По теореме 343, примененной к интервалу $\left[\eta, \frac{\xi+b}{2}\right]$, производная функции $L(\eta, x)$ при $x = \xi$ существует и равна $f(\xi)$; следовательно,

$$g'(\xi) = f(\xi)$$

После этого усилия мы "проинтегрируем"ряд знакомых нам непрерывных функций; их интегралами также окажутся знакомые нам функции.

Теорема 345. *Если* $n \neq$ -1, *то*

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ при } a \geq 0$$

(т. е. в каждом открытом интервале $a < x < b$ с $a \geq 0$).

Доказательство. Для $x > 0$, по теореме 109, имеем

(1) $\quad (\frac{x^{n+1}}{n+1})' = \frac{1}{n+1}(x^{n+1})' = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n$

Теорема 346. Если $n \neq -1$ *и целое, то*

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \textit{ при } a \geq 0 \textit{ и при } b \leq 0.$$

Доказательство. В силу теоремы 119, формула (1) верна для всех $x \neq 0$.

Теорема 347. *Если* $n \geq 0$ *и целое, то*

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

для всех x.

Доказательство. В силу теоремы 103, формула (1) верна для всех x.

Теорема 348.

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} log x + c & \textit{при } a \geq 0 \\ log(-x) + c & \textit{при } b \leq 0 \end{cases}$$

Предварительные замечания. 1) Тем самым заполнен пробел $n = -1$ в теоремах 345 и 346. Но само существование интеграла следует уже из теоремы 344.

2) Результат можно объеденить в одну формулу

$$\int \frac{dx}{x} = log|x| + c = \frac{1}{2} log(x^2) + c,$$

годную в обоих случаях.

Доказательство: теоремы 104 и 105.

Теорема 349.

$$\int \sum_{i=0}^{n} a_i x^i dx = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1} + c$$

Предварительное замечание. Таким образом, интеграл от полинома есть полином. Мы уже знали, что производная от полинома есть полином.

Доказательство. Подинтегральная функция есть производная правой части

Теорема 350.

$$\int e^x dx = e^x + c$$

Доказательство.

$$(e^x)' = e^x.$$

Теорема 351.

$$\int \frac{dx}{x - \gamma} = log|x - \gamma| + c \text{ при } a \geq \gamma \text{ и при } b \leq \gamma$$

Доказательство. Если $x > \gamma$, то

$$(log(x - \gamma))' = \frac{1}{x - \gamma}(x - \gamma)' = \frac{1}{x - \gamma};$$

если $x < \gamma$, то

$$(log(\gamma - x))' = \frac{1}{\gamma - x}(\gamma - x)' = \frac{1}{x - \gamma}.$$