LYCÉE PRIVE
FANILO SAINTE THÉRÈSE DE LISIEUX AMPASANIMALO

MATHÉMATIQUES DE LA CLASSE DE T^{le}.A

Mr.MARSON SERGE
(Master II en parcours Mathématiques Appliquées)
(Université d'Antananarivo)

29 novembre 2015

Préface

Notes pour les élèves

Ceci est un livres mathématiques pour la classe de terminale A.Il a été fait pour être lut de bout en bout même s'il y a de tables de matière.Ce tables de matières a été fait pour vous mentionner tous les programmes.Il a été rédigé afin d'aider les élèves,vu leur pouvoir d'achat,cela ne devrait pas empêcher l'élève d'acheter des livres,rien que pour vous comparer.

Le contenu de ce polycopié suit de très près du programme.Dans ce cours , on aurait voulu ne mettre aucune démonstration , figures afin que l'élève comprenne que l'important est la partie définition - remarque - exemple.

Le lecteur trouve tout fois des erreurs de l'écriture du au logiciel de saisie qui n'accepte dans certains structures que de l'anglais.Ce livre a été fait à l'aide du logiciel TEXlive 2013.

Tsy azo amidy ary tsy azo adika na amin'ny ampahany aza.

MARSON Serge , email : marsonserge@yahoo.fr/Tél : 034 68 770 27

Table des matières

Chapitre 1

SUITE NUMÉRIQUE

1.1 Définition :

Une suite est une application

$$U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto U(n) = U_n.$$

1.2 Exemples :

$\star$ La suite des nombres pairs est : 0 , 2 ,4 ,6 ,8 , $\cdots$ C'est une application $U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto U_n = 2n.$

$\star$ La suite des nombres impairs est : 1 , 3 ,5 ,7 ,9 , $\cdots$ C'est une application $U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto U_n = 2n+1.$

1.3 Suite Arithmétique

• $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique s'il existe r $\in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{U_{n+1} - U_n = r}$

• L'expression d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_p en fonction de n est donnée par la relation $\boxed{U_n = U_p + (n-p)r}$.

• La somme $S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n$ *est gale* $\boxed{S_n = \frac{n-p+1}{2}\Big(U_p + U_n\Big)}$

• Une suite arithmétique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r est :
- croissante si r $>$ 0
- décroissante si r $<$ 0

1.4 Suite Géométrique :

• $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique s'il existe q $\in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{U_{n+1} - U_n = q}$

• L'expression d'une suite géométrique de raison q et de premier terme U_p en fonction de n est donnée par la relation $\boxed{U_n = U_p \times q^{n-p}}$

• La somme $S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n$ est égale à $\boxed{S_n = U_p\Big(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\Big)}$

• $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \; si \; 0 < q < 1$
$\quad = +\infty si 1 < q.$

1.5 Remarque

⋆ Il existe des suites qui ne sont pas ni une suite arithmétique , ni une suite géométrique.

⋆ Une suite numérique (U_n) est convergente si $\lim_{n\to+\infty} U_n$ existe et $=$ à un nombre réel.

(Voir exercice)

Chapitre 2

STATISTIQUE

2.1 Étude d'une population

2.1.1 Méthode statistique

Population : Tout ensemble sur lequel on fait l'étude statistique.
Individu : ces sont les éléments d'un population.
Caractère : C'est l'étude porté sur la population.
Modalité : Différentes valeurs prises par un caractère.

2.1.2 Exemple :

Population	Individu	Caractère	Modalités
Ensemble de voiture	Une voiture	Couleur	Rouge , Bleu , verte ,$\cdots$
Bibliothèque	un livre	nature	Roman , livre de mathématiques , $\cdots$

2.1.3 Fréquence :

$\boxed{f_i = \dfrac{n_i}{N}}$ où ni : effectif de la classe et
N : l'effectif de la population

2.2 Étude d'une série statistique :

2.2.1 Moyenne arithmétique d'une série statistique.

— Étant donnée une série statistique , la moyenne arithmétique (noté $\overline{x}$) est :

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}}$$

— Prenons par exemple la série : 9,5 - 12,5 - 8 - 13,25 - 11,75 représentant les notes de mathématiques de 5 élèves à la fin de l'année scolaire. La note moyenne de ces élèves est alors :

$$\overline{x} = \frac{9,5 + 12,5 + 8 + 13,25 + 11,75}{5} = 11$$

2.2.2 Ajustement Linéaire

a - Nuage des points :

Un nuage des points est l'ensemble des points M(x,y) placés dans un même repère orthogonal R($o, , \vec{i}, \vec{j}$).

b - Ajustement par la méthode graphique :

- A partir du nuage des points , on peut tracer une courbe.Cette courbe passe entre les points du nuage à la distance aussi faible que possible.La courbe ainsi tracée est appelée courbe d'ajustement de y en x.
- Une droite d'ajustement ne peut être tracer que si le nuage des points n'est pas suffisamment allongé.
- Si le nuage des points ressemble à un cercle,il n'est pas possible de leur ajuster à une droite.

c - Ajustement par la méthode de MAYER.

- Droite de MAYER :
- La méthode de MAYER consiste à partitionner le nuage des points $\{ M_i\}_{i=1,2,....n}$ en deux sous nuages $\{ M_i\}_{i=1,2,....k}$ et $\{ M_i\}_{i=k+1,k+2,....n}$
- On note par (S_1) et (S_2) ces deux sous nuages et par G_1 et G_2 ces points moyens respectifs. Si on note par G le point moyen du nuage (S) alors les points G_1 , G_2, et G sont alignés. Ainsi , la droite (G_1G_2) passe par G et cette méthode est appelée méthode de MAYER.
- La droite (G_1G_2) est appelée droite de MAYER ou droite d'ajustement linéaire de y en x ou droite de régression linéaire de y en x.
- Méthode de calcul :
- Coordonnées de G_1 et G_2 :

$$G_1 \begin{cases} \overline{X_1} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{k} \\ \\ \overline{Y_1} = \dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{k} \end{cases} \qquad G_2 \begin{cases} \overline{X_2} = \dfrac{x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n}{n-k} \\ \\ \overline{Y_2} = \dfrac{y_{k+1} + y_{k+2} + \cdots + y_n}{n-k} \end{cases}$$

