MIKOLO SAINA

Se Préparer Aux Concours

ENI POLY AGRO

ENS (MATHS - PC)

MATHÉMATIQUES PHYSIQUES

034 88 801 67

www.facebook.com/Mikolo Saina

Version 2017

MATHEMATIQUES

SUJETS ET EXERCICES (+ QUELQUES CORRIGES)

SUJET 1 (Corrigés)

EXERCICE

Probabilité

On dispose de trois dés tétraédriques réguliers et identiques, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.

On lance les trois dés simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel dé, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1- a) Calculer la probabilité pour que la couleur jaune soit visible sur chacun des trois dés.

b) Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun dé.

c) Calculer la probabilité de l'évènement E « les six faces rouges sont visibles ».

2- On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois dés tétraédriques.

Calculer la probabilité p_n pour que l'évènement E soit réalisé au moins une fois. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Arithmétique

1- Soit n un entier naturel non nul.

On considère l'équation notée (E) : $3x+7y=10^{2n}$

où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer un couple (u,v) d'entiers relatifs tels que $3u+7v=1$.

En déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).

b) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x,y) solutions de (E).

2- a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel n on a : $2^{3n} \equiv 1 \ (7)$.

b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2012} par 7 ?

PROBLEME 1

On considère dans le plan orienté, un triangle (ABC) rectangle en A tel que $AB = 2AC = 2a$, où a est un réel positif donné. On note I le milieu du segment $[AB]$.

Partie I

1- Déterminer l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que $\left\| \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} \right\|$.

2- On désigne par H le point du plan tel que : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

a) Faire une figure en plaçant les points A, B, C, I et H. Démontrer que H appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

b) Démontrer que H est le barycentre des points A, B et C affectés de coefficients que l'on déterminera.

c) On considère l'ensemble des points M du plan tels que : $-3MA^2+MB^2+4MC^2=k$.

Pour quelle valeur du nombre réel k, cet ensemble contient-il le point A? Pour cette valeur, préciser l'ensemble obtenu, noté (E_2).

Partie II

1- a) Démontrer qu'il existe une seule similitude directe S transformant B en A et A en C.

b) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

2- On appelle Ω le centre de S.

a) Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AB]$ et à la droite (BC).

b) Construire le point Ω sur la figure précédente.

3- On note D l'image du point C par la similitude S.

a) Démontrer que les points A, Ω et D sont alignés et que les droites (CD) et (AB) sont parallèles.

b) Construire le point D sur la figure précédente.

4- Soit E le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

a) Expliquer la construction de l'image F du point E par S et placer F sur la figure précédente.

b) Quelle est la nature du quadrilatère $BEDF$?

Partie III

On prend $a=2$. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(A,\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u}=\frac{\overrightarrow{AB}}{4}$ et $\vec{v}=\frac{\overrightarrow{AC}}{2}$.

1- Donner les affixes des points A, B, C et E.

2- a) Déterminer la forme complexe de S.

b) En déduire les affixes respectives des points Ω, D et F.

3- Vérifier que les points A, Ω et D sont alignés.

PROBLEME 2

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par :

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=0 \\ f(x)=(\ln x)\times\ln(1-x), \text{ pour } x\in\,]0;1[\end{cases}$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 10 cm).

Partie A

1- a) Montrer que f est continue en 0 et en 1.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.

c) Montrer que :

pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$, on a : $f\left(\frac{1}{2}-x\right)=f\left(\frac{1}{2}+x\right)$.

Que peut-on en conclure pour la courbe $(\mathscr{C})$?

2- Soit g la fonction définie sur $]0;1[$ par : $g(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$.

a) Pour tout $x\in\,]0;1[$ déterminer $g'(x)$, puis montrer que $g''(x)=\frac{2x-1}{x(1-x)}$.

En déduire les variations de g' sur $]0;1[$.

b) Montrer que g' s'annule en deux valeurs α_1 et α_2 (on ne cherchera pas à calculer ces valeurs).
Donner le signe de g' sur $]0;1[$.

c) Déterminer $\lim_{x\to 0} g(x)$ et $\lim_{x\to 1} g(x)$.

Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;1[$.

3- a) Montrer que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$ sur $]0;1[$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que pour tout $x \in]0;1[$ on a :

$0 < (\ln x)\times\ln(1-x) \le (\ln 2)^2$.

d) Tracer $(\mathscr{C})$.

Partie B

Pour $t \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$, on pose : $I_1(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x\ln x dx$;

$I_2(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x^2 \ln x dx$; $I(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} f(x)dx$.

1- a) A l'aide d'intégration par parties, montrer que :

$$I_1(t) = -\frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}t^2\ln t + \frac{t^2}{4} \ ;$$

$$I_2(t) = -\frac{\ln 2}{24} - \frac{1}{72} - \frac{t^3\ln t}{3} + \frac{t^3}{9}.$$

b) Déterminer $\lim_{t\to 0} I_1(t)$ et $\lim_{t\to 0} I_2(t)$.

2- Soit g et h les fonctions définies sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ par :

$$g(x) = -\left(x + \frac{x^2}{2}\right) \text{ et } h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}.$$

a) Etudier les variations de la fonction φ définie sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ par : $\varphi(x) = \ln(1-x) - g(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$: $\ln(1-x) \le g(x)$.

c) Par un procédé analogue,
montrer que pour tout $x \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$: $\ln(1-x) \ge h(x)$.

d) En déduire un encadrement de $f(x)$ sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$.

3- a) Montrer que : $-I_1(t) - \frac{1}{2}I_2(t) \le I(t) \le -I_1(t) - I_2(t)$.

b) En supposant que $I(t)$ admette une limite notée ℓ quand t tend vers 0, donner un encadrement de ℓ.

****

Jacques Bernoulli

Naissance :	27 décembre 1654
Décès :	16 août 1705
Nationalité :	Suisse
Champs :	Mathématiques
Institution :	Université de Bale (Suisse)
Célèbre pour :	Epreuve de Bernoulli – Nombre de Bernoulli

CORRIGE

EXERCICE

Probabilité

1- a) « La couleur jaune est visible sur chacun des trois dés » signifie « les couleurs sur les faces cachées des trois dés sont non jaunes ». Or pour chaque dé, la probabilité de « la couleur sur la face cachée est non jaune » est égal $\frac{3}{4}$, la probabilité demandée est donc $p = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{27}{64}$.

b) « La couleur bleue n'est visible sur aucun dé » signifie « les couleurs sur les faces cachées des trois dés sont bleues ».

La probabilité demandée est $p' = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

c) E : « Les six faces rouges sont visibles » signifie « les couleurs sur les faces cachées des trois dés sont non rouges ».

$p(\mathrm{E}) = \frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4} = \frac{1}{8}$.

2- L'évènement « E est réalisé au moins une fois » est le contraire de l'évènement « E n'est jamais réalisé ».

Or la probabilité de l'évènement « E n'est jamais réalisé » est égal $\left(\frac{7}{8}\right)^n$, donc la probabilité de l'évènement « E est réalisé au moins une fois » est $p_n = 1-\left(\frac{7}{8}\right)^n$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{7}{8}\right)^n\right) = 1$.

Arithmétique

1- (E) : $3x+7y=10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) • $3\times(-2)+7\times1=1$.

Donc $(-2,1)$ est un couple tel que $3u+7v=1$.

• De $3\times(-2)+7\times1=1$ on déduit

$3\times(-2\times10^{2n})+7\times10^{2n}=10^{2n}$

Le couple $(x_0,y_0)=(-2\times10^{2n},10^{2n})$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) Soit (x,y) une solution de (E), on a

$\begin{cases}3x+7y=10^{2n}\\3x_0+7y_0=10^{2n}\end{cases}$ donc $3(x-x_0)=7(y_0-y)$.

Puisque 3 et 7 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que 7 divise $x-x_0$. Il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-x_0=7k$ ou encore $x=x_0+7k$.

De même 3 divise y_0-y, donc il existe $k'\in\mathbb{Z}$ tel que $y_0-y=3k'$ ou encore $y=y_0-3k'$.

De $3(x-x_0)=7(y_0-y)$ on a $3\times7k=7\times3k'$ soit $k=k'$.

Les solutions de l'équation (E) sont les couples de la forme $(-2\times10^{2n}+7k,10^{2n}-3k)$, $k\in\mathbb{Z}$.

2- a) $2^3=8\equiv1\ (7)$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $(2^3)^n\equiv1^n\ (7)$ ou encore $2^{3n}\equiv1\ (7)$.

b) Remarquons que $2012=3\times670+2$, par suite $2^{2012}=2^{3\times670}\times2^2=2^{3\times670}\times4$.

Or d'après la question précédente on a $2^{3\times670}\equiv1\ (7)$, il résulte que $2^{3\times670}\times4\equiv4\ (7)$ ou encore $2^{2012}\equiv4\ (7)$.

Comme $0\le4<7$, donc le reste dans la division euclidienne de 2^{2012} par 7 est 4.

PROBLEME 1

Partie I

1- • Comme $1+1-1=1\neq0$, le barycentre G du système de points $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$ existe.

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{1+1-1}\overrightarrow{AB}+\frac{-1}{1+1-1}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ et

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$

• Et, comme $2-1-1=0$,

le vecteur $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.

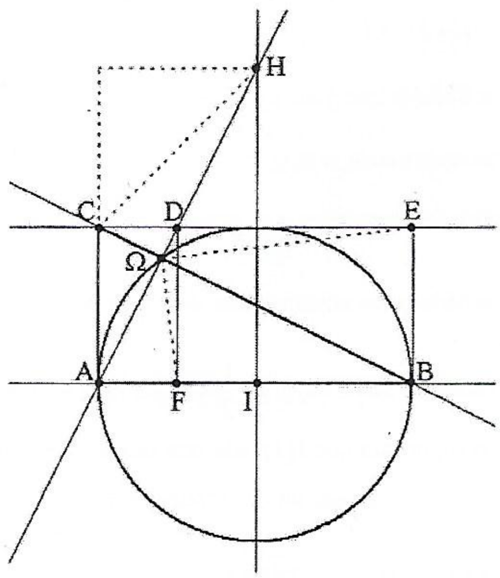
$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

D'où $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

si et seulement si $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|$.

L'ensemble (E_1) est le cercle de centre G et de rayon $r=\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{(2a)^2+a^2}=a\sqrt{5}$.

2- a) Placement des points A, B, C, I et H.



On sait que $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ et que I est le milieu du segment $[AB]$.

$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AC}$ soit $\overrightarrow{IH}=2\overrightarrow{AC}$.

Il en résulte que la droite (IH) est parallèle à la droite (AC).

Or la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (AB) donc la droite (IH) est perpendiculaire à la droite (AB).

D'où le point H appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

b) $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}+4\overrightarrow{AH}+4\overrightarrow{HC}$

$3\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}+4\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

$-3\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+4\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

H est le barycentre du système $\{(A,-3);(B,1);(C,4)\}$.

c) On considère l'ensemble des points M du plan tels que : $-3MA^2+MB^2+4MC^2=k$.

• Le point A appartient à cet ensemble

si et seulement si $-3AA^2+AB^2+4AC^2=k$

si et seulement si $0+4a^2+4a^2=k$

si et seulement si $k=8a^2$

• $M\in(E_2)$

si et seulement si $-3MA^2+MB^2+4MC^2=8a^2$

si et seulement si $2MH^2-3HA^2+HB^2+4HC^2=8a^2$

soit $2MH^2-2HA^2+4HC^2=8a^2$ car $HA=HB$

$2MH^2-2(4a^2+a^2)+4(a^2+a^2)=8a^2$

$2MH^2-2a^2=8a^2$

$MH^2=5a^2$

(E_2) est le cercle de centre H et de rayon $AH=a\sqrt{5}$.

Partie II

1- a) Puisque (ABC) est un triangle rectangle en A, on a $A\neq B$ et $A\neq C$. Par suite, il existe une seule similitude directe S transformant B en A et A en C.

b) Rapport k de S

$$k=\frac{S(B)S(A)}{BA}=\frac{AC}{BA}=\frac{AC}{2AC}=\frac{1}{2}$$

Angle θ de S

$$\theta=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{S(B)S(A)}\right)=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$$

2- Soit Ω le centre de S.

a) On sait que $S(A)=C\neq A$ et $S(B)=A\neq B$ donc $\Omega\neq A$ et $\Omega\neq B$.

• Puisque $S(\Omega)=\Omega$ et que $S(B)=A$ on a $\left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega A}\right)=-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$.

On en déduit que le triangle $(A\Omega B)$ est rectangle en Ω et donc Ω appartient au cercle de diamètre $[AB]$

• D'autre part, $S\circ S$ est une similitude de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi$. Donc si Ω n'est pas le point C, on a $\left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega C}\right)=\left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{S\circ S(\Omega)S\circ S(B)}\right)=-\pi\quad[2\pi]$; les points Ω, B et C sont alignés, par suite Ω appartient à la droite (BC).

b) Le point Ω est l'intersection du cercle de diamètre $[AB]$ et de la droite $[BC]$ autre que le point B.

Voir le point Ω sur le graphique précédent.

3- a) Comme précédemment

• $\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega D}\right)=\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{S\circ S(\Omega)S\circ S(A)}\right)=-\pi\quad[2\pi]$.

Les points A, Ω et D sont donc alignés.

• $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{S\circ S(A)S\circ S(B)}\right)=-\pi\quad[2\pi]$.

Les droites (AB) et (DC) sont donc parallèles.

b) *Voir le point D sur le graphique précédent.*

4- Soit E le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

a) Construction de l'image F du point E par S :

Puisque l'angle de S est $-\frac{\pi}{2}$, l'image par S de la droite (CD) est la droite passant par $S(C)=D$ et perpendiculaire à (CD). Le point $F=S(E)$ appartient donc à la droite passant par $S(C)=D$ et perpendiculaire à (CD).

Par ailleurs :

- l'image de la droite (BE) est la droite $(S(B)S(E))=(AF)$
- l'image de la droite (AC) est la droite $(S(A)S(C))=(CD)$
- les droites (BE) et (AC) sont parallèles

Donc, la droite (AF) est parallèle à la droite (CD).

Par conséquent, le point F appartient à la droite passant par A et parallèle à la droite (CD).

Voir le point F sur le graphique précédent.

b) Il résulte de la construction précédente que le quadrilatère $BEDF$ est un rectangle.

Partie III

1- Affixes des points A, B, C et E.

$z_A = 0$

$z_{\frac{1}{4}\overline{AB}} = \frac{1}{4}(z_B - z_A) = 1$ donc $z_B = 4$

$z_{\frac{1}{2}\overline{AC}} = \frac{1}{2}(z_C - z_A) = i$ donc $z_C = 2i$

$z_E = z_B + z_C = 4 + 2i$

2- a) Forme complexe de S

$z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$.

$S(A) = C$ équivaut à $0 \times a + b = 2i$, soit $b = 2i$

$S(B) = A$ équivaut à $4a + b = 0$, soit $a = -\frac{2i}{4} = -\frac{1}{2}i$

S a pour forme complexe : $z' = -\frac{1}{2}iz + 2i$.

b) Affixes des points Ω, D et F.

• $z_\Omega = \dfrac{2i}{1-\left(-\frac{1}{2}i\right)} = \frac{4}{5} + \frac{8}{5}i$

• $z_D = -\frac{1}{2}iz_C + 2i = -\frac{1}{2}i \times 2i + 2i = 1 + 2i$

• $z_F = -\frac{1}{2}iz_E + 2i = -\frac{1}{2}i(4 + 2i) + 2i = 1$

3- $z_D - z_A = 1 + 2i$

$z_\Omega - z_A = \frac{4}{5} + \frac{8}{5}i = \frac{4}{5}(1 + 2i) = \frac{4}{5}(z_D - z_A)$

Il en résulte $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$, et donc les points A, Ω et D sont alignés.

****

PROBLEME 2

Partie A

1- a) • $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x)\left(-\dfrac{\ln(1-x)}{-x}\right) = 0 \times (-1)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, f est donc continue en 0.

• $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)\ln(1-x) \times \dfrac{\ln x}{1-x}$

Posons $X = 1 - x$, si $x \to 1^-$ alors $X \to 0^+$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{X\to 0^+} (X\ln X)\left(-\dfrac{\ln(1-X)}{-X}\right) = 0 \times (-1)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(1)$, f est donc continue en 1.

b) • $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x)\left(-\dfrac{\ln(1-x)}{-x}\right)$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{\ln(1-x)}{-x}\right) = -1$,

on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$.

f n'est pas dérivable en 0.

• $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right) \times \ln(1-x)$.

En posant $X = x - 1$

on a $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right) = \lim\limits_{X\to 0^-} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$.

Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$.

On en déduit $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$.

f n'est pas dérivable en 1.

c) Soit $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$, on a :

• $f\left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) \times \ln\left(1 - \left(\frac{1}{2} - x\right)\right)$.

$= \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) \times \ln\left(\frac{1}{2} + x\right)$

• $f\left(\frac{1}{2} + x\right) = \ln\left(\frac{1}{2} + x\right) \times \ln\left(1 - \left(\frac{1}{2} + x\right)\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{2} + x\right) \times \ln\left(\frac{1}{2} - x\right)$.

On en déduit que $f\left(\frac{1}{2} - x\right) = f\left(\frac{1}{2} + x\right)$.

On en conclut que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe $(\mathscr{C})$.

2- a) Pour $x \in]0;1[$, on a :

• $g'(x) = -\ln(1-x) + (1-x)\left(\dfrac{-1}{1-x}\right) - \ln x - x\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$g'(x) = -\ln(1-x) - \ln x - 2$

• $g''(x) = -\dfrac{-1}{1-x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - 1 + x}{x(1-x)} = \dfrac{2x-1}{x(1-x)}$.

• Variation de g'

$\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} g'(x) = +\infty$

Comme $g''(x)$ est du signe de $2x - 1$ sur $]0;1[$ car $x(1-x) > 0$, alors g' est strictement décroissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$.

Tableau de variation de g'

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\ln 2-2$	$\nearrow$	$+\infty$

$g'\left(\frac{1}{2}\right)=2\ln 2-2<0.$

b) La fonction g' est continue et strictement décroissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$. Par suite, elle est une bijection de $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ sur $g'\left(\left]0;\frac{1}{2}\right[\right)=\left]2\ln 2-2;+\infty\right[$. Or $0\in\left]2\ln 2-2;+\infty\right[$, il existe donc $\alpha_1\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$ tel que $g'(\alpha_1)=0$.

De même, puisque la fonction g' est continue et strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2};1\right[$, elle réalise une bijection de $\left]\frac{1}{2};1\right[$ sur $g'\left(\left]\frac{1}{2};1\right[\right)=\left]2\ln 2-2;+\infty\right[$. Or $0\in\left]2\ln 2-2;+\infty\right[$, il existe donc $\alpha_2\in\left]\frac{1}{2};1\right[$ tel que $g'(\alpha_2)=0$.

Conclusion : La fonction g' s'annule en deux valeurs α_1 et α_2 tel que $\alpha_1\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$ et $\alpha_2\in\left]\frac{1}{2};1\right[$.

Signe de g' sur $]0;1[$.

L'examen du tableau de variation de g' permet de déduire le tableau de signes de g' :

x	0		α_1		$\frac{1}{2}$		α_2		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$2\ln2-2$	$-$	0	$+$	

c) • $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-x)\ln(1-x)-x\ln x\right]=1\times 0-0$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

• En posant $X=1-x$, on a

$\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{X\to 0^+}\left[X\ln X-(1-X)\ln(1-X)\right]=0-1\times 0$

$\lim\limits_{x\to 1} g(x)=0$

• $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=0.$

Dressons d'abord le tableau de variation de g.

x	0		α_1		$\frac{1}{2}$		α_2		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$2\ln2-2$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\alpha_1)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$g(\alpha_2)$	$\nearrow$	0

L'examen du tableau de variation de g permet de déduire que pour $x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$, $g(x)>0$ et pour $x\in\left]\frac{1}{2};1\right[$, $g(x)<0$.

3- a) Pour tout $x\in]0;1[$, on a :

$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln(1-x)+(\ln x)\cdot\left(\frac{-1}{1-x}\right)$

$f'(x)=\frac{(1-x)\ln(1-x)-x\ln x}{x(1-x)}=\frac{g(x)}{x(1-x)}.$

Comme pour tout $x\in]0;1[, x(1-x)>0$, on en déduit que $f'(x)$ et $g(x)$ ont même signe sur $]0;1[$.

b) Tableau de variation de f

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	0

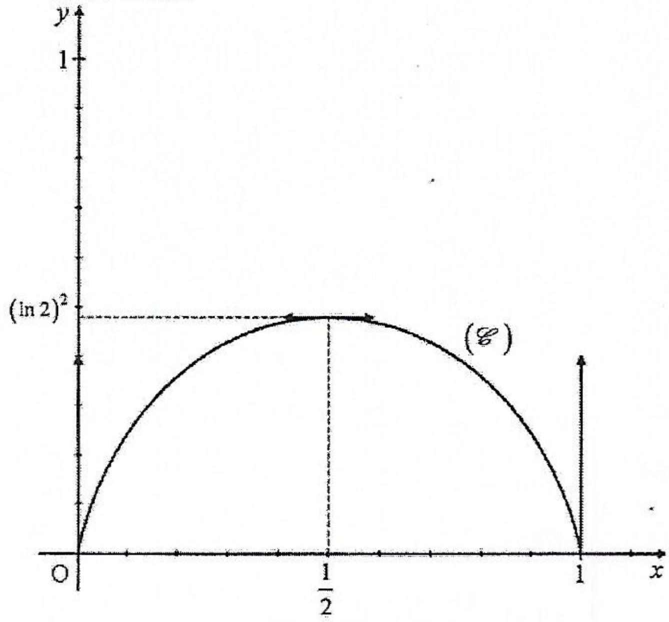
c) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right)=(\ln 2)^2$

Comme f est croissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$, on en déduit que pour tout $x\in\left]0;\frac{1}{2}\right]$, $f(0)<f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)$, soit encore $0<f(x)\leq(\ln 2)^2$.

De même, de f décroissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$, on en déduit que pour tout $x\in\left[\frac{1}{2};1\right[$, $f(1)<f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)$, soit encore $0<f(x)\leq(\ln 2)^2$

D'où pour tout $x\in]0;1[$, $0<f(x)\leq(\ln 2)^2$ ou encore $0<(\ln x)\times\ln(1-x)\leq(\ln 2)^2$.

d) Tracé de $(\mathscr{C})$.



Partie B

1- a) • $I_1(t)=\int_t^{\frac{1}{2}} x\ln x\,dx$; $t\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$

Posons $u'(x)=x$ et $v(x)=\ln x$

$$u(x)=\frac{x^2}{2} \text{ et } v'(x)=\frac{1}{x}$$

$$I_1(t)=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_t^{\frac{1}{2}}-\int_t^{\frac{1}{2}}\frac{x}{2}dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_t^{\frac{1}{2}}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_t^{\frac{1}{2}}$$

$$I_1(t)=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_t^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{4}}{4}-\frac{1}{2}t^2\ln t+\frac{t^2}{4}$$

$$I_1(t)=-\frac{\ln 2}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}t^2\ln t+\frac{t^2}{4}$$

• $I_2(t)=\int_t^{\frac{1}{2}} x^2\ln x\,dx$; $t\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$

Posons $u'(x)=x^2$ et $v(x)=\ln x$

$$u(x)=\frac{x^3}{3} \text{ et } v'(x)=\frac{1}{x}$$

$$I_2(t)=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_t^{\frac{1}{2}}-\int_t^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{3}dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_t^{\frac{1}{2}}-\left[\frac{x^3}{9}\right]_t^{\frac{1}{2}}$$

$$I_2(t)=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{x^3}{9}\right]_t^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\ln\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{8}}{9}-\frac{1}{3}t^3\ln t+\frac{t^3}{9}$$

$$I_2(t)=-\frac{\ln 2}{24}-\frac{1}{72}-\frac{1}{3}t^3\ln t+\frac{t^3}{9}$$

b) • $\lim\limits_{t\to 0} I_1(t)=\lim\limits_{t\to 0}\left(-\frac{\ln 2}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}t(t\ln t)+\frac{t^2}{4}\right)$

$$\lim_{t\to 0} I_1(t)=-\frac{\ln 2}{8}-\frac{1}{16}-0+0=-\frac{\ln 2}{8}-\frac{1}{16}$$

• $\lim\limits_{t\to 0} I_2(t)=\lim\limits_{t\to 0}\left(-\frac{\ln 2}{24}-\frac{1}{72}-\frac{1}{3}t^2(t\ln t)+\frac{t^3}{9}\right)$

$$\lim_{t\to 0} I_2(t)=-\frac{\ln 2}{24}-\frac{1}{72}-0+0=-\frac{\ln 2}{24}-\frac{1}{72}$$

2- $g(x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}\right)$; $h(x)=g(x)-\frac{x^2}{2}$, $x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$

a) $\varphi(x)=\ln(1-x)-g(x), x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$.

$$\varphi(x)=\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\varphi(x)=-\ln 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=-\ln 2+\frac{5}{8}$

φ est dérivable donc continue sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ et pour tout

$x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$, $\varphi'(x)=\frac{-1}{1-x}+1+x=\frac{-x^2}{1-x}<0.$

On en déduit que φ est strictement décroissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$.

b) Puisque φ est continue et strictement décroissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$, elle réalise une bijection de $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ sur $\varphi\left(\left]0;\frac{1}{2}\right[\right)=\left]-\ln 2+\frac{5}{8};0\right[$.

Donc pour tout $x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$, $\varphi(x)\leq 0$

ou encore $\ln(1-x)-g(x)\leq 0$

ou encore $\ln(1-x)\leq g(x)$.

c) Posons $\phi(x)=\ln(1-x)-h(x), x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$.

$$\phi(x)=\ln(1-x)+x+x^2$$

$\lim\limits_{x\to 0}\phi(x)=0$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\phi(x)=-\ln 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\ln 2+\frac{3}{4}$

ϕ est dérivable donc continue sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ et pour tout

$x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$, $\phi'(x)=\frac{-1}{1-x}+1+2x=\frac{x-2x^2}{1-x}>0.$

On en déduit que ϕ est strictement croissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$.

ϕ réalise donc une bijection de $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ sur $\phi\left(\left]0;\frac{1}{2}\right[\right)=\left]0;-\ln 2+\frac{3}{4}\right[$. D'où pour tout $x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$, $\phi(x)\geq 0$

ou encore $\ln(1-x)-h(x)\geq 0$ ou encore $\ln(1-x)\geq h(x)$.

d) Soit $x \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$. On sait que $\ln(1-x) \leq g(x)$ et $\ln(1-x) \geq h(x)$ et comme $\ln x < 0$, on en déduit

$(\ln x)(\ln(1-x)) \geq (\ln x)g(x)$

et $(\ln x)(\ln(1-x)) \leq (\ln x)h(x)$

soit $(\ln x)g(x) \leq (\ln x)(\ln(1-x)) \leq (\ln x)h(x)$

d'où $-(\ln x)\left(x+\frac{x^2}{2}\right) \leq f(x) \leq -(\ln x)\left(x+x^2\right)$.

3- a) D'après le resultat précédent, on a :

$$\int_t^{\frac{1}{2}}(-\ln x)\left(x+\frac{x^2}{2}\right)dx \leq \int_t^{\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \int_t^{\frac{1}{2}}(-\ln x)\left(x+x^2\right)dx$$

$$-\int_t^{\frac{1}{2}} x\ln x dx - \frac{1}{2}\int_t^{\frac{1}{2}} x^2 \ln x dx \leq \int_t^{\frac{1}{2}} f(x)dx \leq -\int_t^{\frac{1}{2}} x\ln x dx - \int_t^{\frac{1}{2}} x^2\ln x dx$$

d' où $-I_1(t)-\frac{1}{2}I_2(t) \leq I(t) \leq -I_1(t)-I_2(t)$.

b) On suppose que $I(t)$ admette une limite ℓ quand t tend vers 0.

On sait que $-I_1(t)-\frac{1}{2}I_2(t) \leq I(t) \leq -I_1(t)-I_2(t)$.

Comme $\lim\limits_{t\to 0}\left[-I_1(t)-\frac{1}{2}I_2(t)\right] = \frac{\ln 2}{8}+\frac{1}{16}+\frac{\ln 2}{48}+\frac{1}{144}$

soit $\lim\limits_{t\to 0}\left[-I_1(t)-\frac{1}{2}I_2(t)\right] = \frac{7\ln 2}{48}+\frac{10}{144}$

et que $\lim\limits_{t\to 0}\left[-I_1(t)-I_2(t)\right] = \frac{\ln 2}{8}+\frac{1}{16}+\frac{\ln 2}{24}+\frac{1}{72}$

soit $\lim\limits_{t\to 0}\left[-I_1(t)-I_2(t)\right] = \frac{8\ln 2}{48}+\frac{11}{144}$,

le théorème de comparaison permet d'affirmer que

$\frac{7\ln 2}{48}+\frac{10}{144} \leq \ell \leq \frac{8\ln 2}{48}+\frac{11}{144}$.

SUJET 2

MATRICES
EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 22 & 17 & 0,1 & 8 \end{pmatrix}$.

1) Donner le format de A

2) Donner la valeur de chacun des éléments a_{14} , a_{23} , a_{33} et a_{32}

3) Ecrire la matrice transposée A^t de A et donner son format

Exercice n°2.

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 5 & ... & 7 \\ ... & 9 & ... \\ 8 & ... & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Compléter l'écriture de A de format 4×3 avec : $a_{32}=5$, $a_{23}=-4$, $a_{21}=8$ et $a_{12}=11$

2) Ecrire la matrice transposée A^t de A et donner son format

Exercice n°3.

1) Donner une matrice dont la transposée est égale à son opposée.

2) Donnez la matrice A telle que pour tout indice i et j avec, $1\leq i\leq 3$ et $1\leq j\leq 3$, le terme a_{ij} soit donné pa formule $a_{ij}=2i-j$

Exercice n°4.

On donne $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculez $A+B$, $A-B$, $3A$, $4B$, $3A-4B$

Exercice n°5.

On donne $A=\begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$.

1) Trouver x et y pour que $A+B=\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$

2) Trouver x et y pour que $2A-4B=\begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$

Exercice n°6.

On considère les matrices A, B et C définies par $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -14 & 7 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$

Trouver deux réels x et y tels que $xA+yB=C$.

CORRIGES

Exercice n°1

1) $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est de format } 3\times 4}$ puisqu'elle contient 3 lignes et 4 colonnes

2) a_{14} est le nombre figurant à l'intersection de la 1ère ligne et de la 4ème colonne, donc $\boxed{a_{14}=4}$

a_{23} est le nombre figurant à l'intersection de la 2ère ligne et de la 3ème colonne, donc $\boxed{a_{23}=3}$

a_{33} est le nombre figurant à l'intersection de la 3ème ligne et de la 3ème colonne, donc $\boxed{a_{33}=0{,}1}$

a_{32} est le nombre figurant à l'intersection de la 3ème ligne et de la 2ème colonne, donc $\boxed{a_{32}=17}$

3) La matrice transposée A^t de A s'obtient en intervertissant lignes et colonnes de A.

On obtient donc $\boxed{A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 22\\ -6 & 7 & 17\\ 8 & 3 & 0{,}1\\ 4 & 11 & 8\end{pmatrix}}$. $\boxed{\text{La matrice } A^t \text{ est donc de dimension } 4\times 3}$

Exercice n°2

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}5 & \dots & 7\\ \dots & 9 & \dots\\ 8 & \dots & 0\\ 7 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

1) a_{32} est le nombre figurant à l'intersection de la 3ème ligne et de la 2ème colonne

a_{23} est le nombre figurant à l'intersection de la 2ème ligne et de la 3ème colonne

a_{21} est le nombre figurant à l'intersection de la 2ème ligne et de la 1ère colonne

a_{12} est le nombre figurant à l'intersection de la 1ère ligne et de la 2ème colonne

On complète ainsi la matrice A : $\boxed{A=\begin{pmatrix}5 & 11 & 7\\ 8 & 9 & -4\\ 8 & 5 & 0\\ 7 & 1 & 3\end{pmatrix}}$

2) La matrice transposée A^t de A s'obtient en intervertissant lignes et colonnes de A.

On obtient donc $A^t=\begin{pmatrix}5 & 8 & 8 & 7\\ 11 & 9 & 5 & 1\\ 7 & -4 & 0 & 3\end{pmatrix}$. $\boxed{\text{La matrice } A^t \text{ est donc de dimension } 3\times 4}$

Exercice n°3

1) Toute matrice antisymétrique possède une transposée égale à son opposée.

Par exemple, si on considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, on aura $A^t=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=-A$

2) L'indication $1\le i\le 3$ et $1\le j\le 3$ nous donne le format de la matrice A : il s'agit d'une matrice 3×3.
De plus on calcule successivement $a_{11}=2-1=1$, $a_{12}=2-2=0$, $a_{13}=2-3=-1$, $a_{21}=4-1=3$, $a_{22}=4-2=2$, $a_{23}=4-3=1$, $a_{31}=6-1=5$, $a_{32}=6-2=4$ et $a_{33}=6-3=3$.

