院試対策ゼミ

令和 2 年生

2023 年 7 月 9 日

目次

1 第一回: 2023/6/12

1.1 力学

1.2 電磁気学

1.3 量子力学

(1) 交換関係 $[\hat{a_k}, \hat{a_l}^\dagger]$ を計算する

条件から,

$$\hat{a_k} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(m\omega\hat{X}_k + i\hat{P}_k\right), \quad \hat{a_k}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(m\omega\hat{X}_k - i\hat{P}_k\right). \tag{1}$$

交換関係の式に代入し計算を行う.

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger\right] &= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left[\left(m\omega\hat{X}_k + i\hat{P}_k\right), \left(m\omega\hat{X}_l - i\hat{P}_l\right)\right] && (2)\\
&= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left\{im\omega\left[\hat{P}_k, \hat{X}_l\right] - im\omega\left[\hat{X}_k, \hat{P}_l\right]\right\} && (3)\\
&= \frac{i}{2\hbar}(-2i\hbar)\delta_{kl} \qquad \left(\because \left[\hat{X}_k, \hat{P}_l\right] = i\hbar\delta_{kl}\right) && (4)\\
&= \delta_{kl} && (5)
\end{aligned}$$

以上から, $\underline{\therefore \left[\hat{a_k}, \hat{a_l}^\dagger\right] = \delta_{kl}}$

(2) ハミルトニアンと生成消滅演算子の交換関係 $\left[\hat{H}, \hat{a}_k\right], \left[\hat{H}, \hat{a}_k^\dagger\right]$ を計算する.

始めに生成消滅演算子の表式から $\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k$ を計算する.

$$\begin{aligned}
\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k &= \left(m\omega\hat{X}_k - i\hat{P}_k\right)\left(m\omega\hat{X}_k + i\hat{P}_k\right) && (6)\\
&= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(m^2\omega^2\hat{X}_k^2 + \hat{P}_k^2 + im\omega\left[\hat{X}_k, \hat{P}_k\right]\right) && (7)\\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{m\omega^2}{2}\hat{X}_k^2 + \frac{1}{2m}\hat{P}_k^2 - \frac{\hbar\omega}{2m}\right) && (8)
\end{aligned}$$

従って,

$$\hbar\omega\left(\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k + \frac{1}{2}\right) = \frac{m\omega^2}{2}\hat{X}_k^2 + \frac{1}{2m}\hat{P}_k^2 \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

$$\underline{\therefore \hat{H} = \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{m\omega^2}{2}\hat{X}_k^2 + \frac{1}{2m}\hat{P}_k^2\right) = \sum_{k=1}^{2}\hbar\omega\left(\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k + \frac{1}{2}\right)} \tag{11}$$

次に，以上の表式を用いてハミルトニアンと生成消滅演算子の交換関係 $\left[\hat{H}, \hat{a}_k\right], \left[\hat{H}, \hat{a}_k^\dagger\right]$ を計算する.

(3) Now the relation $\hat{a}_k\left|0\right\rangle = 0$ is satisfied. Show the ground state energy.

1.4　統計力学

2　第 2 回: 2023/6/25

2.1　力学

2.2　電磁気学

2.3　量子力学

2.4　統計力学

3　第 3 回: 2023/7/2

実施内容:　東北大学令和 5 年分
実施場所:　異分野基礎研 1 階
担当:　藤田 (力学)，遠藤 (電磁気学)，松田 (量子力学)，樋口 (統計力学)

3.1　力学

3.2　電磁気学

3.3　量子力学

3.4　統計力学

4　第 4 回: 2023/7/9

実施内容:　岡山大学 2022 年 4 月入学 (2021 年 8 月実施) 分
実施場所:　異分野基礎研 1 階会議室
担当:　遠藤 (力学)，松田 (電磁気，統計)，樋口 (量子力学)

4.1　力学

4.2　電磁気学

Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{12}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{13}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{14}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{15}$$

(1) ベクトル公式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{V}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) - \nabla^2 \boldsymbol{V}$ を示す．

以下ではレビチビタ ϵ_{ijk} および縮約記号を用いることとする．

$$
\begin{aligned}
[\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{V})]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_i (\nabla \times \boldsymbol{V})_k && (\because \nabla \times \boldsymbol{V} = \epsilon_{ijk} \partial_i V_j) && (16)\\
&= \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l V_m) && && (17)\\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \partial_j \partial_l V_m && (\because \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) && (18)\\
&= \partial_j \partial_i V_j - \partial_j \partial_j V_i && && (19)\\
&= \left[\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{V} - \nabla^2 \boldsymbol{V})\right]_i && && (20)
\end{aligned}
$$

よって，与式のベクトル公式が成り立つ．

(2) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ および $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ が満たす波動方程式を導く．

Maxwell 方程式 (14) に $\nabla\cdot$ を作用させる．このとき，

$$
\begin{aligned}
(LHS) &= \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)) && = -\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \quad (\because (1) \text{ and Maxwell 方程式 } (12)) && (21)\\
(RHS) &= -\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} && = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)) && (22)\\
&= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} && && (23)
\end{aligned}
$$

よって，

$$\therefore \underline{\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2}} \tag{24}$$