- La droite de MAYER est de la forme (D) : y = ax + b
  Il est évident que G_1 et G_2 passent par (D) .Nous avons alors :

$$\begin{cases} \overline{Y_1} = a \ \ \overline{X_1} + b \\ \\ \overline{Y_2} = a \ \ \overline{X_2} + b \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a = \dfrac{\overline{Y_2} - \overline{Y_1}}{\overline{X_2} - \overline{X_1}} \\ \\ b = \overline{Y_1} - a\overline{X_1} \end{cases}$$

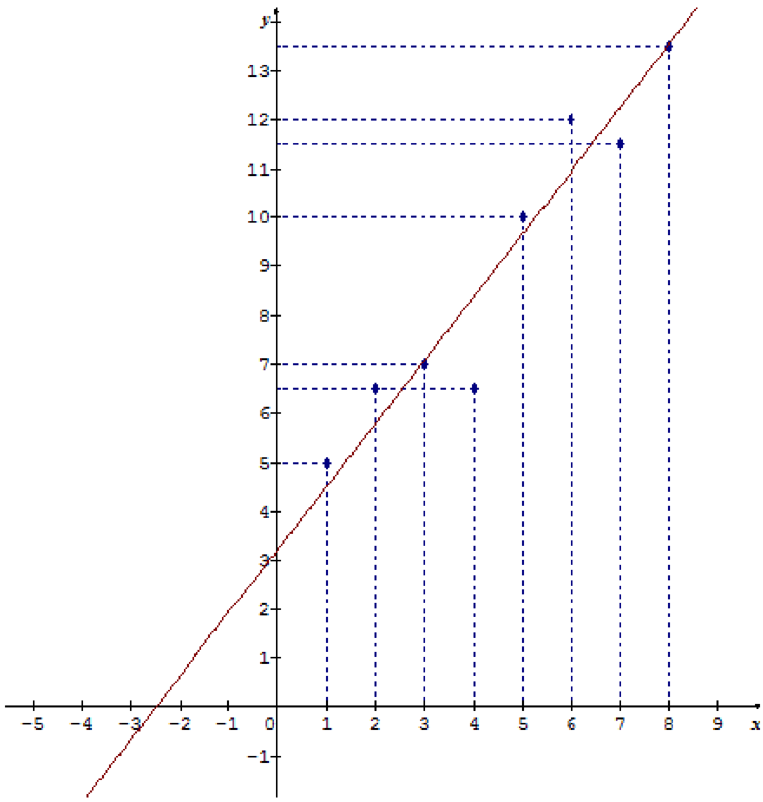

FIGURE 2.1 – Droite de Mayer

Chapitre 3

FONCTION NUMÉRIQUE

3.1 FONCTIONS USUELLES

3.1.1 Ensemble de définition

- Si f est une fonction polynôme c'est à dire de la forme $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ alors $D_f =]-\infty, +\infty[$
- Si f est une fonction rationnelle c'est à dire de la forme $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ alors $D_f = \{x \in \mathbb{R}/v(x) \neq O\}$
- Si f est une fonction irrationnelle c'est à dire de la forme $f(x) = \sqrt{v(x)}$ alors $D_f = \{x \in \mathbb{R}/v(x) \geq O\}$

3.1.2 Limite d'une fonction

Notation

La limite de f quand x tend vers α(α peut être fini ou infini) est notée par $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$
La limite d'une fonction prend des valeur fini ou infini.

Limites usuelles

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = O$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = O$	$\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty$

Opération sur les limites

- Soit f et g deux fonctions , l , l' deux réels non nuls
telles que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = l'$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \cup (-\infty, +\infty)$ alors :
$\lim\limits_{x\to\alpha} (f + g) = l + l'$
$\lim\limits_{x\to\alpha} (f \times g) = l \times l'$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f}{g} = \dfrac{l}{l'}$
$\lim\limits_{x\to\alpha} (\lambda f) = \lambda \times l$
- Les formes indéterminés sont : $\dfrac{0}{O}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$,$+\infty + (-\infty)$

Remarques

$\dfrac{Nombre}{\infty} = 0$, $\dfrac{Nombre}{0} = \infty$, $\dfrac{0}{\infty} = 0$,$\dfrac{\infty}{0} = \infty$

3.1.3 Dérivée d'une fonction

Notation

Soit f la fonction définie sur un intervalle I , la dérivée de f sur I est notée par f'(x) (on lit f prim de x)

Dérivées Usuelles

Fonction f	Dérivée de f ou f'
$f(x) = C^te$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2}}$

Opération sur les dérivées

Fonction f	Dérivée de f ou f'
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = u^n$	$f'(x) = nu'u^{n-1}$
$f(x) = u \times v$	$f'(x) = u' \times v + v' \times u$
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$
$f(x) = \sqrt{u}$	$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$f(x) = \frac{1}{v}$	$f'(x) = \frac{-v'}{v^2}$

3.1.4 Sens de variation d'une fonction

Pour connaitre le sens de variation d'une fonction , on étudie les signes de f'(x) suivant les valeur de x :
- La fonction f est croissante si f'(x)>0
- La fonction f est décroissante si f'(x)<0

3.1.5 Tableau de variation de f

x	D_f
f'(x)	Signe de f'(x)
f(x)	Sens de variation de f

3.1.6 Branches infinies

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ a alors y = a Asymptote horizontal pour la courbe (C) au voisinage de l'∞
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ alors x = a Asymptote vertical pour la courbe (C) au voisinage de l'∞
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors , la courbe (C) admet une Branche Parabolique de Direction Asymptotique parallèle (B. P .D . A) à (x'0x) au voisinage de l' ∞
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors , la courbe (C) admet une Branche Parabolique de Direction Asymptotique parallèle à (y'oy) au voisinage de l' ∞

3.1.7 Équation de la tangente au point d'abscisse x_0

L'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est donnée par la formule :
$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