La matrice A est donc : $\boxed{A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}}$

Exercice n°4

On calcule successivement :

$$A+B=\begin{pmatrix}2&5\\3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&2\\-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+7&5+2\\3+(-1)&-1+(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&7\\2&-4\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2&5\\3&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&2\\-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-7&5-2\\3-(-1)&-1-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&3\\4&2\end{pmatrix}$$

$$3A=3\times\begin{pmatrix}2&5\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times2&3\times5\\3\times3&3\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&15\\9&-3\end{pmatrix}\ ;\ 4B=\begin{pmatrix}4\times7&4\times2\\4\times(-1)&4\times(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28&8\\-4&-12\end{pmatrix}$$

$$3A-4B=\begin{pmatrix}6&15\\9&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}28&8\\-4&-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-28&15-8\\9-(-4)&-3-(-12)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22&7\\13&9\end{pmatrix}$$

Exercice n°5

1) On exprime d'une part $A+B=\begin{pmatrix}x&5\\0&2x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y&7\\-1&3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y&5+7\\0+(-1)&2x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y&12\\-1&2x+3y\end{pmatrix}$

On aura l'égalité $A+B=\begin{pmatrix}4&12\\-1&17\end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{pmatrix}x+y&12\\-1&2x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&12\\-1&17\end{pmatrix}$ donc par identification des différents termes si et seulement si $\begin{cases}x+y=4\\2x+3y=17\end{cases}$. On résout ce système par substitution :

$$\begin{cases}x+y=4 & L_1\\2x+3y=17 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4-x & L_1\\2x+3(4-x)=17 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4-x & L_1\\2x+12-3x=17 & L_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=4-x & L_1\\-x=5 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4-(-5) & L_1\\x=-5 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}y=9 & L_1\\x=-5 & L_2\end{cases}}$$

$$\boxed{\text{L'égalité } A+B=\begin{pmatrix}4&12\\-1&17\end{pmatrix} \text{ aura donc lieu pour } x=-5 \text{ et } y=9}$$

2) On exprime d'une part $2A-4B=\begin{pmatrix}2x&10\\0&4x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4y&28\\-4&12y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-4y&-18\\4&4x-12y\end{pmatrix}$

On aura l'égalité $2A-4B=\begin{pmatrix}-5&-18\\4&-16\end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{pmatrix}2x-4y&-18\\4&4x-12y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-18\\4&-16\end{pmatrix}$ donc par identification des différents termes si et seulement si $\begin{cases}2x-4y=-5\\4x-12y=-16\end{cases}$. On résout ce système par substitution :

$$\begin{cases}2x-4y=-5 & L_1\\4x-12y=-16 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4y=-5 & L_1\\2x-6y=-8 & \frac{1}{2}L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=4y-5 & L_1\\-2y=-3 & \frac{1}{2}L_2-L_1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=4\times\frac{3}{2}-5 & L_1\\y=\frac{3}{2} & \frac{1}{2}L_2-L_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=1 & L_1\\y=\frac{3}{2} & \frac{1}{2}L_2-L_1\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}x=\frac{1}{2} & L_1\\y=\frac{3}{2} & \frac{1}{2}L_2-L_1\end{cases}}$$

$$\boxed{\text{L'égalité } 2A-4B=\begin{pmatrix}-5&-18\\4&-16\end{pmatrix} \text{ aura donc lieu pour } x=\frac{1}{2} \text{ et } y=\frac{3}{2}}$$

Exercice n°6

On calcule : $xA+yB=x\begin{pmatrix}1&3\\-4&2\\0&7\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2&0\\-2&1\\8&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y&3x\\-4x-2y&2x+y\\8y&7x+y\end{pmatrix}$.

On aura l'égalité $xA+yB=C$ si et seulement si $\begin{pmatrix}x-2y&3x\\-4x-2y&2x+y\\8y&7x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&6\\-14&7\\24&17\end{pmatrix}$, donc par identification des termes, si et seulement si $\begin{cases}x-2y=-4\\3x=6\\-4x-2y=-14\\2x+y=7\\8y=24\\7x+y=17\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}}$

SUJET 3 (Corrigés)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$
Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est vraie.
(Une réponse fausse sera pénalisée)

1) On considère les points A, B et C d'affixes respectives
$a=3$; $b=1+i\sqrt{3}$; $c=1-i\sqrt{3}$
Le triangle ABC est
- équilatéral
- isocèle non équilatéral, non rectangle
- rectangle non isocèle
- non isocèle, non rectangle

2) Soient D d'affixe $3+2i$ et E d'affixe $2+i$

Au point M d'affixe z, la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$ associe le point M' d'affixe z' avec :
- $z'=(1+i)z$
- $z'=z+1+i$
- $z'=-(1+i)z$
- $z'=z-1-i$

3) Soit n un entier et soit $z=1-i\sqrt{3}$

z^n est un réel strictement positif si et seulement si :
- $n=3k$
- $n=3k+1$
- $n=6k$
- $n=2k$

avec $k\in\mathbb{Z}$

4) Par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, le point P d'affixe $4+2i$ a pour image le point Q d'affixe :
- $2+\sqrt{3}+i(1-2\sqrt{3})$
- $2-\sqrt{3}+i(1+2\sqrt{3})$
- $2\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-2)$
- $2\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+2)$

5) L'ensemble des points M d'affixe z tels que $z+2\bar{z}=1$ est :
- Un point
- Un ensemble de deux points
- Une droite
- Un cercle

Corrigés

1°) $a = 3$; $b = 1 + i\sqrt{3}$; $c = 1 - i\sqrt{3}$

Donc $AB = |b - a| = |1 + i\sqrt{3} - 3| = |-2 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$

$AC = |c - a| = |1 - i\sqrt{3} - 3| = |-2 - i\sqrt{3}| = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$

$BC = |c - b| = |1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

On a donc $AB = AC$; $AB \neq BC$ et $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$

$\boxed{\text{Le triangle ABC est donc isocèle, non équilatéral non rectangle}}$.

2°) On sait qu'une translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ d'affixe v, a pour écriture complexe $z' = z + v$

Les points D et E ayant pour affixes respectives $3 + 2i$ et $2 + i$, le vecteur $\overrightarrow{DE}$ a pour affixe $2 + i - 3 - 2i = -1 - i$

Donc la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$ a pour écriture complexe :

$z' = z + (-1 - i)$ c'est-à-dire $\boxed{z' = z - 1 - i}$.

3°) On peut écrire $z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Donc z a pour argument $-\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

On sait que $\arg z^n = n \arg z$, donc $\arg z^n = -n\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

z^n est un réel strictement positif si et seulement si $\arg z^n = 0$ $[2\pi]$

c'est-à-dire $-n\frac{\pi}{3} = 0$ $[2\pi]$ $\Leftrightarrow$ $-n\frac{\pi}{3} = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire $-n\pi = 6k\pi$ $\Leftrightarrow$ $-n = 6k$ $\Leftrightarrow$ $n = -6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

k étant un entier relatif, cela correspond aussi à $\boxed{n = 6k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$.

4°) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ a pour écriture complexe :

$z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z$ c'est-à-dire $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$

Le point P d'affixe $4 + 2i$ a donc pour image le point Q d'affixe :

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(4 + 2i) = 2\sqrt{3} + \sqrt{3}\,i + 2i - 1 = 2\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 2)$

Donc : $\boxed{\text{Q a pour affixe } 2\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 2)}$.

5°) En posant $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :

$z + 2\bar{z} = 1 \Leftrightarrow x + iy + 2(x - iy) = 1 \Leftrightarrow 3x - iy = 1$

Sachant que deux nombres complexe sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, on obtient :

$z + 2\bar{z} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ et $y = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $z + 2\bar{z} = 1$ est donc

$\boxed{\text{l'ensemble réduit au point d'affixe } \frac{1}{3}}$.

SUJET 4 (Corigés)

Première partie

1°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2 - 6\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)z + 9 = 0$$

On notera z_1 et z_2 les solutions trouvées, z_1 étant la solution de partie imaginaire positive.

b) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 et donner l'écriture exponentielle de z_1 et z_2.

2°) Placer dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2cm, les images M_1 et M_2 de z_1 et z_2.
Expliquer pourquoi M_1 et M_2 sont situés sur le cercle Γ de centre O et de rayon 3, que l'on tracera.

Deuxième partie

On considère la transformation f du plan P, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

Soient A et B les points d'affixes $z_A = 3\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = 3\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et A' et B' leurs images par f.

1°) a) Démonstration de cours :
Soit r la rotation d'angle α et de centre Ω d'affixe ω.
Donner, en justifiant, l'affixe du point M', image par r du point M d'affixe z.

b) Justifier que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

2°) Déterminer sous forme exponentielle les affixes $z_{A'}$ et $z_{B'}$, des points A' et B'.
Placer les points A, B, A' et B' sur la figure.
Expliquer pourquoi ces points sont sur le cercle Γ.

3°) Calculer $arg\left(\frac{z_{A'}}{z_B}\right)$ et montrer que B et A' sont symétriques par rapport au point O. En déduire que le triangle ABA' est rectangle.

Corrigés

Première partie

1°) a) L'équation $z^2 - 6\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)z + 9 = 0$ peut s'écrire $z^2 - 3\sqrt{3}\,z + 9 = 0$

C'est une équation du second degré à coefficients réels, calculons son discriminant : $\Delta = \left(-3\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 9 = 27 - 36 = -9 = (3i)^2$

Δ étant un réel strictement négatif, l'équation a deux solutions complexes conjuguées qui sont :

$$\boxed{z_1 = \frac{3\sqrt{3} + 3i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3\sqrt{3} - 3i}{2}}$$

1°) b) On a $|z_1| = = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3$

Donc $z_1 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

On a donc $\boxed{|z_1| = 3 \text{ et } arg\, z_1 = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]}$

z_2 étant le conjugué de z_1, on a $|z_2| = |z_1|$ et $\arg z_2 = -\arg z_1 \ [2\pi]$

donc $\boxed{|z_2| = 3 \text{ et } \arg z_2 = -\frac{\pi}{6} \ [2\pi]}$

z_1 et z_2 ont donc pour écritures exponentielles respectives :

$$\boxed{z_1 = 3\,e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{et} \quad z_2 = 3\,e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

2°) Voir le dessin en dernière page.

On a vu que $|z_1| = 3$ et $|z_2| = 3$, cela signifie que $OM_1 = 3$ et $OM_2 = 3$

Donc $\boxed{M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont situés sur le cercle } \Gamma \text{ de centre O et de rayon } 3}$

Deuxième partie

f est la transformation du plan P, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$

A et B ont pour affixes $z_A = 3\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = 3\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

1°) a)L'image du point M par la rotation r de centre Ω et d'angle α est le point M' vérifiant : $\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \ [2\pi]$

On sait que $\Omega M = |z - \omega|$, $\Omega M' = |z' - \omega|$

de plus $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = (\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M'}) = -\arg(z - \omega) + \arg(z' - \omega) \ [2\pi]$

On a donc $|z - \omega| = |z' - \omega|$ et $\arg(z' - \omega) - \arg(z - \omega) = \alpha \ [2\pi]$

Si $z \neq \omega$, on peut donc écrire $\left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha \ [2\pi]$

$\frac{z' - \omega}{z - \omega}$ a donc pour module 1 et pour argument α, donc $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha}$

C'est-à-dire $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$

Cette égalité reste vraie si $z = \omega$ puisque Ω est invariant par r.

$\boxed{\text{Au point M d'affixe } z,\ r \text{ associe M' d'affixe } z' = e^{i\alpha}(z - \omega) + \omega}$

b)Au point M d'affixe z, f associe le point M' d'affixe $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$.

donc $\boxed{f \text{ est la rotation de centre O et d'angle } \frac{2\pi}{3}}$

2°) A' étant l'image de A par f, on peut écrire $z_{A'} = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A$.

Alors $z_{A'} = e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(3\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = 3\,e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} = 3\,e^{i\frac{2\pi}{3} + i\frac{\pi}{6}}$ donc $\boxed{z_{A'} = 3\,e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

$z_{B'} = e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(3\,e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) = 3\,e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{6}} = 3\,e^{i\frac{2\pi}{3} - i\frac{\pi}{6}}$ donc $\boxed{z_{B'} = 3\,e^{i\frac{\pi}{2}}}$

$z_A = 3\,e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_B = 3\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $z_{A'} = 3\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $z_{B'} = 3\,e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont les formes exponentielles de z_A ; z_B ; $z_{A'}$ et $z_{B'}$.

On a donc $|z_A| = 3$; $|z_B| = 3$; $|z_{A'}| = 3$ et $|z_{B'}| = 3$.

c'est-à-dire que $OA = OB = OA' = OB' = 3$

$\boxed{\text{les points A, B, A' et B' sont donc sur le cercle } \Gamma}$.

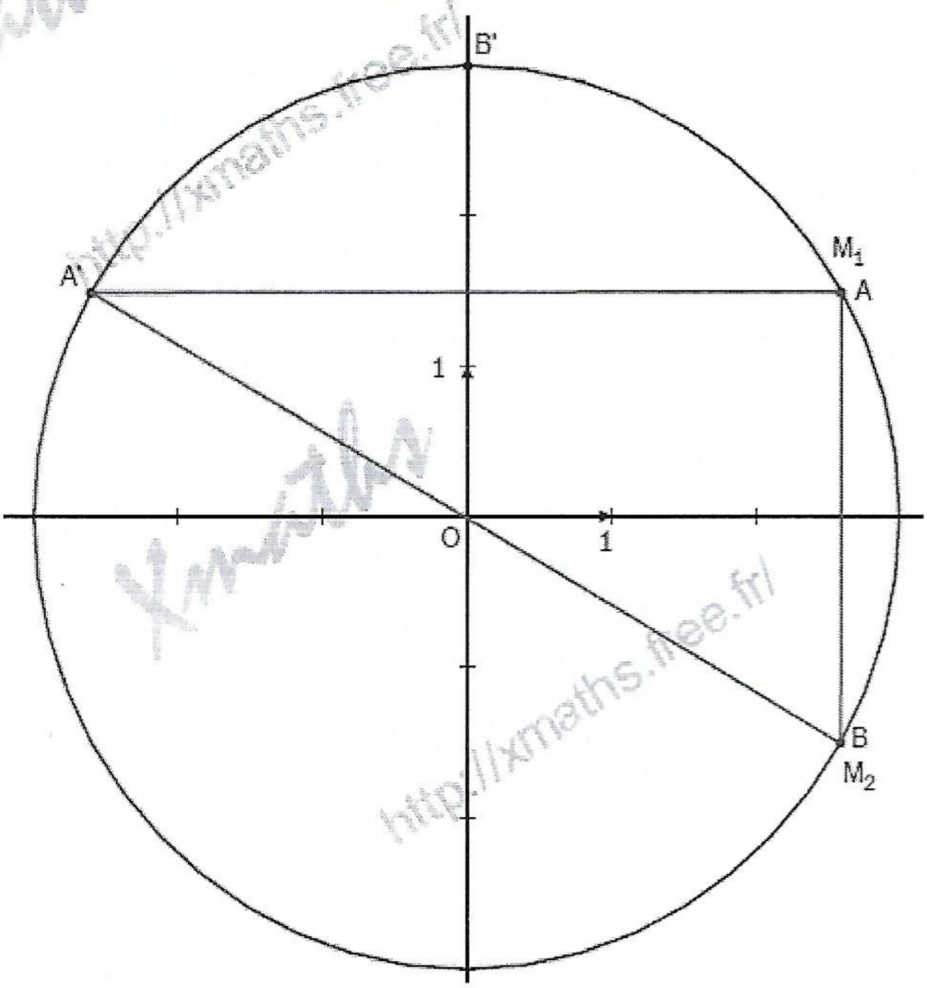
3°) $arg\left(\frac{z_{A'}}{z_B}\right) = arg\,(z_{A'}) - arg\,(z_B) = \frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)$ donc $\boxed{arg\left(\frac{z_{A'}}{z_B}\right) = \pi\ [2\pi]}$

On sait que $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA'}) = arg\left(\frac{z_{A'}}{z_B}\right) = \pi\ [2\pi]$. D'autre part on a $OA' = OB = 3$

On en déduit donc que $\boxed{\text{A' et B sont symétriques par rapport à O}}$.

[A'B] est donc un diamètre du cercle Γ.

Le point A se trouvant sur Γ, $\boxed{\text{le triangle ABA' est rectangle en A}}$.



SUJET 5

EXERCICE

Probabilité

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.
1- Calculer les probabilités des événements suivants :
N : « la boule noire figure parmi les boules tirées »
G : « le joueur gagne »
2- Pour jouer à ce jeu, on applique la règle suivante :
Si le joueur gagne, il marque 4 points.
Si le joueur ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, il ne marque rien.
Si le joueur ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, il perd 2 points.
Calculer les probabilités des événements suivants :
A : « le joueur ne marque rien »
B : « le joueur perd 2 points »

Arithmétique

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système : $\begin{cases} n \equiv 9 \ (17) \\ n \equiv 3 \ (5) \end{cases}$

1- On désigne par (u,v) un couple d'entiers relatifs tels que $17u+5v=1$.

a) Justifier l'existence d'un tel couple (u,v).

b) On pose $n_0 = 3\times 17u + 9\times 5v$.
Démontrer que n_0 appartient à $\mathscr{S}$.

c) Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathscr{S}$

2- a) Soit n un entier relatif appartenant à $\mathscr{S}$
Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \ (85)$

b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si n peut s'écrire sous la forme $n = 43+85k$ où k est un entier relatif.

3- Application :
Koto sait qu'il a entre 300 et 400 jetons. S'il fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. S'il fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
Combien a-t-il de jetons ?

PROBLEME 1

Dans le plan orienté $\mathscr{P}$, on considère un triangle (ABC) isocèle et rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [AC] et [JC].

Partie I

1- Faire une figure.

2- Soit f la similitude directe de centre J, qui transforme A en K.

a) Déterminer l'angle et le rapport de f.

b) Justifier que $f(K) = L$.

c) Soit H le milieu du segment [AJ]. Justifier que $f(I) = H$.

Partie II

On munit le plan $\mathscr{P}$ du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Soit φ la transformation du plan $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
$z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\bar{z} + \frac{1+i}{2}$.

1- a) Donner les affixes des points I, K, J et H.

b) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.

c) Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$.

d) Déduire alors que $\varphi = f \circ S_{(IK)}$, où f est la similitude directe définie dans la partie I.2- et $S_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK).

2- Soit Δ l'axe de la similitude indirecte φ.

a) Tracer Δ.

b) La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q.
Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$.

PROBLEME 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ $\left(\|\vec{i}\| = 1\text{cm et } \|\vec{j}\| = 10\,\text{cm}\right)$.

Partie A

1- a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

2- On considère la fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par :
$g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.

a) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ lorsque $x > 0$.

3- a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^x)$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

4- Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ ainsi que ses asymptotes.

Partie B

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

1- Etudier le sens de variation de F.

2- a) Vérifier que, pour tout nombre réel t,

$\frac{1}{1+e^t}=1-\frac{e^t}{1+e^t}$ puis calculer $\int_0^x \frac{1}{1+e^t}\,dt$.

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$.

c) Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

(1) $F(x)=x-\ln(1+e^x)-f(x)+2\ln 2$

(2) $F(x)=\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)-f(x)+2\ln 2$

3- a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}[F(x)-x]$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie C

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=\sum_{k=1}^{n}e^{-k}\ln(1+e^k).$$

1- Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est u_n.

2- Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

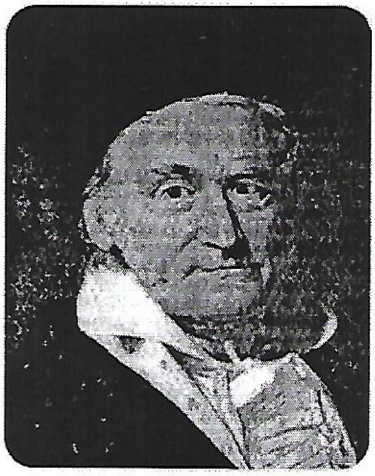
3- a) Justifier que, pour tout entier k tel que $1\le k\le n$, on a :

$f(k)\le\int_{k-1}^{k}f(t)\,dt$.

b) Comparer u_n et $F(n)$.

4- La suite (u_n) est-elle convergente ?

****



Carl Friedrich Gauss

Naissance :	30 avril 1777
Décès :	23 février 1855
Nationalité :	Allemande
Champs :	Mathématiques – Physiques - Astronomie
Institution :	Université de Göttingen
Célèbre pour :	Travaux en mathématiques et en physique

SUJET 6

EXERCICE

Probabilité

Une urne contient dix jetons indiscernables au toucher dont :

3 jetons blancs numérotés 0 – 1 – 2

3 jetons noirs numérotés 3 – 4 – 5

4 jetons rouges numérotés 6 – 7 – 8 – 9

On tire au hasard et successivement trois jetons de l'urne sans remettre dans l'urne le jeton tiré.

1- Calculer le nombre de tirages possibles.

2- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « le produit des numéros des jetons tirés est nul »

B : « les numéros des jetons tirés forment dans l'ordre une progression géométrique de raison 2 »

C : « les jetons tirés sont tricolores »

D : « le jeton rouge n'apparait qu'au troisième tirage »

Arithmétique

1- a) Déterminer les restes de la division euclidienne de 5^p par 13 pour p entier naturel.

b) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

2- On considère dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, l'équation (E) :

$x^2 + x + \bar{7} = \bar{0}$.

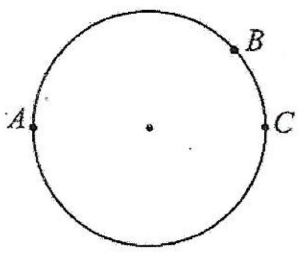
a) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à

$(x+\bar{7})^2 - \bar{4}^2 = \bar{0}$.

b) En déduire la résolution de l'équation (E).

PROBLEME 1

A et C sont deux points distincts du plan ; on note Γ le cercle de diamètre $[AC]$ et O le centre de Γ. B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.



Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

Le point G est le centre de gravité du triangle BCD. Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.

Partie I

1- Placer les points D, G et M sur la figure.

2- Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$ et que le point G est le milieu du segment $[CM]$.

3- Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en M.

Partie II

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et $+1$.

Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral direct ; on a donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

1- Calculer l'affixe du point E et construire le point E.

2- Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$. Déterminer les éléments caractéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproque de s.

3- Montrer que l'image E' de E par σ a pour affixe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E' appartient au cercle Γ.

4- On note Σ le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C. Montrer que le point E appartient à Σ.

Soit O' l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point O' est le centre de gravité du triangle ACE. En déduire une construction de Σ.

PROBLEME 2

A tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $]-1;+\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$.

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

1- Soit h_n la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

a) Etudier le sens de variation de h_n.

b) Calculer $h_n(0)$ et déterminer le signe de $h_n(x)$ sur $]-1;+\infty[$.

2- a) Vérifier que $f_1'(x) = h_1(x)$ pour $x > -1$, et que pour tout $n > 1$, $f_n'(x) = x^{n-1}h_n(x)$.

b) On suppose n impair. Justifier que $f_n'(x)$ et $h_n(x)$ sont de même signe pour tout $x > -1$.

Dresser alors le tableau de variation de la fonction f_n en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

c) Dresser de même le tableau de variation de f_n lorsque n est pair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

3- a) Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

b) Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\mathrm{d}x,\quad n \geq 1.$$

1- a) Démontrer que $0 \leq u_n \leq \dfrac{\ln 2}{n+1}$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

c) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{100}$.

2- a) En remarquant que pour tout x appartenant à $[0;1]$, $\dfrac{x^2}{1+x} = x - 1 + \dfrac{1}{1+x}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x$.

b) Calculer u_1 au moyen d'une intégration par parties.

3- Pour tout x de $[0;1]$ et pour tout $n \geq 2$, on pose :

$S_n(x) = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n \quad [1]$.

a) Démontrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \quad [2]$.

b) En utilisant une intégration par parties et le résultat précédent, démontrer que :

$$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right].$$

4- Application

Soit Δ l'ensemble des points M du plan, de coordonnées $(x;y)$ vérifiant $0 \leq x \leq 1$ et $f_2(x) \leq y \leq f_1(x)$.

Calculer u_2 et en déduire l'aire de Δ en cm^2.

****

SUJET 7

EXERCICE

Probabilité

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 points.

1- Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne, et totalise son gain algébrique x.

a) Déterminer toutes les valeurs possibles de x.

b) Démontrer que la probabilité pour que le joueur perde 1 point est $\dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

c) Calculer, en fonction de n, la probabilité correspondant à chacun des événements suivants :

A : « le joueur gagne 4 points »

B : « le joueur perd 6 points »

2- Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants.

Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

Arithmétique

1- Déterminer tous les couples d'entiers naturels (x,y) tels que : $\text{PGCD}(x,y)=14$ et $xy=2940$

2- Soient a et b deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$. On considère le nombre $N = a\times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N=\overline{a00b}$.

On se propose de déterminer parmi ces entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

a) Vérifier que $10^3 \equiv -1 \quad (7)$.

b) En déduire tous les entiers naturels N cherchés.

PROBLEME 1

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que AB = AC = 2 cm et

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

On note D le symétrique de A par rapport au point C.

Méthode géométrique

1- On note r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$. On pose $f = r\circ t$ et $g = t\circ r$.

a) Montrer que f est une rotation. En décomposant r et t en produit de deux symétries orthogonales, déterminer le centre E de f.

b) Déterminer l'image de K par g. Caractériser alors cette transformation.

2- On désigne par S la similitude directe transformant D en C et C en B.

Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.

3- On appelle Ω le centre de la similitude S.

a) En utilisant la relation $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}$, démontrer que $DC^2 = \Omega D^2$.

b) En déduire la nature du triangle ΩDC.

4- On pose $\varphi = S\circ S$.

a) Quelle est la nature de la transformation φ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer l'image du point D par la transformation φ.

Utilisation des nombres complexes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(A,\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1- Donner les affixes des points A, B, C, I et D.

2- a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude S.

b) En déduire l'affixe du centre Ω de S.

3- Soit la transformation $\overline{S} = t\circ S_{(C\Omega)}$ où t est la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et $S_{(C\Omega)}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(C\Omega)$.

a) Vérifier que les droites (AI) et $(C\Omega)$ sont parallèles.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $\overline{S}$.

c) Déterminer l'écriture complexe associée à $\overline{S}$.

PROBLEME 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$. On note par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

Partie A

1- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2-x)e^x - 1$.

a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que la fonction g s'annule uniquement en deux valeurs que l'on notera α et β. On prendra $\alpha < \beta$.

Vérifier que $-2 < \alpha < 0$ et $1 < \beta < 2$.

c) En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

d) Montrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{2-\alpha}$.

2- a) En étudiant le sens de variation de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x - 1$, montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x - x > 0$. En déduire que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.

c) Etudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = 1$.

3- a) Calculer la dérivée f' de f puis, à l'aide des résultats de la question 1-, construire le tableau de variation de f.

Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

b) Tracer Δ et $(\mathscr{C})$.

On prendra :

$\alpha \simeq -1{,}14$; $f(\alpha) \simeq -0{,}46$; $\beta \simeq 1{,}84$; $f(\beta) \simeq 1{,}18$

Partie B

1- Montrer que pour tout x de $[0;1]$, $f(x) \in [0;1]$.

2- Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a) Montrer que pour tout x de $[0;1]$,

$$f(x) - x = \frac{(1-x)h(x)}{e^x - x}.$$

b) Etudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0;1]$.

3- a) Déterminer une primitive de f sur $[0;1]$.

b) Calculer l'aire, en cm^2, du domaine plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

4- On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{1}{2} \le u_n \le u_{n+1} \le 1$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

****

Etienne Bézout

Naissance :	31 mars 1730
Décès :	27 septembre 1783
Nationalité :	Française
Champs :	Mathématiques
Institution :	Académie des Sciences (France)
Célèbre pour :	Arithmétique – Algèbre

QUELQUES SUJETS ENI – POLYTECHNIQUE

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE

ANNEE 2016-2017

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE FORMATION EN LICENCE PROFESSIONNELLE
CONNAISSANCES SCIENTIFIQUES (Durée : 6 heures)
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 : (3 pts)

Les 3 parties sont indépendantes.

A) Résoudre dans l'ensemble C le système suivant à 2 inconnues z et z'.

$$\begin{cases} (3+2i)\,z - 2i\,z' = -8+7i \\ (5-2i)\,z + (2-i)z' = 7+12i \end{cases}$$

B) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z on ait : $z^3 - 8 = (z-2)(az^2 + bz + c)$.
En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - 8 = 0$.

C) Au nombre complexe z , on associe le nombre complexe $Z = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.
a) Vérifier que si $z \neq 1$ alors $Z = (1-z^5)/(1-z)$
b) On pose $z = e^{\frac{2\pi i}{5}}$. Calculer Z.
En déduire la valeur de :

$$S = 1 + \cos 2\pi/5 + \cos 4\pi/5 + \cos 6\pi/5 + \cos 8\pi/5 .$$

EXERCICE2 : (4 pts)

Les 2 parties sont indépendantes.

A) Soit (U_n) une suite définie par U_0 et $\forall$ n>=0 ,

$$U_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{1}{2}U_n^2}$$

1)En posant pour tout $n \in N$, $W_n = U_n^2 - 16$, montrer que la suite (W_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2)En déduire la limite de (U_n)

B) Soit (Vn) $n \in N^*$ la suite définie par :

$$V_n = \frac{(-1)^n + \cos n}{n}, \quad n \in N^*$$

1) Montrer que la suite (V_n) est bornée.
2) Donner une approximation décimale à 10^{-4} près de trois premiers termes de cette suite.
3) La suite (V_n) $n \in N^*$ est-elle croissante ou décroissante ?
4) Déterminer lim V_n quand $n \to +\infty$

Exercice 3 (4 pts)

Les 2 parties A et B sont indépendantes.

A) Soient *A* et *B* deux événements tels que $P(A) = 1/5$ et $P(A \cup B) = 1/2$.
1. Supposons que *A* et *B* soient incompatibles.Calculer $P(B)$..
2. Supposons que *A* et *B* soient indépendants. Calculer $P(B)$..
3. Calculer $P(B)$.en supposant que l'événement *A* ne peut être réalisé que si l'événement *B* est réalisé.

B) On se donne un carré ABCD de centre O. Un randonneur nommé Rakoto se déplace aléatoirement d'un point à un autre du carré en suivant les segments formés par OABCD. Rakoto part du point A. Le point O est muni d'un klaxon que Rakoto aime faire fonctionner. On note P_n la probabilité que Rakoto klaxonne pour la première fois au n^{ieme} déplacement.

1) Exprimer P_n en fonction de n.
2) Soit K_n l'événement : « Rakoto klaxonne au moins une fois au bout de ses n premiers déplacements ».

a- Exprimer la probabilité de K_n en fonction de n,
b- Calculer la limite de cette probabilité et intepréter le résultat.

Exercice 4 (2 pts)

Calculer la matrice inverse correspondant à la matrice A donnée.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : (5 pts)

Les 2 parties sont indépendantes.

A) Soit (U_n) une suite définie par :

$$U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)}dx$$

1) Calculer U_0.
2) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de n. En déduire la valeur exacte de U_1.
3) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et convergente.
4) Calculer la limite de U_n.

B) On pose

$$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx \text{ , pour tout } n \in N.$$

1) Montrer que pour tout $n \in N$, $I_n = \dfrac{2n}{2n+3} \cdot I_{n-1}$

2) En déduire que

$$I_n = \frac{2^n \cdot n!}{5 \times 7 \times 9 \times \cdots \times (2n+3)} \cdot I_0$$

Exercice 6 (2 pts)

Trouver la primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}$$

$$G(x) = \int \frac{x^2 + 4x + 4}{x(x-1)^2}dx$$

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE ANNEE UNIVERSITAIRE 2009-2010

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE FORMATION EN LICENCE PROFESSIONNELLE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 (5 points) :

On désigne par f_n, la fonction, la fonction numérique de la fonction réelle ainsi définie :

$f_n(x) = (1+x/n)^n$, n étant un entier naturel non nul.
1) Etudier les fonctions f_1, f_2, f_3.
2) On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. Déterminer les points d'intersection des courbes C_1 et C_2 ; des courbes C_2 et C_3 ; des courbes C_3 et C_1 ; puis donner les positions mutuelles de 3 courbes C_1, C_2 et C_3.
Tracer les courbes C_1, C_2, C_3 dans un même repère.
3) Pour $n >= 2$ et selon la parité de n, étudier les variations de f_n.
Quel est le point d'intersection de la courbe C_n avec l'axe des abscisses ?
Démontrer que le point A de coordonnées (0,1) appartient à toutes les courbes C_n, et que ces courbes admettent en ce point la même droite tangente. Comparer cette droite tangente à celle de la courbe représentative de la fonction f ainsi définie : $f(x)=e^x$

N.B : On ne demande pas de tracer les courbes C_n pour $n>3$.

Exercice 2 (5 points) :

Soit n est un entier naturel, on étudie la suite de terme général un définie par :
$U_0=2$ et $U_n- 2U_{n+1}=2n + 3$.

1) Montrer qu'il existe un nombre entier naturel b, indépendant de n, tel que $V_n=U_n+b.n-1$ soit le terme général d'une suite géométrique dont on déterminera le premier terme V_0 et la raison.

En déduire : $U_n=\frac{1}{2^n} -2n+1$

2) On pose $S_n=\sum_{i=0}^{n} V_i$.

Calculer S_n en fonction de n et la limite de S_n quant n tend vers plus l'infini.
Calculer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour que S_n soit supérieur à 1,999.

3) On pose $T_n=\sum_{k=0}^{n} U_k$

Calculer T_n en fonction de n ; T_n admet-elle une limite quand n tend vers plus l'infini.

Exercice 3 (3 points) :

A) On considère dans l'ensemble C des nombres complexes la suite de terme général Z_n, définie par son premier terme $Z_0=1$, et la relation de récurrence $2Z_{n+1} = Z_n + i$.

