \frac{\log(8)}{\log(4)} = \frac{\log(2)^3}{\log(2)^2} = \frac{3\log(2)}{2\log(2)} = 1.5$$

Koch Island fractal пириметр ?

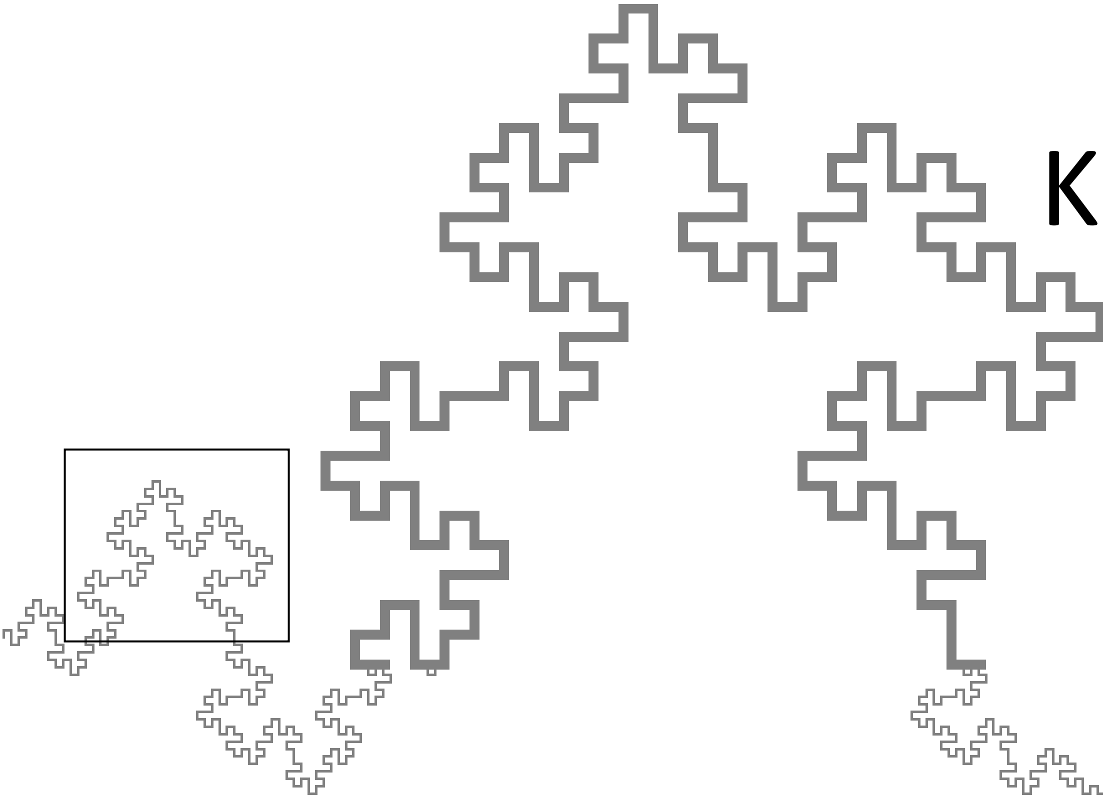
$$N_n = N_{n-1} \cdot 4 = 3 \cdot 4^n \,.$$

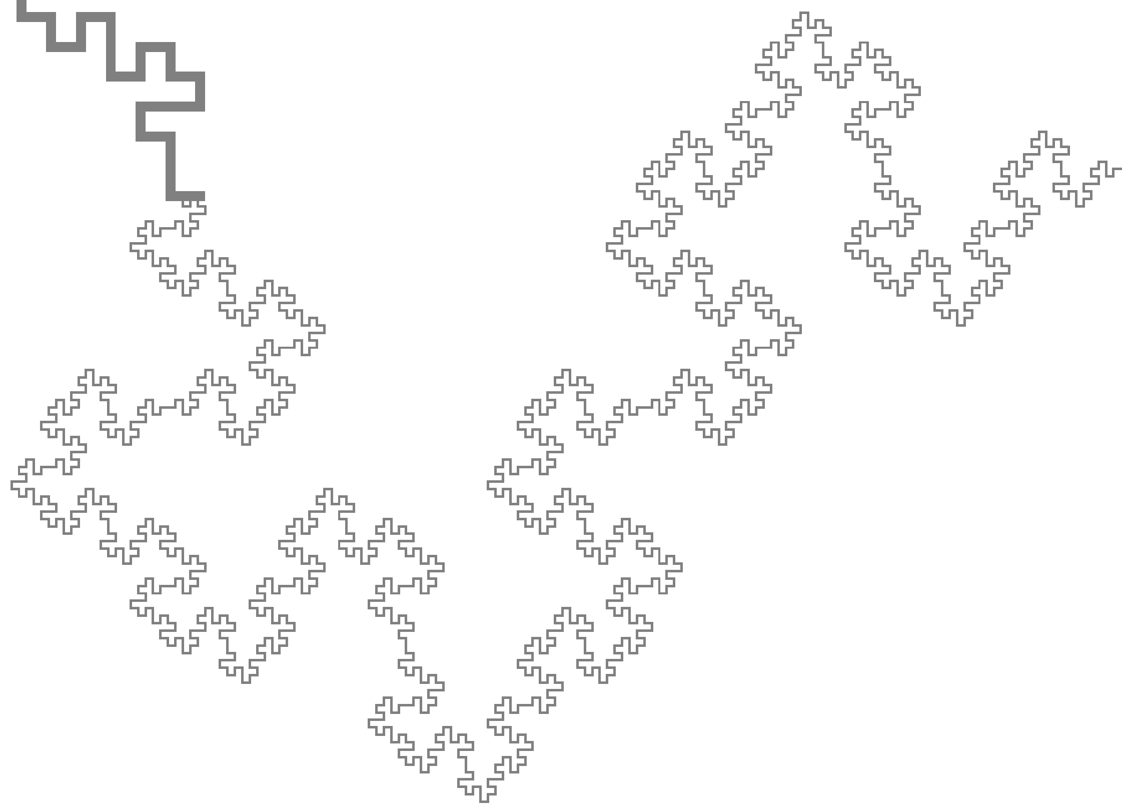
$$S_n = \frac{S_{n-1}}{3} = \frac{s}{3^n}$$

$$P_n = N_n \cdot S_n = 3 \cdot s \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Koch квадратууд

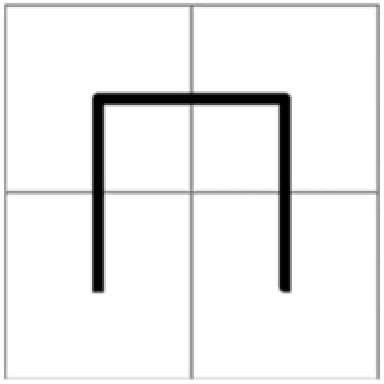
Koch квадратууд





Хилберт муруй

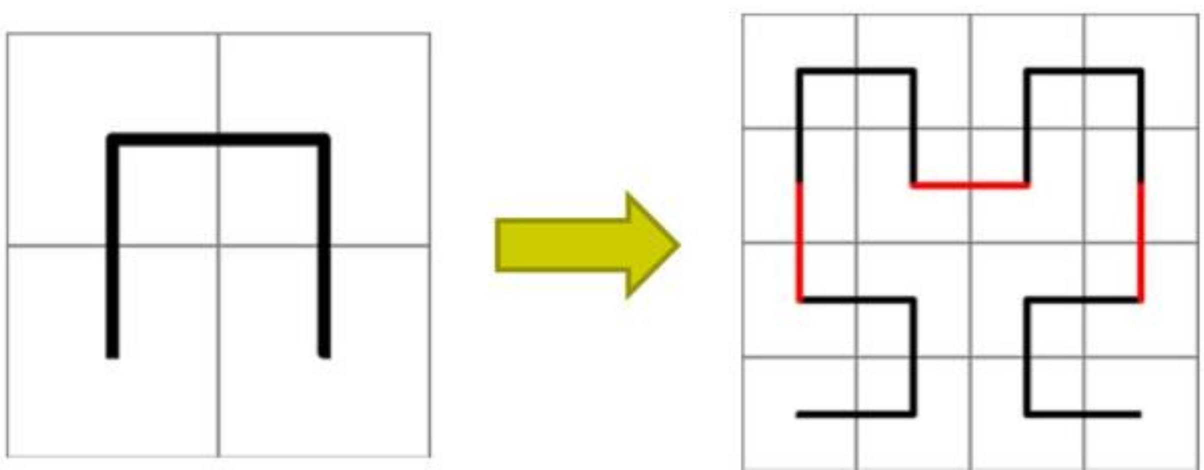
- 1900 -аад оны сүүлээр Германы эрдэмтэн Дэвид Хилберт нээсэн.
- Орон зайг дүүргэх муруй
- 4 дэд квадратуудын төвүүдийг холбож зурж том болгоно.
- Давталт : 3 сегмент нь 4 төвийг дээрээс нь доош харуулан U-г холбоно