3.1.8 Point d'inflexion

Soit I(a,b) un point d'inflexion alors ,a est solution de f"(x) = 0 et b = f(a).

x		a	
f" (x)	+ ou -	0	+ ou -

3.1.9 Extremum

x		a	
f(x)	↗	f(a)	↘

Le point A(a ,f(a)) est ici un point maximal.
En ce point , la tangente est horizontale d'équation (T) : y = f(a)

x		a	
f(x)	↘	f(a)	↗

Le point B(a ,f(a)) est ici un point minimal.
En ce point , la tangente est horizontale d'équation (T) : y = f(a) PAR

3.1.10 Centre de symétrie :

Un point C(a , b) est centre de symétrie $\iff$ f(a -x) + f(a +x) = 2.b
Prenons par exemple f(x) = $\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ et C(0 ,1) .
On a : f(0 -x) + f(0 + x) = f(-x)+ f(x)

$$= \frac{((-x)-1)^2}{x^2+1} + \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$
$$= \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$
$$= \frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{x^2+1}$$
$$= \frac{x^2+\cancel{2x}+1+x^2-\cancel{2x}+1}{x^2+1}$$
$$= 2\ \frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{x^2+1}} = 2$$
$$= 2\ .\ 1\ .$$

On a bien f(a -x)+ f(a +x) = 2 .b avec a= 0 et b =1

3.1.11 Axes de symétrie :

x = a est axe de symétrie $\iff$ f(a +x) = f(a -x)
ex : x = 0 est axe de symétrie pour f(x) = x^2+1
En effet , f(0 -x)= f(-x) = $(-x)^2+1 = x^2+1 = f(x)$

3.2 NOUVELLES FONCTIONS

3.2.1 Fonction logarithme Népérien

a - Définition :

Une fonction logarithme népérienne est une application f :$x \longmapsto \ln x$, définie sur $]0,+\infty[$

b - propriétés :

Soient a , b des réels strictement positifs n un réel alors , on a :

$$\begin{aligned} \ln(a \times b) &= \ln a + \ln b \\ \ln a^n &= n \ln a \\ \ln \frac{a}{b} &= \ln a - \ln b \\ \ln \frac{1}{b} &= -\ lnb \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln a &= \ln b \iff a = b \\ \ln 1 &= 0 \\ \ln e &= 1 \\ \ln a \leq \ln b &\iff a \leq b \end{aligned}$$

c - Limites usuelles :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \ln x &= -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \ln x &= +\infty \\ \lim_{x \to 0^+} x \ln x &= 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(0^+) &= -\infty \\ \ln(+\infty) &= +\infty \end{aligned}$$

d - Fonction dérivée

$\forall x \in]0,+\infty[$ Si f(x) = $\ln x$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

e -Tableau de variation

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ donc f est croissante . D'où le tableau ci -dessous.

x	0	$+\infty$
f'(x)	$+$	
f(x)	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

f -branches infinies

- $\lim\limits_{0^+} \ln x = -\infty$ alors la droite d'équation x = 0 A.V au voisinage de ∞
- $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = +\infty$ alors la courbe (C) admet une Branche Parabolique de Direction Asymptotique (B.P.D.A) // à (y'oy) au voisinage de $+\infty$