1) Démontrer que pour tout entier naturel n, non nul, le module R_n de Z_n est inférieur à 1.
2) On pose $Z_n = X_n + i\,Y_n$ où X_n et Y_n sont des nombres réels et $U_n = Z_n - i$.
   Trouver une relation ente U_{n+1} et U_n. En déduire que la suite de terme général X_n est une suite géométrique qui converge vers 0 et que les suites de terme généraux Y_n et R_n convergent vers 1

B) On envisage le polynôme : $f(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 3(1+i)z - 2(1+i)$ où z un nombre complexe.
   Montrer que ce polynôme a une racine réelle. Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation : $f(z)=0$.

Exercice 4 (4 points):

Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements. On sait que

- 20% des chaudières sont sous garantie ;
- parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de 1/100 ;
- parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de 1/10.

1) On choisit au hasard une chaudière dans le parc de logements. On appelle G, l'événement suivant : la chaudière est sous garantie.

Calculer la probabilité des événements suivants :
A : la chaudière est garantie et est défectueuse
B : la chaudière est défectueuse.

2) Dans un logement, la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de 1/41.
3) Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80 Euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280 Euros si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse.

On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

4) Au cours de la période de contrôle, on a trouvé 5 chaudières défectueuses. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles soit sous garantie ?

Exercice 5 (3 points) :

A) On désigne par f la fonction numérique de la variable réelle ainsi définie sur $[0, \pi/2]$:

1) $F(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$

2) Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout x de $[0, \pi/2]$, on ait :

$$F(x) = \frac{b(\cos(x) - \sin(x))}{\cos(x) + \sin(x)} + a$$

3) En désignant par α un nombre réel compris entre 0 et $\pi/4$, calculer l'intégrale :

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} F(x)\,dx$$

B) Pour quelles valeurs réelles de m, le trinôme $mx^2 + 2mx + 1$ possède-t-il 2 racines distinctes dans $]-2, 0[$.

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE

ANNE UNIVERSITAIRE 2008-2009

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE FORMATION DE TECHNICIENS SUPERIEURS

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 : (4 points)

Soit l'équation en la variable complexe z :

$z^2 - (\alpha + 3i + 4)z + 2\alpha i - 1 = 0$ avec α complexe.

a) Déterminer le paramètre α pour que l'équation admette deux racines complexes conjuguées et calculer ces racines.

b) Dans un autre cas, si une des racines est i, calculer le paramètre α et l'autre racine.

Exercice 2 : (4 points)

Mahitsy et Toky sont des chasseurs de canards sauvages. Ils aperçoivent ensemble un gibier et tirent simultanément.

1°) Sachant que Mahitsy atteint et tue d'habitude 3 canards sur 4 et Toky 3 sur 5, quelle est la probabilité pour que le gibier soit tué ?

2°) En fait, Toky a tiré le premier.

a) Quelle est la probabilité pour que Mahitsy tue le canard sachant que si Toky tire et manque, les chances normales pour Mahitsy d'atteindre le canard se trouvent diminuées de moitié ?

b) Dans ces conditions, Toky a tiré le premier, puis Mahitsy. Quelle est la probabilité pour le canard d'en réchapper sain et sauf ?

Exercice 3 : (4 points)

1) Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{Ln(x)} + \dfrac{1}{Ln(y)} = \dfrac{7}{3} \\ \\ Ln(xy) = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

avec $(x,y) \in \mathbb{R}^{*}_{+}$, Ln(x) et Ln(y) désignant des logarithmes népériens.

2) Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^3 \frac{(x+3)dx}{(x+1)^3}$

Exercice 4 : (4 points)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin(x)dx$

1) Calculer I_n en fonction de n.

2) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3) Montrer que cette suite converge et préciser sa limite.

4) On pose $S_n = I_0 + I_1 + \dots\dots + I_n$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer S_n en fonction de n puis lim S_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 5 : (4 points)

I) Soient $P(z) = z^2 - 4z + 5$ et $Q(z) = z^3 - (1+2i)z^2 - 3z + (2i-1)$

a) Diviser Q par P suivant les puissances décroissantes

b) Vérifier qu'ils ont une racine commune.

c) Résoudre les équations P=0 et Q=0.

II) On pose $a = e^{2i\pi/7}$, $S = a + a^2 + a^4$, $T = a^3 + a^5 + a^6$.

1) Calculer S+T et ST.

2) En déduire S et T. Un dessin pourra aider à distinguer S et T.

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA ANNEE UNIVERSITAIRE 2007-2008

ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE FORMATION DE TECHNICIENS SUPERIEURS EN MAINTENANCE DES SYSTEMES INFORMATIQUES

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 (2 points)

Soit la matrice $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (4 points)

Soit la suite réelle $(U_n)_{n\in N}$ définie par son premier terme U_0 et la relation de récurrence :

$\forall n \in N \quad 3U_{n+1} = 2U_n + 1$;

1° Montrer qu'il existe une valeur de U_0 pour laquelle la suite (U_n) est stationnaire.

2° On pose dorénavant $U_0 = 2$ et on définit la suite $(V_n)_{n\in N}$ par : $\forall n \in N \quad V_n = U_n - 1$.

Montrer que $(V_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique dont on calculera le premier terme et la raison.

3° Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

4° La suite U_n est-elle convergente ?

5° Soit $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.

Déterminer S_n et S'_n ainsi que leurs limites lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 3 (4 points)

1° Linéariser l'expression $\sin^4 x \cos 2x$.

2° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $(Z-2)^n = (Z+2)^n$

3° Comment choisir le nombre complexe z pour que $Z = \dfrac{2z-4}{z-i}$ soit réel.

Exercice 4 (4 points)

1° Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$$I = \int_0^{\pi/8} x\sin(4x)dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{-1} (4t+4)e^{-7t}dt$$

2° On considère les deux intégrales :

$$A = \int_0^x e^t \cos 2t\, dt \quad \text{et} \quad B = \int_0^x e^t \sin 2t\, dt$$

A l'aide de la formule d'intégration par parties appliquée à A et à B, établir deux relations entre A et B. En déduire les expressions de A et B.

Exercice 5 (3 points)

1° Factoriser le polynôme suivant : $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

2° Résoudre $\begin{cases} e^x + e^y = \dfrac{7}{2} \\ e^{x+y} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Exercice 6 (3 points)

Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de deux défauts seulement désignés par A et B.

Dans un lot de 1000 appareils prélevés, on a constaté que 100 appareils présentaient de défaut A (et peut être aussi le défaut B), 80 appareils présentaient le défaut B (et peut être aussi le défaut A) et 40 présentaient simultanément les défauts A et B.

Un client achète un des appareils produits. Calculer

1° La probabilité pour qu'il ne présente aucun défaut.

2° La probabilité pour qu'il présente le défaut A seulement.

3° La probabilité pour qu'il présente le défaut B seulement.

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE — **ANNEE 2005-2006**

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE FORMATION DE TECHNICIENS SUPERIEURS EN MAINTENANCE DE SYSTEMES INFORMATIQUES

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 (4 points) : Soit $(U_n)\ n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $U_0 = -4$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = \frac{2}{5}U_{n-1} - 3 .$$

1) Déterminer le réel α tel que la suite $(V_n)\ n \in \mathbb{N}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n + \alpha$.
Soit une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison .
2) Calculer V_n en fonction de n , puis U_n en fonction de n.
3) Déterminer la limite de V_n et celle de U_n quand n tend vers $+\infty$.
4) On pose :

$S_n = V_0 + V_1 + \ldots\ldots\ldots + V_n$;
$S'_n = U_0 + U_1 + \ldots\ldots\ldots + U_n$.

Calculer S_n . En déduire S'n . Etudier la limite , quand n tend vers $+\infty$, de S_n puis celle de S'_n.

Exercice 2 (4 pts) : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

1) Démontrer qu'il existe une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = g(x)$.
2) Etudier et représenter graphiquement la fonction g.
3) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$
4) Déterminer la limite de $\dfrac{1}{x}[g(x) - 1]$ quand x tend vers 0.

Exercice 3 (4points) : On dispose d'un dé truqué tel que les faces 4 , 5, 6 sont équiprobables et que les probabilités des faces 1,2,3 sont proportionnelles aux nombres 1 ,2, 3. De plus , la probabilité d'avoir un nombre pair est égale à celle d'obtenir un nombre impair.

1) Trouver les probabilités de chaque face du dé.
2) On lance 2 fois ce dé truqué.
Quelle est la probabilité pour que la somme des numéros obtenus soit supérieure ou égale à 8.

Exercice 4 (5 points):

Le plan E est orienté et rapporté au repère orthonormé (O,u,v).

1) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $a = 3(1-i)$
Déterminer le module et l'argument de a^n où n est un entier naturel.
Pour quelles valeurs de n le nombre a^n est-il réel ?
2) On désigne par f_1 l'application de E dans lui-même qui, à tout point M d'affixe $z = x+iy$ associe le point M_1 d'affixe $z_1 = x_1 + iy_1$ défini par :
$z_1 = 3(1 - i)z - 5 + i$
Reconnaître l'application réciproque de f_1 ?
3) On pose $f_1^2 = f_1 o f_1$, $f_1^3 = f_1^2 o f_1, \ldots, f_1^n = f_1^{n-1} o f_1$, $n \in \mathbb{N}$
   a) Pour tout M de E,on désigne par M_n l'image de M par f_1^n.
   Déterminer l'affixe z_n de M_n en fonction de l'affixe z de M . On pourra noter que $[z_1 - (1+i)] = a[z-(1+i)]$
   b) Pour quelles valeurs de n l'application f_1^n est-elle une homothétie .
   Précisez le rapport de cette homothétie.
4) Résoudre dans le corps C des nombres complexes l'équation :
$(1 - i)z^2 + 2(1+2i)z + \frac{1}{2} - \frac{7i}{2} = 0$
On trouve deux racines , chacune étant de la forme a+bi (a et b réels). Soit z' celle pour laquelle a=b et z" l'autre.

Exercice 5 (3 points)

Calculer les 3 déterminants suivants :

$$D1 = \begin{vmatrix} (a+1)^2 & a^2+1 & a \\ (b+1)^2 & b^2+1 & b \\ (c+1)^2 & c^2+1 & c \end{vmatrix}$$

$$D2 = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$$

$$D3 = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$$

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE   ANNEE UNIVERSITAIRE 2004-2005

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
DE FORMATION DE TECHNICIENS SUPERIEURS EN MAINTENANCE
DE SYSTEMES INFORMATIQUES

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 : (3 points)

Soient $U_0 = 0$; $U_{n+1} = \sqrt{6 + U_n}$

1) Démontrer que (U_n) est croissante (1 point)

2) Démontrer que $3 - U_{n+1} < \dfrac{3 - U_n}{3}$ (0,5 point)

En déduire : $3 - U_{n+1} <= \dfrac{1}{3^n}$ (0,5 point)

3) Démontrer que (U_n) admet une limite . Préciser cette limite. (1 point)

Exercice 2 : (5 points)

I. On considère les deux intégrales :

$$A = \int_0^x e^t \cos(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^x e^t \sin(t)\, dt$$

a) Etablir deux relations entre A et B. (1 point)
b) En déduire les expressions de A et B (0,5 point)
On pose :

$$A = \int_0^x e^t \cos^2(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^x e^t \sin^2(t)\, dt$$

c) Calculer (I+J) et (I- J) . En déduire les expressions de I et J. (2 points)

II. Etablir la formule de récurrence permettant le calcul de

$$I_n = \int_0^x tg^n(x)\, dx$$

Calculer I_0 et I_1 ; donner l'expression de I_n. (1,5 points)

Exercice 3 : (3 points) Soit la fonction f définie sur R par

$$\begin{cases} f(x) = x \,\mathrm{Log}\, \dfrac{1}{|x|} & \text{si } x \# 0\,; \\ f(0) = 0\,. \end{cases}$$

1) f est-elle continue au point x = 0 ? (0,5 point)
2) Etudier les variations de f et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
. Donner un équation de la tangente au point A d'abscisse 1. (1,5 point)
3) A l'aide d'une intégration par parties , déterminer une primitive de f. En déduire l'aire du domaine défini par $0 <= x <= 1$ et $0 <= y <= f(x)$. (1 point)

Exercice 4 : (4 points)

On considère un groupe de 20 ouvriers d'une usine .
Un enquêteur s'adresse à ces ouvriers au sujet de leurs loisirs. 8 ouvriers de ce groupe s'intéressent au football , 10 ouvriers à la pêche et que 3 ouvriers à la fois à la pêche et au football.

a) Combien d'ouvriers dans ce groupe ne s'intéressent ni à la pêche ni au football ? (1 point)
b) L'enquêteur interroge au hasard un ouvrier du groupe. Calculer :
   1) la probabilité p1 pour qu'un ouvrier s'intéresse au football ; (1 point)
   2) la probabilité p2 pour qu'un ouvrier s'intéresse à la pêche ou au football ; (1 point)
c) L'enquêteur choisit au hasard dans le même groupe de 20 ouvriers un échantillon de 4 ouvriers distincts. On suppose que tous les échantillons possibles de 4 ouvriers distincts ont la même chance d'être choisis.

Quelle est la probabilité pour que ,dans l'échantillon choisi , il se trouve exactement 3 ouvriers s'intéressant à la pêche et un ouvrier s'intéressant au football. (1 point)

Exercice 5 : (5 points)

A) Soit P un plan muni d'un repère orthonormé direct (0, u,v) , β est un nombre réel donné élément de [0,∏/4].

A tout réel t sont associés les points M_t et N_t du plan dont les coordonnées respectives sont :
$M_t(1 + t\cos\beta , 0)$ et $N_t(-1 , t\sin\beta)$.

1) Soit G_t le milieu du segment $[M_tN_t]$. Montrer que l'ensemble des points G_t , lorsque t décrit R , est une droite ; (1 point)

2) Soit S l'application de P dans P qui au point M d'affixe z = x +iy associe le point M' d'affixe

z' = x' +iy' définie par son expression complexe : $z' = iz\operatorname{tg}\beta - (1 + i\operatorname{tg}\beta)$

   a) Montrer que S admet un unique point invariant K dont on calculera les coordonnées dans le repère ; (1 point)
   b) Reconnaître l'application S. Calculer pour tout réel t , $S(M_t)$; (1 point)
   c) Soit (C_t) le cercle de diamètre $[M_t\, N_t]$. Donner l'équation de ce cercle. (1 point)

B) Soit P un polynôme défini dans l'ensemble des nombres complexes C par :

$P(z) = z^4 - 4iz^3 + (3-12i)z^2 - (24 +14i)z +12-36i$

Montrer que l'équation P(z) =0 admet 2 racines imaginaires pures z1 et z2 avec Im(z1) < Im(z2). (1 point)

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE **ANNEE UNIVERSITAIRE 2002-2003**

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
DE FORMATION DE TECHNICIENS SUPERIEURS EN MAINTENANCE DE SYSTEMES INFORMATIQUES

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 : (5 pts)

Soit la fonction f définie par :

$$f_m(x) = \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m+1)x + 3}$$

où x est la variable et m un paramètre . On désigne par (C_m) la courbe représentative de toutes les fonctions f_m.

1) Montrer que les courbes (C_m) passent par 3 points fixes dont on déterminera les coordonnées . **(2 pts)**
2) Déterminer m pour que le point P d'intersection de (C_m) et de l'asymptote parallèle à (x'x) ait pour abscisse 3/2. **(1 pt)**
3) Construire la courbe C_0 **(2 pts)**

EXERCICE 2 : (5 pts)

Un ordinateur supposé de présenter un défaut est testé pour le localiser. On procède successivement à n tests $T1, T2, \ldots, T_n$. Une fois le défaut découvert, on met fin au testage.
La probabilité de la localisation du défaut au premier test est égale à P1 ; la probabilité conditionnelle de la localisation du défaut au deuxième test, s'il n'a pas été localisé au premier, est égale à P2 ; la probabilité conditionnelle de la localisation du défaut au i-ème test, si les premiers (i-1) tests ne l'ont pas localisé, est égale à P_i (i=1,2,....n).
Trouver la probabilité des événements suivants :

A = { réalisation pas moins de 3 tests } **(1pt)**
B = { réalisation pas plus de 3 tests } **(1pt)**
C = { défaut localisé exactement au quatrième test } **(1pt)**
D = { défaut non localisé en n tests } **(1pt)**
E = { tous les n tests réalisés } **(1pt)**

EXERCICE 3 : (2 pts)

Résoudre dans le corps des nombres complexes C l'équation suivante :
$z^6 + 4z^3 + 3 = 0$

EXERCICE 4 : (4 pts)

On pose $I_n = \int_0^{\Pi/2} \sin^n x \, dx$, n désignant un entier naturel -

a) En déduire I_n en fonction de I_{n-2} en établissant la relation pour n >=2,

$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ **(2 pts)**

b) Calculer I_0, puis, en appliquant le résultat de la question précédente, calculer I_2, I_4 et I_6. **(2 pts)**

EXERCICE 5 : (4 pts)

a) Calculer le déterminant suivant **(2 pts)**

$$U = \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos 2x & \cos^2 x \\ \sin^2 y & \cos 2y & \cos^2 y \\ \sin^2 z & \cos 2z & \cos^2 z \end{vmatrix}$$

b) Résoudre l'équation présentée sous forme matricielle **(2 pts)**

$$X . \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE

Année universitaire 2001-2002

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE LA FORMATION DES TECHNICIENS SUPERIEURS filière « MAINTENANCE DES SYSTEMES INFORMATIQUES »

Epreuve de MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (02 points)

On donne les suites : $U_n = \frac{1}{2} U_{n-1} + 3\ V_{n-1}$ $\qquad V_n = \frac{2}{3}\ V_{n-1}$

1°) Déterminer Un et Vn en fonction de U_0 et V_0 et n.
2°) Calculer les limites de Un et Vn quand n → ∞

EXERCICE 2 (03 points)

Soit f l'application de C dans C définie par : $Z \rightarrow f(Z) = Z^4 - 4Z^3 + 9Z^2 - 4Z + 8$

1°) Comparer $f(\overline{Z})$ et $\overline{f(Z)}$
Calculer $f(i)$. En déduire une, puis deux solutions dans C de l'équation $f(Z) = 0$.
2°) Résoudre, dans C, l'équation $f(Z) = 0$.

EXERCICE 3 (04 poinus)

On donne les deux intégrales : $A = \int_0^x e^t \cos 2t\,dt$ et $B = \int_0^x e^t \sin 2t\,dt$

1°) A l'aide de la formule d'intégration par parties appliquée à A et B, établir deux relations entre A et B. En déduire les expressions de A et de B.
2°) On pose $I = \int_0^x e^t \cos^2 t\,dt$ et $J = \int_0^x e^t \sin^2 t\,dt$
Calculer $(I + J)$ et $(I - J)$. En déduire les expressions de I et de J.

EXERCICE 4 (04 points)

Les deux boulangers d'un même village choisissent indépendamment l'un de l'autre leurs deux jours de fermeture hebdomadaire. On admet que la probabilité de fermeture est la même pour tous les jours de la semaine et ceci pour les deux boulangers.

1°) Combien y a-t il de répartitions possibles de quatre jours de fermeture parmi les sept jours de la semaine ?
2°) Calculer la probabilité Po d'avoir tous les jours au moins une boulangerie ouverte ?
3°) Calculer la probabilité P_1 d'avoir un seul jour dans la semaine les deux boulangeries fermées ?
4°) Calculer la probabilité P_2 d'avoir deux jours dans la semaine les deux boulangeries fermées ?

EXERCICE 5 (07 points)

On considère la fonction $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
1°) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2°) Calculer la fonction dérivée correspondante et étudier son sens de variation.
3°) Définir les limites de la fonction aux bornes du domaine de définition.

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE

Année universitaire 2000-2001

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE FORMATION DES TECHNICIENS SUPERIEURS

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (04 points)

Soit a un nombre réel tel que $0 \leq a \leq 1$. On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_0 = 0 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}(a - U_n^2).$$

1) On pose : $x_n = \sqrt{a} - U_n$ et $y_n = \sqrt{a} + U_n$

Trouver deux relations de récurrence simples liant x_{n+1} à x_n et y_n d'une part, y_{n+1} à x_n et y_n d'autre part.

2) Démontrer que $\forall n \in N, x_n \geq 0$ et $y_n \geq 0$.

En déduire le sens de variation de (U_n)

3) Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 2 (02 points)

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$F(x) = \int \frac{x}{x^4 - x^2 - 2} dx$$

$$G(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x + \sin 3x} dx$$

EXERCICE 3 (06 points)

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction numérique f_n, de la variable réelle x, définie par :

$$f_n(x) = \frac{-n\exp(-nx)}{1 + \exp(-nx)} + \ln 2$$

1° Calculer $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

2° On pose $v_n = \exp(u_n) - 1$. Montrer que $(v_n)_{n \in N}$ est une suite géométrique.

3° Calculer $s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et montrer que la suite $(s_n)_{n \in N}$ est convergente. Calculer sa limite.

EXERCICE 4 (04 points)

A l'Ecole Nationale d'Informatique, s'est déroulé un concours d'entrée.

1° Un examinateur a corrigé 100 copies et les a notées sur 5. Les notes se répartissent ainsi :
x_i : note ; n_i : nombre de copies portant la note x_i

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	6	24	28	32	10	0

A l'expérience aléatoire : « choisir au hasard une copie parmi les 100 », on associe la variable aléatoire X = « note lue sur cette copie ».

a). Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique. Représenter graphiquement cette loi.

b) Déterminer la fonction de répartition de X. La représenter graphiquement.

2° Les résultats sont sortis. On notera U_1 l'Université d'Antananarivo et U_2 l'Université de Fianarantsoa. Sur la liste des résultats, à U_1 on relève 25% des filles parmi les reçus avec mention tandis que la proportion est double à U_2. En outre 20% des personnes qui se sont présentées au concours l'ont obtenu avec mention à U_1 contre 10% à U_2 et 40% des candidats au concours à U_1 étaient des filles alors qu'il s'était présenté à U_2 quatre fois plus de filles que de garçons.

Quelle est la probabilité des reçues avec mention parmi les candidates à U_1, de même à U_2 ? La proportion de ces reçues est-elle deux fois plus élevées à U_2 qu'à U_1.

EXERCICE 5 (04 points)

1° θ étant un nombre réel compris entre 0 et 2π, déterminer le module et l'argument du nombre complexe

$$\alpha = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$$

2° Déterminer les éléments z de $\mathbb{C}^*$ tels que z, 1 + z et $\frac{1}{z}$ aient le même module.

Université d'Antananarivo	Année Universitaire 2008-2009
Ecole Supérieure Polytechnique	Session du 26-27 Novembre 2008
....	Option : *Toutes*
Concours d'entrée en Première Année	Matière : *Mathématiques*
	Durée : *3 heures*

Exercice n°1

1) Linéariser $\sin^3 x$ *(0.5 pt)*
2) Utiliser le résultat précédent pour calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(1+\sin x)^2 dx$$ *(1 pt)*

Exercice n°2

Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}}$ pour $x > 0$ et $f(0)=0$.

On note *(C)* la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 5 cm).

Partie A

1) Démontrer que la droite d'équation $(\Delta) : y = 1$ est asymptote à *(C)*. *(0,5pt)*
2)
   a) Pour $x > 0$, calculer $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ et étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0. *(1 pt)*
   b) Que peut-on en déduire pour la fonction f ? *(0,5pt)*
   c) Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ? *(0,5pt)*
3)
   a) Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, calculer la dérivée de f. *(0,5 pt)*
   b) Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f. *(1pt)*
   c) Tracer la courbe représentative de f *(0,5pt)*

Partie B

On note g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$

1) Montrer que dans $]\,0\,;+\infty[$, les fonctions $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes. *(1pt)*
2) Démontrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle *(1pt)*
3) On pose $A = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$. Montrer que $A = f'(\alpha)$ *(1pt)*

Partie C

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$
   a. Sans calculer explicitement u_n, déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ *(0,5pt)*
   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) *(0,5pt)*
2) Démontrer que la fonction h, définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=(x+1)\,e^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ *(0,5pt)*
3) Calculer u_n. Interpréter graphiquement le résultat *(1pt)*
4) La suite (u_n) est-elle convergente ? *(0,5pt)*

Exercice n°3

1) On considère dans C l'équation

$$(E) : 4z^3-2(1+3i)z^2-(4+i)z-1+i=0$$

a) Montrer que l'équation admet une racine imaginaire pure z_1 que l'on déterminera. **(1pt)**

b) Résoudre l'équation (E) .On notera z_2 la solution réelle et z_3 l'autre solution. **(1,5pt)**

2) Soit f l'application de $C-\{2\}$ dans C définie par : pour tout $z \in C-\{2\}$, $f(z)=\dfrac{2z-i}{2-z}$

a) On pose $z=x+iy$ et $f(z)=x'+iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y **(1pt)**

b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z pour que $f(z)$ soit imaginaire pur. **(1pt)**

3) Dans le plan complexe (P), on considère l'application $S : M(z) \to M'(z')$ définie par : $z'=2iz+2+i$

a) On note M_1 le point d'affixe z_1 et M_3 le point d'affixe z_3 . Vérifier que $S(M_1)=M_3$ **(0,5pt)**

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S. **(1,5pt)**

c) Déterminer l'ensemble (Γ') image de (Γ) par S. **(0,5pt)**

4) a) Déterminer l'ensemble (ζ) des points M d'affixe z tels que $|2z-i|=1$ **(1pt)**

b) Quelle est l'image (ζ') par l'application S. **(0,5pt)**

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 2006-2007
SESSION du 22-23 NOVEMBRE 2006
Options : TOUTES
Matière : MATHEMATIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

Exercice 1

1) On considère le nombre complexe

$a = -1 + i$

Calculer le module et l'argument de a, de $\frac{1}{a}$, de a^2

2) Déterminer les racines carrées du nombre complexe :

$a = 5 - 12i$

3) Résoudre dans **C** l'équation :

$$z^2 - (5 - 4i)z + 3(1 - 3i) = 0$$

Exercice 2

On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{IN} : 2u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

1) On pose : $\forall n \in \mathbb{IN} : v_n = u_{n+1} - u_n$

   a) En écrivant : $v_n = (u_{n+1} - u_n)$ en fonction de $u_{n+1} = u_n$, montrer que v_{n+1} et v_n sont du même signe que l'on précisera. En déduire le sens de variation de (u_n)

   b) Monter que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme v_0 et la raison q

   c) Calculer $s_n = \sum_{p=0}^{1} v_p$, puis $L = \lim_{n \to +\infty} s_n$,

2) Montrer qu'il existe une suite géométrique (w_n) telle que $(u_n - w_n)$ soit indépendante de n

Exprimer u_n en fonction de n, puis retrouver ℓ

Exercice 3

Le plan étant rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les fonctions f de $[0,2\pi]$

Dans IR définie par $f(x)=\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$ et g de IR dans IR définie par $g(x)=\frac{2e^x+1}{e^x+1}$.

On note (C) la courbe de f.

1) f est –elle périodique ? Si oui, déterminer sa périodique T
2) f est–elle paire?
3) Montrer que (C) admet la droite (D) d'équation $x=\pi$ pour axe de symétrie
4) Donner le tableau de variation de g et montrer que g possède une fonction réciproque h. Préciser le domaine de h et exprimer h(x) en en fonction x

Exercice 4

Le plan étant rapporté au repère orthonormée $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on donne la fonction φ

$$\varphi(x)=\begin{cases}-x+1+Logx & pour\, 0 \prec x \prec 1\\ x-2+e^{-x+1} & pour\, x \geq 1\end{cases}$$

1) Montrer que φ est continue et dérivable en tout point x strictement positif et différent de 1.
2). En $x_0=1$, φ est-elle continue? Est-elle dérivable?
3) Etudier les variations de φ et tracer sa courbe représentative en précisant les asymptotes
4) Soit λ un réel supérieur à 2.Exprimer l'aire $A(\lambda)$ du domaine des points M vérifiant :

$$\begin{cases}1\leq x\leq\lambda\\ 0\leq y\\ x-2\leq y\leq\varphi(x)\end{cases}$$

5) Calculer $\alpha=\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 2005-2006
SESSION du 08-09 NOVEMBRE 2005
Options : TOUTES
Matière : MATHEMATIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés.

EXERCICE

1) . Résoudre dans C l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$. On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.

2) a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.

b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$.

3) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,(unité = 1cm),on Considère le point P_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$, le point P_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et le point P d'affixe $z_p = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Déterminer l'affixe du point P_3, image de P_2 par l'homothétie H de centre P et de rapport -3

b) Déterminer l'affixe du point P_4, image de P_2 parla rotation R de centre O et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

c) Placer dans le même repère les points P_1, P_2, P_3 et P_4.

d) Calculer $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2}$.

e) Soient I le milieu du segment $[p_1, p_2]$ et P_5 le symétrique de P_1 par rapport à I.

Montrer que les point s P_1, P_2, P_3 et P_4 forme un carré.

PROBLEME Les trois partie A,B et C sont indépendantes.

Partie A : On se propose d'étudier dans cette partie les fonctions

$T_n(x) = \cos n\theta$ ou $x = \cos\theta$ et $n \in N$.

1) Montrer que pour tout n, on a la relation $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

2) Vérifier que la suite des nombres $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$, ou $k = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n$,sont racines simples des équations $T_n(x) = 0$

3) a) Pour n=3, déterminer les trois valeurs de la suite x_k correspondante.

b) En utilisant la formule du binôme, montrer que

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(i\sqrt{1-x^2}\right)^k x^{n-k} \text{ avec } k \text{ pair.}$$

4) En déduire ainsi que les fonctions $T_n(x) = \cos n\theta$ sont des fonctions polynomiales de degré n et à coefficients du plus haut degré égal à 1.

Déterminer en fonction de x les trois fonctions suivantes : $T_0(x), T_1(x)$ et $T_2(x)$.

Partie B : Soient $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ et $g(x)=\frac{2}{3}(\sqrt{7}-2)x^2+1$ deux fonctions à variable réelle définies sur R.

On se proposes, dans cette partie, de résoudre l'équation

$$\sqrt{x^2+1}-\frac{2}{3}(\sqrt{7}-2)x^2-1$$

1) Montrer que f est une fonction bijective sur $[0,+\infty[$ et déterminer sa fonction réciproque f^{-1}

2) Etudier les fonctions f et g et tracer sur un même repère orthonormé $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$ les courbes représentatives C et H respective de f et de g.

On donne $\sqrt{2}=1{,}414$ $\sqrt{5}=2{,}236$ $\sqrt{7}=2{,}645$

3) En déduire a l'aide de la lecture graphique les valeurs approximatives des solutions de l'équation (1).

4) Calculer en fonction de x les dérivées successives jusqu'à l'ordre 4 de la fonction $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

Partie C : Dans cette partie, on considère une fonction $h(x)$ définie sur le segment $[-\pi,\pi]$ continue et ayant ses dérivees jusqu'à l'ordre m-ième continues et qui vérifie la relation $h^k(-\pi)=h^k(\pi)$ pour tout $0\leq k\leq m$

Considérons la suite de nombres $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\cos nx\,dx$, $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer que l'on a la relation $a_n=\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}h'(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+nx\right)dx$.

2) En déduire que pour tout m, on a aussi $a_n=\frac{1}{\pi n^m}\int_{-\pi}^{\pi}h^m(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}m+nx\right)dx$

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 2004-2005
SESSION du 02-03 NOVEMBRE 2004
Options : TOUTES
Matière : MATHEMATIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

N.B. : On tiendra compte d'une bonne présentation et d'une bonne rédaction de toutes les démonstrations. **(2 points)**

Exercice (sur 6 points)

Soit la famille d'équations

$$(E_\theta) : z^2 - (1 + i\sin 2\theta)z + \frac{i}{2}\sin 2\theta = 0$$

Dans laquelle θ désigne un réel appartenant à l'intervalle semi-ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

A tout complexe $z = x + iy$, on associe le point M de coordonnées (x, y) dans le plan.

1. Résoudre l'équation (E_θ) dans l'ensemble des nombres complexes. **(2 points)**
2. Soient $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ les points du plan associes aux solutions $z'(\theta)$ et $z''(\theta)$ de l'équation (E_θ) et soit $I(\theta)$ le milieu du segment $[M'(\theta), M''(\theta)]$.
   a) Déterminer l'ensemble des points $I(\theta)$ lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. **(1 points)**
   b) Montrer que l'ensemble des point $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ est un cercle **C** que l'on précisera. **(1 points)**
   c) Démontrer, lorsque $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ sont distincts, que la droite contenant ces deux points a une direction indépendante de θ. **(1 points)**
   d) On pose $\theta = \frac{\pi}{6}$, déduire de ce qui précède une construction simple de $I(\theta)$ et des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$. **(1 points)**

Problème (sur 12 points)

Partie A

1. Soient g_1 une application de $]0, +\infty[$ dans R : $g_1(x) = 2x^3 + 1 - 3Log x$,
   g_2 une application de $]-\infty, 0[$ dans R : $g_2(x) = x^2 + 1 - 2Log|x|$,
   ou $Log x$ désigne le logarithme népérien de x.
   Etudier les sens de variation de g_1 et de g_2 **(1,5 points)**

2. Soient h_1 une application de $]0,+\infty[$ dans $R : h_1(x) = \left(2 - \frac{1}{x^3}\right)\log x$,

h_2 une application de $]-\infty,0[$ dans $R : h_{2(x)} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)Log|x|$

Etudier la variation de h_1 et de h_2. **(1,5 points)**

Partie B

Soit f une application dans R :

$$f(x) = e^{h_1(x)} \text{ si } x \succ 0,\ f(0) = 0,\ f(x) = e^{h_2(x)} \text{ si } x \prec 0$$

ou e est la base des logarithmes népériens.