Iteration 0

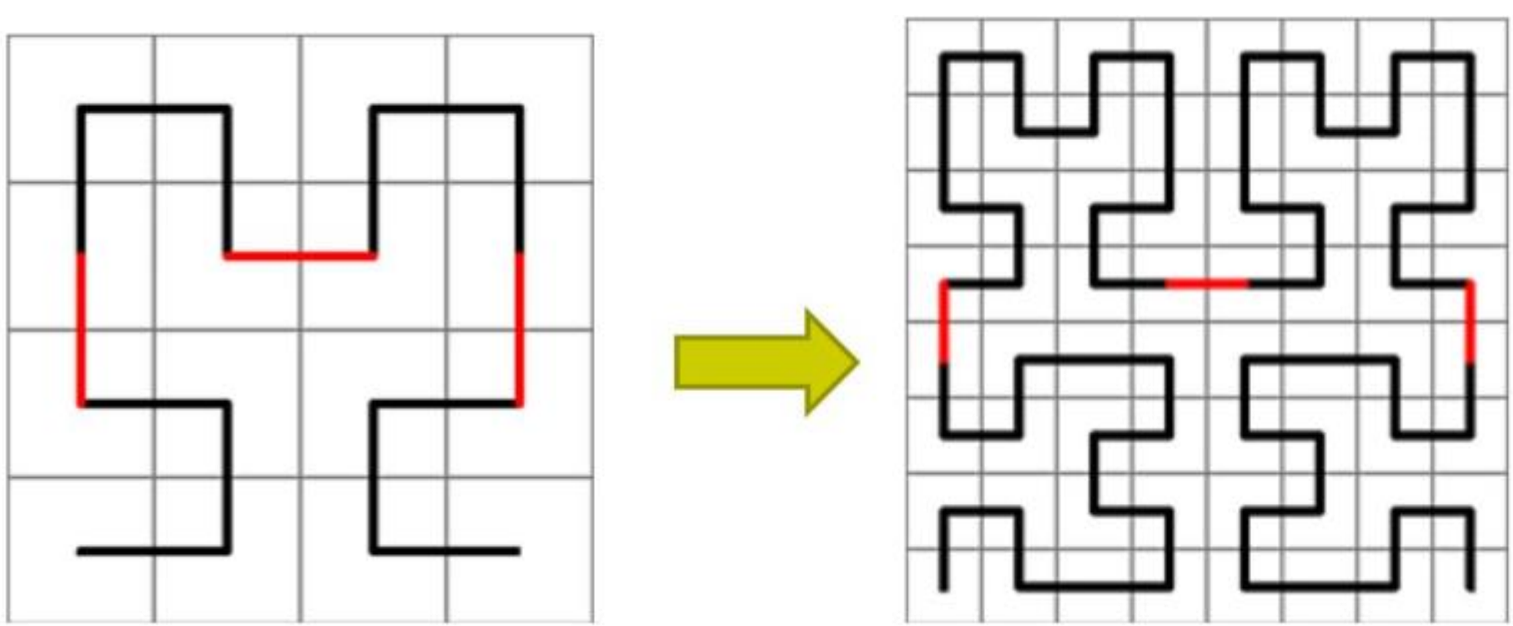
Хилберт муруй – Iteration 1

- 4 квадрат тус бүрийг өөр 4 квадрат болгон хуваасан
- U хэлбэр нь анхны хэмжээгээ хагас хүртэл багасгаж, 4 хэсэгт хуулна
- Зүүн дээд талд шууд хуулсан ба харин баруун дээд талд: босоо чиглэлд эргүүлсэн.
- Зүүн доод буланд цагийн зүүний дагуу 90 градус эргүүлсэн
- Баруун доод талд, цагийн зүүний эсрэг 90 градус эргүүлэв.
- 4 сегментийг холбосон бөгөөд тус бүр нь U хэлбэрийн жижигрүүлсэн хэсгүүдтэй ижил хэмжээтэй (улаан өнгөтэй)

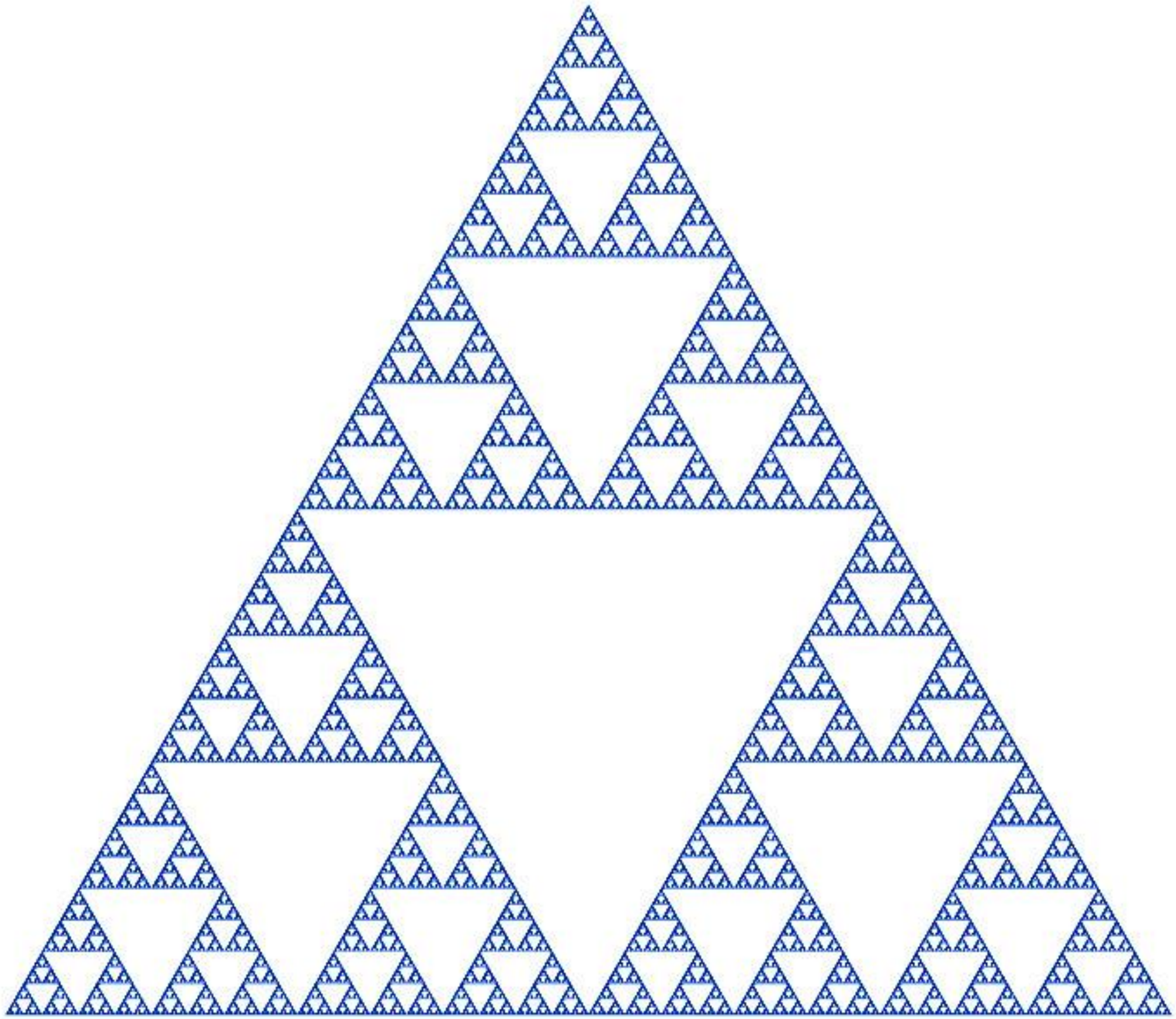


Хилберт муруй – Iteration 2

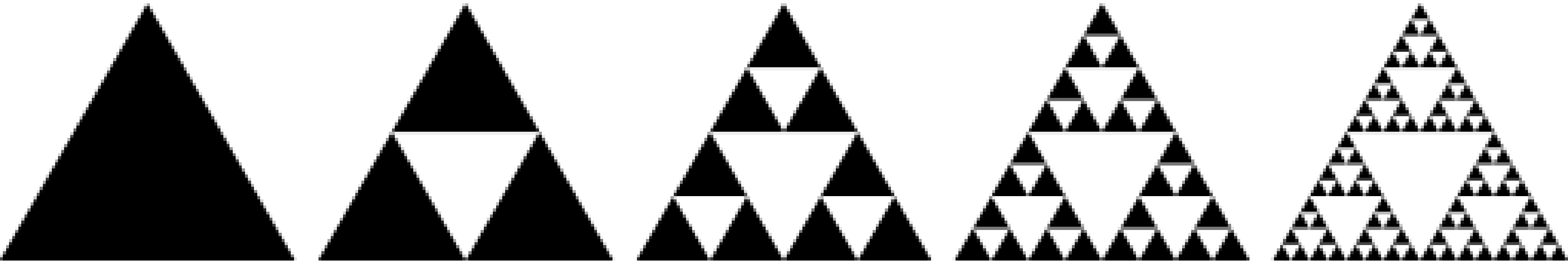
- Iteration 1 -ээс авсан 16 квадрат тус бүрийг 4 квадрат болгон хуваана.
- Iteration 1 -ийн хэлбэрийг багасгаж хуулсан.
- Муруйг дуусгахын тулд 3 холбогч сегментийг (улаанаар харуулсан) нэмж оруулав.
- Хэрэгжилт? Рекурс бол таны найз !!