h - Généralisation

Considérons la fonction $f(x) = \ln[u(x)]$
D_f = { x$\in \mathbb{R}/u(x) > 0$ }

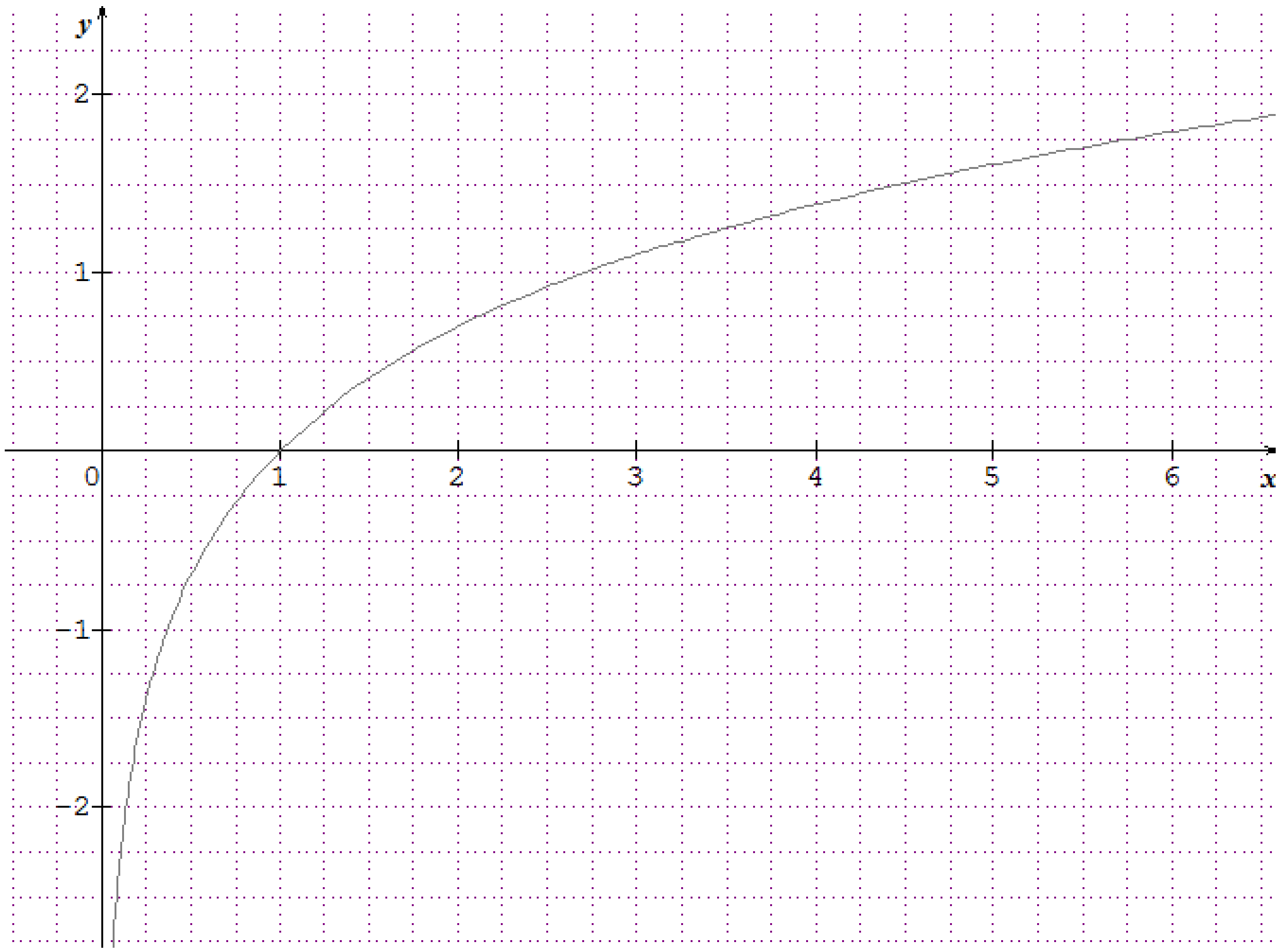

FIGURE 3.1 – Courbe représentative de la fonction lnx

i - Dérivée

La dérivée de la fonction f(x) = ln$[U(x)]$ est $f'(x) = \dfrac{U'}{U}$

3.2.2 Fonction exponentielle Népérienne

a - Définition

C'est une application définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = e^x

b - Propriétés

$$\begin{aligned} e^a \times e^b &= e^{a+b} \\ (e^a)^n &= e^{a.n} \\ \frac{e^a}{e^b} &= e^{a-b} \\ e^a &= e^b \iff a = b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} e^a &\leq e^b \iff a \leq b \\ e^0 &= 1 \\ \frac{1}{e^b} &= e^{-b} \\ e^1 &= e \end{aligned}$$

c - Limites usuelles :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} e^x &= 0 \\ \lim_{x\to+\infty} e^x &= +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} xe^x &= 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} &= 0 \\ \lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x &= 0 \ (\alpha \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

d - Remarques :

- $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$
- $e^{-\infty} = 0$
- $e^{+\infty} = +\infty$

e - Branches infinies :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = o \ alors \ y = 0A.H \ au \ voisinage \ de + \infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ alors C admet une B.P.D.A // à l' axe (y'o y).

f - Dérivée :

$\left(e^x\right)' = e@^x \forall x \in \mathbb{R}$

g - Tableau de variation :

Puisque$f'(x) = e^x > 0$, alors f est croissante et on le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)	+		
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

h - Généralisation :

La fonction f(x) $=e^{u(x)}$ est définie sur D_u c'est - à - dire : $D_f = D_u$.
Sa dérivée est $\left(e^{u(x)}\right)' = u' \times e^u$.

Remarques :

- $\ln e^X = X \forall\ X \in \mathbb{R}$
- $e^{\ln X} = X \forall\ X > 0$
- $e^X = a \Longrightarrow X = \ln a$
- $\ln X = a \Longrightarrow X = e^a$