1. La fonction f est-elle continue sur R ? **(1 points)**
2. La fonction f est-elle dérivable sur R ? **(1 points)**
3. Calculer $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. **(1 points)**
4. Calculer $\lim\limits_{|x|\to-\infty} \frac{f(x)-x^2}{\frac{Log|x|}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)+x}{\frac{Log|x|}{x}}$. **(1 points)**
5. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x^2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$, puis étudier les branches infinies **(1,5 points)**
6. Etudier le signe de $f(x)-x^2$ pour $x \geq 0$ et $f(x)+x$ pour $x \leq 0$ **(1,5 points)**
7. Etudier le sens de variation de f. Tracer la Courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On précisera sa position par rapport aux asymptotes et l'on indiquera la tangente au point 0. **(2 points)**

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Annee universitaire 2003-2004
SESSION du 01-02 OCTOBRE 2003
Options : TOUTES
Matière : MATHEMATIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

Exercice n°1

Partie A

Soit f une application du corps de nombres complexes C dans lui-même

$$f(z)=\frac{z+1}{1-z}$$

1. Trouver deux nombres complexe a et b tels que :

$$f(z)=a+\frac{b}{z-1}$$ (1 point)

2. Soient E l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z|=1$, E_1 l'image de E par l'application $z_1=f_1(z)=z-i$, E_2 l'image de E_1 par l'application $z_2=f_2(z_1)=\frac{1}{z}$, E_3 l'image de E_2 par l'application $z_3=f_3(z_2)=b.z_2$; E_4 l'image de E_3par l'application $z_4=f_4(z_3)=a+z_3$. Déterminer les ensembles E_1, E_2, E_3, E_4 et tracer leurs courbes représentatives dans le plan complexe. (2 points)

Partie B

1. Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation $z^4-1=0$ et en déduire les solutions de l'équation $\left[(\sqrt{3}-i)z+1\right]^4=1$. (2 points)
2. Soit $a=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. Calculer a^4.
3. Déterminer la forme trigonométrique puis la forme algébrique des nombre complexes solutions de l'équation $z^4=8(1-i\sqrt{3})$ (2 points)

Exercice n°2

Dans cet exercice on désigne par R le cops des nombres réels, par Q le corps des nombres rationnels, par Z l'ensemble des nombres entiers, par N l'ensemble des entiers naturels.

On suppose qu'il existe une fonction continue unique F définie sur R, vérifiant les conditions a) et b) suivantes :

a) $\forall x \in R$ et $\forall y \in R$ $f(x+y)+(x+y)=(f(x)+x)(f(y)+y)$.
b) $f(1)=e-1$ (e : base des logarithmes népériens).

1° Montrer que :

(1) $(\forall t \in R)(f(t)+t \geq 0)$ (1 point)

(2) $(\forall t \in R)(f(t)+t \neq 0)$ et que $f(0)=1$. (1 point)

2° Montrer que :

(3) $(\forall x \in R)$ et $(\forall n \in N)$ $f(nx)+nx=(f(x)+x)^n$ (0.5 point)

Posant $y=-x$ dans a), calculer $f(-x)-x$ et établir que (3) reste vérifiée $(\forall x \in R)$ et $(\forall n \in Z)$ (0.5 point)

3° Calculer, en fonction du nombre e et du nombre entier n, l'expression $f(n)+n$ puis $f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}$. (1 point)

En déduire que :

(4) $(\forall r \in Q)$ $(f(r)=e^r-r)$ (1 point)

4° On admet que tout nombre réel x est limite d'une suite de nombres rationnels $(r_n)_{n\geq 0}, (r_n \in Q)$, c'est-à-dire

$$(\forall x \in R)\ (\exists (r_n)_{n\geq 0} \subset Q) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} r_n = x$$

a) Montrer que $(\forall x \in R)$ $(f(x)=e^x-x)$. (1 point)

Etudier et représenter graphiquement les variations de f, en soignant particulièrement l'étude des branches infinies. Que peut-on dire de la tangente à la courbe représentative de f au point $x=1$. (2 points)

b) Evaluer l'aire, $A(b)$, de la portion du plan comprise entre la courbe, son asymptote et les droite d'équation $x=0$, $x=b$ $(b \prec 0)$ et trouver la limite de $A(b)$,lorsque b tend vers $-\infty$. (1 point)

5° a) Montrer que l'on a :

(5) $(\forall x \in R)$ $(e^x \geq 1+x)$ (1 point)

b) On pose :

$\ln(U_0)=0$, $\ln(U_n)=\ln(1+a)+\ln(1+a^2)+\ldots+\ln(1+a^n)$, $(n \succ 0)$,

Avec $0 \prec a \prec 1$ et ln le logarithme népérien.

Montrer que $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente.

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 2002-2003
SESSION du 03-04 DECEMBRE 2002
Options : TOUTES
Matière : MATHEMATIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

EXERCICE I :

Les deux parties A et B sont indépendantes et obligatoires.

Partie A

On considère la suite réelle (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$$

pour $\forall n \in \mathbb{N}$

1° Montrer que, par récurrence sur IN la site (U_n) est majorée par un nombre 'h' qu'on déterminera.

2° Démontrer que (U_n) est strictement croissante :

a) En raisonnant par récurrence

b) En étudiant le signe de différence $(U_{n+1} - U_n)$.

Que peut-on en déduire ?

3° On construit une nouvelle (V_n) par :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = 2 - U_n$

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} \leq \frac{1}{2} V_n$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

c) Vérifier que le résultat de $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ satisfait la déduction de la question 2°

4° Déterminer directement la limite de la suite (U_n)

Partie B

Pour chacune des suites suivantes, explicitez dans chaque cas le terme générale U_r en fonction de n, $n \in N$

a) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = \frac{1}{3} U_{n-1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 10U_n - 8 - 9n \end{cases}$

c) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{U_n^2 + 1}} \end{cases}$

EXERCICE II :

Les deux parties A et B sont indépendantes et obligatoires.

Partie A

Soit f la fonction de R vers R définie par $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - x}$

1° Etudier la variation de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$

2° Etudier la variation de f à l'intervalle $]-\infty, 0]$; monter que f_1 est une bijection de cet intervalle sur un intervalle I que l'on précisera. Soit $g = f_1^{-1}$ la bijection réciproque de f_1 ; construire la courbe (C_1) représentative de g dans le même repère que (C).

3° Déterminer :

$g(x), \forall x \in I$

Et calculer l'aire géométrique de la partie du plan définie par :

$\left\{-1 \leq x \leq -\frac{1}{e^2}\right\}$ et $\left\{g(x) \leq y \leq \frac{x}{2} + 1\right\}$

Partie B

1° Calculer l'aire d'un disque de rayon égal à $\frac{1}{2}$.

2° On considère la fonction définie, pour tout x de $[0;1]$, par :

$f(x) = \sqrt{x(1-x)}$

Etudiez les variations de $f(x)$ (on admettra que $f(x)$ n'est pas dérivable en 0 et en 1).

Soit M le point d'abscisse x de (C) et I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};0\right)$; calculer $\overline{IM}^2$.

Prouvez que (C) est un demi-cercle dont on précisera le centre et le rayon. Tracez ce demi-cercle.

Donnez une interprétation géométrique de l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)dx}$

En déduire la valeur de cette intégrale

EXERCICE III :

Les trois questions suivantes sont indépendantes et obligatoires.

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes le système :

$$\begin{cases} (1+i)z - (2-3i)z' = 4 + 3i \\ (2-3i)\overline{z} + (4-2i)\overline{z'} = 3 - 4i \end{cases}$$

Ou les inconnus sont z et z' ; $\overline{z}$ et $\overline{z'}$ sont les conjugués de z et z'

Résoudre dans C l'équation :

$$z^2 + (2+4i)z + 3 - 4i = 0$$

Soit la transformation ponctuelle S du plan tel que $S(M) = M'$ ou M et M' ont respectivement pour l'affixe z et z' telles que :

$z' = (1+i)z + 3 - 2i$

Donner les éléments caractéristiques de S

En déduire les éléments caractéristiques de S^{-1} et S^n.

Déterminer l'image par S :

De la 1èrebissectrice

Du cercle trigonométrique

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 2001-2002
SESSION du 17-18 OCTOBRE 2001
Options : TOUTES
Matière : MATHEMATIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

Tous les exercices sont obligatoires.

Exercice1

1- z étant un nombre complexe, on pose $A = \dfrac{1+z}{1-z}$

On désigne par M un point du plan dont l'affixe est z

a) Déterminer l' ensemble des points M tel que A soit un nombre réel.

b) Déterminer l'ensemble des points M tel que A soit imaginaire

dté réel

2- Le nombre complexe u s'écrit $u = \dfrac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$

a) Ecrire u sous forme trigonométrique

b) Calculer u^4

3- Résoudre dans C l'équation $6z^2 - (5-i)z + 2 - \dfrac{5i}{6} = 0$

4- Calculer la somme suivante, où n est un entier naturel $S = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta$

Exercice 2:

1- La suite (u_n) est définie la manière suivante : $u_0=1$, $u_1=3$; $n \succ 1$; $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$

a) Calculer u_2, u_3, u_4. Démontrer que, pour tout n $u_n = 2^{n+1} - 1$.
La suite (u_n) est-elle convergente ?

b) La suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 2u_{n-1}$
Démontrer que (v_n) est constante. En déduire une relation entre u_n et u_{n-1}

c) Peut-on trouver des suites géométriques (s_n) vérifiant, pour tout n >1 : $s_n = 3s_{n-1} - 2s_{n-2}$

2- La suite (w_n) est définie pour $w_0=a$, $w_1=b$ et pour tout n supérieur à 1 par : $w_{n+1} = w_n - w_{n-1}$
Démontrer que (u_n) est périodique.

3- Trois réels x,y, z forme dans cette ordre une suite arithmétique dont la somme est 9; $\dfrac{1}{x}, \dfrac{2}{y}$ et $\dfrac{3}{z}$ forment dans cet ordre une suite géométrique. Calculer x, y et z

---

Exercice 3:

1- Soit f l'application de $]0,1[$ dans R définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x+1+2Logx & si\ x \in\ ]0,1[\\ x-2+e^{1-x} & si\ x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

a) Montrer que f est continue au point x=1.Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que f est dérivable à gauche et dérivable à droite au point x=1.L 'application est-elle dérivable en ce point

2- Soit la fonction g définie sur l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=Log(\sin x+\cos x)$

b)-On pose $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ et $J=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

Calculer I+J et I-J. En déduire la valeur de I et celle de J.

Exercice 4 :

1- Soit la fonction $g:R\to R$

$$x\to g(x)=(1-x)e^x-1$$

Donner l'expression de la dérivée $g'(x)$ et donner le tableau des variations de la fonction

En déduire le signe de $g(x)$.

2- Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x)=(2-x)e^x-2-x$

a) A l'aide des résultats obtenus en 1, déduire les variations de la fonction f.

b) Montrer que la courbe représentative (C) de cette fonction f admet pour asymptote oblique la droite d'équation $y=2-x$. Préciser la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

c) Déterminer le point K de la courbe (C) en laquelle la tangente est parallèle à (D).

d) Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé. Préciser les coordonnées des point d'intersection A et B de la courbe (C) avec les axes.

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 2000-2001
SESSION du 27-28 SEPTEMBRE 2000
Options : TOUTES
Matière : MATHEMATIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

Partie A :

Exercice I :

1) Démontrer que :

$P(z) = z^2 + (1-2i)z + 7 - I \quad (z \in C)$, est le produit de deux polynômes du 1[er] degré.

On considère sur C l'équation (E) :

$t^2 - 3zt + 2z^2 + iz + 1 = 0$

Ou t est l'inconnue et z paramètre complexe.

a) Déterminer les deux solutions de (E) dans le cas généal.
b) Déterminer l'ensemble z pour que lui-même soit solution de (E).

Partie B :

Exercice II :

On rappelle que : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

1)- Démontrer que :

$$C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$$

2)- On admet que :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots\dots\dots + C_n^n b^n$$

a) Calculer :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots\dots\dots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

b) Montrer que :

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots\dots\dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5$$

c) Montrer que :

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots\dots\dots = 2^{n-1}$$

3)- Démontrer, d'après le principe raisonnement par récurrence que :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots\dots\dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

Partie C :

Exercice III :

Soit la fonction d'une variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f(0)=2 \\ f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

1)- Donner son domaine de définition.
2)- La fonction est-elle continue en 0.
3)- Calculer la dérivée de la fonction f.
4)- On se propose de définir le signe de f' sur $]-1;0]$

a) Montrer que la fonction $g(x)=x-1-\ln x$ est positive sur $[1;+\infty[$.

b) En choisissant un changement de variable judicieux, déduire alors le signe de f' sur $]-1;0]$

c) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} f'(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$

d) Calculer $f'(1)$.Quel est son signe ?

5)- On admettra alors que $f'(x)\geq 0$ sur $[0;+\infty[$

a) Dressez le tableau de variation complet de la fonction f (limites, dérivées particulières, branches infinies).

b) Monter que la courbe est au-dessus de l'asymptote oblique

c) Tracer le graphe de la fonction f. Soit (C) cette courbe.

d) Soit la droite (D) d'équation $y=ax+1$.

d1) Pour quelle valeur de a la droite (D) coupe-t-elle la courbe (C) en un point, en deux points ?

d2) Quelle valeur de a $(D)\cap(C)=\varnothing$?

e) Donner l'équation d'une parabole passant par le point (-1 ;0) et tangente a la courbe au point (0;2).

Exercice IV :

Soit $I_n=\int_1^{1+\frac{1}{n}}\sqrt{1+x^n}\,dx$

Monter que $\int_1^{1+\frac{1}{n}}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^n}}dx\prec\dfrac{1}{n\sqrt{2}}$

Monter que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$

En intégrant par partie, déduire que la suite I_n converge et donner sa limite.

Exercice V :

Calcul de primitive.

a) $\int e^{\cos x}\sin x dx$ $\qquad$ c) $\int\dfrac{dx}{\sin x}$ $\qquad$ b) $\int_0^{\pi/4}\dfrac{2+2tg^2x}{\sqrt{1+tgx}}dx$

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 1999-2000
Options : TOUTES
Matière : MATHEMATIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

I. PROBLEME :

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par : $f(x)=2\ln[\frac{e}{4}(x+\frac{4}{x})]$ où ln désigne le logarithme népérien de base e.

Partie 1 : Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1) Etudier les variations de f . Montrer que la courbe (Γ) d'équation $y=2\ln[\frac{ex}{4}]$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$
2) Tracer (C) et (Γ) sur la même figure.
3) Etudier le signe de $g(x)=f(x)-x$ et démontrer que pour tout $x \geq 2$, on a $f(x) \leq x$

Partie 2 : On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 > 0$ et $U_{n+1}=f(U_n)=2\ln[\frac{e}{4}(x+\frac{4}{x})]$, $\forall n \in N$.

1) Montrer que pour tout $n \in N^*$, on a $U_n \geq 2$ et que (U_n) est une suite décroissante à partir du rang 1.
2) Soit φ_1 la fonction numérique d'une variable réelle x définie par $\varphi_1(x) = \ln(1+x)-x$.
   a) Démontrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $\ln(1+x) \leq x$.
   b) En déduire que pour tout $h \geq 0$, on a $0 \leq f(2+h)-2 \leq \frac{h^2}{2(2+h)} \leq \frac{h^2}{4}$
3) On pose $V_n = U_n - 2$, $\forall n \in N$. montrer que pour tout $n \in N^*$, on a $0 \leq V_{n+1} \leq \frac{V_n^2}{4}$

Partie 3 :

1) Soit φ_2 la fonction numérique à variable réelle x définie par :

$\varphi_2(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$

Etudier le signe de φ_2 sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

2) Pour $n \in N^*$, φ_n est la fonction définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par :

$\varphi_n(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n}$

Etudier le signe de $\varphi_n(x)$ pour $x \in]-1, +\infty[$

Partie 4 : On considère l'application h de R dans R définie par $h(x) = \frac{x^3-4x}{x^2+4}$

1) – a / Trouver trois constante réelles a , b , c telles que pour tout $x \in R$, on ait

$h(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2+4}$

b / Déterminer une primitive H de h.

2) Soit α un nombre réel supérieur à 2. En utilisant les résultats obtenus précédemment , calculer en fonction de α l'intégrale suivante :

$I(\alpha) = \int_2^{\alpha} 2x\ln[\frac{e}{4}(x+\frac{4}{x})]dx$

2. EXERCICE :

Soient ABC un triangle isocèle et BCDE un rectangle. On donne AB = 5cm,
BC = 6cm et CD = 3cm.
Soit O la projection orthogonale du point A sur le segment [BC].
On considère un point M du segment [AO] tel que AM = x.
On note N le projeté du point M sur la droite (BC) parallèlement à la droite (AC). On note P le symétrique du point N par rapport à la droite (AO).

1) Construire une figure
2) Calculer AO , MO , ON et vérifier que $MN = \frac{5}{4}(4-x)$
3) Calculer A (x) l'aire du quadrilatère AMNC en fonction de x.
4) Soit B (x) l'aire du domaine limité par ABEDC, extérieur au triangle MNP.
Exprimer B (x) en fonction de x .

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 1998-1999
Options : TOUTES
Matière : MATHEMATIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

EXERCICE 1 :

PREMIERE PARTIE

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.

Pour tout sous ensemble A de E on désigne par f(A) l'ensemble $\{y=f(x) \in F\ ;\ x \in A\}$.

1°) Montrer que si $A \subset E$ et si $B \subset E$, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et qu'en général $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

2°) Démontrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour tous sous ensembles A et B de E si et seulement si : f est une application injective.

DEUXIEME PARTIE

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique définie par la relation de récurrence : $U_1 = \sqrt{2}\ ;\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}\quad (n\geq 1)$

1°) Montrer que : $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante

2°) Montrer que $U_n = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ Quelque soit $n \geq 1$

EXERCICE 2 :

PREMIERE PARTIE

Soit $a \in C$, Considérons l'équation dans le corps des nombres complexes C.

$E\colon\ (z+a)^n = z^n\quad (n \in N^*,\ z \in C)$

1°) Résoudre l'équation (E)

2°) Montrer que si $a \in R^*$, ie si a est un réel non nul, les racines de l'équation (E) décrivent une droite parallèle à l'axe des nombres imaginaires pures

DEUXIEME PARTIE

Soit $z \in C$, $|z| = r$, $Arg(z) = t, 0 \leq t < 2\pi$, et $n \in N$

$U_n(t) = 1 + r\cos t + r^2\cos(2t) + ... + r^n\cos(nt)$

$V_n(t) = 1 + r\cdot\sin t + r^2\sin(2t) + ... + r^n\sin(nt)$

1°) Calculer $U_n(t)$ et $V_n(t)$ pour $r \neq 1$

2°) Soit r = 1, Montrer que

a°) $U_n(t) = \dfrac{\sin\frac{(n+1)\cdot t}{2} \times \cos\frac{nt}{2}}{\sin(\frac{t}{2})}$, $V_n(t) = \dfrac{\sin\frac{(n+1)\cdot t}{2} \times \sin\frac{nt}{2}}{\sin(\frac{t}{2})}$, si $t \neq 0$

b°)

$\lim\limits_{t \to 0} U_n(t) = U_n(0)$ $\qquad$ $\lim\limits_{t \to 0} V_n(t) = V_n(0)$

3°) On pose $r = \frac{1}{2}$, et on considère la fonction périodique de période 2π définie pour tout $t \in [0, 2\pi[$ par : $f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} U_n(t)$

Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

EXERCICE 3 :

f étant une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et g, la fonction primitive de f qui s'annule pour x = 0, $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$

1°) Quel est le domaine de définition de f et en quels points f est-elle dérivable ?

2°) Quel est le domaine de définition de g ?

3°) Montrer que g est une fonction impaire.

4°) Montrer que g est bijective

5°) Calculer. $g(\dfrac{e^y - e^{-y}}{2})$ et en déduire $g^{-1}(x)$ (la fonction réciproque de g)

NB : On répond aux questions 2°), 3°), 4°), 5°) sans calculer la fonction primitive g(x)

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 1997-1998
Options : TOUTES
Matière : MATHEMATIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

EXERCICE 1 :

On donne les nombres complexes A=2 − i , et B =17 + 3i et C =15 − 5i

$D=\frac{1+x+iy}{1-x-iy}$. On désigne par M un point du plan P dont l'affixe est x + iy.

1°) Ecrire D sous la forme a + ib

2°) Déterminer l'ensemble des points M tels que D soit un nombre réel.

3°) Déterminer l'ensemble des points M tels que D soit un imaginaire pur

4°) Calculer $K=\frac{A.B}{C}$ et déterminer les racines carrées, dans C, du nombre K.

EXERCICE 2 :

Trois suites U, V ,W sont définies de la manière suivante sur N*

$U\begin{cases} U_1 = 1 \\ n>1 : U_{n+1} = \frac{1}{3}(U_n + 2V_n) \end{cases}$; $V\begin{cases} V_1 = 12 \\ n>1 : V_{n+1} = \frac{1}{4}(U_n + 3V_n) \end{cases}$

W : $W_n=U_n - V_n$, $\forall$ n

1°) Montrer qu W est une suite géométrique convergente à termes négatifs.

2°) Montrer que Un est croissante et que V est décroissante

3°) Montrer que $1 \leq U_n < V_n \leq 12$ pour tout n.

Les suites U et W sont-elles convergentes ?

4°) On considère la suite t définie, Pour tout n, tn = $3U_n + 8V_n$. Montrer que t est constante.

5°) Montrer que U et V ont la même limite.Trouver cette limite

EXERCICE 3 :

Soit f la fonction telle que $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ et g l'application de] 0 , +∞ [dans $\Re$ définie

par : $g(x)=\begin{cases} -x+1 +2 \log x & \text{si } x\in]0,1[\\ x-2+ e^{1-x} & \text{si } x\in [1,+\infty[\end{cases}$

1°) Montrer que pour tout réel x, $|f(x)|<1$ et que f est impaire

2°) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative

3°) Montrer que f est une bijection de R sur]-1 , 1 [. Déterminer f^{-1}

4°) Montrer que g est continue sur] 0, + ∞[.

5°) Montrer que f est dérivable à gauche et dérivable à droite au point x = 1. L'application g est-elle dérivable en ce point ?

EXERCICE 4 :

Voici trois vecteurs de R^4, $\vec{u}=(1,-1,1,-1)$; $\vec{v}=(1,1,-1,-1)$; $\vec{w}=(1,-1,-1,1)$

1°) Donner la base canonique de R^4

2°) La famille $F=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ avec $\vec{t}=(-1,-1,-1,3)$. C est-elle une famille libre ? est-elle une famille génératrice de R^4.

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 1996-1997
Options : TOUTES
Matière : MATHEMATIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

EXERCICE 1 : n étant un nombre entier supérieur ou égal à 1, on pose :

$S_1 = 1 + 2 + \ldots + n$; $S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$; $S_3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

En remarquant que, retrouver l'expression de S_1 en fonction de n.

Calculer S_2 en développant $(1+k)^3$ pour $1 \leq k \leq n$

Calculer S_3

a) En utilisant le développement de $(k+1)^4$

b) En calculant $[S_1(k)]^2 - [S_1(k-1)]^2$

Vérifier ce résultat par récurrence sur n, $n \in N^*$

EXERCICE 2 : $(U_n)_{n\in N}$ étant une suite géométrique de raison q et premier terme U_0

1°) On suppose que $q = -\frac{1}{2}$. Démontrer que $\forall\, n \in N^*$; $U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + U_{n-1})$

2°) On suppose que (U_n) n'est pas constante et satisfait à $\forall\, n \in N^*$:*

$U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + U_{n-1})$ .Démontrer que $q = -\frac{1}{2}$

3°) On suppose que $U_0 = 15$ et $q = -\frac{1}{2}$ et on pose $S = U_4 + U_5 + \ldots + U_n$

Calculer S en fonction de n et déterminer le plus petit entier n tel que $\left|S - \frac{2}{3}\right| < 10^{-3}$

Soit (Vn) la suite définie par : $V_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^n \, dx$

1°) Montrer que (V_n) est décroissante et positive et en déduire qu'elle est convergente

2°) En calculant $V_n + V_{n+2}$, $n \in N^*$, trouver sa limite.

EXERCICE 3 : Trouver les racines carrées du nombre complexe $C = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Déterminer le réel t que les racines du trinôme $x^2 - 2x\, e^{it} + 1$ aient une partie réelle nulle.

Calculer le module et l'argument du nombre complexe $z = (1+i)^n$. En déduire les sommes :

$U = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$

$V = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots$

EXERCICE 4 :

On donne la fonction g de R dans R définie par :

$$g(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

1°) Etudier cette fonction, tracer sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

et montrer que g est impaire.

2°) Montrer que, ∀ les réels x et y : $g(x+y)=\frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)\,g(y)}$

3°) Montrer que g est une bijection de R sur] −1, 1 [. Déterminer sa fonction reciproque g^{-1}

et la dérivée de cette fonction .

On considère une fonction f définie pour tout réel et vérifiant la propriété :

$\forall (x, y) \in R^2 :\ f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\,f(y)}$

1°) montrer que s'il existe un réel c tel que f(c) =1 ou f(c)= -1, la fonction f est constante sur R .

On suppose dans toute la suite que f n'est pas constante

2°) En écrivant $x=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}$, montrer que, pour tout réel x, on a : $-1 < f(x) < 1$ et établir que $f(0)=0$. En déduire que f est impaire.

3°) On suppose que f est dérivable en O et que f'(0) = k. Montrer que f est dérivable en tout point x de R et que $f'(x) = k[1-(f(x))^2]$. Le nombre k peut-il être nul ? Montrer que f est monotone sur R.

4°) On appelle f^{-1} la fonction réciproque de f définie sur f(R). Calculer la dérivée de f^{-1} et en déduire f^{-1} puis f.

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 1994-1995
Options : TOUTES
Matière : MATHEMATIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

EXERCICE 1 :

a) Trouver les racines quatrièmes de -4 sous la forme algébrique dans $\mathbb{C}$.

b) Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et } z_2 = 1 + i$$

En déduire le module et l'argument de $z_0 = \frac{z_1}{z_2}$. Utiliser ces résultats pour calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

c) x étant un réel quelconque et n un entier naturel, en considérant l'expression de $U + iV$ calculer les réels U et V définis par :

$$U = 1 + C_n^1 \cos x + C_n^2 \cos 2x + \ldots + C_n^n \cos nx$$

$$V = C_n^1 \sin x + C_n^2 \sin 2x + \ldots + C_n^n \sin nx$$

Quel est l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$z\bar{z} + 3z + 3\bar{z} - 7 = 0$?

EXERCICE 2 :

a) Montrer que dans l'espace vectoriel réel $\mathcal{F}$ des fonctions de R dans R, les 3 vecteurs $f_1 = 1$, $f_2 = \sin x$, $f_3 = \cos x$ sont linéairement indépendants.

b) On note ξ l'espace vectoriel engendré par f_1 , f_2 , f_3 . Si $a \in R$ et si $f \in \xi$, on note $l_a(f)$ la fonction (qui appartient à ξ) définie par : $[\, l_a(f)\,](x) = f\,(x + a)$ $\forall x \in R$

Montrer que l'application $l_a : f \dashrightarrow l_a(f)$ est linéaire sur ξ

Ecrire dans la base $\{ f_1 , f_2 , f_3 \}$ la matrice de M_a de l_a .

c) Soit $\beta \in R$. Calculer $l_a o l_\beta$ .vérifier matriciellement le résultat.

EXERCICE 3 :

I. On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_1 = a ,\ U_2 = b ,\ U_3 = \frac{1}{2}(U_1 + U_2), \ldots,\ U_n = \frac{1}{2}(U_{n-2} + U_{n-1}) ,\ldots,\ a , b \in R$$

a) Démontrer que la suite de terme général $V_n = U_n + U_{n-1}$ est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de U_n en fonction de a , b , n , puis la limite de (U_n) quand n tend vers l'infini.

II a) Annoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction f définie sur un segment [a , b] de R.

b) Peut-on appliquer ce théorème à la fonction népérien sur le segment [p , p + 1] où $p \in \mathbb{N}$?

c) En déduire la limite de la suite (W_n) définie par : $W_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 4 :

a) Calculer : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^3 x}$

b) On considère la fonction f définie sur $[\, 0 , +\infty \,[$ par : $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{Log} x & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[\, 0 , +\infty \,[$.

c) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{|\operatorname{Log} x|}{x}$

Etudier g et tracer sa courbe (C) dans un repère orthonormé.

Calculer l'aire S du domaine limité par (C) , l'axe 0x et les parallèles à 0y d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.

PHYSIQUES

SUJETS ET EXERCICES (+ QUELQUES CORRIGES)

SUJET 1

Exercice I

A. 1.-Une bille supposée ponctuelle de masse m = 20 g part sans vitesse initiale du sommet A d'une demi-sphère de centre O et de rayon R = 1 m reposant sur le sol horizontal. Elle glisse sur la surface sphérique. La position M de la bille est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM})$ figure 2).

a) Si la bille glisse sans frottement, calculer en fonction de m, g, R et q :

- le module de la vitesse de la bille au point M.
- l'intensité de la réaction $\vec{N}$ exercée par la demi-sphère sur la bille au point M.
- l'angle $\theta_1 = (\overrightarrow{OC}),(\overrightarrow{OK})$ pour lequel la bille quitte la demi-sphère. Calculer q1.

b) Reformuler les expressions du module de la vitesse et de l'intensité de la réaction normale $\vec{N}$ si la bille glisse avec des frottements dont la résultante $\vec{f}$ à même direction que la vitesse et d'intensité supposée constante $\|\vec{f}\|$.

2.-Cette bille est maintenant fixée à l'extrémité d'une tige OB de masse pratiquement nulle (OB = 20 cm = b). Le système ainsi obtenu peut osciller dans un plan vertical autour d'un axe horizontal O perpendiculaire au plan de la figure. (Figure 3)

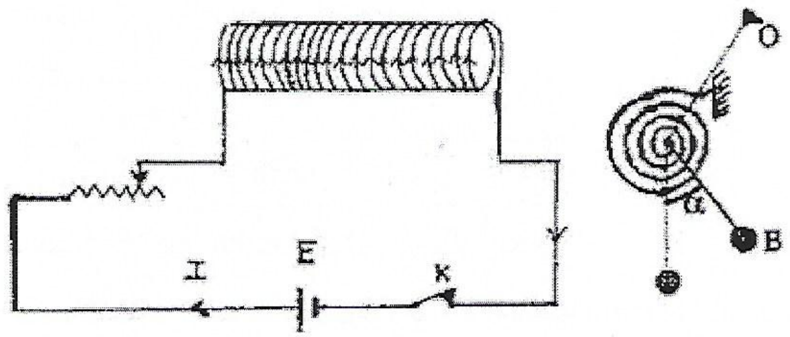


Figure 3

Le système est soumis à l'action de la pesanteur et à celle d'un ressort spiral dont la constante de torsion est C. Initialement la tige est immobile verticale et le ressort détendu.

a) Donner en fonction de m, g, b, C et α l'expression de l'énergie mécanique du système quand la tige est écartée d'un angle α de sa position d'équilibre et maintenue immobile. L'énergie potentielle de pesanteur est nulle à l'équilibre.

b) Que vaut l'expression de cette énergie mécanique lorsque l'élongation angulaire de la tige OB en mouvement est q quelconque.

c) Le système étant conservatif, en déduire l'équation différentielle régissant le mouvement du système (tige + Bille) dans le cas des petites oscillations. On rappelle que dans le cas des petites oscillations : sin q $\approx$ tg q $\approx$ q et cos q $\approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ q (en rad).

d) Si la tige est abandonnée sans vitesse initiale d'un angle petit qm = 0,17 rad à l'instant t = 0 ; donner l'équation horaire de son
mouvement.

A.N. : m = 20 g ; g = 10 m.s–2 ; C = 2,4.10–1 Nm.rad–1

B. Une bobine longue de 50 cm, d'inductance L dont l'axe est perpendiculaire au plan du méridien magnétique du lieu donné est formée de 500 spires.

1.- La bobine est montée en série avec un générateur débitant en régime permanent un courant d'intensité constante I = 50 mA. (Figure 4)
Tracer les lignes de champ créé par le courant à l'intérieur de la bobine et calculer l'intensité du champ créé au centre de la bobine.

2.- Au centre de la bobine est placée une petite aiguille aimantée mobile autour d'un axe vertical. Quel est l'angle que fait la direction de cette aiguille avec l'axe de la bobine ?

3.- On désire que cet angle soit égal à 30°. Quelle valeur I1 faut-il alors donner à l'intensité du courant en régime permanent ?

4.- En ouvrant l'interrupteur K, quelle sera la nouvelle direction de l'aiguille aimantée ?
Etablir l'équation différentielle en i régissant le phénomène à cet instant si la résistance de la bobine est r, celle du rhéostat r ' ; le générateur étant de résistance interne négligeable.
Résoudre cette équation sachant que l'instant t = 0 est l'instant de fermeture du circuit ; la f.é.m. du générateur étant E. On se contentera de l'expression instantanée i = f(t) en fonction de E, r, r ' et L.