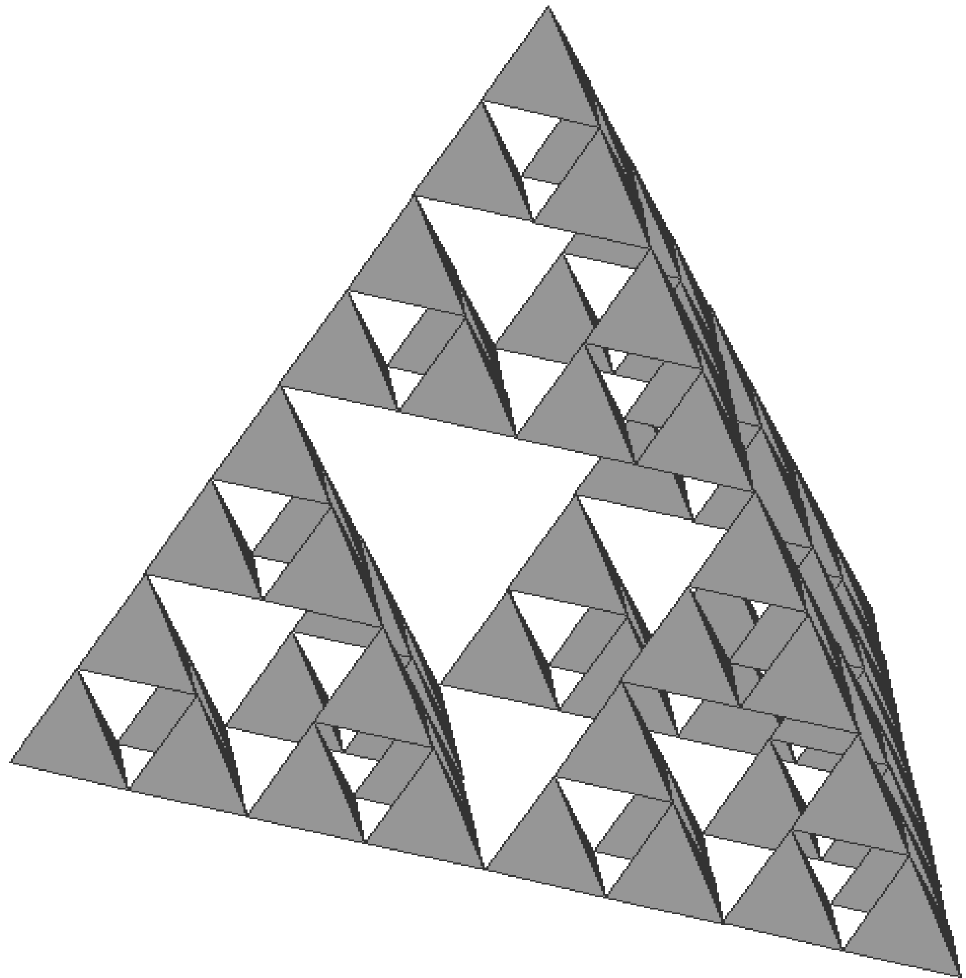
Серпински гурвалжин



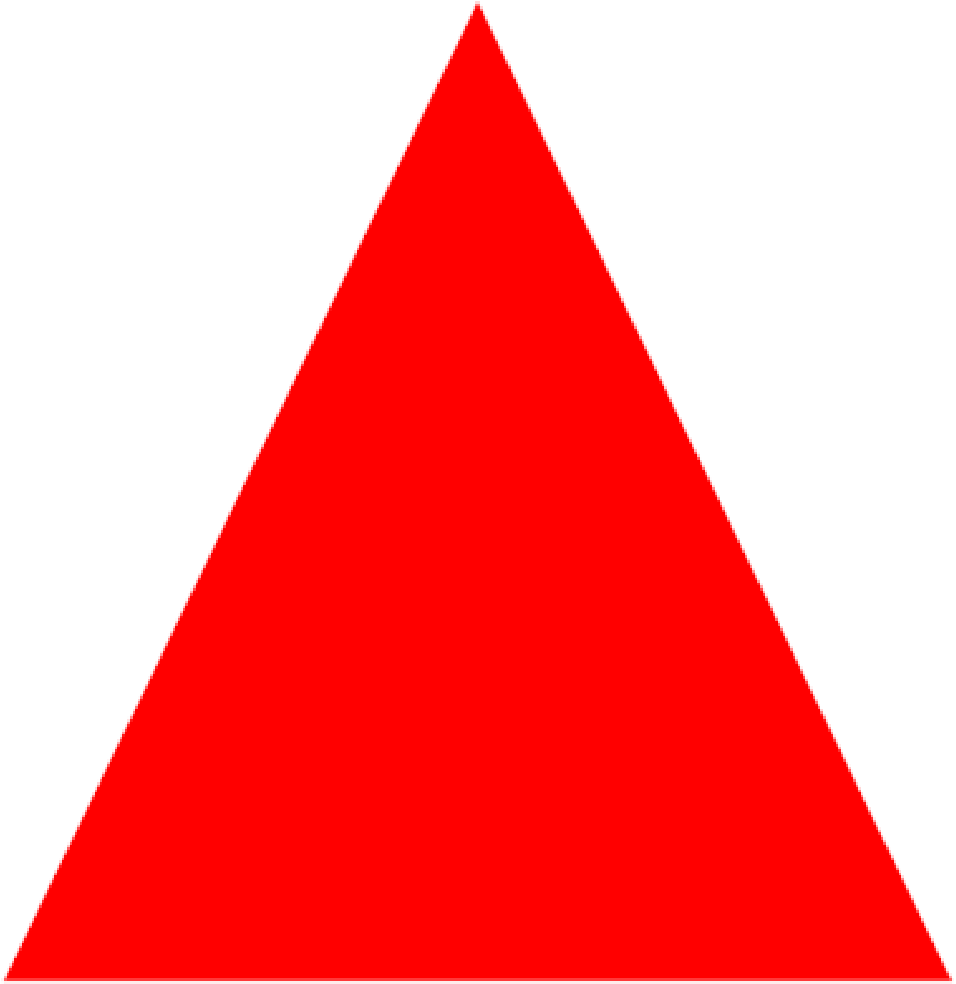
Серпински гурвалжин:



Серпински гурвалжин:
3D хэлбэрээр

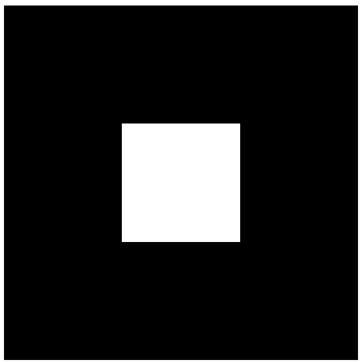


Серпински гурвалжин:




M.A.S.T.E.R.S. USA Tour
THE OHIO STATE

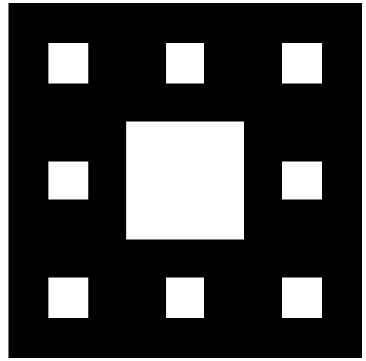
Серпинскийн хивс



периметр = 4*3 + 4*1

талбай = $3^2 - 1^2$

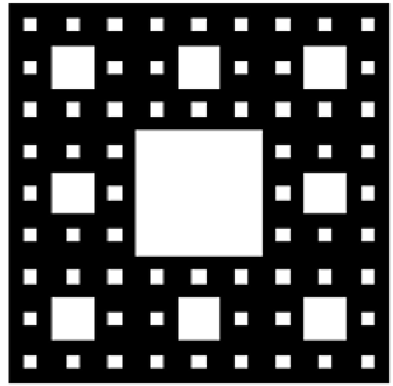
3 хэмжээтэй квадрат, мөн түүний уртыг нэгээр хорогдуулсан өөр нэгэн квадратаас эхэлье.