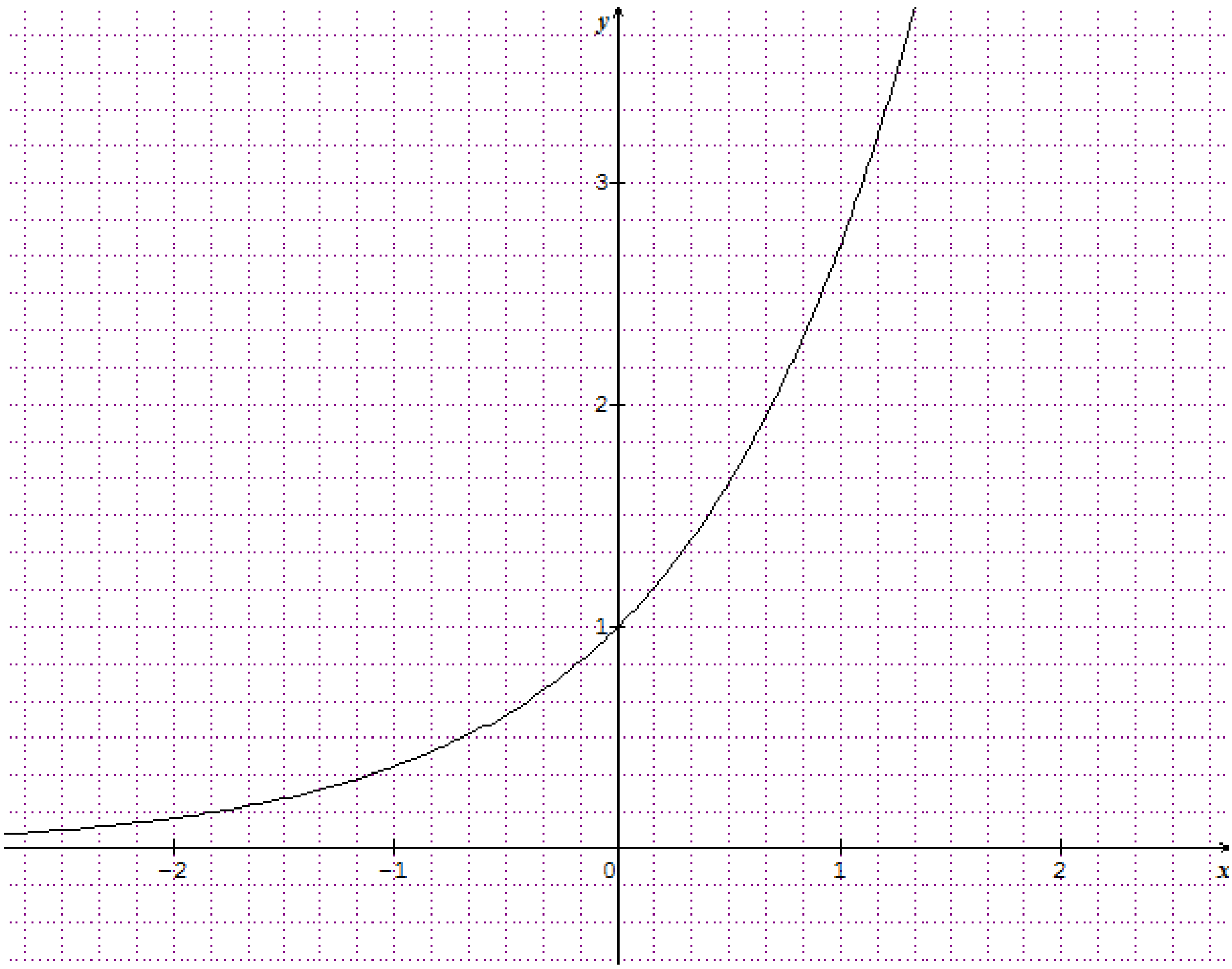

FIGURE 3.2 – Courbe représentative de la fonction f(x) $= e^x$

3.3 CALCUL D'AIRE

3.3.1 Primitive d'une fonction :

a - Notation :

La primitive de f est notée par prim(f) ou $\int f(x)dx$.

b - Primitive usuelle :

onction f	F = prim f
f(x)= 0	F(x) = C^te
f(x)= a	F(x)= a x
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
f(x) = $\frac{-1}{x^2}$	F(x)= $\frac{1}{x}$
f(x)= $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	F(x) =$\sqrt{x}$
f(x)= $\frac{1}{x}$	F (x) =$\ln x$
f(x) = e^x	F(x) = e^x
f(x)=e^{-x}	F(x)= - e^{-x}
f(x)= $\frac{u'}{u}$	F(x)=$\ln u$

c - Théorème :

Une fonction F est une primitive de f $\Longleftrightarrow$ F'(x) = f(x).

3.3.2 Calcul d'aire

a - Formule

L'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe (x'ox) et les droites d'équation
x= a et x= b est donnée par :

$$\mathcal{A} = \Big|F(b) - F(a)\Big| \times U.a$$

avec : U. a = $||\vec{i}|| \times ||\vec{j}||cm^1$ et F une primitive de f.

b - Exemple :

On considère la fonction f(x) =$\frac{1}{x} + 1$ et note ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unité 2 cm.

1 - Montrer que F(x)=$\ln x + x + 1$est une primitive de f

2 - Calculer l 'aire du domaine plan limité par la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1 et x = e.

(Voir EXERCICE)

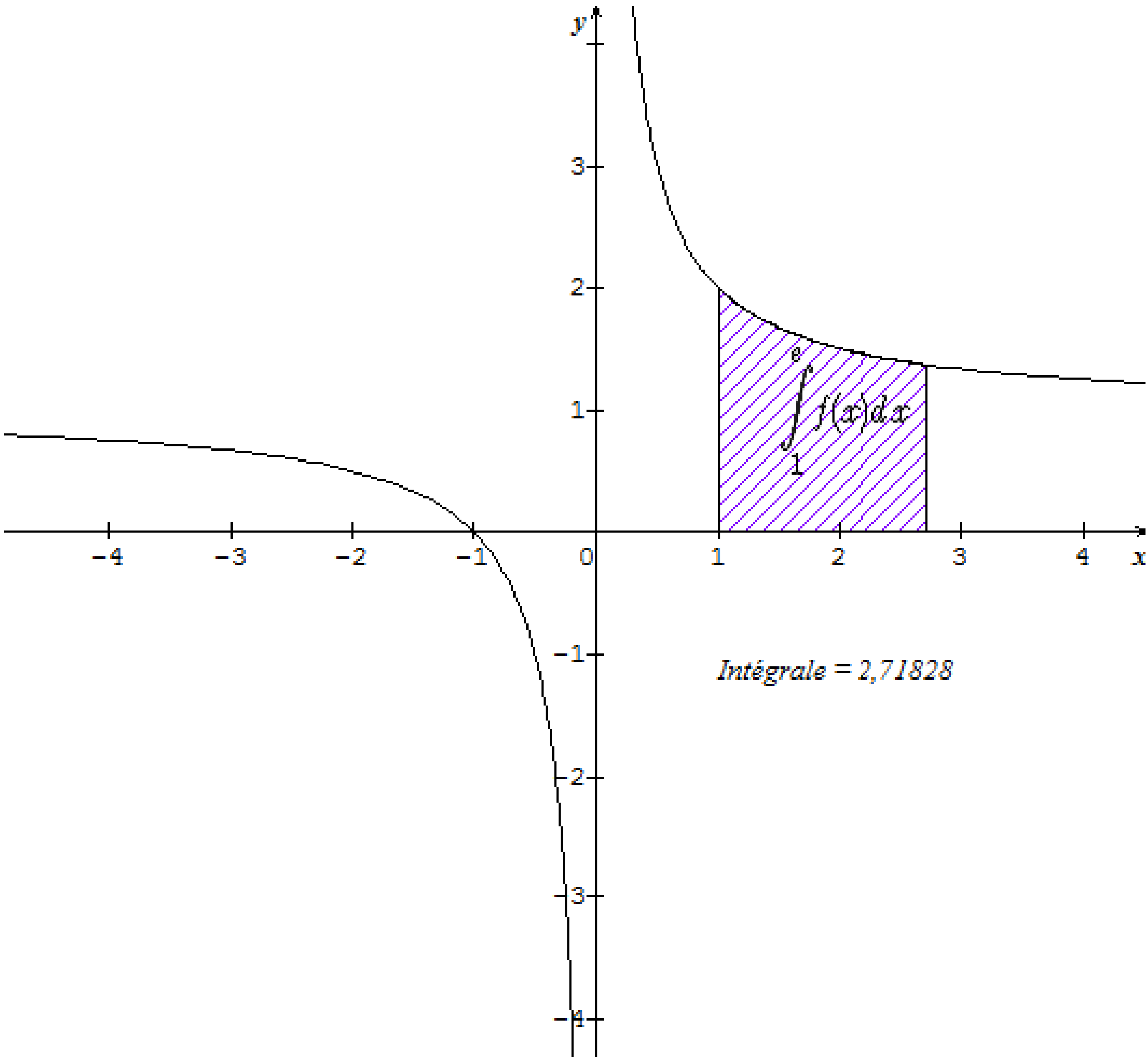

FIGURE 3.3 – Calcul d'aire

Chapitre 4

DÉNOMBREMENT ET PROBABILITÉ

4.1 Ensemble fini

Un ensemble E est dit fini s'il est constitué d'un nombre fini d'élément.
C'est à dire, on peut écrire : E $=\{ x_1, x_2, x_2, \cdots, x_n \}$