On donne la composante horizontale du champ magnétique terrestre $\vec{B}$ H telle que
$\left\|\vec{B}\right\| = 2.10^{-5}$ T

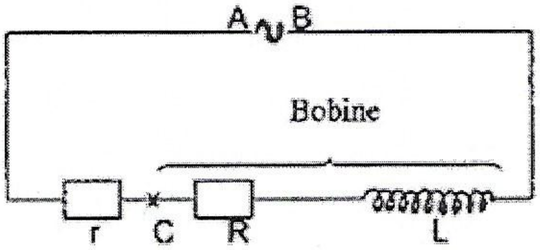
Exercice II

Soient deux lentilles minces L1 et L2 de vergences respectives $C_1 = \frac{10}{3}$ δ et C2 = - 2,5δ.
a) Définir la vergence d'une lentille mince.
b) Quelles sont les distances focales des deux lentilles L1 et L2 et du système accolé formé par les deux lentilles L1 et L2.
c) Construire l'image d'un objet lumineux AB = 20 cm, perpendiculaire à l'axe optique et situé à 60 cm du centre optique du système accolé. Echelle : 1cm ⟶ 20 cm.
d) Donner la nature (réelle ou virtuelle, droite ou inversée par rapport à AB) et la hauteur de l'image A'B' de AB.

Exercice III

Voici une expérience d'électricité : On place en série entre deux points A et B une bobine d'inductance L et de résistance R, une résistance r = 50Ω. Une source de tension sinusoïdale $u_{AB} = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t)$ est maintenue entre A et B (figure 1). On mesure à l'aide de 3 voltmètres les valeurs efficaces des tensions U_{AB} , U_{AC} , U_{CB} . Les voltmètres indiquent respectivement :
U_{AB} = 220 V ; U_{AC} = 90 V et U_{CB} = 160 V.

Figure 1



a) Calculer la fréquence et l'intensité efficace du courant débité par la source.

b) Construire le diagramme de Fresnel en tensions efficaces relatif à cette expérience.

c) Déterminer la phase de l'intensité instantanée i(t) par rapport à la tension. En déduire i(t).

d) Calculer R et L.
On rappelle que dans un triangle quelconque de côtés a, b, c : a2 = b2 + c2 – 2bc Cos Â.

SUJET 2

Exercice I :

Les parties A et B sont indépendantes.

Dans tout le problème, on négligera les forces de frottement et on prendra $g = 10\ ms^{-2}$.

On rappelle que dans le cas des petites oscillations : $\sin q \approx \tan q \approx q$ et $\cos q \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

A.- On considère le système S constitué par 3 tiges OA = OB = b = 20 cm et OC = 2b de masses négligeables (**figure n° 1, document 2**). Les trois tiges font entre elles un angle de 120°. On fixe en A , B et C, trois solides ponctuels de masses respectives m, m et 2m. Le système (S) est maintenant mobile autour d'un axe (D) horizontal, perpendiculaire à son plan et passant par le point O.

1. a.- Montrer que la position du centre d'inertie est définie par $OG = \frac{3}{4} b$.
   b.- Déterminer le moment d'inertie $J_{/D}$ du pendule pesant ainsi constitué par rapport à l'axe (D).
2. On écarte le système (S) d'un angle $q_m = 0{,}18$ rad petit à partir de sa position d'équilibre, puis on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant t = 0s.
   a.- A l'instant t, le système (S) est repéré par son abscisse angulaire q à partir de sa position d'équilibre, et par sa vitesse angulaire q '. Ecrire l'expression de l'énergie mécanique du système {S + Terre} à l'instant t en fonction de m, g, b, q et q '. (On prend l'énergie potentielle de pesanteur nulle à la position la plus basse de G).
   b.- Etablir l'équation différentielle régissant le mouvement du système (S).
   Calculer sa période. Ecrire l'équation horaire de son mouvement.
   c.- Retrouver l'équation différentielle en utilisant le théorème de l'accélération angulaire.
3. Une demi-sphère creuse, d'épaisseur négligeable, de centre O et de rayon c = 80 cm, repose par son sommet S sur un plan horizontal (**Figure n° 2, document 2**). Elle est maintenue fixe dans cette position. Le solide ponctuel A de masse m = 10 g peut glisser sans frottement sur la face interne de la demi-sphère. On désigne par M sa position et par a l'angle (OS, OM).
   Soit I la projection de M sur le plan horizontal. On communique au solide ponctuel A à partir d'une position initiale M, une vitesse V tangente horizontalement à la demi-sphère de module V tel qu'il décrive d'un mouvement uniforme, un cercle horizontal passant par ce point M sur la face interne de la demi-sphère.
   a.- Représenter sur la **figure n° 2, document 2**, les forces qui s'exercent sur le solide ponctuel A ainsi que l'accélération de la normale a_N.

b.- Etablir l'expression du module de la vitesse V en fonction de g et c pour la position M tel que $SI = \frac{c}{2}$.

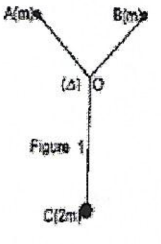
c.- Calculer V et le module de la réaction R exercée par la demi-sphère sur le solide ponctuel A.

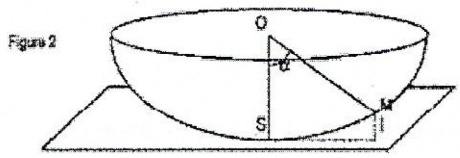
B.- On considère un circuit AOCD constitué par deux rails parallèles AO et DC reliés aux bornes d'un générateur de f.e.m E ' constante et la tige métallique OC de masse 2m et de longueur 2b (**figure n° 3, document 2**). La résistance de l'ensemble est R, supposée constante. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme d'induction, B, perpendiculaire au plan des rails. On déplace la tige OC vers la droite, avec une vitesse constante, V, parallèle à AO et CD.

1. a.- Expliquer pourquoi il apparaît un courant induit i dans le circuit ?
   Représenter sur la tige conductrice OC (**figure n° 3, Document 2**) les sens du courant induit i et du courant principal I.

   b.- Exprimer le courant induit i en fonction de B, b, V et R.

   c.- Exprimer le courant qui parcourt la tige conductrice OC en fonction de E ', B, b, V et R.
2. En utilisant le théorème du centre d'inertie, établir l'équation différentielle en V régissant le mouvement de la tige conductrice OC.
3. Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'expression de la vitesse limite V_l .





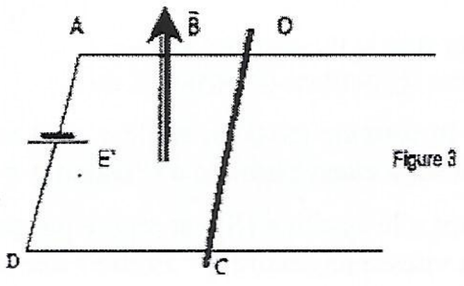


Figure 1

Exercice II :

Un circuit électrique comprend en série :

- un conducteur ohmique de résistance R = 36 W
- une bobine d'inductance L = 0,10 H et de résistance négligeable
- un condensateur de capacité C = 6,0 µF.

On applique aux bornes du circuit électrique, une tension alternative sinusoïdale u (t) = U $\sqrt{2}$ coswt de valeur efficace U = 1 V et de fréquence N variable. Il est parcouru par un courant d'intensité i (t) = I. $\sqrt{2}$ cos(wt + j).

1. Faire le schéma du circuit électrique en bien précisant les sens de u(t) et i(t).
2. On fixe la fréquence N à 100 Hz.
   a.- Calculer l'impédance Z du circuit .
   b.- Construire le diagramme de Fresnel relatif aux tensions (Echelle : 1 cm pour 0,1 V).
   c.- Déterminer la phase i(t) sur u(t) et en déduire l'expression de l'intensité instantanée i (t).
3. a.- On définit la puissance instantanée par : p (t) = U.I [cos(2wt + j)+cosj].
   Que représente le produit U.I et cos j ?
   b.- En déduire l'expression de la puissance moyenne consommée P et calculer sa valeur.)
   c.- Pour quelles fréquences, la puissance moyenne consommée est-elle la moitié de celle absorbée à la résonance ?

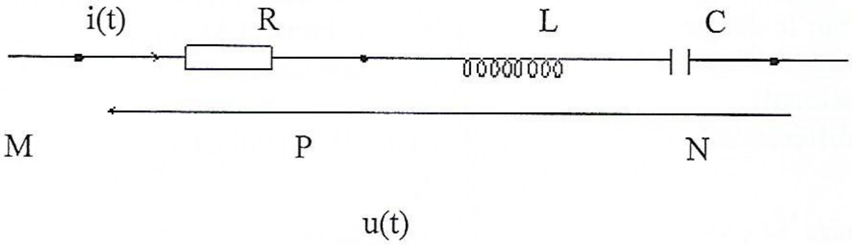
4. A la résonance, $LC\,\omega_0^2 = 1$ et la somme W des énergies emmagasinées par le condensateur et par la bobine est égale à LI^2.
   a.- Faire le rapport entre W et W_J l'énergie dissipée par effet Joule pendant chaque période et exprimer ce rapport en fonction du facteur de qualité Q du circuit.
   b.- Calculer Q.

Exercice III :

Un dipôle MN est constitué par l'association en série :
- d'un conducteur ohmique de résistance R,
- d'une bobine de résistance négligeable et d'inductance L,
- d'un condensateur de capacité C.

On applique aux bornes de ce dipôle une tension sinusoïdale u(t), de pulsation w réglable.

L'intensité instantanée du courant traversant le dipôle est alors : $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t)$ (A), I étant l'intensité du courant. On donne une valeur fixe à la tension efficace U appliquée aux bornes du dipôle.



1. Pour une valeur w_2 de la pulsation w, la tension appliquée aux bornes du dipôle est :
$$u(t) = U\sqrt{2}\cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ (V).}$$
   a- Quel est le déphasage j entre la tension u(t) et l'intensité du courant i(t) ?
   b- En déduire l'impédance Z du dipôle MN. On donne : R = 20 W.
   c- Calculer l'intensité efficace I et la tension efficace U, si la valeur efficace de la tension appliquée entre les points P et N est égale à $U_{PN} = 6\sqrt{2}$ V =.
   d- Montrer que : $\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + 4\omega_0^2}\right)$ w_0 étant la pulsation à la résonance d'intensité du circuit.
2. Soit w_1 la pulsation telle que : $\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$
   a- Montrer que $\sqrt{\omega_1 . \omega_2} = \omega_0$.
   b- Calculer w_1 et w_2 si $w_0 = 10^4$ rad.s^{-1} et $w_2 - w_1 = 2.10^3$ rad.s^{-1}.
   c- En déduire les valeurs de L et C.
3. On donne à la pulsation w la valeur w_1.
   Construire le diagramme de Fresnel relatif à ce circuit RLC série.

Exercice IV :

I. On néglige les frottements et la résistance de l'air. Un point matériel (S), de masse m, est en mouvement sur une piste ABO, contenue dans un plan vertical, et dont les caractéristiques sont les suivantes :
- la partie AB est la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle Δ avec le plan horizontal,
- la partie BO est une portion de cercle de centre C et de rayon R.

Les points B', C et O appartiennent à un même axe vertical (figure 1, document B).

Le corps (S) est abandonné, sans vitesse initiale, au point A du plan incliné, situé à une hauteur h du sol horizontal passant par le point B'.

1. a- Exprimer, en fonction de g, h et R, la vitesse v_0 de (S) au point O.

   b- Exprimer, en fonction de g, h, m et R l'intensité de la réaction $\vec{N}$ qu'exerce la piste sur (S) au point O.

   c- Quelle valeur minimale doit avoir le rapport $\frac{h}{R}$ pour que (S) puisse atteindre le point O sans se décoller de la piste ?

2. On donne : h = 1 m, R = 27,5 cm et g = 10 m.s^{-2}.

   a- Calculer la vitesse v_0 du point matériel (S) en O.

   b- Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, écrire l'équation cartésienne de la trajectoire du mouvement ultérieur de (S), à partir du point O.

II. Un disque plein, homogène, de masse M = 2 kg et de rayon R = 20 cm, est fixé à son axe de révolution (Δ). On fait tourner l'axe (Δ) à l'aide d'un moteur. Lorsque la vitesse de rotation du disque est égale à W_0(rad.s^{-1}), on arrête le moteur. A cet instant, pris comme origine des temps (t = 0s), on applique sur le disque un couple de freinage de moment M_f proportionnel à la vitesse angulaire W du disque à l'instant t ($|M_f| = kW$ où k est une constante positive exprimée en unité du Système International).

1. Ecrire l'équation différentielle liant la vitesse angulaire W du volant à l'instant t, à son accélération angulaire $\dot{\Omega}$ ($\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt}$).

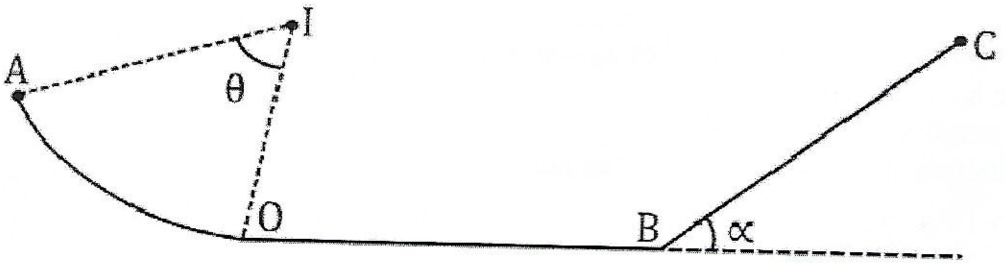
2. Vérifier que la solution générale de cette équation est de la forme : $W(t) = W_0\, e^{-\frac{k}{J_\Delta}t}$ (rad.s^{-1}).
   W_0 = vitesse angulaire du disque à t = 0s.
   J_Δ = moment d'inertie du disque par rapport à (Δ).

3. A l'instant t_1 = 40 s, la vitesse angulaire du disque a diminué de moitié.
   Calculer le coefficient de proportionnalité k.
   On donne : ln 2 ≈ 0,7.

SUJET 3

Exercice I

Un solide de masse m = 500 g assimilable à un point matériel est mis en mouvement sur une piste formée de trois (3) parties OA, OB et BC, toutes situées dans le même plan vertical.



Partie I

Lancé à partir du point A avec une vitesse V_A = 4 m/s, le solide glisse sans frottement sur la portion circulaire AO de rayon r. *On donne* : θ = 60° ; r = 5 cm ; g = 10 N.kg^{-1}.

Vérifier que la vitesse V_o du solide au point O est donnée par la relation $V_o^2 = V_A^2 + 2gr(1 - \cos\theta)$ et calculer sa valeur.

Partie II

Avec la vitesse V_o, le solide aborde le tronçon OB de longueur $\ell = 2$ m, sur lequel les frottements sont représentés par $\vec{f}$ colinéaire et de sens opposé au déplacement.
Le solide arrive en B avec la vitesse $V_B = 2ms^{-1}$.

1. Calculer l'accélération a du solide et en déduire la nature du mouvement sur OB.
2. Calculer l'intensité f de la force $\vec{f}$.
3. Calculer la durée du parcours OB.

Partie III

Le solide gravit enfin la côte BC. La montée s'effectue durant $\Delta t' = 2s$ jusqu'au point C où le solide s'arrête.

1. Donner l'expression de l'accélération a' du solide en fonction de V_B et $\Delta t'$.
2. Exprimer la distance d parcourue en fonction de V_B et $\Delta t'$.
3. Exprimer l'intensité de la force $\vec{f'}$ représentant les frottements sur BC en fonction de V_B, $\Delta t'$, m, g et $\propto$.
4. Sachant que la pente de la côte BC est 8%, calculer a', d et f'. $\propto$

Exercice II

Un solide S ponctuel de masse m peut se déplacer suivant la piste ABCD (voir figure 1):

- AB: un quart de cercle de centre O et de rayon R
  BC: un segment de droite
- CD: un quart de cercle de centre O' et de rayon R

On néglige les frottements sur les parties AB et CD. Le solide quitte A sans vitesse initiale.

- 1 Donner l'expression de la vitesse du solide S en fonction de g, R et θ au point M et calculer sa valeur au point B.
- 2 Le solide arrive au point C avec une vitesse nulle et continue son mouvement sur CD
- 2.1 Donner l'expression de la réaction de la piste au point N en fonction de m,g et α.
- Si on considère que les frottements sur la partie BC sont assimilables à une force unique, constante $\vec{f}$. Calculer son intensité,
- 3 Le solide quitte la piste pour une certaine valeur de α.

3.1 Calculer cette valeur.

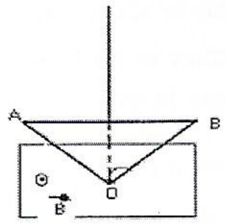
3.2 Donner les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{V_0}$ au point où le solide quitte la piste.

4.1 Donner les équations paramétriques du mouvement de S dans le repère CXY. Trouver les cordonnées du point de contact du solide S avec le sol et la durée de la chute (1,5pt)

4.2 En utilisant la conservation de l'énergie mécanique. Calculer la vitesse du solide à son arrivée au sol. On donne m=100g ; R=1,5m BC=2m ; g=10m/s^{-2}

Exercice III

On considère une spire de cuivre ayant la forme d'un triangle ABO équilatéral de côté a =10 cm. On fait suspendre ce triangle par un fil qui permet de le faire déplacer verticalement vers le bas avec une vitesse constante $\vec{V}$.



(fig4)

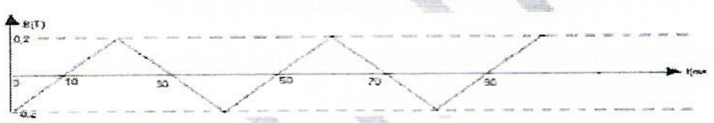
A l'instant t = 0, le triangle pénètre par le point O dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ horizontal et perpendiculaire au plan de la figure (voir fig4).

1 Donner l'expression de la surface S de la partie immergée dans le champ magnétique $\vec{B}$ en fonction du temps t de la vitesse V et de l'angle α. (0,75pt)

2 Ecrire l'expression du flux magnétique en fonction de V, t, B et α.

3 Trouver l'expression de la f.e.m induite en fonction de V, t, B et α. En déduire l'expression de l'intensité i du courant induit si la résistance du circuit est r.

4 Lorsque la spire pénètre complètement dans le champ magnétique, on l'immobilise et on fait varier la valeur B du champ magnétique en fonction du temps comme l'indique la courbe suivante:



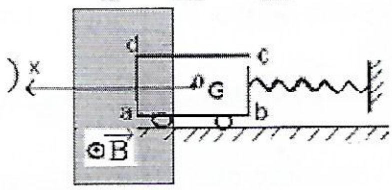
4.1 Donner l'expression de la f. e. m en fonction de α et de dB/dt. (0,75pt)

4.2 En déduire l'expression de l'intensité i du courant induit en fonction du temps. Représenter i en fonction du temps. On donne r =2Ω.(1pt)

SUJET 4 (avec corrigé)

Exercice I

On considère un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de constante de raideur K = 12,5 N/m. l'une des extrémités est reliée à un cadre rectangulaire abcd formé de N spires en cuivre de masse m = 320g. Le cadre peut se déplacer sans frottement sur deux roues de masses négligeables (voir fig)

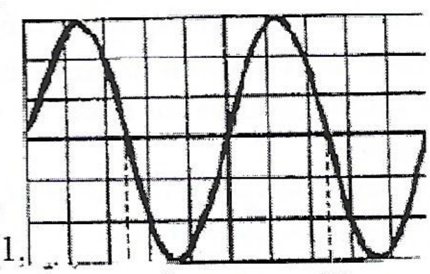


1 Préciser l'état d'équilibre du ressort.

2 A partir de la position d'équilibre, on communique au cadre une vitesse initiale V_o de valeur algébrique V_o = -3,15 cm/s à l'instant t = 0. Donner l'équation différentielle du mouvement et en déduire son équation horaire.(0,5pt)

3- Le côté ad restera toujours plongé dans une région ou règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire au plan du cadre tandis que le côté bc restera toujours en dehors de cette région (voir figure-1). On donne B = 0,T l = ad = bc = 5 cm N = 50 spires

On fait une ouverture au niveau de l'un des côtés du cadre.



3-1 Exprimer la force électromotrice induite dans le cadre en fonction de la vitesse V puis en fonction du temps. (1.

3-2 On relie les extrémités du cadre aux bornes d'un oscillographe. On observe sur l'écran l'oscillogramme de la figure ci contre. En déduire la période et l'amplitude des oscillations ;on donne :balayage horizontal 0,2s/Cm,balayage vertical 21mV/Cm. Les comparer avec les valeurs calculées.

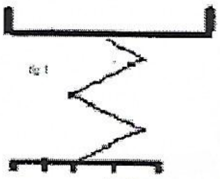
3-3 On relie les extrémités du cadre entre elles, on constate des amortissements. Quelle est la cause de ces amortissements.

Exercice II

On considère un plateau P de masse m = 500g fixée à l'extrémité supérieure d'un ressort constamment vertical de raideur K=50N/m et dont l'autre extrémité est fixée au sol(voir fig1).

1 Préciser l'état du ressort quand le système est à l'équilibre.

2 On tire le plateau vers le bas de 2 cm et on l'abandonne avec vitesse initiale v_0 = 0,2m/s. Déterminer l'équation différentielle du mouvement du plateau et en déduire l'équation horaire de son mouvement.



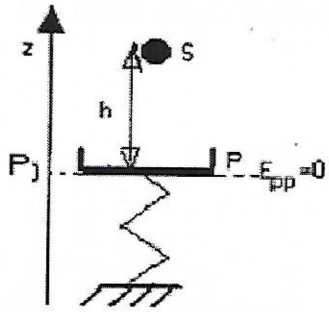


Fig.2

3 On immobilise le plateau à nouveau. A partir d'une hauteur h au-dessus du plateau on laisse tomber un solide S de masse M = 1kg sans vitesse initiale. Le solide arrive sur le plateau et s'y encastre (voir fig 2)

3.1 Déterminer la vitesse du solide S juste avant le choc si h=10cm.

3.2 Donner l'expression de l'énergie mécanique du système (plateau, solide S, ressort, terre) quand le solide est à une position z quelconque.

3.3 Ce système étant conservatif ; calculer alors la valeur de son énergie mécanique totale si la vitesse juste après le choc est v = 0,94 m/s.

3.4 Déduire de ce qui précède les positions limites atteintes par le plateau.

3.5 Déterminer pour une position quelconque z l'accélération de ce système.

Exercice III

Une corde sans raideur parfaitement élastique est attachée par son extrémité A à un diapason D animé d'un mouvement sinusoïdal transversal de fréquence N=100Hz et d'amplitude a = 1mm. La corde est tendue à l'aide d'un poids immergé dans l'eau pour éviter tout phénomène de réflexion. La célérité des ondes est V = 20m/s.

1. L'origine des abscisses étant l'extrémité A de la corde, l'origine des temps étant prise quand A passe par sa position d'équilibre avec une vitesse positive. Donner l'expression de l'élongation y d'un point M de la corde d'abscisse x à l'instant t en fonction de a, N, t, x et de la longueur d'onde λ.

Calculer les élongations y1 et y2 du point M d'abscisse x = 15cm respectivement aux instants : t_1 = 0,01s et t_2 = 0,015s. (1pt)

2 On éclaire la corde en lumière stroboscopique :

2.1 Quelles sont les valeurs de la fréquence Ne des éclairs si l'on veut observer une corde apparemment immobile ? On précise que Ne > 20Hz. (1pt)

2.2 Décrire ce que l'on observe lorsque Ne = 99hz. On donnera le sens du mouvement apparent ainsi que la valeur de sa vitesse va. (1pt)

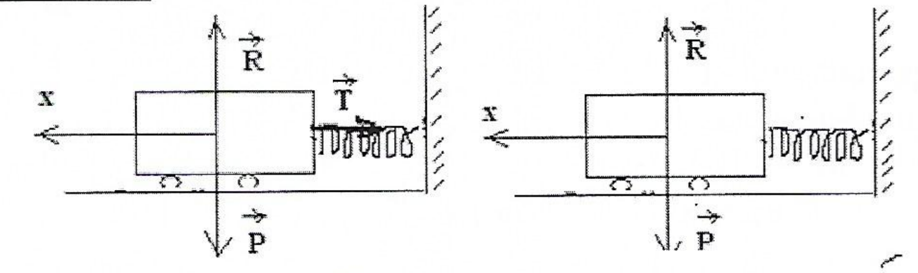
3 On remplace la corde précédente par une fourche. Les deux points O_1 et O_2 de la fourche distantes de d = 12cm trempent légèrement à la surface de l'eau.

Etablir l'équation du mouvement d'un point M situé à d_1 de O_1 et de d_2 de O_2 si on considère que: $y_{O_1} = y_{O_2} = a\cos\omega t$.

Déterminer le nombre de points immobiles sachant que la célérité de propagation des ondes dans l'eau est V = 10m/s. (1pt)

Corrigés

Exercice I



1.La condition d'équilibre :

$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = \vec{0}$

En projetant sur l'axe ox on trouve : $0 + 0 + T = 0 \Rightarrow K\Delta l = 0 \therefore \Delta l = 0$

Le ressort est ni comprimé ni tendu.

2.L'equation différentielle du mouvement : $\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$

En projetant sur l'axe ox on trouve : $0 + 0 - T = ma \Rightarrow Kx + ma = 0$ d'où $a + \dfrac{K}{m}x = 0$

Cette equation à pour solution : $x = Xm\cos(\omega t + \varphi)$ ou $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$, $V_0 = -Xm\omega$

A t= 0

$$\begin{cases} x = Xm\cos\varphi \\ V_0 = -Xm\omega\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = X_m\cos\varphi \\ -0{,}0315 = -X_m\omega\sin\varphi \end{cases}$$

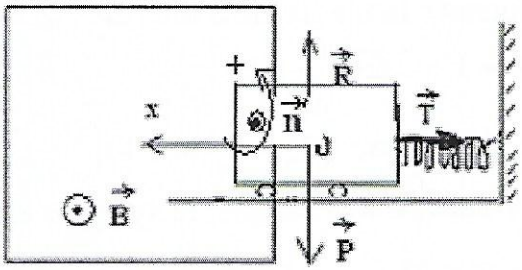
$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{2} rd \\ Xm = 5.10^{-3} m \end{cases}$$

D'où l'équation devient :

$$x = 5.10^{-3}\cos(6{,}25t + \frac{\pi}{2})$$

3.1 L'expression de la force électromotrice induite :Soit S0 la surface du cadre imprégné dans le champs magnétique $\vec{B}$ à t = 0 et soit S =S0+ l.x la surface du cadre imprégné dans le champs magnétique à l'instant t,le flux magnétique a travers le cadre est

$\varphi = N\vec{B}.\vec{S} = NB(S_0 + lx)$



D'où $e = -\frac{d\varphi}{dt} = -NBl\frac{dx}{dt} = -NBlV$

$V = x_m\omega Sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ soit

$\Rightarrow e = NBlX_m\omega Sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

3.2

$e = e_m Sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ et graphiquement $e_m = 63mV$

$e_m = NBlX_m\omega = 62,5mV$

La période $T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 1S$ et graphiquement $T = 1S$

3.3 Si on relie les extrémités du cadre, un courant induit circule dans le circuit

D'intensité : $i = \frac{e}{R} = \frac{-NBlV}{R}$,le coté ad du cadre est soumis à une force de la place

$\vec{F}$ ou $F = \frac{-N^2B^2l^2V}{R} = -hV$, $\vec{F}$ a toujours un sens opposé au sens du déplacement ce qui provoque l'amortissement du mouvement.

Exercice II

1.Les forces appliquées à l'équilibre sont : $\vec{P}, \vec{T_0}$

La condition d'équilibre : $\vec{P} + \vec{T_o} = \vec{0} \Rightarrow T_0 = K\Delta l_o = mg$

$mg - K\Delta l_o = 0$

$\Delta l_o = \frac{mg}{K} = 0,1m$

2/étude du mvt : les forces appliquées sont : $\vec{P}, \quad \vec{T}$

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ (1)

La projection de (1) suivant la verticale orientée vers le bas on trouve :

$P - T = ma$ ou $T = K(\Delta l_0 + Z)$ en prenant la position d'équilibre en considération on trouve

$\ddot{Z} + \frac{K}{m}Z = 0$; le mvt est r.S de pulsation $w = \sqrt{\frac{K}{m}} = 10rd/s$ et d'équation

$Z = Z_m Cos(wt + \varphi)$

A t= 0

$$\begin{cases} Z_0 = 2.10^{-2} m \\ V_0 < 0 = -0,2m/s \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_0 = Z_m Cos\varphi \\ V_0 = -wZ_m Sin\varphi \end{cases} \Rightarrow tag\varphi = \frac{-V_0}{Z_0 w}$$

$$A.N : \begin{cases} tag\varphi = 1 \\ \varphi = \frac{\Pi}{4}rd \end{cases} \qquad Z_m - \frac{Z_0}{Cos\varphi}, Z_m - 2\sqrt{2}.10^{-2}m$$

D'ou l'équation $Z = 2\sqrt{2}.10^{-2}Cos(10t + \frac{\pi}{4})$

3.1 en appliquant la théorème d'énergie cinétique on trouve

$$\frac{1}{2}mV^2 = mgh \Rightarrow V = \sqrt{2gh} = 1,4m/s$$

3.2L'énergie mécanique : $E_m = \frac{1}{2}(m+M)\dot{Z}^2 + \frac{1}{2}K(\Delta l_\circ + Z)^2 - (m+M)gZ$

3.3Calcul de l'énergie mécanique :le système est conservatif donc :

$$E_m = E_{mo} = \frac{1}{2}(m+M)v^2 + \frac{1}{2}K\Delta l_\circ^2$$

$$E_m = 0,9J$$

3.4

$$Z = Z_m \Rightarrow \dot{Z} = 0 : \frac{1}{2}(\Delta\ell_o + Z_m)^2 - (m+M)gZ_m = E_{m0}$$

$$AN : 25Z_m^2 - 14,5Z_m - 0,65 = 0$$

$$Z_m = 0,62m$$

$$-Z_m = -0,042m$$

3.5 $a = -\dfrac{K}{m+M}Z$

Exercice III

1. $Y_A = aCos(2\pi Nt + \varphi)$

$$\grave{a}\ t = 0\begin{cases}Y_A=0\\V_0\succ 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}Cos\varphi=0\\Sin\varphi\prec 0\end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}rd$$

$$Y_A = aCos(2\pi Nt - \frac{\pi}{2}); y_M = y_A(t-\theta)$$

$$\Rightarrow y_M = aCos(2\pi Nt - \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{\pi}{2})$$

$$\lambda = \frac{V}{N} = 0,2m$$

t_1=0,01s :$Y_1 = 10^{-3}$m

t_2=0,015s :$Y_2 = -10^{-3}$m

2-1 pour avoir une corde apparemment immobile

$$N_e = \frac{N}{K} \Rightarrow \frac{N}{K} \succ 20 \ ,K \prec \frac{N}{20} \therefore K \prec 5$$

$$K \in \{1,2,3,4\}$$

Les valeurs de N_e tnos $100Hz, 50Hz, 33,3Hz, 25Hz$

2.2 Ne = 99Hz :mouvement apparent ralenti dircet

La vitesse apparente : $V_a = \lambda\gamma = 0,2m/s$

3.

$$\begin{cases} Y_1 = a\ Cos(wt - \frac{2\pi d_1}{\lambda}) \\ Y_2 = aCos(wt - \frac{2\pi d_2}{\lambda}) \end{cases} \quad Y_M = Y_1 + Y_2$$

$$Y_M = aCos(wt - \frac{2\pi d_1}{\lambda}) + aCos(wt - \frac{2\pi d_2}{\lambda})$$

$$Y_M = 2aCos(\frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda})Cos(2\pi Nt - \frac{\pi(d_2 + d_1)}{\lambda})$$

Aux points d'amplitudes maximales

$$A = 0 \Rightarrow 2aCos(\frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda}) = 0$$

$$d_2 - d_1 = (2K+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$-d \leq d_2 - d_1 \leq d$$

$$-d \leq (2K+1)\frac{\lambda}{2} \leq d$$

$$-\frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2} \leq K \leq \frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

Calcul de λ :

$\lambda = \frac{V}{N} = 0,1m \therefore -1,7 \leq K \leq 0,7 \quad \therefore K = -1;0$ il y a deux points au repos

SUJET 5

Exercice I

Dans ce problème, on prendra $\pi^2 \approx 10$

Un dipôle (A,B) est constitué par l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance R, d'une bobine de résistance négligeable et d'inductance L, et d'un condensateur de capacité C. On applique aux bornes de ce dipôle une tension : $u_{AB}(t) = 10\cos(2\pi N t)$ V, fournie par un générateur de tension sinusoïdale, de fréquence N réglable.

On fait varier la fréquence N de 100 à 1000 Hz et on mesure l'intensité maximale I_m du courant traversant le dipôle à chaque valeur de N. On obtient le tableau suivant :

N (Hz)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
I_m(mA)	5	12	23	45	63,5	45	32	24	19	16

1. a)Tracer sur le document 1b la courbe donnant la variation de l'intensité maximale I_m en fonction de la fréquence N.

   b) En déduire la fréquence de résonance N_0 et l'intensité maximale I_0 correspondante.

2. a)Calculer la résistance R du conducteur ohmique.

   b) La bande passante est définie par les fréquences N_1 et N_2 ($N_1 < N_2$) pour lesquelles $I_m(N_2) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$
   - Déterminer graphiquement les valeurs de N_1 et N_2.
   - En déduire la largeur en fréquence $\Delta N = N_2 - N_1$ de la bande passante, ainsi que la valeur du facteur de

qualité $Q = \frac{N_0}{\Delta N}$ du circuit.

c) Calculer alors les valeurs de C et L.

N.B. : Pour simplifier le calcul de C et L, on prendra R ≈ 157 W et on remarquera

$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$.