$$\text{периметр } = 4\cdot 3 + 4\cdot 1 + 8\cdot 4\cdot \frac{1}{3}$$

$$\text{талбай } = 3^2 - 1^2 - 8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

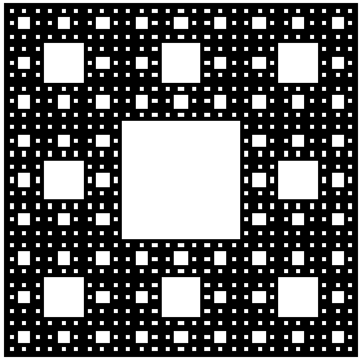
Уг квадрат нь тус бүрийн талын урт нь 1 байх найман жижиг квадратыг агуулсан байг.



$$P = 4\cdot 3 + 4\cdot 1 + 8\cdot 4\cdot \frac{1}{3} + 8^2\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$S = 3^2 - 1^2 - 8\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8^2\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 2}$$

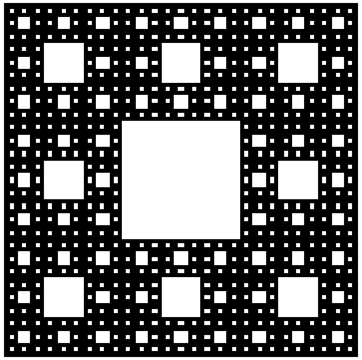
Давталт.



$$P = 4\cdot 3 + 4\cdot 1 + 8\cdot 4\cdot \frac{1}{3} + 8^2\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 8^3\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$S = 3^2 - 1^2 - 8\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8^2\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 2} - 8^3\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 3}$$

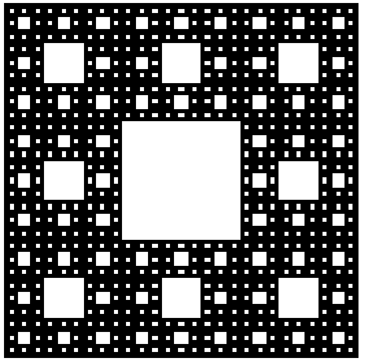
Давталт.



$$P = 4\cdot 3 + 4\cdot 1 + 8\cdot 4\cdot \frac{1}{3} + 8^2\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 8^3\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots$$

$$= 4\cdot 3 + \sum_{n=0}^{\infty} 4\cdot \left(\frac{8}{3}\right)^n$$

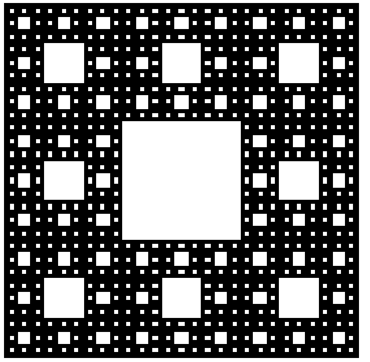
$$= \infty$$



$$S = \; 3^2 - 1^2 - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 2} - 8^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 3} - \ldots$$

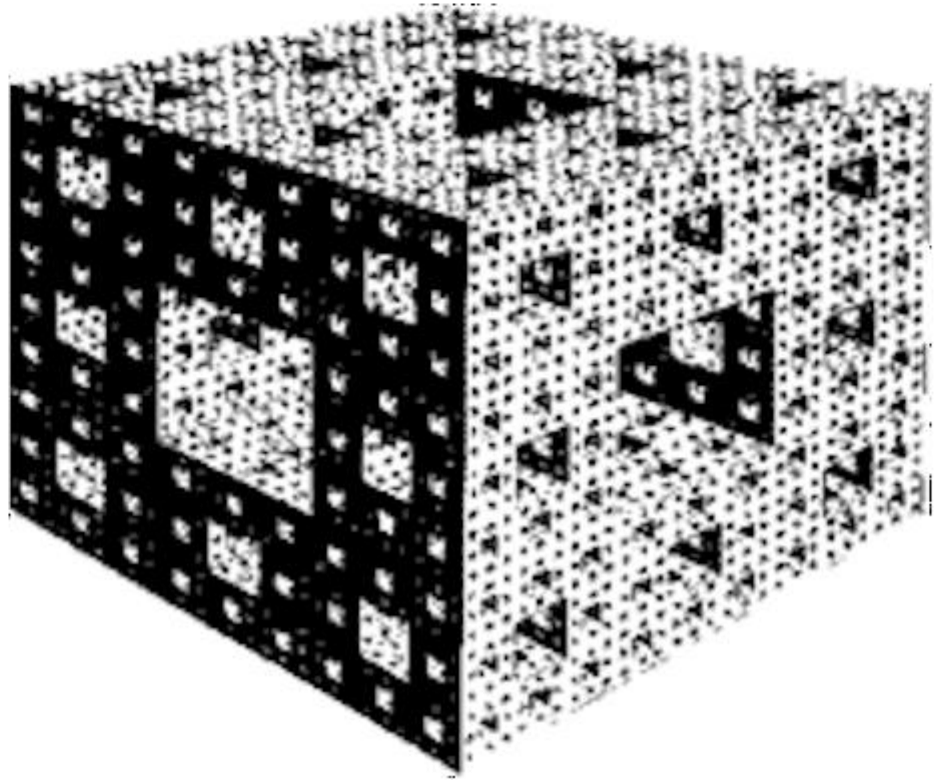
$$= 3^2 - \left[1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= 3^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{8}{9}}\right) = 0$$

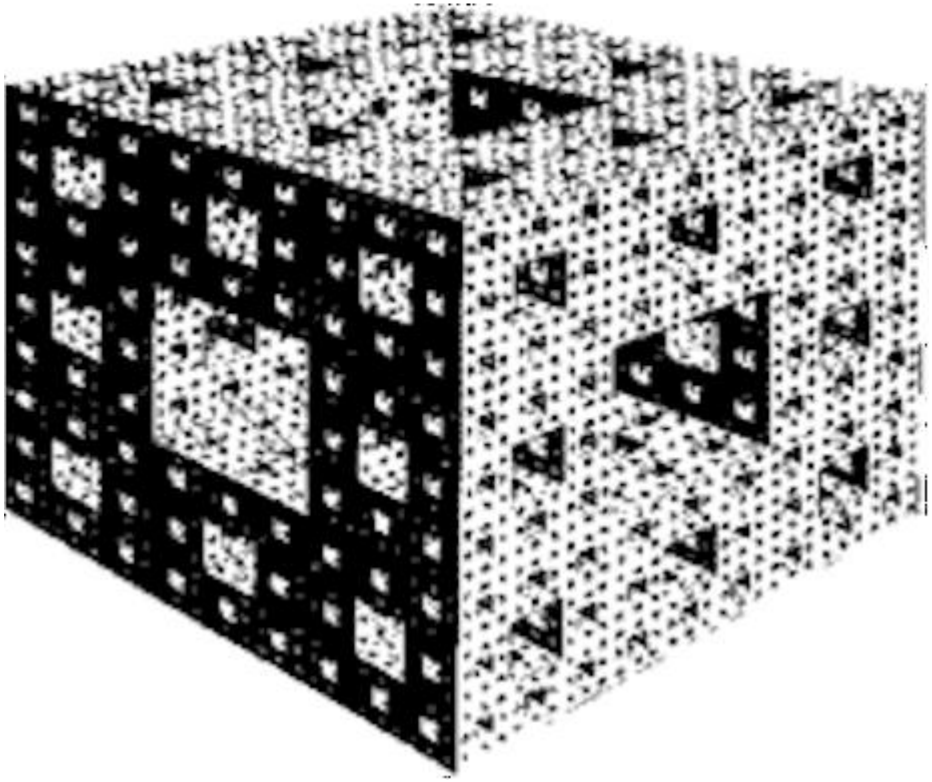


Sierpinski хивсний Фрактал хэмжээг тооцоолох?