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ についても同様に求める．Maxwell 方程式 (15) から，

$$
\begin{aligned}
(LHS) &= \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)) &&= -\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) && (25)\\
(RHS) &= \epsilon_0 \mu_0 \boldsymbol{\nabla} \times \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} &&= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} \qquad (\because Maxwell \text{ 方程式 } (14)) && (26)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ に関する波動方程式,

$$
\underline{\therefore \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2}} \tag{27}
$$

(3) 平面波が (2) の波動方程式の解である場合に成り立つ分散関係を示し，電磁波の速さ c を求める．

平面波の式

平面波は以下の式で与えられるとする．

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 \exp\{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\}, \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}_0 \exp\{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\} \tag{28}
$$

波動方程式 (24)，(27) に電場, 磁場の平面波 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ の式を代入する．任意のベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A_0} \exp\{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\}$ を波動方程式に代入すると,

$$
\begin{aligned}
(LHS) &= \boldsymbol{\nabla}^2 \left(\boldsymbol{A}_0 \exp\{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\}\right) &&= (i\boldsymbol{k})^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = -\boldsymbol{k}^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) && (29)\\
(RHS) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\boldsymbol{A}_0 \exp\{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\}\right) &&= (-i\omega)^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = -\omega^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) && (30)
\end{aligned}
$$

よって，波動方程式 (24), (27) から,

$$
\underline{\therefore \boldsymbol{k}^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2} \tag{31}
$$

また，電磁波の分散関係 $\boldsymbol{k}^2 c^2 = \omega^2$ の式と比較すると

$$
\underline{\therefore c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}} \tag{32}
$$

(4) $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ および $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ が成り立つことを示す．

Maxwell 方程式 (12), (13) を計算する．ここで，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t), \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ として計算すると,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) &= 0 && (33)\\
i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A}_0 \exp\{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\} &= 0 && (34)\\
\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A}_0 &= 0 && (35)
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\underline{\therefore \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{k} = 0, \qquad \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{k} = 0} \tag{36}
$$

また，この式が意味するところは平面波の進行方向と電場，磁場が互いに直交しており直線偏向形成しているということである．

(5) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ が互いに垂直であることを示す．

まず，Maxwell 方程式 (15) について計算し，磁場 $\boldsymbol{B}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ の関係を導く．

$$(LHS) = \nabla \times \boldsymbol{B}_0 \exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\} \qquad = i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B} \tag{37}$$

$$(RHS) = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{E}_0 \exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\}\right) = -i\omega\boldsymbol{E} \tag{38}$$

よって，(左辺)=(右辺) から，

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0 + \epsilon_0\mu_0\omega\boldsymbol{E_0} = 0 \tag{39}$$

辺々 $\boldsymbol{B}_0\cdot$ を掛けると

$$\boldsymbol{B}_0\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0) - \omega\mu_0\epsilon_0\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{B}_0 = 0 \tag{40}$$

$$\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{B}_0 = 0 \qquad (\because \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0 = 0) \tag{41}$$

よって電場と磁場は垂直である．

(6) 平面波の場合に $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ のエネルギー密度が等しいことを示す．

題意から，

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0|\boldsymbol{E}|^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\cdot\left(\frac{|\boldsymbol{k}|}{\epsilon_0\mu_0\omega}|\boldsymbol{B}|\right)^2 \qquad (\because (39)\text{ から}, |\boldsymbol{E}_0| = \frac{|\boldsymbol{k}|}{\epsilon_0\mu_0\omega}|\boldsymbol{B_0}|) \tag{42}$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{|\boldsymbol{k}|}{\omega}\right)^2\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2 \tag{43}$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2 \qquad (\because (3)\text{ より}, (|\boldsymbol{k}|/\omega)^2 = \epsilon_0\mu_0) \tag{44}$$

よって，エネルギー密度は電場と磁場で等しく，

$$\underline{\therefore u = \frac{1}{2}\epsilon_0|\boldsymbol{E}|^2 = \frac{1}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2} \tag{45}$$

(7) 平面波の場合にポインティングベクトル $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ と波数 $\boldsymbol{k}$ の向きが等しいことを示し，$\boldsymbol{S}$ の大きさを求める．

まず，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = 0$ を示し，その後 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \epsilon_0 c^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ から $|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)|$ を求める．

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) \propto \boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)) \propto \boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{E_0}\times\boldsymbol{B}_0) \tag{46}$$

なので，$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0)$ を計算する．ベクトル公式から，

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0) - \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0) = 0 \tag{47}$$

よって， $\underline{\therefore \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = 0}.$

次に，ポインティングベクトルの大きさを求める．

$$|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)| = \epsilon_0 c^2\,|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)| \tag{48}$$

$$= \epsilon_0 c^2\,|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|\,|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)| \tag{49}$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0 c^2\sqrt{\epsilon_0\mu_0}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|^2 + \frac{1}{2}\epsilon_0 c^2\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}|\boldsymbol{B}|^2 \qquad (\because (45)\text{ より．}) \tag{50}$$

$$= c\,(\frac{1}{2}\epsilon_0|\boldsymbol{E}_0|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}_0|^2) \qquad (\because (32)\text{ より．}) \tag{51}$$

$$= cu \tag{52}$$

従って， $\underline{\therefore |\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)| = cu}$

4.3 量子力学

4.4 統計力学