Exercice II

Dans ce problème on prendra $\|\vec{g}\| = 10\ ms^{-2}$. Tous les calculs seront effectués à 10^{-2} près.

Un solide (S) de masse m = 50 g, de dimension négligeable, peut glisser sur une piste ABCD située dans un plan vertical :

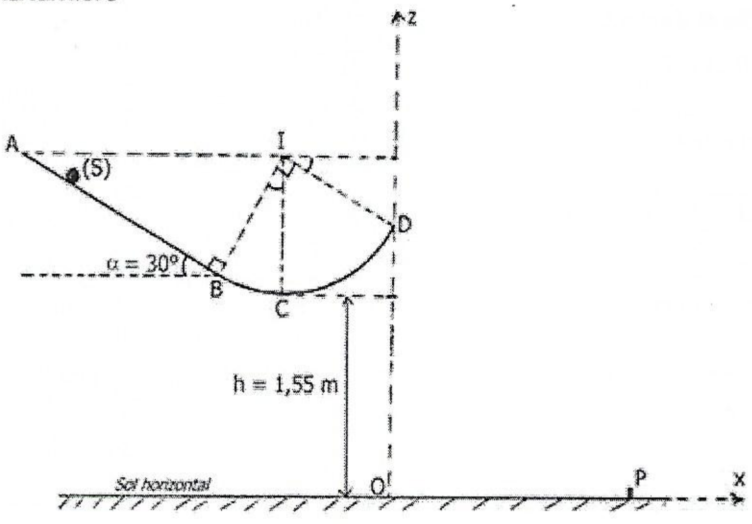
- AB est la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale ; AB = 1,6 m.
- BCD est le quart d'un cercle de centre I et de rayon R ≈ 0,9 m ; C est situé sur la verticale passant par I.

1. On néglige les frottements. (S) part du point A sans vitesse.
   a) Calculer sa vitesse en B, en C et en D.
   b) Calculer l'intensité de la force $\vec{N}$ exercée par la piste sur (S) en C et en D.
   c) Donner les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{V_D}$ de (S) au point D.
2. On néglige la résistance de l'air. A partir du point D, (S) tombe dans le vide avec la vitesse $\vec{V_D}$ précédente. Le point C est situé à la hauteur h = 1,55 m du sol horizontal.
   a) Donner l'équation cartésienne de la trajectoire du mouvement de (S) à partir du point D, dans le repère (O ; x, z).
   b) Jusqu'à quelle hauteur H au-dessus du sol horizontal monte le solide (S) ?
   c) Calculer la distance OP où P est le point d'impact de (S) sur le sol horizontal.
3. Dans cette question, la piste exerce au mouvement de (S) une force de frottements $\vec{f}$, parallèle et de sens contraire à sa vitesse à chaque instant, et d'intensité constante le long de ABCD. Partant de A sans vitesse, (S) s'arrête au point D.
   a) Etablir en fonction de m, g, R et α, l'expression algébrique du travail $W_{\vec{f}}$ de la force de frottements entre les points A et D. Calculer $W_{\vec{f}}$.
   b) En déduire l'intensité de la force $\vec{f}$.

On donne : cos 30° ≈ 0,86.

Echelles :

Sens positif de la propagation de la lumière

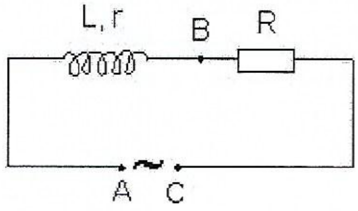


Exercice III

Entre deux points A et C d'un circuit, on place en série :

- entre A et B une bobine d'inductance L et de résistance r,
- entre B et C un conducteur ohmique de résistance R.

Un générateur de tension sinusoïdale délivre un courant i(t) = Im sin wt entre A et C.



On désigne par : j la phase de la tension u_{AC} (t) par rapport à i(t) ;

Z_1 l'impédance de la portion (A,B) ;

φ_1 la phase de u_{AB} (t) par rapport à i(t).

Les mesures des tensions efficaces entre les différents points ont donné :

$U_{AB} = U_{BC} = 70$ V et $U_{AC} = 70\sqrt{3}$ V

1.-Exprimer :

a) u_{AB} (t) en fonction de Z_1, I_m, w et φ_1.

b) u_{BC} (t) en fonction de R, I_m, w .

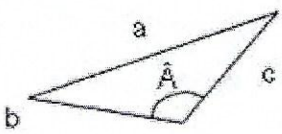
2.- Construire le diagramme de Fresnel en tensions efficaces relatif à cette expérience.

3.- Calculer φ et φ_1.

4.- On donne R = 100 W.

a) Calculer Z_1, r, L si w = 100 p rad s^{-1}.

b) Donner l'expression de u_{AC} (t).



$a^2 = b^2 + c^2$,2bc cos Â

N.B. : Dans un triangle quelconque de côtes a, b, c :

Exercice IV

µ1.- La convergence C d'une lentille mince est donnée par la formule : $C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ où :

- R_1 et R_2 sont les rayons de courbure des faces de la lentille. R_1 et R_2 sont comptés positivement pour les faces convexes et négativement pour les faces concaves.
- n est l'indice de réfraction de la lentille.

Calculer en cm le rayon de courbure R_1 d'une lentille plan convexe L_1 de convergence C = 5δ (δ : dioptrie) et d'indice de réfraction n = 1,5.

(N.B. : pour une face plane R_2 = + ¥).

2.- On accole à la lentille L_1, une deuxième lentille L_2. L'ensemble donne d'un objet réel AB placé à 1 m de leur centre optique O, une image réelle A'B' deux fois plus petite et renversée. Les points A et A' sont situés sur l'axe optique.

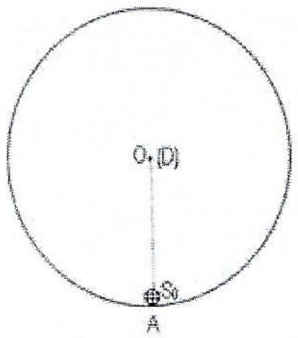
a) Calculer la convergence C_0 du système accolé.

b) En déduire la distance focale $\overline{OF_2}$ et la nature de la deuxième lentille L_2.

Exercice V

I) Un disque plein, homogène, de masse $M = 0{,}2$ kg et de rayon $R = 20$ cm, peut tourner sans frottement autour d'un ax (Δ) passant par son centre O. Cet axe de rotation (Δ) est perpendiculaire en O au plan du disque et horizonta

En un point A situé à la périphérie du disque, on fixe un corps ponctuel S0 de masse $m_0 = \frac{M}{10}$ (voir figure). L système est au repos dans sa position d'équilibre stable. On écarte le système de cette position en le faisa tourner d'un angle θ de faible amplitude et on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale à la date $t = 0$.



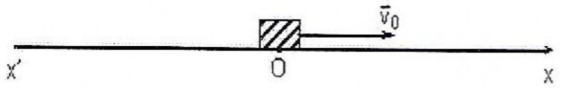
1.- a) Montrer que $OG = \frac{R}{11}$, où G est le centre d'inertie du système.

b) En appliquant le théorème de l'accélération angulaire, déterminer l'équation différentielle du mouvement et calculer la période T des petites oscillations.

2.- a) Retrouver l'équation différentielle du mouvement ci-dessus ; en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.

b) Exprimer en fonction de R, puis calculer la longueur l du pendule simple synchrone de ce pendule pesant composé.

II) Le corps ponctuel (S_0) est maintenant posé sur un plan horizontal peu rugueux. A la date $t = 0$, on lance le solide (S_0) avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ de module $v_0 = 2\ m.s^{-1}$, à partir d'un point O (voir figure), suivant un axe x'Ox. O étant l'origine de l'axe. Pendant son mouvement le solide (S_0) est soumis à une force de frottement $\vec{f} = -k\vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse instantané de (S_0) et k une constante.



1.- a) En posant $\lambda = \frac{k}{m}$ et en utilisant le théorème du centre d'inertie, établir l'équation différentielle à laquelle doit obéir la vitesse v de (S_0)

b) En déduire l'expression de cette vitesse v en fonction de v_0, λ et t.

c) Montrer alors que le solide (S_0) ne s'arrête qu'au bout d'un temps infiniment long.

2.- a) Etablir en fonction de v_0, λ et t l'expression de l'équation horaire du mouvement $x = x(t)$ du solide (S_0).

b) Calculer la distance parcourue par (S_0), lorsqu'il parcourt l'axe x'Ox pendant un temps infiniment long.

On donne : $k = 4\ 10^{-3}$ u S.I $\qquad g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$

SUJET 6

Les parties A et B sont indépendantes.

A – Un disque plein homogène de rayon $R = 20$ cm et de masse $M = 2$ kg tourne autour d'un axe vertical (D) passant par son centre d'inertie G. On fixe sur le disque deux sphères pleines homogènes identiques, de masse $m = 200$ g et de rayon $r = 5$ cm. Elles sont disposées symétriquement par rapport à l'axe (D) telle que la distance de leur centre à l'axe soit $d = 15$ cm (Figure 3, ci-dessous).

1 – Etablir l'expression du moment d'inertie J_D par rapport à l'axe (D) de l'ensemble {disque + 2 sphères} en fonction de M, m, R, r et d.
On rappelle que le moment d'inertie d'une sphère pleine homogène de masse m et de rayon r par rapport à l'un de ses diamètres est $J_S = \frac{2}{5} mr^2$; et le moment d'inertie d'un disque homogène de masse M et de rayon R par rapport à un axe passant par son centre d'inertie et qui lui est perpendiculaire est $J_G = \frac{1}{2} MR^2$. (0,50 pt)

2 – Ce système partant du repos est soumis à un couple moteur constant dont le moment par rapport à l'axe (D) est Γ_m. Le système atteint la vitesse angulaire $w = 9$ rad.s^{-1} au bout de 4,5 s. On néglige les forces de frottement.

Déterminer le moment du couple moteur Γ_m. (1,00 pt)

3 – On considère maintenant deux ressorts identiques, fixés en O et dont les autres extrémités sont fixées à la périphérie des sphères. Ces dernières peuvent glisser sans frottement suivant un diamètre du disque (Figure 4, ci-dessous).

Initialement, la longueur du ressort est $l_0 = 8$ cm. Lorsqu'on fait tourner le système autour de l'axe fixe (D) avec une vitesse angulaire constante $w = 5$ rad.s^{-1}, chaque ressort s'allonge de 2 cm.
Déterminer la constante de raideur K du ressort. (1,00 pt)

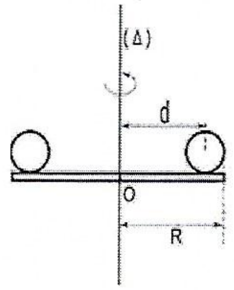


Figure 3

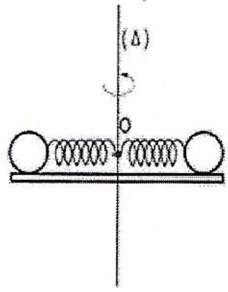


Figure 4

B – Une sphère (S) de masse $m = 200$ g est fixé aux extrémités de deux ressorts identiques de même longueur à vide l_0 et de constante de raideur $K = 25$ N.m^{-1}. Elle repose sur une table horizontale et les deux ressorts sont fixés en A et B.

A l'équilibre, chaque ressort possède la même longueur l. On étudie le mouvement de (S) suivant l'axe x'Ox parallèle à (AB), orienté de A vers B et dont l'origine O coïncide avec la position d'équilibre du centre d'inertie G de la sphère (S) (Figure 5, ci-dessous).

1 – On écarte (S) de sa position d'équilibre de telle sorte que son centre d'inertie G se déplace parallèlement à (AB) de OC = 2 cm, puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

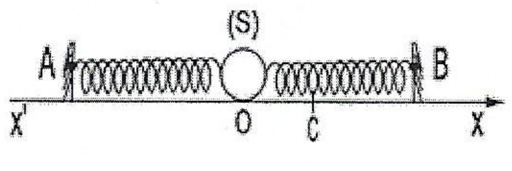
a – En utilisant la conservation de l'énergie mécanique totale du système, établir l'équation différentielle du mouvement de (S). (1,00 pt)

b – En déduire son équation horaire. (1,00 pt)

2 – En réalité, la sphère (S) subit une force de frottement proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = -a\vec{v}$; a étant une constante positive.

a – Etablir l'équation différentielle du mouvement de (S). (1,00 pt)

b – Donner, en conservant les mêmes conditions initiales, l'allure de la courbe représentant l'abscisse x de G en fonction du temps t si les frottements sont faibles. (0,50 pt)



SUJETS ENI – POLYTECHNIQUE

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE

ANNEE 2016-2017

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE FORMATION EN LICENCE PROFESSIONNELLE

EPREUVE DE PHYSIQUE

Exercice 1 (10 pts)

Un volant dont la masse est de 1500 kilogrammes et qui peut être considérée comme entièrement répartie sur une circonférence de 1m de diamètre, tourne à la vitesse angulaire constante de 50 tours par seconde.

1) Quelle est son énergie cinétique ?

2) Ce volant est placé à bord d'un véhicule, pour lequel il constitue une réserve d'énergie que l'on peut utiliser pour mettre le véhicule en mouvement.

La masse totale du véhicule (y compris le volant) est de 25 tonnes.

Lorsque le véhicule est en mouvement, on admet que les divers frottements sont équivalents à une force de résistance à l'avancement de grandeur constante égale à 800 newtons.

a) Quelle est la distance parcourue par le véhicule sur voie horizontale lorsque la vitesse de rotation du volant passe de 50 tours par seconde à 30 tours par seconde ?

b) Même question lorsque le véhicule monte une rampe de pente 1/100.

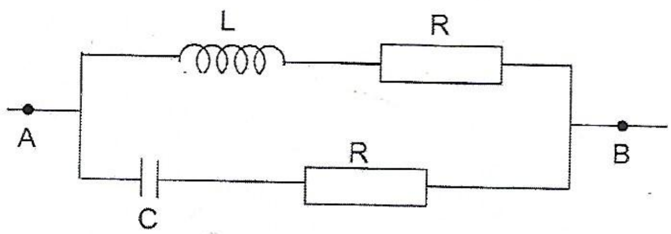
On donne $g=9,8\ m.s^{-2}$, $\pi^2=9,87$

Exercice 2 (10 pts)

On considère la portion de cicrcuit électrique représentée sur la figure. Entre les points A et B, on applique une différence de potentiel sinusoidale $u = U_m \cos \omega t$ de pulsation telle que $LC\omega^2 = 1$.

a) Déterminer l'intensité totale du courant.

b) Quelle est la valeur de la résistance R rendant maximale l'intensité efficace ?



UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE

ANNEE UNIVERSITAIRE 2009-2010

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE FORMATION EN « LICENCE PROFESSIONNELLE »

EPREUVE DE PHYSIQUE

A

1) Un courant alternatif, de fréquence N= 50 Hz, produit entre deux bornes A et B une différence de potentiel U=110 volts. Quelle est la différence de potentiel instantanée entre A et B ?
2) Entre les deux bornes A et B, on intercale une bobine de résistance R=100 ohms et d'inductance L= 0,1 henry.
   Calculer l'intensité efficace qui parcourt la bobine.
3) On place entre A et B en série avec la bobine précédente, un condensateur de capacité C= 20microfarads.

   Calculer :

   a) la nouvelle intensité efficace du courant ;
   b) les différences de potentiel efficaces entre les bornes A et M du condensateur et les bornes M et B de la bobine ;
4) Quelle est la valeur de la capacité à mettre en série avec la bobine pour obtenir l'intensité efficace maximale et quelle est son intensité ? $\pi^2 = 10$

B

Un pendule, que l'on considèrera comme un pendule simple, est constitué par une sphère de masse M= 2kg fixée à l'extrémité d'une tige rigide, inextensible, de masse négligeable. Il sert à régulariser la marche d'une horloge.

1) Quelle doit être la distance l du centre de la sphère à l'axe de rotation O pour que le pendule batte la seconde de temps moyen en un lieu où g= 9,80 ?
2) *Montrer qu'on peut mettre la formule du pendule simple sous la forme* $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$

où $I=Ml^2$ est le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe O et C= Mgl est le facteur de proportionnalité entre le moment du poids de la sphère par rapport à l'axe O et l'angle d'écart θ supposé petit, de la tige avec la verticale.

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE

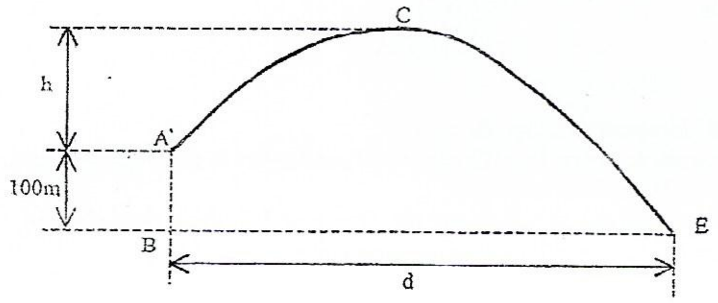
ANNEE UNIVERSITAIRE 2007-2008

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE FORMATION DE TECHNICIENS SUPERIEURS EN MAINTENANCE DES SYSTEMES INFORMATIQUES

EPREUVE DE PHYSIQUE

Exercice 1 : (6points)

Un projectile est tiré sous un angle de 45° d'un sommet A de 100m de hauteur , dominant une plaine horizontale, et il décrit la trajectoire ACE. La vitesse initiale est de 400m/seconde.
Trouver, en négligeant la résistance de l'air et en posant $g=9.8 m.s^{-2}$,
1° la hauteur maximale atteinte par le projectile ;
2° la distance horizontale BE
3° le temps mis par le projectile pour parcourir AC et CE
4° la vitesse finale à l'arrivée au point E



Exercice 2 : (6 points)

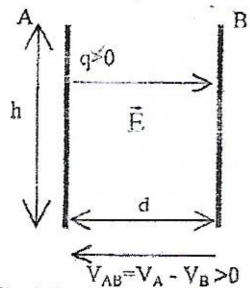
On veut réaliser une résistance destinée à un petit four électrique qui doit fournir une puissance de 600W lorsqu'il est branchée aux bornes d'une installation électrique entre lesquelles est maintenue une tension sinusoïdale de valeur efficace 120V et de fréquence 50Hz.
1° Quelle doit être la valeur de cette résistance supposée non inductive ?
2° On remplace le four aux bornes de l'installation par un petit moteur électrique de même puissance et dont le facteur de puissance est 0.8.

a) Quelle est l'intensité efficace du courant ?
b) Quelle est la puissance dissipée dans la ligne qui amène le courant aux bornes de l'installation, si la résistance de cette ligne est de 2 ohms.

Exercice 3 : (8 points)

Deux plaques métalliques parallèles A et B, verticales et placées dans le vide sont distantes de (d). Entre les deux plaques est imposée une tension U_{AB}. Une petite boule de masse (m) qui porte une charge (q) négative est lâchée de l'extrémité supérieure de la plaque A. On ne peut pas négliger la pesanteur.

On donne :
$g=10 m.s^{-2}$; $q=-10^{-7} C$; $m=100g$; $d = 7cm$; $h=80cm$



a) Quel doit être le signe de la tension U_{AB} pour que la boule décolle de la plaque A ?
b) Déterminer la nature de la trajectoire et donner son équation
c) Calculer la vitesse de la tension pour que la boule passe par le centre du condensateur

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE

Année universitaire 2008/2009

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
DE FORMATION DE TECHNICIENS SUPERIEURS

EPREUVE DE PHYSIQUES

EXERCICE 1

Un volant, dont la masse est de 1500 kg et peut être considérée comme entièrement répartie sur une circonférence de 1 m de diamètre, tourne à la vitesse angulaire constante de 50 tours par seconde.

1. Quelle est son énergie cinétique ?
2. Ce volant est placé à bord d'un véhicule (gyrobus), pour lequel il constitue une réserve d'énergie que l'on peut utiliser pour mettre le véhicule en mouvement.

La masse totale du véhicule (y compris le volant) est 25 tonnes.
Lorsque le véhicule est en mouvement, on admet que les divers frottements sont équivalents à une force de résistance à l'avancement de grandeur constante égale à 800 newtons.

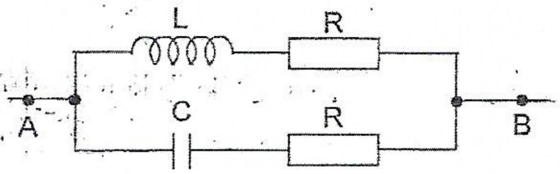
a. Quelle est la distance parcourue par le véhicule sur voie horizontale lorsque la vitesse de rotation du volant passe de 50 tours par seconde à 30 tours par seconde ?
b. Même question lorsque le véhicule monte une rampe de pente de 1/100.

On donne $g = 9,8\ m.s^{-2}$ $\pi^2 = 9,87$.

EXERCICE 2

On considère la portion de circuit électrique représentée sur la figure. Entre A et B, on applique une différence de potentiel sinusoïdal $u = U_m \cos \omega t$, de pulsation telle que $L c \omega^2 = 1$

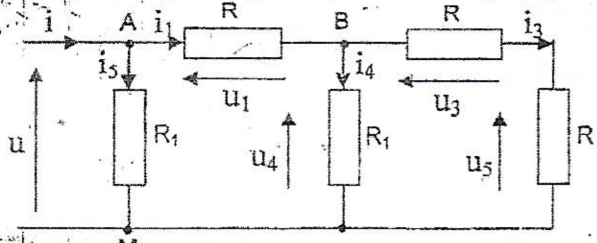
1. Déterminer l'intensité totale du courant.
2. Quelle est la valeur de R rendant maximal l'intensité efficace ?



EXERCICE 3

Pour le montage ci-dessous, on donne $i_3 = 2$ mA ; R = 5 kΩ ; $R_1 = 2$ R. Calculer :

1. Les tensions u, u3, u4.
2. L'intensité i



UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE ANNEE UNIVERSITAIRE 2006-2007

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE FORMATION DE TECHNICIENS SUPERIEURES EN « MAINTENANCE DES SYSTEMES INFORMATIQUES »

EPREUVE DE PHYSIQUE

Exercice I : (12 pts)
Un pendule de torsion de moment d'inertie J est suspendu à un fil dont la constante de torsion est C.

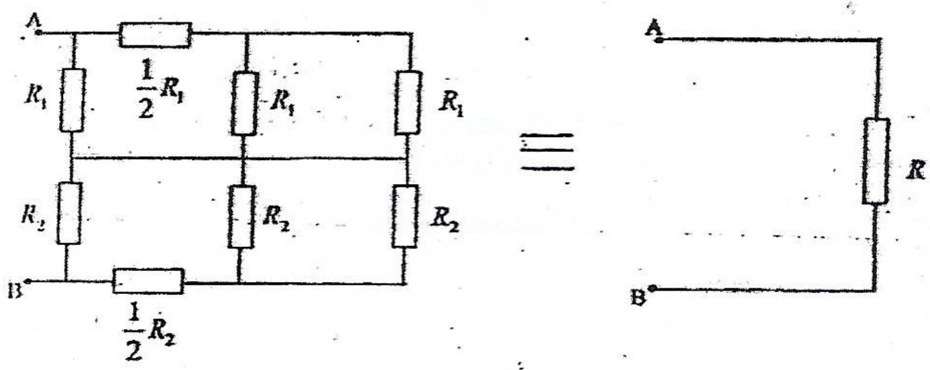
1° La période des oscillations est 5 secondes. Si l'on ajoute deux masses ponctuelles de 50g de part et d'autre de l'axe de 10 cm de celui-ci, la période devient 5.25 secondes.

a) Calculer le moment d'inertie J du pendule ;

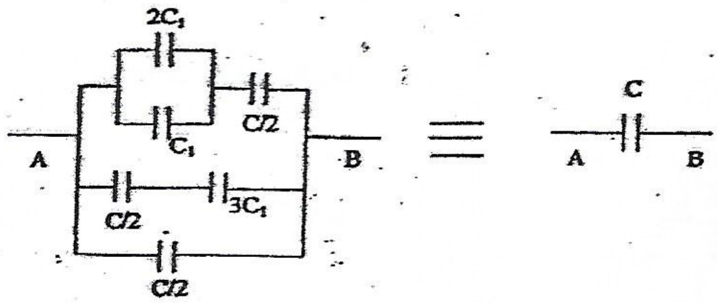
b) Calculer la constante de torsion C.

2° L'élongation angulaire du pendule sans masses additionnelles étant $\theta = \theta_0 \sin \omega t$, calculer la valeur à chaque instant de la vitesse angulaire et de l'énergie cinétique maximale si $\theta_0 = 90°$.

Exercice II : (3 pts)
Déterminer R en fonction de R_1 et R_2.



Exercice III : (5 pts)
Déterminer C_1 en fonction de C pour qu'on ait les deux schémas équivalents



UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE ANNEE UNIVERSITAIRE 2005-2006

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
DE FORMATION DE TECHNICIENS SUPERIEURES EN MAINTENANCE
DE SYSTEMES INFORMATIQUES

Exercice 1 : (6pts)

Détermination d'un champ électrostatique.

En deux points A et B distants de d = 10 cm , sont placées deux charges ponctuelles telles que :
$q_A = q_B = q = 10^{-7}$ C .

1°) Calculer la valeur du champ électrostatique $\vec{E}$ en un point P situé sur la médiatrice de AB en fonction de x = OP, O étant le milieu de AB. On donnera l'expression littérale de E et on fera un schéma.
2°) Pour quelle valeur de x a-t-on E_{max} ? Calculer **x** et $\mathbf{E_{max}}$.

Exercice 2 : (14pts)

1°) Entre deux bornes A et B existe une différence de potentiel sinusoïdale de fréquence 25 Hz. On réunit les bornes A et B par une résistance R = 200 Ω, plongée dans un calorimètre de valeur en eau 500 grammes. L'élévation de température de l'eau est 5 °C en 3 minutes 29 secondes. Calculer :
a) l'intensité efficace du courant dans la résistance ;

b) la différence de potentiel efficace entre A et B ; elle sera maintenue constante dans la suite du problème.

2°) Un condensateur C de 20 microfarads est mis en série avec la résistance précédente entre A et B .
c) calculer l'intensité efficace du courant parcourant ce circuit ;

d) écrire les expressions de la différence de potentiel instantanée entre A et B et de l'intensité instantanée dans le circuit .

$J = 4{,}18 \ \text{cal}^{-1}$

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE ANNEE UNIVERSITAIRE 2004-2005

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
DE FORMATION DE TECHNICIENS SUPERIEURES EN MAINTENANCE DE SYSTEMES INFORMATIQUES

EPREUVE DE PHYSIQUE

EXERCICE 1 :

1°) Un courant alternatif de fréquence N=50HZ produit entre deux bornes A et B une différence de potentiel efficace U=110V
Quelle est la différence de potentiel instantanée entre A et B ?
2°) Entre les bornes A et B, on place en série une bobine de résistance R=100 Ohms et d'inductance L=0,1 Henry, et un condensateur de capacité C=20 microfarads.
Calculer :

a) L'intensité efficace du courant ;
b) Les différences de potentiel efficaces entre les bornes A et M du condensateur et les bornes M et B de la bobine ;
c) La puissance moyenne dépensée dans le circuit AB.

3°) Quelle est la valeur de la capacité à mettre en série avec la bobine pour obtenir l'intensité efficace maximale et quelle est cette intensité ?
On donne $\pi^2=10$;

EXERCICE 2

1°) Une automobile de masse 800 Kg, moteur débrayé, descend avec une vitesse constante faible une pente de 2%.

a) Calculer la force de frottement R, supposée parallèle au déplacement. On considère dans la suite cette force constante.
b) La vitesse limite en palier horizontal est 126 km.h^{-1}. La puissance fournie aux roues motrices est alors 40 ch. En admettant que la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse (R'=KV^2), calculer K.

2°) Quelle sera la vitesse limite atteinte par la voiture, partant du repos et moteur débrayé, dans une descente de 3% ?
3°) La voiture roulant à 36km.h^{-1} sur une route horizontale, le conducteur accélère et la vitesse atteint 90 km.h^{-1} après un parcours de 130 mètres effectué d'un mouvement uniformément accéléré. Calculer l'accélération de ce mouvement et le temps mis pour atteindre la vitesse de 90 km.h^{-1}.

On donne g=10m.s^{-2} ; 1 Ch = 750 W

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE ANNEE UNIVERSITAIRE 2002-2003

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
DE FORMATION DE TECHNICIENS SUPERIEURS EN
MAINTENANCE DES SYSTEMES INFORMATIQUES

EPREUVE DE PHYSIQUE

EXERCICE 1: (12 pts)

Un réseau alternatif maintient entre deux bornes A et B une tension sinusoïdale de valeur efficace constante 120 V et de fréquence 50Hz.

1) Donner l'expression de la tension en fonction du temps. **(1,5 pt)**
Expliquer ce que représente la valeur efficace de la tension. **(1,5 pt)**

2) On branche, entre A et B, un appareil de chauffage constitué par une résistance non inductive. L'intensité efficace du courant est 10 A.
Calculer la valeur de la résistance ainsi que l'énergie consommée, en KWh pendant 5 heures de fonctionnement. **(1,5 pt)**
Donner l'expression de l'intensité du courant en fonction du temps. **(1,5pt)**

3) Comment cette puissance ainsi que l'intensité efficace du courant seraient-elles modifiées si, à l'aide d'un dispositif approprié :

a) on supprimait une alternance sur deux **(1,5 pt)**

b) on redressait la seconde alternance **(1,5 pt)**

4) On remplace la résistance précédente par un circuit inductif de 12 Ω. La différence de phase entre le courant et la tension appliquée est $\pi/4$. Calculer l'intensité efficace du courant et la puissance consommée . **(2 pts)**
Donner l'expression du courant en fonction du temps. **(1 pt)**

EXERCICE 2 : (8 pts)

1) Un skieur part sans vitesse initiale d'un point A et descend une pente régulière AB de 10% longue de 200 m. Calculer sa vitesse en B si les frottements sont négligeables. On prendra $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ **(2 pts)**

2) Animé de cette vitesse en B, le skieur aborde une montée régulière BC de 5%.

a) en supposant encore les frottements négligeables, quelle distance pourrait-il ainsi parcourir sur cette montée ? **(2 pts)**

b) Quelle serait la durée de ce parcours ? **(1 pt)**

3) Etablir l'équation horaire du skieur au cours de la montée, à partir de son passage en B. Discuter. **(2 pts)**

Application : Au bout de combien de temps atteint-il un point situé à 144 m du point B ? **(1 pt)**

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE

ANNEE UNIVERSITAIRE 2001-2002

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE FORMATION DES TECHNICIENS SUPERIEURS

EPREUVE DE PHYSIQUES

Exercice (05 points)

Un pendule simple, formé d'une petite sphère très dense suspendue à un fil inextensible, est assimilable à un pendule simple de longueur l = 75 cm. Il oscille sans amortissement appréciable en un lieu où l'accélération due à la pesanteur est $g = 9{,}80\ m.s^{-2}$

L'élongation α (angle que fait à l'instant t le fil avec la verticale) a pour maximum a = 1 /100 radian. Elle est nulle à l'instant zéro.

1. Ecrire l'équation du mouvement. (1 point)
2. Calculer l'équation θ du premier passage par l'élongation 1/200 radian . (1 point)
3. Calculer les vitesses angulaires du pendule à l'instant zéro et à l'instant θ . (1 point)
4. A l'instant θ , la sphère subit un choc très court tel que la vitesse soit brusquement annulée. Quel est son mouvement ultérieur ? A quel instant θ_1 repassera -t- elle par la verticale ? (2points)

Problème (15 points)

I) Un circuit, alimenté en courant alternatif de fréquence 50 Hz, comprend en série une capacité et une résistance non inductive de 40 Ω. L'intensité du courant déphasée de $\pi/3$ rad par rapport à la tension aux bornes. Calculer en microfarad la capacité du condensateur ? (2 points)

II) Un ampèremètre, gradué en intensité efficace, placé dans le circuit indique un courant I = 2 A.

1. Calculer la tension efficace aux bornes du circuit ? (2 points)
2. Ecrire les expressions, en fonction du temps, de l'intensité du courant, de la tension aux bornes du circuit et des tensions aux bornes de la résistance et du condensateur. On prendra pour origine des phases celle du courant. (4 points)

III) La tension d'alimentation étant celle trouvée précédemment (II .1), on remplace la résistance non inductive par une bobine de résistance R = 40 Ω et d'inductance L. L'intensité du courant est alors 4 A.

1. Quelle est la valeur de l'inductance L ? (3 points)
2. Quelles sont les tensions efficaces aux bornes de la bobine et aux bornes du condensateur ? (4points)

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE

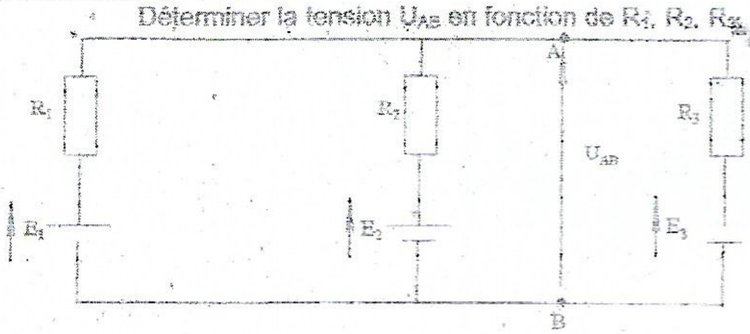
ANNEE UNIVERSITAIRE 2000-2001

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
DE FORMATION DE TECHNICIENS SUPERIEURS
EN MAINTENANCE DES SYSTEMES INFORMATIQUES

EPREUVE DE PHYSIQUE

EXERCICE 1 : (5 points)

Déterminer la tension U_{AB} en fonction de R_1, R_2, R_3, E_1, E_2, et E_3.