$$\log_3 8 \approx 1.89$$



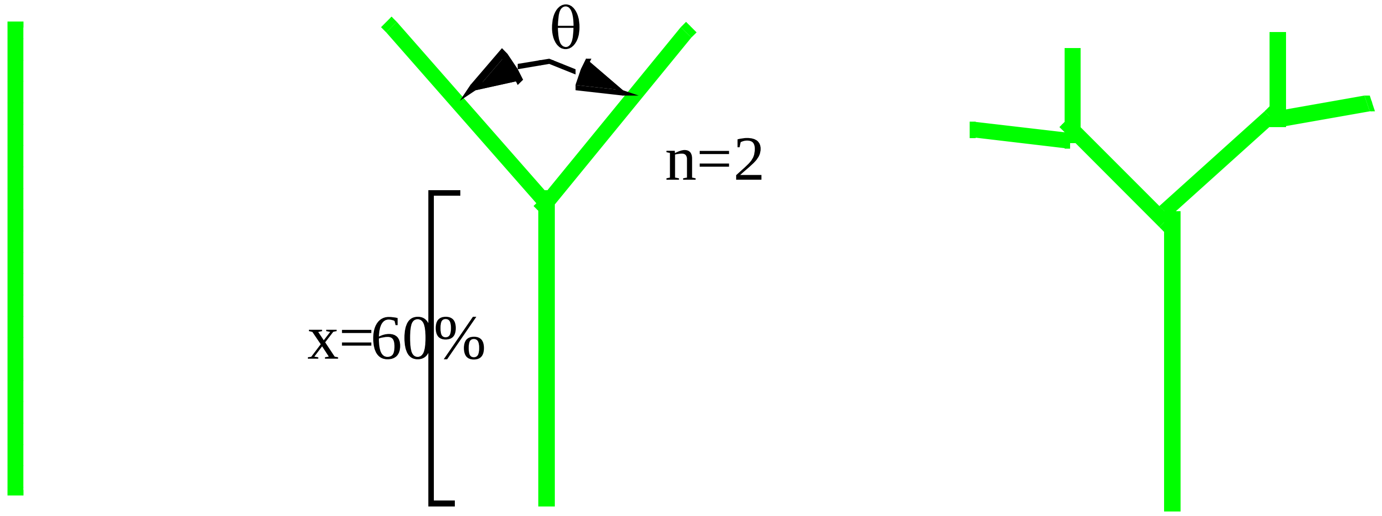
Sierpinski хивсэд Menger хөвөн хэмээх 3 хэмжээст аналог байна.

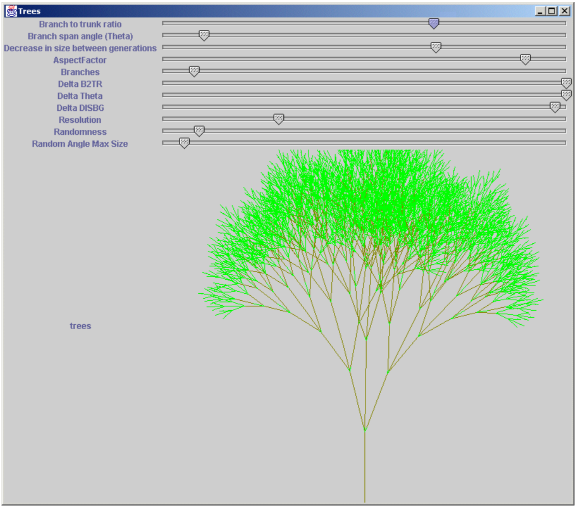


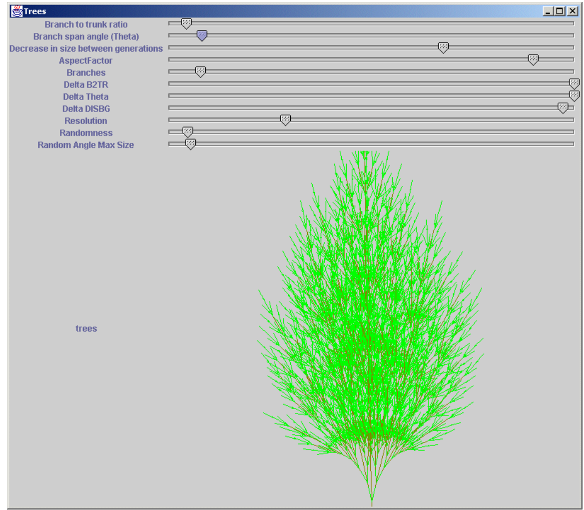
Menger sponge fractal dimension :

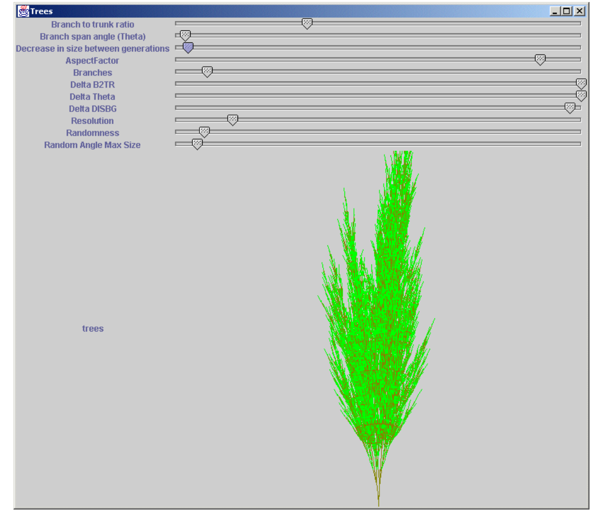
$$\log_3 20 \approx 2.73$$

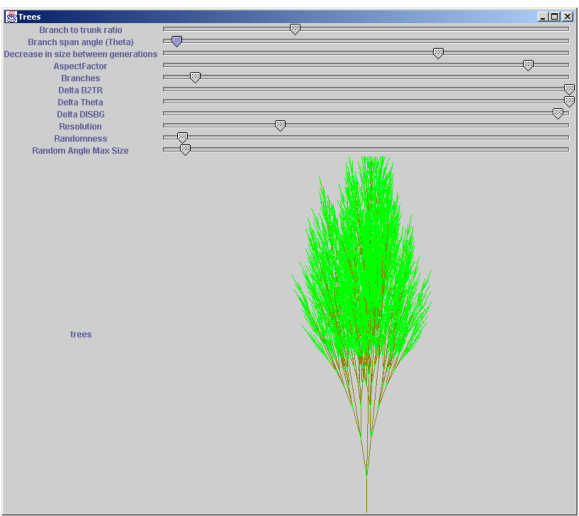
Мод

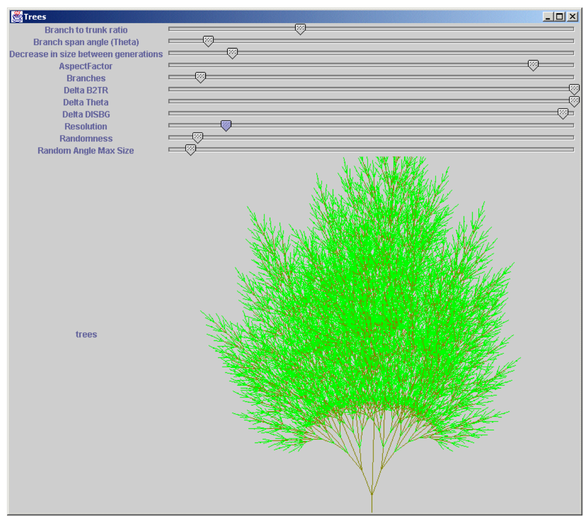



Trees
Branch to trunk ratio
Branch span angle (Theta)
Decrease in size between generations
AspectFactor
Branches
Delta B2TR
Delta Theta
Delta DISBG
Resolution
Randomness
Random Angle Max Size
trees