4.2 Complémentaire :

Soit E un ensemble et A un sous ensemble de E . Le complémentaire de A (noté par $\overline{A}$) est aussi un sous ensemble de E. ils vérifient : $A \cup \bar{A}$ = E et $A \cap \overline{A} = \varnothing$

4.3 Arrangement :

4.3.1 Arrangement avec répétition :

• Un p arrangement avec répétition de l'ensemble E est une suite ordonnée $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de E telle que :
- *Les* $x_i \in E$
- Un élément x_i figure une ou plusieurs fois dans une liste.
- Chaque x_i ont de rang

• Si card E = n et p$\in \mathbb{N}$, alors le nombre d'arrangement avec répétition de p élément de E choisi parmi n est égal à $\boxed{N_a = n^p}$

• Exemple : F = {a , b , c }
La liste de 2 éléments de E telle que un élément peut être figurer une ou plusieurs fois dans une liste est :
(a , a) , (b , b), (c , c), (a , b), (a , c), (b ,a),(b , c), (c , a), (c , b).
Nous avons 9 couples possibles.
Le nombre d'arrangement avec répétition de 2 éléments de E choisis parmi n est N = 3^2 = 9

4.3.2 Arrangement sans répétition :

• Un p arrangement sans répétition de l'ensemble E est une suite ordonnée $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de E telle que :
- Les $x_i \in \mathbb{E}$
- Un élément x_i figure seul fois dans une liste.
- Chaque x_i ont de rang

• Si card E $=$ n et p$\in \mathbb{N}$, alors le nombre d'arrangement sans répétition de p élément de E choisi parmi n est égal à $\boxed{A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$ avec $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)....3 \times 2 \times 1$

• Exemple : E $= \{$a , b , c $\}$
La liste de 2 éléments distincts de E choisi parmi n est : (a , b), (a , c), (b ,a),(b , c), (c , a), (c , b).
Nous avons 6 couples possibles.
Le nombre d'arrangement sans répétition de 2 éléments distincts de E choisis parmi n est $A_3^2 = \dfrac{3!}{(3-2)!} = 6$

4.4 Combinaison

• Soit E un ensemble de cardinal n , p un entier ≥ 2
La combinaison de p éléments de E choisi parmi n est une suite non ordonnée $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_p\}$ de E telle que :
- Les $x_i \in \mathbb{E}$
- Un élément x_i figure un seul fois dans la liste
- Chaque x_i n'ont pas de rang.

• Si card E $=$ n et p $\in \mathbb{N}$, alors le nombre de combinaison de p éléments de E choisi parmi n est égal à $\boxed{C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$

• Exemple : E $= \{$ a , b ,c , d $\}$
Le nombre de combinaison de 3 éléments de E est $= C_4^3 = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = 4$
ces sont :
$\{$a , b , c$\}$, $\{$a , b , d$\}$, $\{$b , c , d$\}$,$\{$c , d , a $\}$

4.5 Combinaison et arrangement formé à partir de 2 ensembles :

Soi A et B deux ensembles tels que $CardA = n_A$ et $CardB = n_B; p_A$ et p_B des nombres entiers non nuls tels que$p_A \leq n_A$, $p_B \leq n_B$
On pose : F $=$ $a_1, a_2, \cdots, a_{p_A}, b_1, b_2, \cdots, b_{p_B} / a_i \in A$ et $b_i \in B$ $\}$
G $= \{$ $a_1, a_2, \cdots, a_{p_A}, b_1, b_2, \cdots, b_{p_B} / a_i \in A$ et $b_i \in B\}$

4.5.1 Nombre arrangement avec répétition

$\boxed{CardF = (n_A)^{p_A} \times (n_B)^{p_B}}$

4.5.2 Nombre arrangement sans répétition

$\boxed{CardF = A_{n_A}^{p_A} \times A_{n_B}^{p_B}}$

4.5.3 Nombre de combinaison

$\boxed{\text{CardG} = C_{n_A}^{p_A} \times C_{n_B}^{p_B}}$

4.6 Propriétés de A_n^p et C_n^p :

$A_n^0 = 1$	$C_n^0 = 1$	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
$A_n^1 = n$	$C_n^p = n$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
$A_n^n = n!$	$C_n^p = 1$	$0! = 1$

4.7 Vocabulaire des probabilités :

4.7.1 Une épreuve :

Une expérience ou une observation dont l'issue est aléatoire(hasard) est appelée épreuve.

4.7.2 Éventualité :

Le résultat d'une expérience est dit éventualité.

4.7.3 Univers

C'est l'ensemble des éventualité , noté souvent par Ω

4.7.4 Événement :

Toutes parties ou sous ensembles de Ω est appelée un évènement.

4.7.5 Exemple :

Dans une urne , il y a :
- 5 Boules rouges
- 3 Boules jaunes
- 2 Boules vertes

Épreuve :

On tire simultanément 2 boules de l'urne .

Univers Ω :

$\Omega = \Big\{\{R, R\}, \{J, J\}, \{V, V\}, \{R, J\}, \{R, V\}, \{J, V\}\Big\}$

Événement A :

$A = \Big\{\{R, R\}, \{J, J\}, \{V, V\}\Big\}$

Événement $\overline{A}$:

$\overline{A} = \Big\{\{R, J\}, \{R, V\}, \{J, V\}\Big\}$

4.8 Probabilité d'un évènement

4.8.1 Généralité :

Calculer la probabilité d' un évènement c'est déterminer le pourcentage de chance
de voir cet évènement réalisé .