EXERCICE 2 : (15 points)

Etude d'un circuit comprenant une résistance inductive et un condensateur en série

1 °) On dispose en série entre les points A et B (voir figure) une bobine de résistance R et d'inductance L et un condensateur de capacité C . Cette portion de circuit est soumise à une différence de potentiel sinusoïdale $u = U_m \cos \omega t$ de fréquence 50 Hz et de valeur efficace égale à 110 V.

a) Calculer numériquement la tension maximale U_m et la pulsation ω (2 pt)

b) On désigne par i la valeur algébrique instantanée du courant et par q la charge algébrique instantanée portée par une armature du condensateur (voir figure) . Quelle relation y a-t-il entre i et q ? (Respecter les conventions de signe indiquées sur la figure). (1 pt)

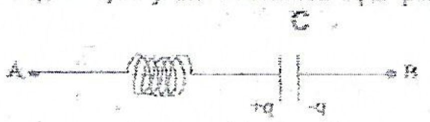
c) Exprimer la différence de potentiel u, entre les points A et B, en fonction de R, L , C, i, de la dérivée de u par rapport au temps et de q, puis en fonction de R, L, C, q et des dérivées première et seconde de u. (4 pts)

2°) On admet qu'en régime permanent, l'intensité i est de la forme $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$.

En utilisant la construction de Fresnel, donner l'expression de l'impédance Z de la portion de circuit (2 pts)

Calculer numériquement Z , I_m, l'intensité efficace et tg φ avec les données numériques suivantes : $R=100\ \Omega$, $L = 0.5$ Henry , $C= 10\ \mu F$ (4 pts)

Calculer L pour qu'il y ait résonance . (2 pts)



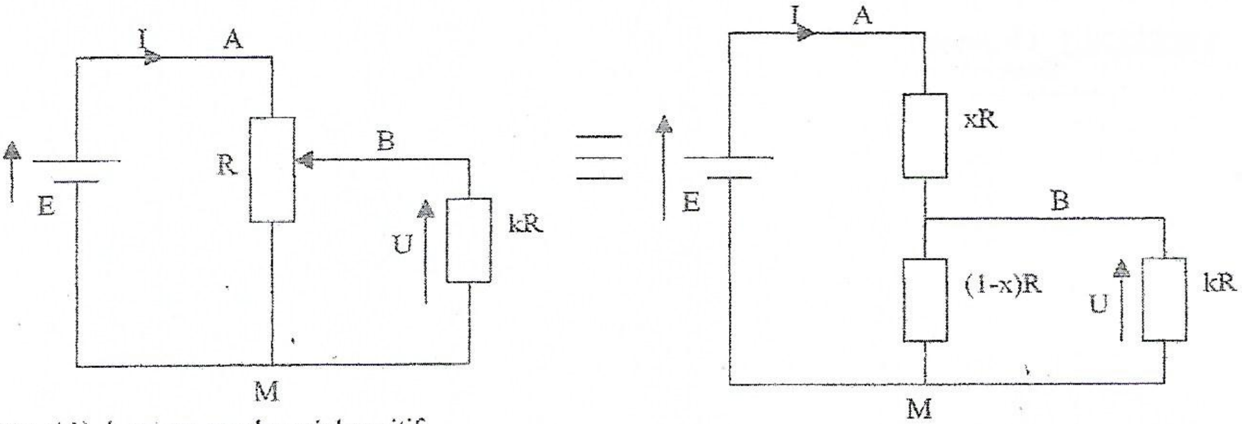
UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE ANNEE UNIVERSITAIRE 1998 – 1999

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE FORMATION DE TECHNICIENS SUPERIEURS

EPREUVE DE PHYSIQUE

Exercice 1 (6 points)

On considère le schéma électrique suivant et son équivalent :



$(0 \leq x \leq 1)$, k est un nombre réel positif.

a) Déterminer la tension U en fonction de E, x et k. (2 points)

b) Pour quelle valeur de x a-t-on U_{max} ? Démontrer la. (2 points)

c) Déterminer le courant I en fonction de E, x, k et R (2 points)

Exercice 2 (6 points)

Etude d'un mouvement parabolique d'un projectile.

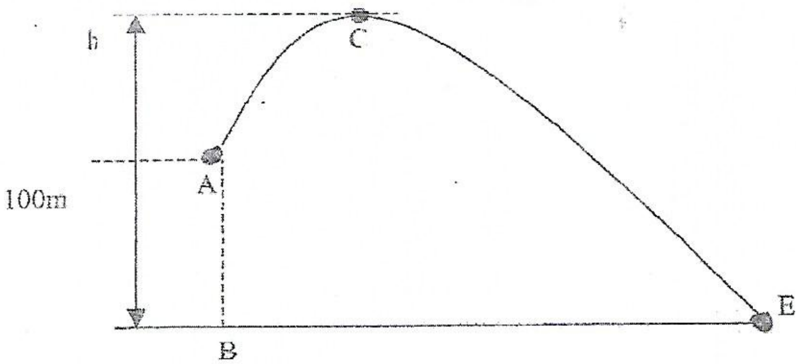
Un projectile est tiré sous un angle de 45° d'un sommet A de 100m de hauteur, dominant une plaine horizontale, et il décrit la trajectoire ACE. La vitesse initiale est de 400m/s. Trouver, en négligeant la résistance de l'air et en posant $g = 9,8\ M.s^{-2}$

1° La hauteur maximale atteinte par le projectile. (1 point)

2° La distance horizontale BE. (1 point)

3° Le temps mis par le projectile pour parcourir AC et CE. (2points)

4° La vitesse finale à l'arrivé au point E. (2 points)



Exercice 3 (8points)
1° Une prise maintient entre ses bornes une tension $u = 100\sqrt{2} \sin 100\,\pi t$ en Volts.
Quelle est la fréquence de cette tension ? Calculer la tension efficace. (0,5x2=1 point)
2° On branche entre les bornes de la prise une résistance pure R. L'intensité efficace qui traverse R est $I_1 = 5A$. Calculer R. (1point)
3° On branche entre les bornes de la prise une bobine d'inductance $L = 10^{-1}$ H
Calculer l'intensité efficace I_2. Etablir l'intensité instantanée i_2 qui la traverse (0,5x2=1 point)
4° On branche entre les bornes de la prise un condensateur de capacité $C = 10^{-4}$F
Calculer l'intensité efficace I_3. Etablir l'intensité instantanée i_3 qui traverse le circuit (0,5x2=1 point)
5° En déduire l'impédance du circuit ainsi que le courant efficace I tiré par la charge R, L, C (1 point)
6° On branche, en série, entre les bornes de la prise, le condensateur C, la bobine L, et la résistance R.

a) Montrer que le circuit est à la résonance (on donne $\pi^2 = 10$) (1 point)
b) Calculer l'intensité efficace I_0. (0,5 point)
c) Calculer les différences de potentiel efficaces aux bornes de la résistance U_R, de la bobine U_L et du condensateur U_C. (0,5 point)
d) En déduire la valeur des rapports $\frac{U_L}{U}$ et $\frac{U_C}{U}$ (0,5x2=1 point)

UNIVERSITE D'ANTANANARIVO

ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE

-----ooOoo-----

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE

INGENIORAT

-----ooOoo-----

Année universitaire : 2008 / 2009

Session du 26 -27 Novembre 2008

Options : Toutes

Matière : PHYSIQUE

Durée : 2 h 30 mn

EXERCICE 1 (4 points)

On considère une lentille L convergente mince, de centre optique O et de distance focale $f = 15$ cm. Un objet lumineux AB est placé perpendiculairement à l'axe optique qui contient les points A et A' image de A. Pour obtenir une image nette de l'objet, on déplace la lentille, le long de son axe optique, entre l'écran d'observation E et cet objet.

Soit $D = 80$ cm la distance entre l'écran E et AB. On demande de :

1°/ - déterminer les positions de la lentille pour lesquelles on observe une image nette de AB sur l'écran

2°/ - donner les caractéristiques de l'image obtenue pour chacune des positions précédentes.

EXERCICE 2 (6 points)

La figure 1 représente la trajectoire d'une voiture qui est composée d'une partie horizontale (AB) et d'une côte (BCD) de pente 3 %.

La voiture part sans vitesse initiale de A pour aller en D. A l'intérieur de cette voiture est accroché au plafond un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur $\ell = 40$ cm au bout duquel est fixée une petite boule assimilable à un point matériel.

La masse de la voiture chargée est $M = 1000$ kg. Soit $F_f = 200$ N la résultante de toutes les forces de frottement qui est constante et parallèle au déplacement. L'accélération de la pesanteur est $g = 10\ m/s^2$.

1°/ - Calculer la vitesse V_B en B de la voiture lorsqu'elle parcourt la route AB = 2 Km avec une accélération constante $a = 0{,}1\ m/s^2$

2°/ - Le chauffeur garde jusqu'en C cette vitesse acquise en B pour monter la côte. Calculer la force F_m et la puissance P_m que le moteur de cette voiture doit développer pour maintenir cette vitesse.

3°/ - A l'arrivée en C, le chauffeur débraye (annule l'action du moteur) et freine en même temps pendant que la voiture continue à monter la côte jusqu'à l'arrêt en D tel que CD = 200 m

Calculer :

a) - la force de freinage F_r

b) - la quantité de chaleur dégagée Q résultant du freinage (en joules) ✶

c) - l'angle d'inclinaison β du pendule par rapport à la verticale au cours du freinage. ✶

d) - la période T des oscillations du pendule lorsque la voiture s'arrête en D. ✶

On néglige la résistance de l'air.

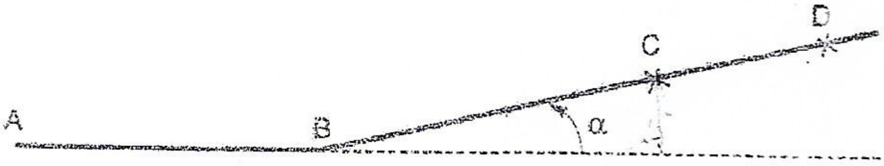


Figure 1

EXERCICE 3 (8 points)

On considère le montage (Fig.2a) formé par deux rails (AB) et (CD) parallèles, horizontaux de résistance négligeable, reliés aux bornes d'un générateur de force électromotrice $E = 10$ V, de résistance intérieure $r = 1\ \Omega$.. Une tige homogène conductrice (MN) de résistance $r_1 = 1\ \Omega$ est disposée perpendiculairement aux rails et qui peut glisser sans frottement sur ces rails

Pour créer un champ magnétique uniforme d'intensité $B = 0{,}4$ T , on place autour de la tige (MN) un aimant en U de largeur $\ell = 10$ cm.

1°/ - Représenter sur la tige (MN) la force ~~électromotrice~~ électromagnétique $\vec{F}$, le champ magnétique $\vec{B}$ et le sens du courant I qui circule dans la tige.

2°/ - Calculer l'intensité I du courant

3°/ - Déterminer l'intensité F de la force électromagnétique

4°/ - Calculer la valeur de la masse m à suspendre au bout d'un fil non conducteur, souple,inextensible, de masse négligeable attaché au milieu de la tige pour immobilser celle - ci. On prendra $g = 10\ m/s^2$

5°/ - On remplace la masse par un ressort de raideur $k = 10$ N/m et de masse négligeable pour limiter le déplacement de la tige (Fig.2b). Calculer la variation Φ du flux magnétique à travers le circuit qui a lieu entre le début et la fin de ce déplacement dûe à ce ressort lorsque le circuit est fermé.

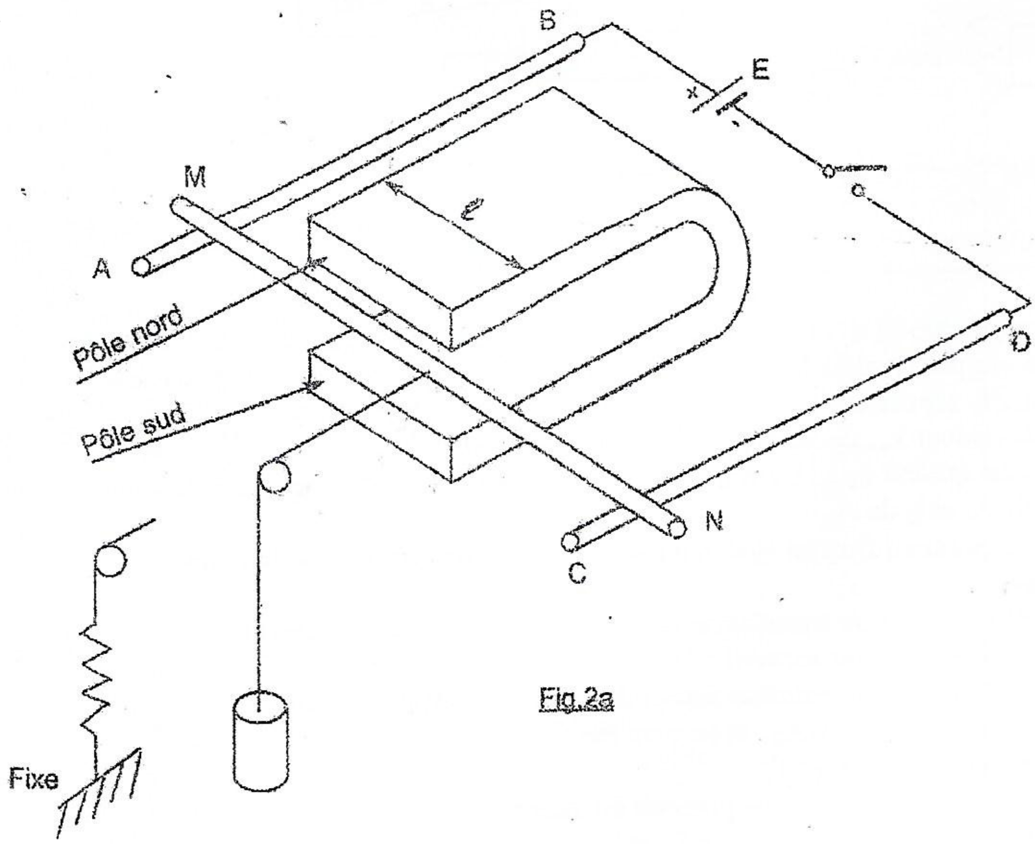


Fig.2a

Fig.2b

UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE

Année universitaire 2007-2008
SESSION DU 05-06 DECEMBRE 2007
Options : **TOUTES**

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
Matière : **PHYSIQUE**
Documents non autorisés
Durée : **2 heures 30 mn**

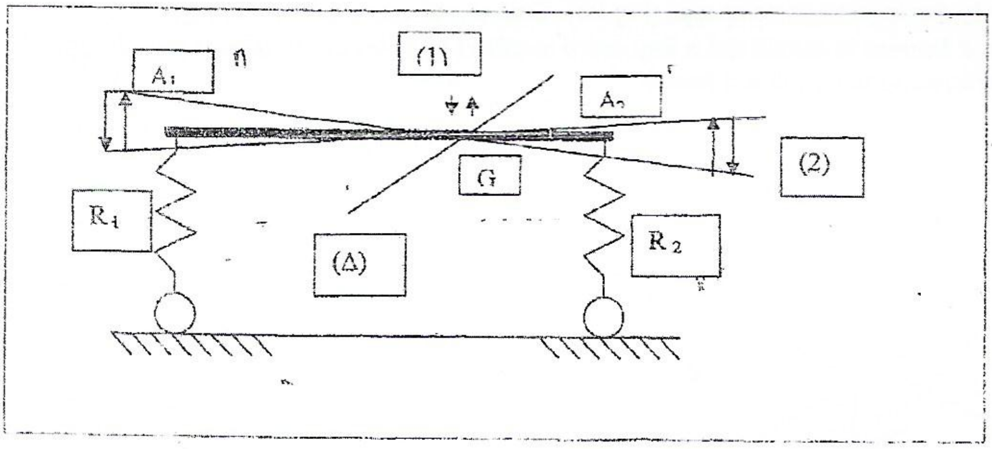
Exercice I : (**4 points**)

Un doublet formé de deux lentilles minces de distances focales f'_1 et f'_2, situées à la distance e est tel que :

1) Un objet placé à 40cm en avant de l'une des lentilles L_1 a une image réelle située à 12cm de l'autre lentille L_2 et de grandissement $\gamma_1 = -1,2$.
2) Un objet placé à 60cm en avant de cette même lentille L_2 donne une image de grandissement $\gamma_2 = -\frac{1}{2}$,

Calculer f'_1, e, f'_2.

Exercice II : (**4 points**)



La masse suspendue M d' une voiture automobile peut être considérée comme divisée en deux masses ponctuelles M_1 et M_2 liées par une traverse rigide $A_1 A_2$ de masse négligeable, M_1 repose sur la suspension avant figurée par le ressort R_1 parfaitement élastique, de raideur k_1, de masse négligeable . M_2 repose sur la suspension arrière (ressort R_2, de raideur k_2) . Le centre de gravité des masses M_1 et M_2 est en G , à la distance l_1 de A_1 et l_2 de A_2.

L'expérience montre qu'un tel système peut prendre deux types d'oscillations pendulaires

a) *Oscillations de translation verticale* (1) , avec une période dite de *rebondissement vertical* : T_V.
b) *Oscillations de rotation* autour d'un axe (Δ) perpendiculaire au plan de la figure , donc à A_1A_2 , et passant par G (flèche (2)) . La période est dite *période de galop* : T_g .

On désignera par ρ le *rayon de giration* du système des masses (M_1,M_2) autour de l'axe (Δ).

1 - Déterminer T_v et T_g .

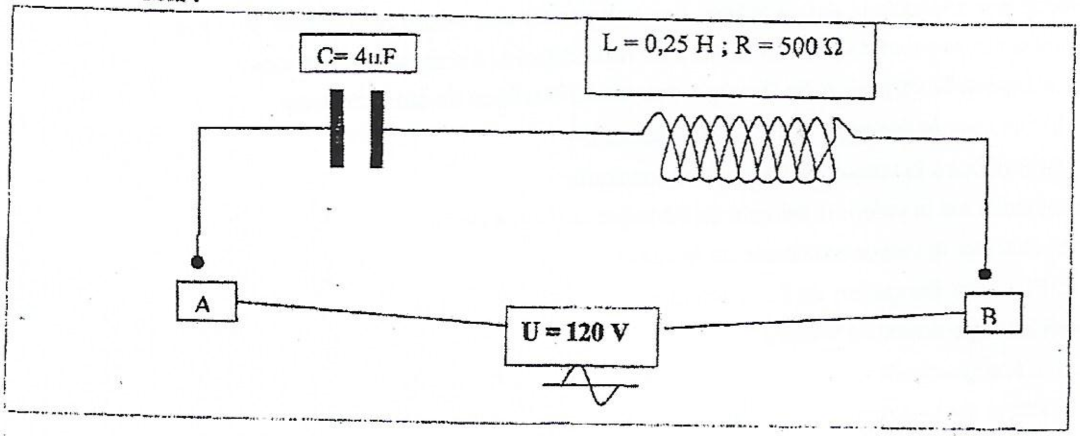
2 – Pour assurer aux passagers le meilleur confort, on cherche à obtenir : $T_1 = T_2 = T_v = T_g = T$ (période unique) .

Montrer que cela entraîne : $\rho^2 = l_1 . l_2$.

Exercice III : (**4 points**)

Aux bornes d' une distribution d'énergie en courant alternatif à 50 périodes , entre lesquelles on maintient une tension efficace de 120 volts , on place en série une capacité de 4 µF , une inductance de 0,25 H ayant une résistance de 500 ohms (voir fig) . Calculer :

a) L'intensité efficace
b) Le déphasage de l'intensité sur la tension
c) La différence de potentiel aux bornes de la capacité et aux bornes de la self .



Problème (**8 points**)

Sur la gorge d'une poulie de masse négligeable, mobile sans frottement autour d'un axe horizontal, passe un fil fin inextensible et de masse négligeable, dont les extrémités supportent deux corps A et B de masses M_A et M_B .

1) Dans une première expérience, les deux brins de fils sont verticaux $M_A = 0,539$ Kg et $M_B = 0,441$ Kg .
Calculer :
   a) L'accélération du système
   b) L'espace parcouru par chaque corps ; la vitesse et l'énergie cinétique de chaque corps, 3 secondes après avoir abandonné le système à lui même .
2) Dans une deuxième expérience, le brin de fil supportant B est parallèle à la plus grande pente d'un plan incliné (sur lequel B peut glisser sans frottement) formant un angle de 30° avec le plan horizontal .
   a) Quelles valeurs doit – on donner à M_A et M_B dont la somme a toujours la même valeur 0,980 Kg pour que la vitesse du système, 3secondes après l'avoir abandonné à lui-même, soit la même que précédemment, le corps B remontant le plan ?
   b) Quelle est la tension du fil au cours du mouvement ?
3) Dans la deuxième expérience , à l'instant t = 3 s le fil se casse .
   a) Quel est le mouvement pris par le corps B ?
   b) Trouver la position et la vitesse du corps B 1,2 s après la rupture du fil.

On prendra $g = 9,80 \text{ m / s}^2$

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 2006-2007
Options : TOUTES
Matière : PHYSIQUE
Durée : 2 heures 30 min
Documents non autorisés

LES QUATRE EXERCICE SONT OBLIGATOIRES

Exercice 1/4

On considère un oscillateur élastique horizontal de raideur K=4 Nm-1 et de masse m = 200 g. L'amplitude des oscillations est de 2.5cm. Les frottements sont négligés ; l'origine sur l'axe Horizontal est la position de l'extrémité libre du ressort lorsqu'il a sa longueur a vide.

1- a)Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique de cet osculateur.
 b) Déterminer l'énergie potentielle maximale.
 c)En déduire la valeur de l'énergie mécanique.

2- a)Quelle est la valeur maximale de l'énergie cinétique de cet oscillateur ?
 b) Calculer la valeur maximale de la vitesse.
 c)Pour une élongation de 2cm, calculer :

3- a)L'énergie potentille élastique
 b) L'énergie cinétique
 c)Valeur de la vitesse

4-Les frottements ne sont plus négligés

a) Comment varie l'amplitude en fonction du temps
b) A quelle condition la pseudo-période des oscillations est-elle peu différente de la période
c) Propre de l'oscillateur non-amorti correspondant ?
d) Représenter alors l'allure de l'évolution de l'élongation en fonction du temps

Exercice 2/4

On considère un dipôle constitue d'une résistance R non inductive et d'une bobine d'inductance L En série. On l'alimente par un courant électrique sinusoïdal de fréquence N = 50Hz.

La mesure a donné les résultats suivants :

Wattmètre : puissance moyenne dissipée : 36W

Voltmètre : 120V efficace

Ampèremètre : 0.6A efficace

1- a)Calculer le facteur de puissance (cos) de l'ensemble et en déduire [degrés]
 b) Calculez l'impédance Z
 c)Calculer les éléments R et L

2-On monte en série avec le dipôle un condensateur de capacité variable C pour former un Circuit résonant. L'ensemble est alimenté avec la même tension sinusoïdale de fréquence 50Hz et de value efficace 120V.

a)Déterminer a cette fréquence la valeur de la capacité C pour qu'il y ait résonance.
b)Donner l'expression de la puissance absorbée à la résonance.
c)Pour quelles fréquences, la puissance moyenne consommée est-elle égale à la moitié de celle absorbée à la résonance.
d)En déduire la valeur du facteur du facteur de qualité Q

Exercice 3/4

1-Une lentille mince convergente(L1), de centre optique O_1, donne d'un objet AB haut de 5cm et Situé à 20cm en avant de la lentille, une image réelle A_1B_1 située à 60cm après la lentille. A est situé sur l'axe principale et AB est perpendiculaire à l'axe. Calculer la distance focale de la lentille (L_1) et sa vergence C_1.

2-L'objet AB est placé à 10cm en avant de la lentille (L_1)

a- Déterminer par calcul les caractéristiques de l'image A_1B_1 (position, sens, grandeur, nature)
b- Vérifier par construction graphique ces caractéristiques (Echelle 1/5)

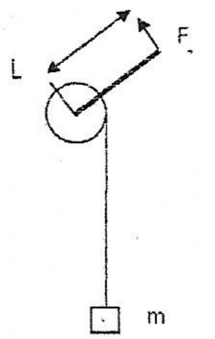
3-La lentille (L_1) est maintenant placée entre l'objet AB et un écran (E). Soit d la distance entre l'objet AB et l'écran (E). On désigne par x la distance entre l'objet et la lentille (L_1).

a- Donner la condition sur d pour que l'on ait une image réelle A_1B_1 renversée de même taille que l'objet. En déduire x
b- On enlève ensuite l'écran (E). On accole la lentille (L_1) à une lentille (L_2) de vergence C_2. Calculer C_2 pour que l'on ait une image renversée A_1B_1 de même taille que l'objet AB et situé à 1 m de ce dernier.

Exercice 4/4

Un treuil assimilé à un cylindre homogène de rayon R, de masse M, tourne autour d'un axe fixe Horizontal sans frottement et passant par son centre de gravité à une vitesse constante de 300tr/mn. On donne R=10cm et M=20kg.

a- Calculer son moment d'inertie J.
b- Si on lui applique un couple de freinage constant Mf=0.13Nm, déterminer la durée de
  a. freinage et le nombre de tours effectué.
c- On monte sur l'axe du treuil une manivelle de longueur L.



On enroule un fil inextensible de masse négligeable, sans glisser sur le cylindre et dont le bout est accroché à un corps A de masse m=10Kg. Quelle est la condition sur F pour que le treuil soit en rotation uniforme lors de la montée du corps A.(F est perpendiculaire à la manivelle)

d- On enlève la manivelle et on abandonne le système sans vitesse initiale. Les frottements sont négligés. Déterminer la nature du mouvement au tout premier instant. Donner l'expression littérale et la valeur numérique de l'accélération angulaire du treuil et de l'accélération du corps A.

(prendre g=10N/Kg)

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 2004-2005
SESSION du 02-03 NOVEMBRE 2004
Options : TOUTES
Matière : PHYSIQUE
Durée : 2 heures 30min
Documents non autorisés

LES QUATRES EXERCICES SONT OBLIGATOIRES

Exercice 1 :

Sur une piste d'essai rectiligne de longueur $A_1A_4 = 4$ km, une voiture expérimentale, partant du point A_1, sans vitesse initiale se déplace le long de $A_1A_2A_3A_4$ selon les phases suivantes :

Phases 1 : $A_1 - A_2$: phases de démarrage d'accélération $a_1 = 0{,}2$ m/s^2.

Phases 2 : $A_2 - A_3$: mouvements uniforme

Phases 3 : $A_3 - A_4$: phases de ralentissements d'accélération $|a_2| = 0{,}1$ m/s^2.

La vitesse initiale de la voiture est nulle en A_4.

1. Donner l'expression de la vitesse pour chaque phase.
2. Le temps mis par la voiture pour parcourir les tronçons A_2-A_3 est 3 minutes .Calculer la vitesse en chaque point A_1, A2, A_3, A_4.
3. Calculer le temps mis par la voiture pour atteindre ces 4 points,
4. Calculer la distance parcourue pour chaque phase.
5. Construire les diagrammes de vitesse et d'accélération en fonction du temps.

Exercice 2 :

Un circuit électrique comporte en série une résistance R, une bobine d'inductance L de résistance négligeable et un condensateur C. Il est alimenté par une source de tension sinusoïdale u(t), d'amplitude constante 12 volts et de fréquences N variables.

On donne $R = 10[\Omega]$,, $L = 1[\Omega]$, $C = 5[\mu F]$.

1. Faire le schéma du circuit.
2. Le circuit est parcourue par un courant d'intensité $i(t) = I_m \sin(2\pi N)t$
   a) Donner l'expression de la tension aux bornes de R, de L, et de C
   b) Calculer l'impédance Z du circuit pour une fréquence N = 100 Hz
   c) Construire le diagramme de Fresnel pour obtenir l'impédance Z.

2) Calculer la valeur des fréquences notées N_R mettant le circuit en résonnances
3) Le circuit parcouru par le courant $i(t)$ dissipe de l'énergie par effet Joule notée dE_j. Calculer E_j pendant une période de résonnances T_R.
4) Le circuit LC emmagasine de l'énergie que l'on appelle énergie électrique totale. Donner l'expression de l'énergie emmagasinée par le condensateur notée E_C et par l'inductance notée E_L .Montrer que l'énergie électrique totale notée $E = E_j + E_C = \frac{1}{2}.LI_m^2$.

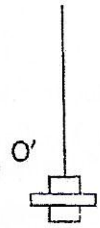
Exercice 3 :

On étudie l'image d'un objet lumineux AB placé perpendiculairement sur l'axe optique d'une lentille mince convergente de distances focale $f_1 = 10$ cm

1) L'objet AB de 5 cm de hauteur est placé à 30 cm de la lentille. Déterminer par calcul la position, la nature, le sens et la nature de la grandeur de l'image, puis vérifier les résultats par une construction géométrique.
2) Même questions qu'en un) pour le même objet placé à 5 cm de la lentille.
3) A quelle distance de l'objet faut- il placer la lentille pour obtenir une image $A'B'$ 5 fois plus grande que l'objet.
4) On étudie ensuite un système optique constitué de2 lentilles minces convergentes non accolées. La lentille L_1 de distances focale $f_1 = 10$ cm et la lentille L_2 de distances focale $f_2 = 20$ cm. Distances $O_1O_2 = 20$ cm.
5) Déterminer par calcul et par construction géométriques l'image finale de l'objet placé à 15 cm de la lentille L_1.

Exercice 4 :

Un système est constitué par 3 cylindres homogènes C_1, C_2 et C_3 de même nature et de même épaisseur. Les 3 cylindre son solidaire sur un même axe. C1 a une masse M et de rayon R, C2 et C3 ont une masse M' et de rayon $\frac{R}{2}$.



(fig. 1)

1- Calculer la masse des cylindres C2 et C3

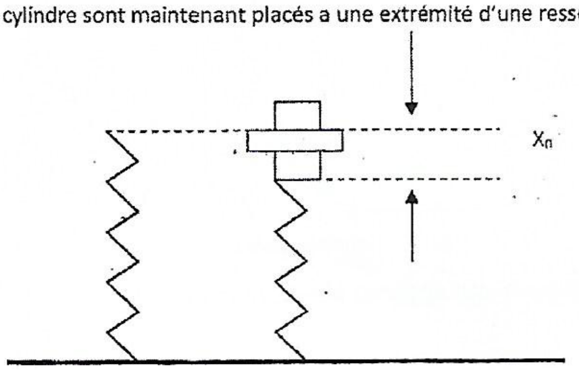
2- Montrer que le moment d'inertie de l'ensemble est $J = \frac{9MR^2}{16}$

3- On réalise avec le système un pendule de torsion d'axe OO' vertical

   a- On fait tourner le système d'un angle θ_0 à partir de sa position d'équilibre et on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale. Donner l'équation différentielle régissant le système et en déduire l'expression de sa période.

   b- La période des oscillations est 5s. Calculer la constante de torsion OO' du fil pour M=100g et R=8cm

4-Les 3 cylindre sont maintenant placés a une extrémité d'une ressort vertical de constante de raideur $k=30Nm^{-1}$



Le système est d'abord en équilibre. On écarte les cylindres vers le bas et on

Les abandonne à eux même. Ils prennent un mouvement oscillatoire.

Etablir l'équation différentielle de ce mouvement et calculer la période des oscillations.

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

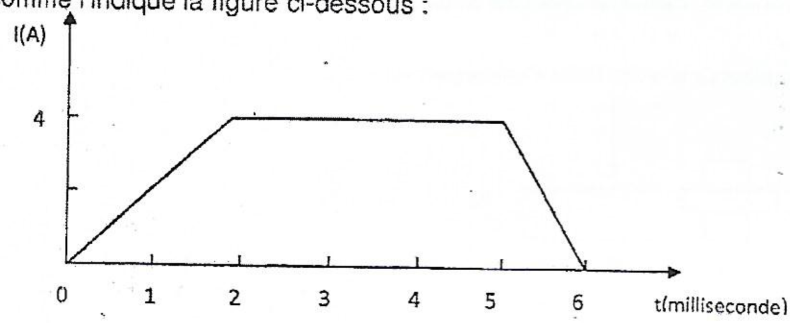
Année Universitaire 2003-2004
Options : TOUTES
Matière : PHYSIQUE
Durée : 2 heures 30 mn
Documents non autorisés

Les trois exercices et le problème sont obligatoires.

Exercice 01 : Electromagnétisme

Un solénoïde de longueur l = 40 cm, comportant 1250 spires par mètre, de rayon R=2 cm, est parcouru par un courant d'intensité I=5A.

1)- Calculer le champ magnétique créé au centre O du solénoïde par le passage du courant.
2)- En supposant le champ magnétique uniforme à l'intérieur du solénoïde, calculer le flux Propre de ce solénoïde, en déduire son inductance.
3)- Le solénoïde est à présent parcouru par un courant d'intensité variant en fonction du temps comme l'indique la figure ci-dessous :



Déterminer la force électromotrice d'auto-induction 'e' qui apparait aux bornes de la bobine pour chacune des trois phases.

Tracer e=f(t) pour t∈ $[0;6ms]$.

On donne $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ et $\pi^2 = 10$

Exercice 02 : Electricité.