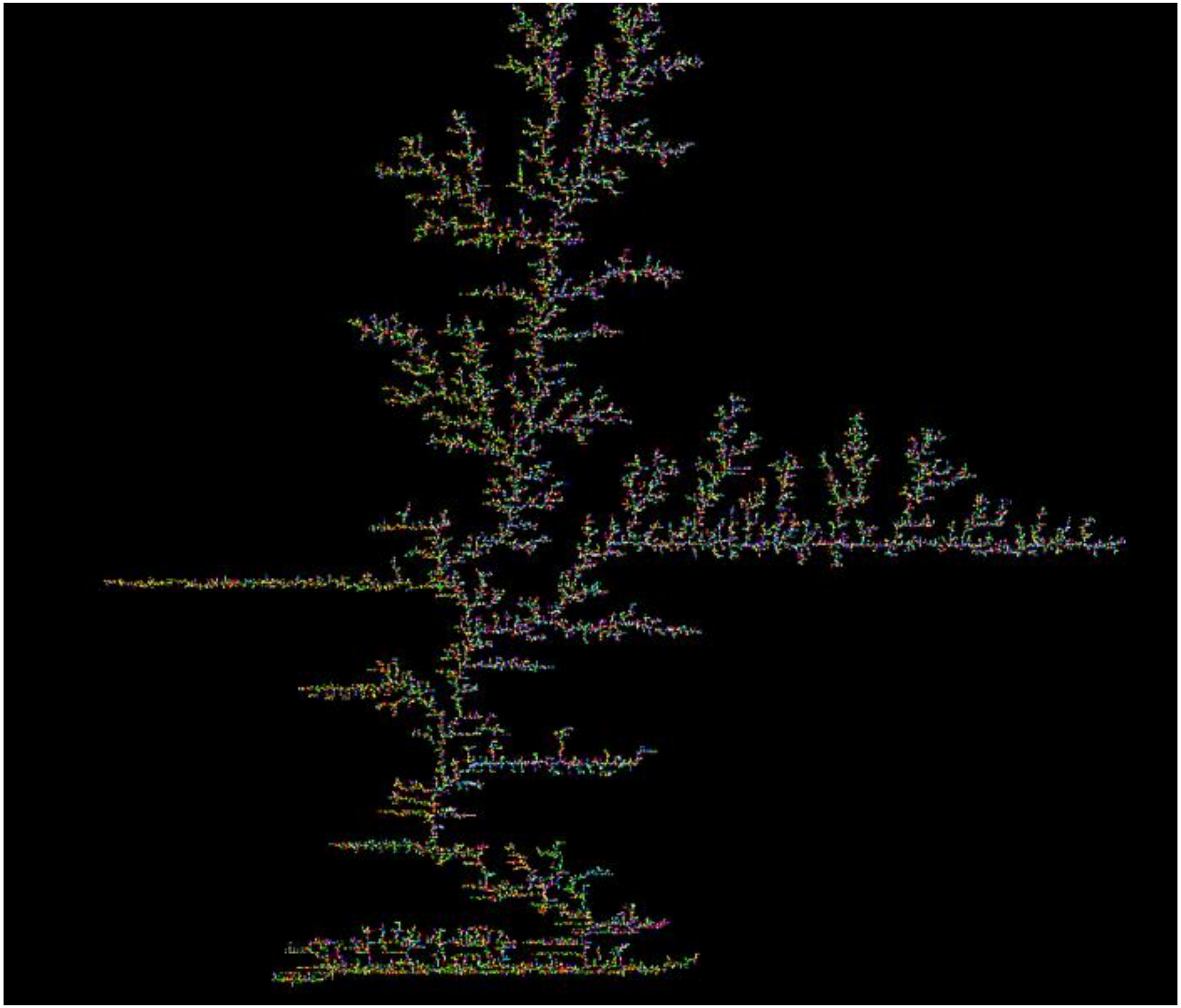

Trees
Branch to trunk ratio
Branch span angle (Theta)
Decrease in size between generations
AspectFactor
Branches
Delta B2TR
Delta Theta
Delta DISBG
Resolution
Randomness
Random Angle Max Size
trees


Trees
Branch to trunk ratio
Branch span angle (Theta)
Decrease in size between generations
AspectFactor
Branches
Delta B2TR
Delta Theta
Delta DISBG
Resolution
Randomness
Random Angle Max Size
trees

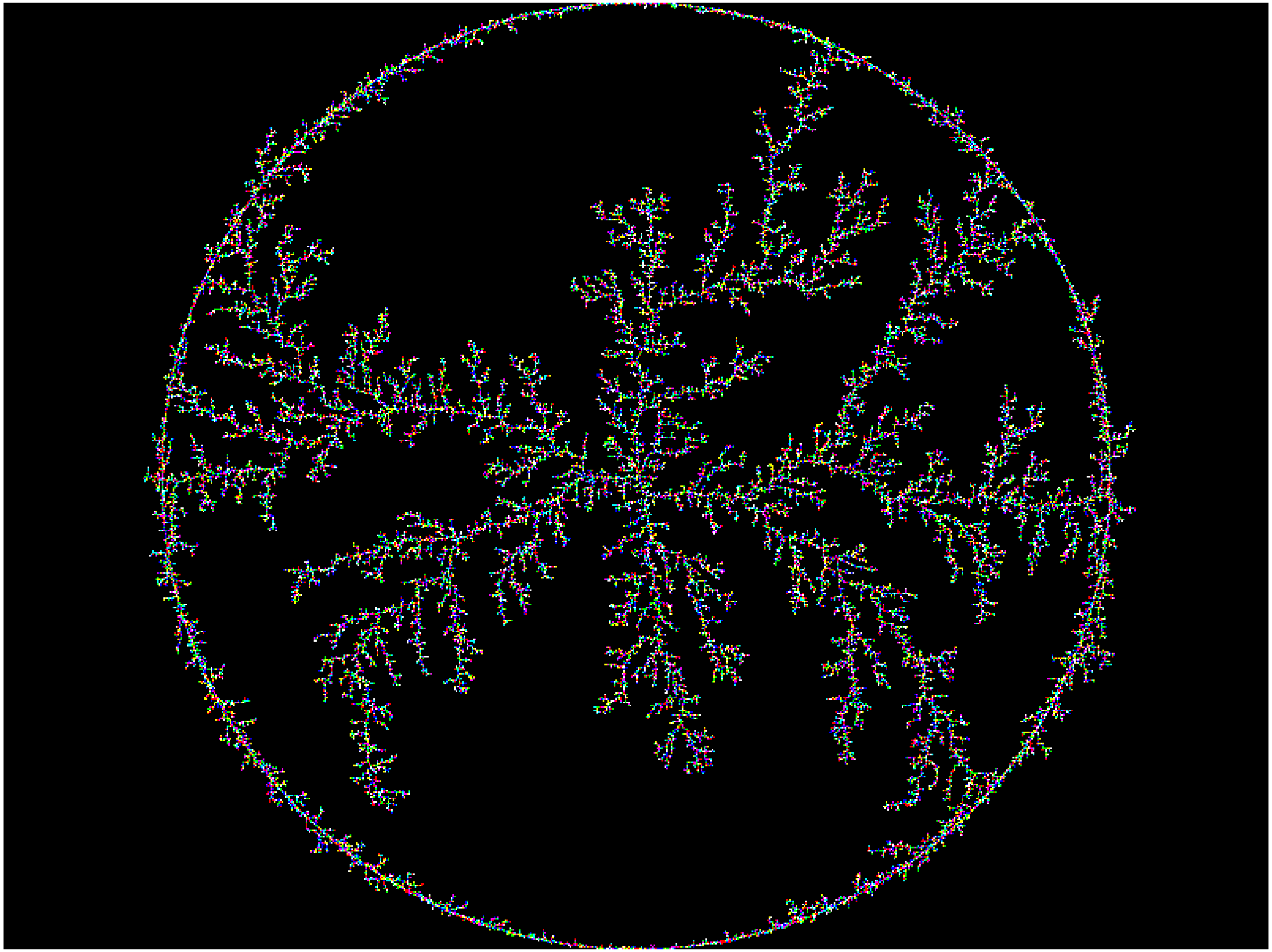

Trees
Branch to trunk ratio
Branch span angle (Theta)
Decrease in size between generations
AspectFactor
Branches
Delta B2TR
Delta Theta
Delta DISBG
Resolution
Randomness
Random Angle Max Size
trees


Trees
Branch to trunk ratio
Branch span angle (Theta)
Decrease in size between generations
AspectFactor
Branches
Delta B2TR
Delta Theta
Delta DISBG
Resolution
Randomness
Random Angle Max Size
trees