4.8.2 Définition :

- La probabilité "p" est une application de $\mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ et définie par :
p : $\mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$
A $\longmapsto$ p(A) .
- La probabilité "p" vérifie les axiomes suivantes :
— Axiome 1 : p(Ω) = 1
— Axiome 2 : $p(A \cup B)$ = p(A) + p(B) et $A \cap B = \varnothing$

4.8.3 Propriétés de la probabilité "p" :

1. Si A est $\overline{A}$ sont 2 évènements contraires alors : p(A) = 1 - p(A)
2. p($\varnothing$) = 0
3. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $0 \leq p(A) \leq 1$
4. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a : $p(A) = \dfrac{cardA}{Card\Omega} = \dfrac{N^{\text{bre}}\ de\ cas\ favorables}{N^{\text{bre}}\ de\ cas\ possibles}$

Chapitre 5

EXERCICE

Exercice 1 :

I - 0n considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ \\ U_n = 5 - 2n \end{cases}$$

1. $Calculer U_0, U_1, U_2, U_3$
2. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique de raison r = -2
3. On pose $S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.Calculer S
4. On pose de même $S' = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots + U_n$. Calculer S'

II - La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 \\ U_1 = -2 \\ U_{n+2} = 2U_{n+1} + U_n \end{cases}$

Calculer les 5 premiers terme de cette suite.

III - (U_n) est une suite Arithmétique définie définie par : $U_0 = -6$ et $U_{10} = 4$.

1. Déterminer la r de cette suite.
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Calculer U_{120} et calculer la somme S=$U_{10} + U_{11} + \cdots + U_{120}$
4. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} U_n$

IV - On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_2 = 3$ et la relation de récurrence $U_{n+1} - U_n = U_n - U_{n+1} - 1 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique de raison r $=-\dfrac{1}{2}$
2. Préciser le sens de variation de cette suite .
3. Exprimer U_n en fonction de n .
4. Déterminer n pour que $U_n = 4$.
5. Calculer la somme S =$U_2 + U_3 + \cdots + U_n$

Exercice 2 :

I- On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_1 = e \\ \\ U_n = e^{\frac{3-n}{2}} \end{cases}$$

1. Calculer U_1 ,U_2 ,U_3

2. Monter que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q
3. Exprimer en fonction de n la somme S $=U_1+U_2+\cdots+U_n$.
4. En déduire S_{60}

II - La suite (U_n) est définie par :

$$\begin{cases} U_1 = 11 \\ \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 2 \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On pose$V_n = U_n - 6$

1. Calculer $U_1, puis V_0 et V_1$
2. Démonter que (V_n)est une suite géométrique de raison q= $\frac{2}{3}$
3. Donner l' expression deV_n puis U_n en fonction de n.
4. Calculer la somme S = $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

III -Soit (U_n) et (V_n) deux suites numériques définies respectivement par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \\ U_{n+1} = 2 - \frac{5}{U_n + 4} \ et\ V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3} \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer $U_1, puis V_0 et V_1$
2. Démonter que (V_n)est une suite géométrique de raison q= $\frac{1}{5}$
3. Donner l' expression deV_n puis U_n en fonction de n.
4. Calculer la somme S = $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

IV- On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{32} \\ \\ U_n = e^{3n-5} \end{cases}$$

1. Calculer U_1 , U_2 , U_3
2. Monter que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q
3. Exprimer en fonction de n la somme S $=U_1+U_2+\cdots+U_n$.
4. En déduire S_{20}

Exercice 3

1. Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = 2n - 1$:
   a) - Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison r et son premier terme (U_0)
   b) - Calculer en fonction de n la somme$S_n = U_0 + U_1U_2 + \cdots + U_n$
2. Soit la suite (V_n) définie par $V_n = e^{U_n}$
   a) - Montrer que V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.
   b) - Calculer en fonction de n le produit $P_n = V_0 \times V_1 \cdots \times V_n$.

Exercice 4 :

Calculer le premier terme U_1 et la raison r d'une suite arithmétique sachant que $U_3 = 13$ et $U_8 = 28$

Exercice 5 :

(U_n) est une suite arithmétique.On donne $U_6 = 20$ et $U_{10} = 8$

1. Quel est le sens de variation de ce suite ?
2. (U_n) est - elle convergente ou divergente ?
3. Calculer U_n en fonction de n .
4. Calculer la somme S_n des n premiers terme de cette suite.

Exercice 6 :

(U_n) est une suite définie par $U_0 = -1$ et $U_7 = 20$

1. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique de raison r à déterminer.
2. Déterminer le terme général de U_n en fonction de n .
3. Déterminer le sens de variation de U_n .
4. Calculer la somme $_n$ des n premiers terme de cette suite

Exercice 7 :

On considère la suite géométrique (U_n) de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $q = 2$.

1. Exprimer le terme général U_n en fonction de n .
2. Calculer la somme $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$
3. Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \ln U_n$.
   Monter que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et sa raison
4. Calculer la somme $S'_n = V_1 + V_1 + \cdots + V_n$

Exercice 8 :

On donne une suite (U_n) définie par $U_{n+1} + U_n = 2U_n + 3 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

1. Démontrer que (U_n) est une suite arithmétique .
2. Déterminer U_1 sachant que U_0= 2
3. Exprimer U_n en fonction de n
4. La suite est - elle convergente ou divergente ?Justifier votre réponse .
5. On pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.
   a) - Calculer S_n
   b) - Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Exercice 9 :

On considère une suite (U_n) définie par $U_0 = \dfrac{4}{5}$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{2 - U_n} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

1. Calculer U_1 ,U_2 ,U_3
2. On pose $V_n = \dfrac{1}{U_n - 4}$
   a) - Montrer que (V_n) est une suite arithmétique
   b) - Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
   c) - Montrer que (U_n) est convergent, de limite = à 4 quand $n \to +\infty$

Exercice 1O :