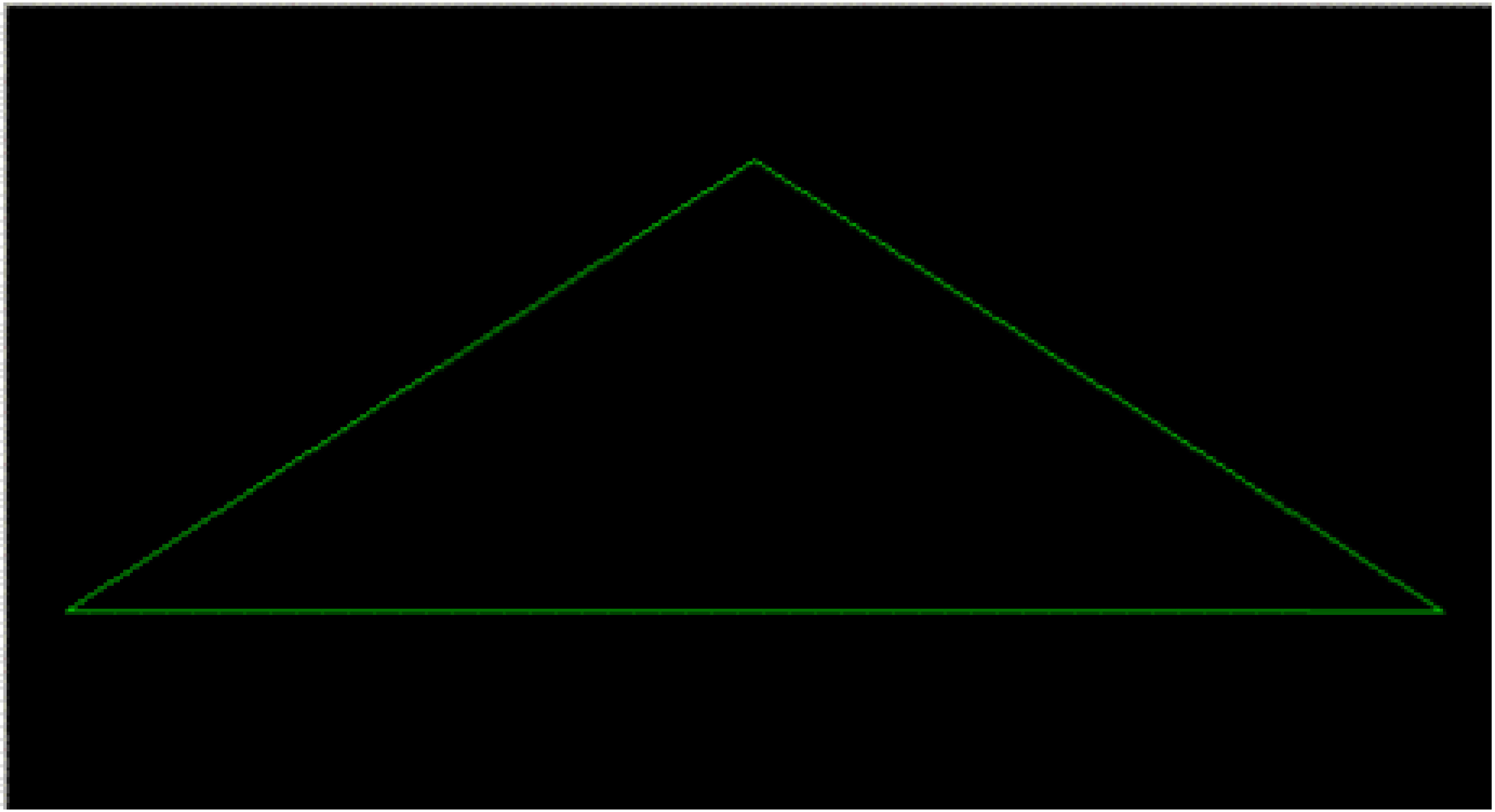
Random Fractal: Brown-ы моднууд



Random Fractal: Brown-ы моднууд

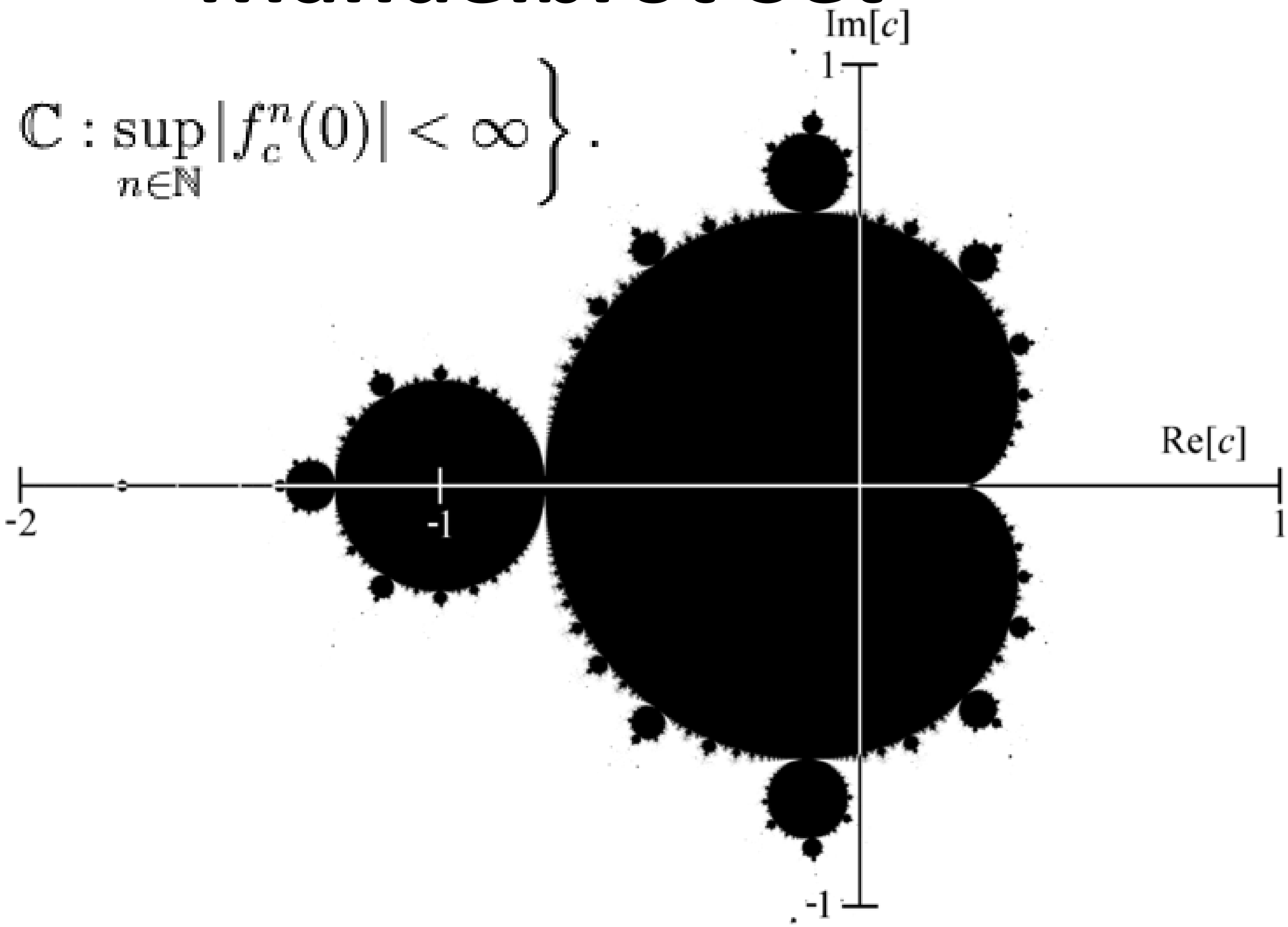


Random Fractal: Уул



Mandelbrot Set

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_c^n(0)| < \infty \right\}.$$



Mandelbrot олонлог

- Бенуа Мандельбротын нэрээр нэрлэгдсэн Манделбротын олонлог бол **fractal** юм.
- Mandelbrot олонлог нь математик олонлог болох тоон утгуудын цуглуулга юм. Эдгээр тоонууд нь бидний амьдралд ашиглагддаг бодит утгуудаас ялгаатай бөгөөд **complex numbers** байна.
- Mandelbrot set нь complex тоонуудын олонлог бөгөөд complex тоон хавтгай дээр харуулдаг.

Mandelbrot set

- $Z = S^2 + C$. Энд C тогтмол (**constant)** тоог илэрхийлнэ.

$$f(z) = (s)^2 + c$$

- S нь тэгээс эхэлдэг боловч давталтын явцад утга нь өөрчлөгдөнө. Давталт бүрт бид хуучин S квадрат болгон C нэмсэнтэй тэнцүү шинэ S-ийг үүсгэдэг.