On considère les fonctions :

a) - f(x) $= \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

b) - f(x)$= \dfrac{x - 2}{x^2 + x - 6}$

c) - f(x) $= \ln\left(\dfrac{1}{x - 1}\right)$

d) - f(x) $= \ln(x - 1)$

e) - f(x) $= \ln(x^2 - 1)$

f) - f(x) $= \ln\left(\dfrac{x - 2}{x + 2}\right)$

g) - f(x) $= 1 - \dfrac{1}{x} + \ln x$

h) - f(x) $= e^x + x + 1$

i) - f(x) $= (e^x + 1)(e^x + 2)$

j) - f(x) $= \dfrac{e^x + 1}{e^x + 2}$

k) - f(x) $= \dfrac{e^x}{x + 2}$

Pour chacune de ces fonction , Déterminer :

1. Domaine de définition
2. Limites aux bornes
3. Dérivée de f

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie par f(x)= $x + 1 + 4\ln(x + 2) - 4\ln x$ sur $]0, +\infty[$.

On note par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ d'unité 1 cm.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$
2. a - Montrer que $\forall x > 0, on a f(x) = x + 1 + 4\ln\left(x + \frac{2}{x}\right)$

   b - En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

   c - Montrer que la droite (D) : y = x+1 est un asymptote oblique pour la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de ∞
3. a - Calculer f'(x)

   b - Monter que $\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x(x+2)}$

   c - En déduire le signe de f'(x) et dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer $(\mathcal{C})$ *et* (D)

Exercice 12 :
Une urne contient six boules blanches numérotées de 1 à 6 et cinq boules rouges numérotées de 1 à 5 .
On extrait simultanément quatre boules de l'urne.

1. Quel est le nombre de cas possible
2. Quel est le nombre de tirage de 4 boules qui correspond aux situations suivantes : a) - les 4 boules tirés sont blanches.

   b) - Il y a , une boule rouge parmi le 4 boules tirées.

   c) - Les 4 boules tirées sont rouges.

   d) - Il y a exactement une boule blanche et exactement une boule numérotée 3.

Exercice 13 :
Une urne contient 6 boules blanches , 4 boules rouges et 5 boules vertes.On tire 3 boules simultanément de cette urne.

1. Quel est le nombre de tirage possible ?
2. Combien y a - t - il de tirage contenant 3 boules de même couleurs ?
3. Combien y a - t - il de tirage contenant 3 boules de couleurs différents
4. Combien y a - t - il de tirage contenant au moins une boule rouge ?

Exercice 14 :
Un organisation Non Gouvernemental (ONG) est composé de 18 femmes et 32 hommes.Cette organisation ONG désire former son bureau composé d'un président , d'un secrétaire général et d'un trésorier .
1. Combien peut - on former de bureau ?
2. Combien peut - on former de bureau possibles dans chacun des cas suivants ?
a- Le trésorier doit être une femme.
b- Le deux fondateurs de cet ONG ne souhaitent pas faire parti même bureau.

Exercice 15 :
Dix personnes vont s'assoir autour d'une table rond . De combien de manière peut on faire assoir ces dix personnes ?

Exercice 16 :
Monsieur Diop possède dans son armoire 4 pantalons dont deux noirs et deux bleus, six chemise dont trois blanches , deux bleus et une jaune.Au moment de s'habiller ,survient une panne d'électricité .Monsieur Diop , pressé , enfile un pantalons et une chemise sans se préoccuper de la couleur de ses vêtement.
1. Combien y a -t - il de manière différents de s'habiller ?
2. Combien y a-t- il de manière de s'habiller sachant qu'il porte :
a- Une chemise blanche.
b- Un pantalon bleu et une chemise jaune.

Exercice 17 :
Une boite contient 5 jetons portant les lettre A, B ,C , D et E .ON forme un mot de 5 lettres en tirant successivement ces 5 jetons (ici ,un mot désigne un groupe de 5 lettres ayant ou non un sens) .
1. Combien de mot peut -on former ?
2. Combien de mot commence par une voyelle
3. Combien de mot finisse par une voyelle ?
4. Combien de mot commence et finisse par une voyelle ?

5. Combien y a -t - il de mot ne commençant pas par BD (dans cette ordre) ?

Exercice 18 :

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher dont :
2 vertes numérotées 1 - 2
3 rouges numérotées 1- 2 -3
4 blanches numérotées 1 - 2 - 3 - 4

— On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A :" Obtenir 3 boules de couleurs différents "
B : " Obtenir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 6 "
C : " Obtenir 3 boules dont le produit des numéros est égale à 6 "

— Maintenant , on tire successivement au hasard et sans remise 3 boules de l'urne.
a. Démonter qu 'il y a 504 possibilités.
b. Calculer la probabilité des événements suivants :
C :" Obtenir 3 boules de même couleurs "
D :" Obtenir dans cette ordre une boule rouge , une boule verte et une boule blanche."

Exercice 19 :

Une boite contient six craies blanches , quatre rouges et cinq verte.

1. On tire simultanément 3 craies de la boite.
   a- Donner le nombre de tirage possible .
   b- Calculer la probabilité des événements suivantes :
   A :"Tiré 3 craies de même couleur ."
   B :" Obtenir 3 craies de couleurs différentes."
   C : " obtenir au moins une craie rouge ."
2. On tire successivement sans remise 3 craies de la boite.
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   A :"Tirer 3 craies de la même couleur . "
   B :"Tirer 3 craies de couleurs différentes ."
   C :"Tirer au moins une craie rouge "

Exercice 20 :

1. On jette simultanément deux dés non pipés numéroté de 1 à 6 .On calcule la somme des points obtenus .
   Quelle est la probabilité d ' obtenir :
   A : " Une somme égale à 6 "
   B : " Une somme impaire ."
   C : " Une somme supérieure ou égale à 9. "
   D : " Une somme multiple de 3. "
2. On lance un dé numéroté de 1 à 6 .
   a - Déterminer le nombre des cas possibles.
   b - Calculer la probabilité d'obtenir :
   - Un numéro pair .
   - un numéro impair.
   - un numéro multiple de 3.
   - Un numéro supérieur à 4