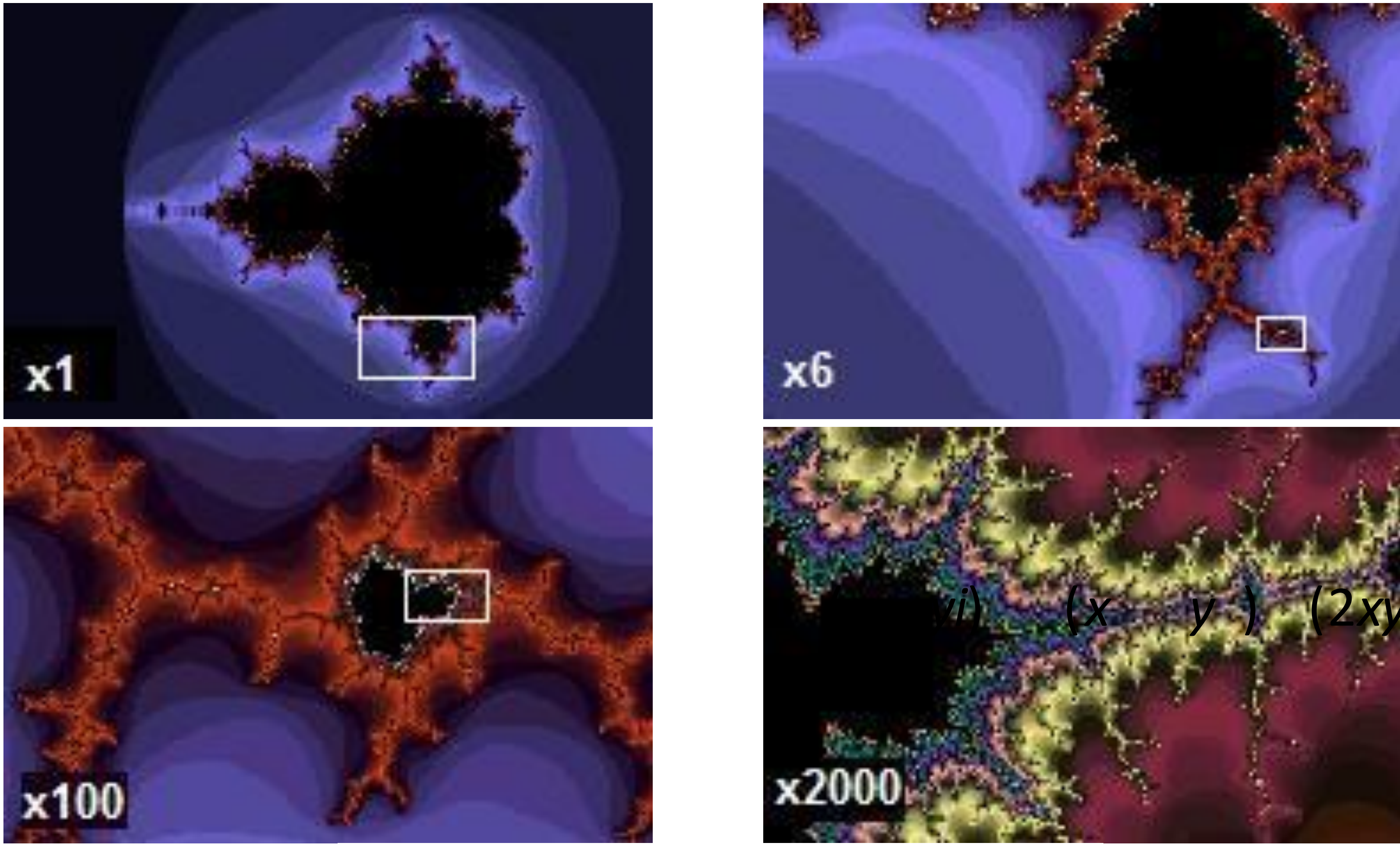
$$d_1 = (s)^2 + c$$

$$d_2 = ((s)^2 + c)^2 + c$$

$$d_3 = (((s)^2 + c)^2 + c)^2 + c$$

$$d_4 = ((((s)^2 + c)^2 + c)^2 + c)^2 + c$$

Mandelbrot Set: Self Similarity



$$(x+yi)^2=(x^2-y^2)+(2xy)i$$

Mandelbrot set

- Жишээ: Эхний 3 гишүүнийг тооцоол.
  s = 2, c = -1,

$$2^2 - 1 = 3$$

$$3^2 - 1 = 8$$

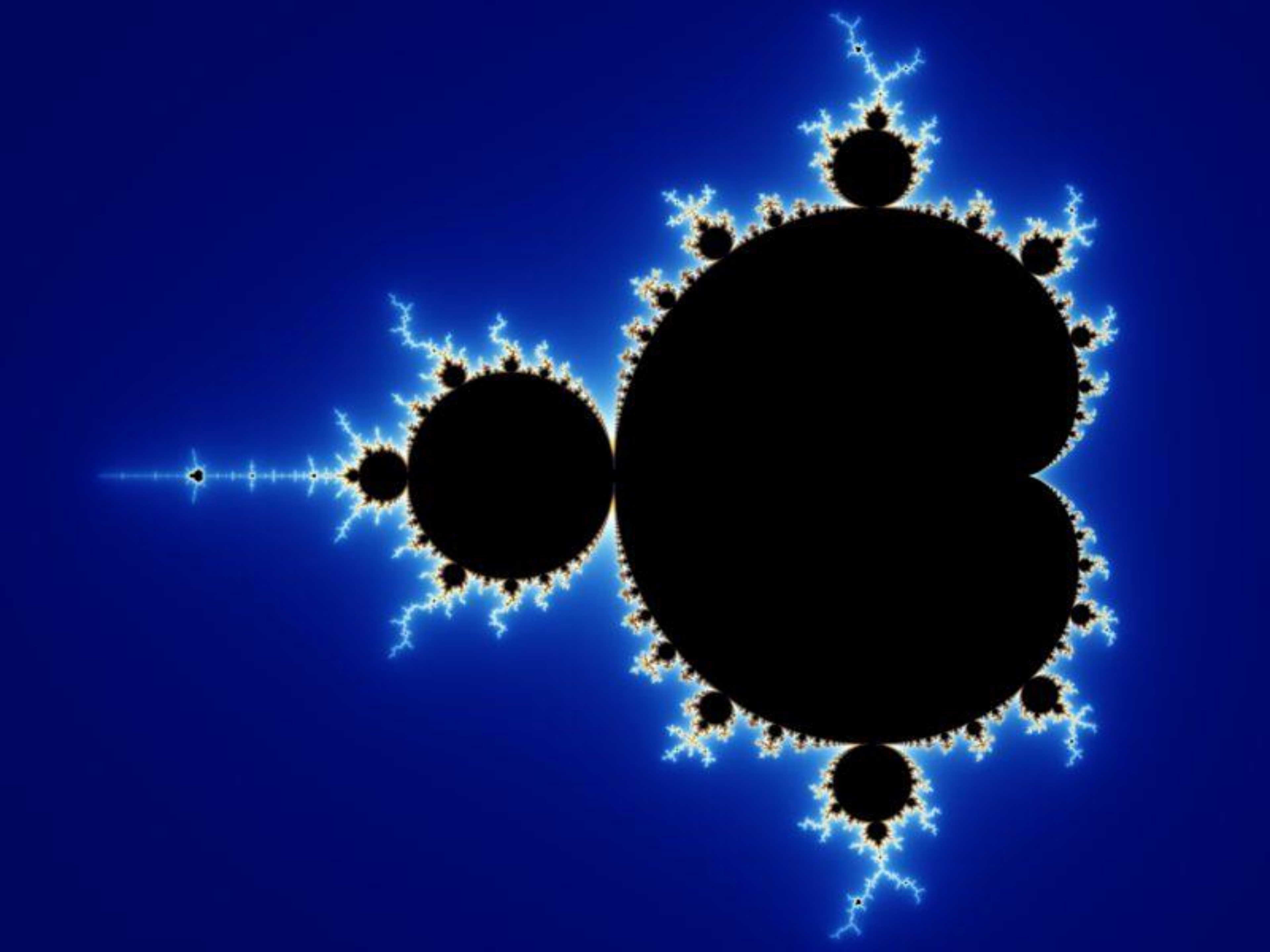
$$8^2 - 1 = 63$$

Эхний 3 гишүүнийг тооцоол.
s = 0, c = -2+i,

$$0 + (-2 + i) = -2 + i$$

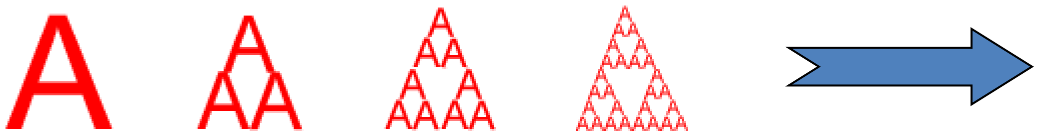
$$(-2 + i)^2 + (-2 + i) = 1 - 3i$$

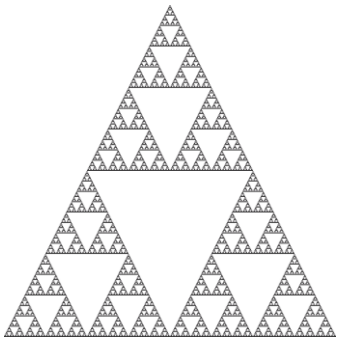
$$(1 - 3i)^2 + (-2 + i) = -10 - 5i$$



FRACTAL ЗУРГИЙН НЯГТРУУЛАЛТ

Fractal Зургийн Нягтруулалт?





Гаралтын зургууд нь Сиерпинскийн гурвалжин (Sierpinski triangle) болж хувирдаг.

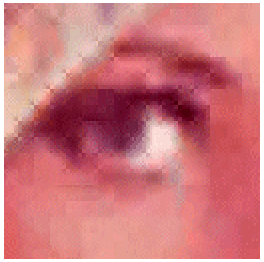
Resolution Independence

Fractal Image Compression нэг чухал шинж чанар нь *Resolution Independence байна*.

Зургийг decode хийх үед бидний хийх зүйл бол энэ хувиргалтыг анхдагч зураг (initial image) бүрт хэрэгжүүлэх. Давталт бүрийн дараа декодчилсон зураг илүү нарийвчилсан хурц болно. Энэ нь декодчилсон зургийг ямар ч хэмжээгээр декодлох боломжтой гэсэн үг юм.

Ийд бид "pixelization" эффект ашиглахгүйгээр зургийг том хэмжээтэйгээр бүсчлэх боломжтой

Lena's eye
original image enlarged to 4 times



Lena's eye
decoded at 4 times its encoding size