Un circuit comporte en série un condensateur de capacité C et une bobine de résistance R et Auto-inductance L. Il e st alimenté par un générateur qui délivre une tension alternative sinusoïdale u (t) d'amplitude constante mais de fréquence variable f.

On mesure les tensions efficaces respectives aux bornes du générateur, du condensateur et de la bobine : on trouve la même valeur.

1)- Exprimer Let C en fonction de R et f.
2)- Le circuit est parcouru par un courant d'intensité instantanée $i(t) = I_m \sin \omega . t$
Calculer le déphasage φ entre u (t) et I (t).
3)- On modifie la fréquence f jusqu'à ce que le déphasage φ devienne nulle.
a) Interpréter le phénomène.
b) Calculer la fréquence correspondante en prenant f = 50 Hz comme fréquence de départ de la tension alternative sinusoïdale.

Exercice 03 : Optique Géométrique.

Soit une lentille mince convergente L_1 de distance focale 15cm. Un objet AB de 5cm de hauteur perpendiculaire à l'axe optique est placée à 20cm de la lentille.

1)- Déterminer par calcul les caractéristiques de l'image A'B' (position, sens, nature)
2)- Vérifier par construction graphique ces caractéristiques (échelle : 1/5)
3)- Une lentille mince divergente L_2 de distance focale 50 cm est placée derrière la lentille L_1 à la distance de 35 cm, les axes optiques étant confondus

a) Déterminer par calcul les caractéristiques de l'image finale de l'objet AB placé à 20cm en avant de L_1 .
b) Faire la construction graphique.

Problème : Les parties A et B sont indépendantes et on prendra $g=10\ ms^{-2}$

Partie A

Une bille assimilable à un point matériel M de masse m = 50 g est abandonnée sans vitesse initiale en un point A d'une gouttière ABCD Cette gouttière est constituée :

- d'un tronçon rectiligne AB incliné d'un angle α =30° par rapport au plan horizontal et de longueur AB=1.5m
- d'un tronçon horizontal BC
- d'un tronçon circulaire CD de centre O et de rayon r=60cm et telle que OC est perpendiculaire à BC (voir figure 1).

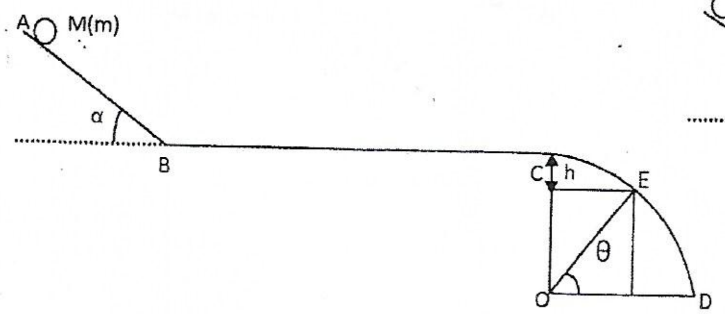
Les frottements qui ne s'exercent qu'entre B et C sont équivalent à une force F parallèle au déplacement et d'intensité constante égale à 0.4N.

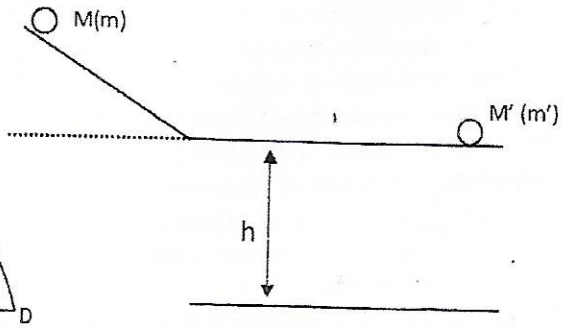
1)- Quelle est la nature du mouvement de la bille sur la portion BC ?
2)- Quelle doit être la longueur de BC pour que la bille arrive en C avec une vitesse nulle ?
3)- La bille M part du point C avec une vitesse pratiquement nulle et aborde la partie circulaire D. La position de la bille M est repérée par l'angle θ= (OD, OE) en un point E de CD.
 a) Exprimer en fonction de g, r et θ la vitesse V_E au point E.
 b) Donner en fonction de m, g, r et θ l'intensité de la réaction R de la gouttière sur la bille au point E.
 c) Calculer la valeur de l'angle θ pour laquelle la bille M quittera la gouttière.

Partie B

Dans cette partie on néglige les forces de frottement et on supprime la partie CD. La bille de masse m=50g est abandonnée sans vitesse initiale au point A de la gouttière. En C elle heurte une autre bille M' ponctuelle de masse m'=200g initialement au repos (voir figure 2)

1)- Juste après le choc suppose parfaitement élastique, la vitesse de la bille M'est égale $1.6 ms^{-1}$. En admettant que toutes les vitesses sont colinéaires avant et après le choc
Calculer :
 a) la vitesse Vc de la bille M juste avant le choc.
 b) la vitesse V de M juste après le choc.
2)- Après le choc, la bille M' quitte la gouttière.
 a) Quelle est la nature de mouvement ultérieur de M'
 b) Ecrire l'équation cartésienne de sa trajectoire dans un repère d'axes orthonormé (Cx, Cy).
 c) Calcule la distance de la verticale du point c au point d'impact K de la bille M' sur le sol horizontal situe à h=80cm de C.





UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 2002-2003
SESSION du 03-04 DECEMBRE 2002
Options : TOUTES
Matière : PHYSIQUES
Durée : 02 heures 30 minutes
Documents non autorisés

EXERCICE I : L'équation d'état pour les gaz réels est de la forme:

$$\left(P+\frac{an^2}{V^2}\right)(V-nb)=nRT$$

a et b : des constantes dépendant de la nature du gaz,

V : volume du gaz,

p : pression du gaz en [N/m^2],

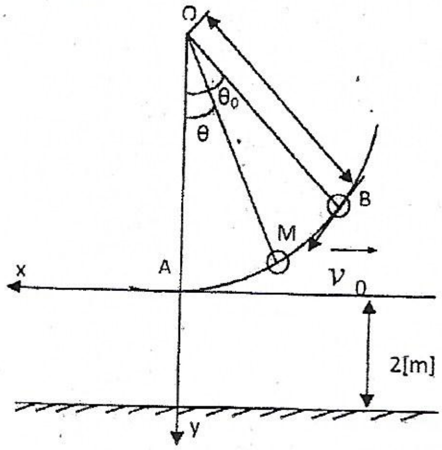
T : température du gaz en. [K] (degré KELVIN),

n : nombre de mole(s) en [mole],

R : constante molaire des gaz parfaits en [J/mole.K]

Donner les unités de a et b, dans le système international.

EXENCICE II:



Une bille assimilable à une masse ponctuelle

M= 250 [g] est suspendue en un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur l=1,0[m].

Au départ la bille se trouve au point B tel que le segment [OB] fait un angle $\theta_0 = 60°$ par rapport à la position d'équilibre et on le lance avec une vitesse $\left|\overrightarrow{v_0}\right| = 5\,[m/s]\ \left(\overrightarrow{v_0} \perp \overrightarrow{OB}\right)$

Pour les applications numériques, on prendra g= 10 S.I.

1°) Donner l'expression de VM, vitesse au point M, prise par la bille en fonction de v_0, θ_0, g, l et O (angle entre la droite (OM) et la verticale).
Calculer la vitesse V_A au point A (position d'équilibre).

2°) Donner l'expression T_M, tension du fil en M, en fonction de m, g, i , v_M et θ
Calculer la tension T_A au point A

3°) Arrivée en A, la bille de masse m heurte une autre bille de masse m'= 135 [g], au repos. On suppose que le choc est parfaitement élastique.

a) Exprimer les vitesses v'_A vitesse de la bille (m) et v' celle de la bille (m') après le choc, en fonction de m, m' et V_A.
b) Calculer modules de v' et v'.
c) Donner l'expression littérale de la trajectoire de la bille (m') dans le repère Axy.
d) Le point A étant situé à une altitude 2 [m]par rapport au sol horizontal, calculer l'abscisse x_I du point d'impact I de la bille sur le sol.
e) Déterminer la valeur de θ_0 pour que l1abscisse xi soit égale à 5,5 [m].

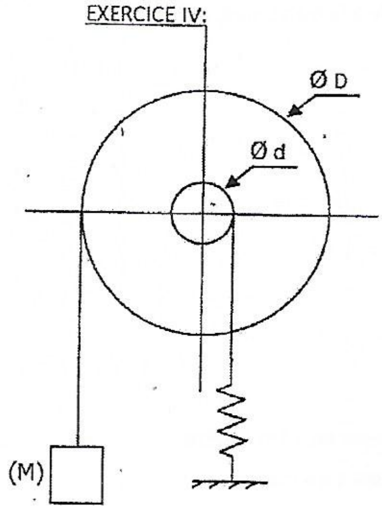
EXERCICE III

Un volant, de diamètre d 60 [mm]et dont la masse m 50 [kg] est supposée, uniformément repartie sur sa circonférence, tourne une vitesse constante N = 600 [tr/mn]

On prendra g =10 SI. Et π^2=10.

1°) Calculer son moment d'inertie,
2°) Calculer l'énergie cinétique du volant à ce régime (N=600[tr/mn]).
3°) Le volant ralentit sous l'effet de résistances passives et s'immobilise au bout de 2 minutes.
   a) Quelle et ta nature du mouvement du vo4lanr?
   b) Ecrire f es équations du mouvement.
   c) Représenter en fonction du temps t:
      - l'élongation angulaire,
      - la vitesse angulaire,
      - l'accélération angulaire.

EXERCICE IV:



Un ressort, de masse négigeab1e et de raideur k, est fixé à une extrémité et l'autre extrémité est liée à un fil inextensible souple qui

s'enroule sur un cylindre de diamètre d.

Sur un autre cylindre de diamètre D, solidaire et coaxial au

Premier cylindre, s'enroule un autre fil inextensible auquel est

suspendue à l'autre bout une masse M (voir figure ci-contre).

On néglige les masses des deux cylindres.

1°)A l'équilibre, en supposant. que l'allongement du ressort est éga1 à Δl exprimer la masse M –fonction de k, Δl, d, D et g (accélération de la pesanteur).

2°) On écarte le système de sa position d'équilibre en déplaçant la masse M vers le bas (suivant la verticale), puis on l'abandonne sans vitesse initiale. On suppose que les frottements sont négligeables et qu'il 'y a pas de glissement entre es fils et les cylindres.

a) Etablir l'équation differentie11e du mouvement de M.

b) En déduire l'impulsion du mouvement

e) Donner la période du mouvement.

d) Donner l'élongation horaire du mouvement.

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 2001-2002
SESSION du 17-18 octobre 2001
Options : TOUTES
Matière : PHYSIQUE
Durée :2 heures
Documents non autorisés

Tous les exercices sont Obligatoires.

EXERCICE 1 :

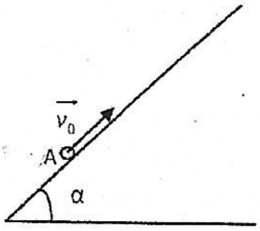


Figure 1

On prend g = 9,81 m/s2. Un solide de masse m est lancé du point A vers le haut suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné de α : 30^0 par rapport à l'horizontale, avec une vitesse initiale v_0 = 10 m/s (voir figure 1). Les frottements sont équivalents à une force parallèle à la trajectoire, de sens contraire à la vitesse et d'intensité constante égale à μP *avec* $\mu = \frac{\sqrt{3}}{10}$ et P = poids du solide. On prend comme origine des temps (t =O) l'instant de départ en A .

1)- A quel instant t_1 le solide atteint-il le point le plus haut de sa trajectoire ? Calculer la distance d ainsi parcourue.

2)- A quel instant t_2 il repasse au point A? Déterminer sa vitesse à cet instant.

3)- Quelle est l'énergie cinétique du solide â l'instant t_2 sachant que sa masse est de 50 g ?

EXERCICE 2 :

Figure 2

On prend g= 10 m /s et on néglige tous les frottements.

Deux billes assimilables à des points matériels, l'une A de masse m_1 =4m, l'autre B de masse m_2= 3m, sont placées aux extrémités d'une tige rigide T de masse négligeable mobile autour d'un axe horizontal (Δ) perpendiculaire à T au point O (voir figure 2).

On prend OA=2l, OB=l.

1)- Déterminer la position du centre d'inertie G du système (la tige T et les masses $m_1$et m_2) par rapport à O.

2)- Le système étant dans sa position d'équilibre stable, on l'écarte dans un sens choisi comme positif d'un petit angle θ_0= 8° et on l'abandonne sans vitesse initiale à l=0. On donne m=10g, l=12cm.

a) Etablir l'équation différentielle régissant le mouvement du système et en déduire sa nature, ainsi que sa période T.

b) Donner l'expression instantanée de l'élongation angulaire θ = $f(t)$(θ exprimé en radian).

c) Etablir la relation qui lie l'élongation angulaire θ et la vitesse angulaire $\overset{o}{\theta}$.En déduire la vitesse angulaire du système lorsque $\theta = \frac{\theta_0}{2}$.

3)- calculer la longueur du pendule simple synchrone de ce pendule composé.

EXERCICE 3:

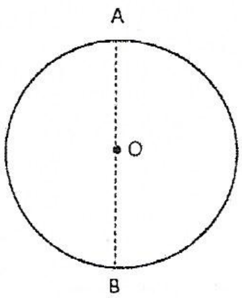


Figure 3

Un disque circulaire de 80 cm de diamètre peut tourner dans un plan vertical autour d' un axe horizontal perpendiculaire au plan du disque et passant par son centre O (voir figure 3). Son moment d'inertie par rapport à cet axe est de 48 $kg.m^2$. On applique au niveau de l'axe un couple moteur qui provoque la rotation du disque. Quand la vitesse de rotation atteint 90 tr/min. on coupe l'alimentation du moteur et l'on exerce sur le disque un couple résistant constant.

On constate qu'après 25 tours, la vitesse de rotation est réduite à 30 tr/min.

1)- a) Calculer la valeur du moment du couple de freinage.

b) Le disque tournant à raison de 30 tr/min, on supprime le couple de freinage. Quelle est la nature du mouvement du disque? Déterminer son équation horaire et la vitesse linéaire d'un point de sa circonférence.

2)- Au cours du mouvement de la phase précédente (phase sans couple résistant), un fragment de métal supposé ponctuel se détache du disque à l'instant ou il passe par la verticale AB en B. Les frottements sont négligeables et on prend $g = 9,8 \ m/s^2$.

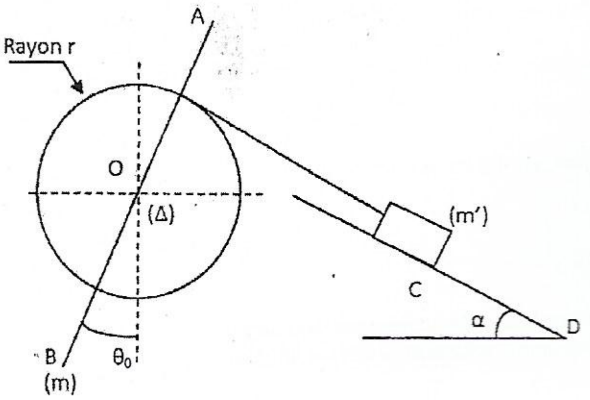
a- Déterminer la position du point C (point de rencontre du fragment avec le sol) par Rapport à la vertical passant par AB, si l'axe de rotation du disque se trouve à 0,60m du sol.

b- Evaluer le vecteur-vitesse $\vec{v}_c$ au point C en précisant l'angle que fait $\vec{v}_c$ avec l horizontale.

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 2000-2001
SESSION du 27-28 SEPTEMBRE 2000
Options : TOUTES
Matière : PHYSIQUE
Durée : 02 heures
Documents non autorisés

Exercice I :



Une roue de masse négligeable, de rayon r, peut tourner autour d'un axe de revolution horizontale (Δ).

Une tige AB homogène, perpendiculaire en son centre de gravité à l'axe (Δ), de longueur $2l$, de masse 3m, porté à son extrémité B une masse ponctuelle m.la tige AB est solidaire à la roue.

Un fil inextensible, de masse négligeable dont une extrémité est fixée à la roue, l'autre extrémité est accrochée à un petit solide de masse m (masse ponctuelle qui peut glisser sans frottement sur un plan incline d'angle α (voir figure 1)

1)- Déterminer l'angle θ_0 que fait l'axe de la tige AB avec la verticale du point O pour que le système soit en équilibre

Note : On étudiera séparément l'équilibre de l'ensemble (roue+tige AB+masse m) d'une part et celui du solide m' d'autre part.

2)- A l'instant t=0, on coupe le fil reliant le solide de masse m'a la roue,

a) Etudier la nature du mouvement du solide m' sur le plan incline

b) La distance CD étant de 0.5m, calculer :

- La durée du mouvement de m' sur [CD],
- La vitesse et l'énergie cinétique de m'au point D.

3)- On s'intéresse maintenant au mouvement pris par le système (roue+tige AB+masse m après que le fil a été coupé et en négligeant tout frottement.

a) Montrer que le système est animé d'un mouvement sinusoïdal autour de (Δ) d'amplitude θ_0

b) Déterminer au passage a la verticale du point O

- La valeur absolue de la vitesse angulaire θ.
- L'énergie cinétique du système

A.N: m=150g, m=125g, r=5cm, α=30°, g=10m/s², OB=OA=20cm.

Exercice II:

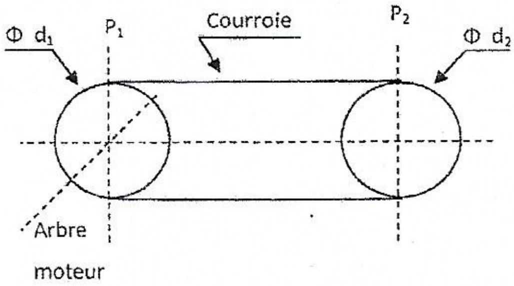


Figure 2

Une poulie P1 de diametre d1=100mm, fixée a l'are d'un moteur électrique, met 20 secondes pour atteindre la vitesse de régime de 1200tr/mn.

1)- Déterminer :

a) L'accélération angulaire, supposée constante de P1 pendant la période de démarrage

b) Le nombre de tours que la poulie P1 a finis avant d'atteindre la vitesse de régime.

2)- On relie la poulie P1 avec une autre poulie P2 par l'intermédiaire d'une courroie. On suppose qu'il n'y a pas de glissement entre les poulies et la courroie ; de plus on néglige tout frottement.

Déterminer le diamètre d2 de la poulie P2 pour qu'elle tourne a la vitesse de 480tr/mn (la poulie P1 tourne a 1200tr/mn).

Exercice III :

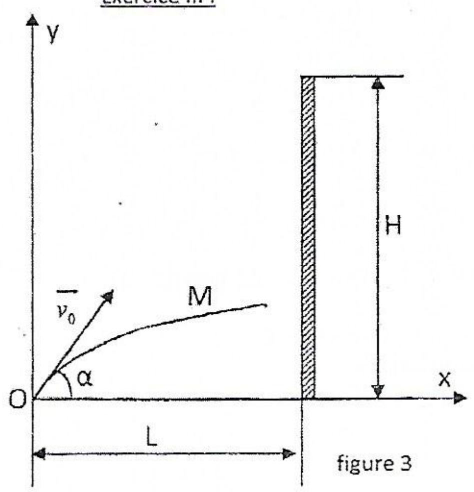


figure 3

Un projectile M est lancé d'un point O, à l'instant t=o avec une vitesse $\vec{v_0}$ inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontal, vers un mur AB de hauteur H situé à une distance L du point O (voir figure 3).

1)- Ecrire l'équation de la trajectoire de M.

2)- Déterminer l'angle $\alpha_m = (\vec{v_0}, Ox)$ pour que le projectile atteigne le mur au point A.

3)- Déterminer l'angle $\alpha_M = (\vec{v_0}, Ox)$ pour que la flèche de la trajectoire, c'est-à-dire l'ordonnée maximale coïncide avec le point B.

On donne: $v_0 = 2\sqrt{5} m/s$, H=0.75m, L=1m, g=10m/s^2

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 1999-2000
Options : TOUTES
Matière : PHYSIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

EXERCICE N° 1

Un camion dont la masse totale est de M = 4 tonnes, démarre sur une route rectiligne et horizontale. Il atteint une vitesse de 72 km/h en 5 mn et continue sa marche à vitesse constante. On suppose que l'ensemble des forces de frottement et de résistance de l'air est équivalent à une force unique, opposée à la vitesse, d ' intensité constante f = 300 N .Cette force est supposée indépendante de la vitesse et la pente de la route.

1°) Calculer l'intensité de la force de traction développée par le moteur dans les deux cas suivants :

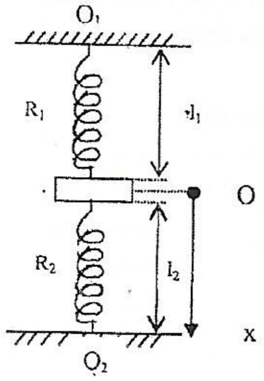
a°) au cours du démarrage, le mouvement étant alors supposé rectiligne et uniformément accéléré.

b°) après 5 minutes de marche, le camion roule alors à une vitesse constante.

2°) Pour ralentir le camion, le chauffeur débraie, annulant ainsi la force de traction et en même temps il freine. Le mouvement toujours rectiligne devient alors uniformément retardé. La vitesse du camion passe alors de 72 km/h à 36 km/h sur un parcours de 200 m. Calculer l'intensité de la force de freinage.

3°) Le camion aborde maintenant, avec la vitesse de 36 km/h, une côte qui s'élève de 20mm par mètre. Quelle doit être la valeur de la force de traction pour que sur une distance de 500 m, le mouvement étant uniformément accéléré. La vitesse atteigne 45 km/h. (On prend $g = 10 m/s^2$)

EXERCICE N°2



On donne O_1O_2 =76 cm, R_1et R_2 deus ressorts identiques de longueur à vide l_0 = 25 cm, de coefficient de raideur k = 24,5 N/m ; A un cylindre de 4 cm de haut, de masse M = 200g.

Le cylindre étant en équilibre, on le tire vers le bas de 3 cm et on l'abandonne sans vitesse initiale.

1°) Déterminer la position d'équilibre du centre de gravité G du cylindre.

2°) Former l'équation horaire du mouvement de G .

3°) Déterminer la période du mouvement

EXERCICE N° 3

Une fusée atteint une altitude de 600 km/h et éjecte un satellite de masse 40 Kg sur une orbite circulaire qu'il décrit d'un mouvement uniforme. La trajectoire est située dans le plan équatorial terrestre et son centre est celui de la terre. Le rayon de la terre vaut R = 6400 Km. A 800 Km d'altitude, la valeur de g est 8.2 10^{-2} m/s^2.

1°) Calculer la vitesse du satellite sur son orbite.

2°) Déterminer son énergie cinétique

3°) Calculer la durée d'une révolution.

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 1996-1997
Options : TOUTES
Matière : PHYSIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorises

EXERCICE 1

On admettra que le poids P d'un corps de masse m est dû à la seule force d'attraction terrestre.

1°) L'intensité P du poids d'un corps de masse m situé à une distance r du centre C de la terre est donnée par la relation : $P = k\frac{m}{r^2}$, k est une constante.

Exprimer l'accélération g de la pesanteur à une distance r de C en fonction de l'accélération g_0 de la pesanteur au sol, du rayon R de la terre et de r.

AN : $g_0 = 10$ m/s²; R = 6400 km et r = 7000 km

2°) Un satellite artificiel S de masse m a une trajectoire circulaire de rayon r dans le plan de l'équateur.

a°) Montrer que sa vitesse angulaire ω est reliée au rayon r de la trajectoire par la relation $\omega^2 r^3 =$ constante. Exprimer la valeur de cette constante en fonction de g_0 et R.

b°) Exprimer la période T du mouvement

On donne $\sqrt{r^3} = 18.6\times10^9$. Calculer T.

3°) Calculer en fonction de m, g, R et r le travail W du poids P du satellite lors du déplacement depuis le sol où $r_0 = R$ jusqu'à un point de la trajectoire de rayon r

4°) Exprimer l'énergie cinétique du satellite en fonction de m , g_0, R et r

EXERCICE 2

La remorque d'un véhicule au repos peut être assimilée au dispositif suivant : une masse M = 500 kg reposant par l'intermédiaire de deux ressorts identiques de raideur k sur une barre B représentent l'axe des roues de la remorque.

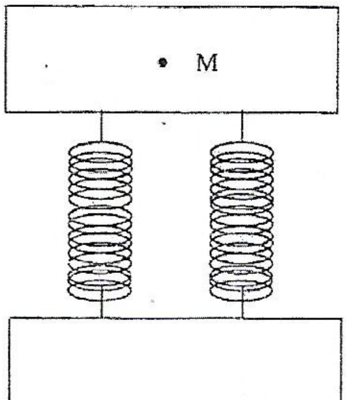
1°) En admettant que sous l'action de M , les deux ressorts verticaux sont comprimés de Δl = 15 cm, quelle est la raideur de chaque ressort ?

2°) Lorsque l'on charge la remorque, cela revient à augmenter M de m = 50 kg. Chaque ressort est alors comprimé d'une même quantité supplémentaire x_0.

a°) Calculer x_0

b°) A t =0 la charge m est enlevée. Etablir l'équation différentielle du mouvement de translation de la masse M en prenant un axe x'x orienté vers le bas.

c°) Calculer la période T_0 des oscillations.



EXERCICE 3

Une bille de masse m = 10 g, est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur 20 m au-dessus d'un plan sur lequel elle rebondit. Exprimer l'énergie potentielle du système (bille + Plan + terre), son énergie cinétique et l'énergie mécanique en fonction de t compté à partir du choc supposé parfaitement élastique. g= 10 m /s²

1°) En fait, à chaque choc sur le plan, une fraction q = 20% de l'énergie mécanique se trouve perdue. La bille rebondit ainsi à plusieurs reprises restant sur la même trajectoire verticale. Exprimer l'énergie mécanique après le n-^{ième} choc en fonction de n.

2°) Quelle distance aura au total parcouru la bille jusqu'à ce qu'elle s'immobilise ? Au bout de quel temps t la bille s'immobilise t-elle.

EXERCICE 4

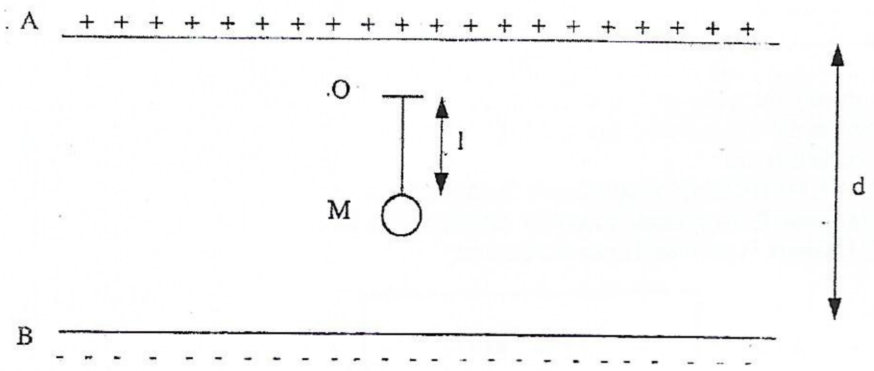
Une sphère conductrice M de masse m = 20 g et portant une charge q* est suspendue en un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil isolant inextensible de masse négligeable et de longueur l = 10 cm. Ce pendule est placé entre deux armatures métalliques A et B, plane et horizontale, de grande dimension, distante de d = 20 cm. Le point de suspension O est situé à 5 cm au-dessus de l'armature supérieure A. On applique entre les deux armatures une différence de potentielle U_{AB} = V_A - V_B = 2.10^3 V créant alors entre A et B un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$.

1°) Caractériser $\vec{E}$ et $\vec{F}$ s'exerçant sur M.

2°) La sphère porte la charge q = + 0.2.10^6 C. Le pendule est écarté de sa position d'équilibre de α = 90° et abandonné sans vitesse initiale. Déterminer la vitesse de M et la tension du fil au passage à la verticale.

3°) Le fil se casse au passage à la verticale, déterminer l'équation et la nature de trajectoire de M après rupture du fil.

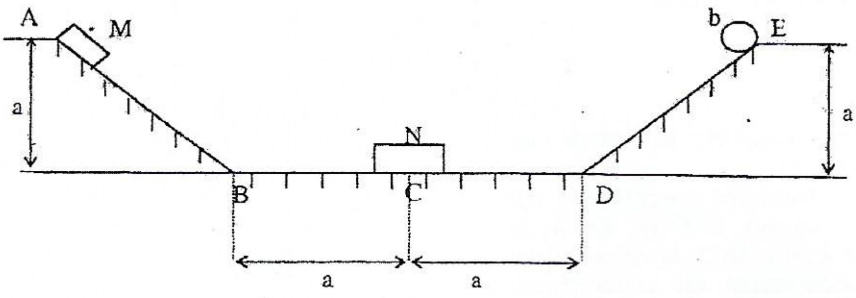
4°) Quelle est la durée du mouvement au moment où M touche l'armature B.



UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 1997-1998
Options : TOUTES
Matière : PHYSIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

1ère partie :



a = 10 m

La figure ci-dessus représente deux plans inclinés et un plan horizontal de traces AB, ED, et BD. Les corps M et N de masses respectives m_1=100g et m_2 = 10 g peuvent glisser sans frottement sur ces plans tandis que la bille de masse m_3=100g est animée d'un roulement sans glissement.

1°) M est lâchée de A sans vitesse initiale à l'instant t = 0. Ecrire l'équation horaire de son mouvement et déterminer l'instant t_B où il arrive en B ainsi que sa vitesse en B et sa composante horizontale.

2°) Calculer la durée du trajet BC et sa vitesse en C.

3°) En C, il heurte N, calculer les vitesses de M et N après les chocs (supposés parfaitement élastiques)

4°) Ecrire l'équation du mouvement de N entre C et D et déterminer l'instant où il arrive en D.

5°) A cet instant, la bille b est lâchée de E sans vitesse initiale.

a°) Calculer l'accélération du centre d'inertie de b

b°) Ecrire les équations horaires des mouvements des centres d'inertie de N et b sur ED

c°) Déterminer l'instant où ils se heurtent

2ème partie

On dispose d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 = 18 cm, dont l'une des extrémités est accrochée au point A du plafond.

1°) Calculer k si sa longueur devient l = 20 cm quand on l'étire avec une force d'intensité F = 10N.

2°) On suspend une masse m = 700g à l'autre extrémité du ressort. Déterminer la tension du ressort ainsi que sa longueur à l'équilibre.

3°) On tire la masse m vers le bas et on la lâche lorsque la longueur du ressort est de 25 cm. Etablir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G de m en utilisant la relation fondamentale de la dynamique, l'espace étant rapporté à un repère dont l'origine O se trouve à la position d'équilibre de G.

4°) Retrouver la même équation en utilisant le théorème de la conservation de l'énergie mécanique.

5°) Ecrire l'équation horaire du mouvement de G puis trouver la période des oscillations et l'expression de la vitesse de G quand il passe par O.

6°) Un deuxième ressort identique au précédent est attaché à la masse m, la deuxième extrémité étant fixée au point B qui se trouve sur la même verticale que A, à une distance AB = 50cm

a°) Donner les expressions littérales des tensions et des longueurs des deux ressorts à l'équilibre.

b°) On abaisse m de 5 cm de sa position d'équilibre puis on la lâche. Exprimer les tensions des ressorts à un instant quelconque t puis écrire l'équation différentielle du mouvement de G dans un repère dont l'origine se trouve à la nouvelle position d'équilibre de G.

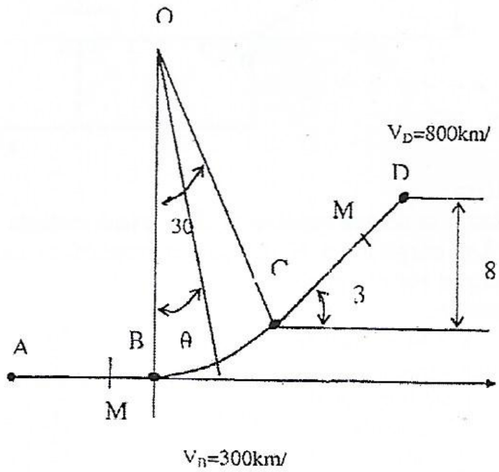
UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 1998-1999
Options : TOUTES
Matière : PHYSIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

EXERCICE N° 1

Un point matériel M décrit les trajectoires suivantes :

a°)Une trajectoire rectiligne AB horizontale de longueur 1300 m. En A, la vitesse est égale à zéro. En B, la vitesse atteint 300km/s. Le mouvement est uniformément accéléré.



b°) Une trajectoire circulaire BC de rayon R = 0.5 km. L'angle BOC est égal à 30° . Le mouvement est uniformément accéléré avec la même accélération que sur la trajectoire AB.

c°) Une trajectoire rectiligne CD inclinée de 30° sur l'horizontale. La différence de côte de C en D est de 8 km. Le mouvement est encore uniformément accéléré mais avec une accélération différente. En D la vitesse est de 800 km/h.

QUESTIONS :

Trajectoire AB

Ecrire les équations de mouvement et calculer le temps mis par le mobile pour se déplacer de A en B ainsi que la valeur de l'accélération Y du mouvement si on suppose que le mobile est en B quand on fait t = 0.

Trajectoire BC

a°) Calculer la vitesse angulaire ω en B et l'accélération angulaire du mouvement ω'

b°) Ecrire les équations angulaires et linéaires du mouvement.

c°) Calculer ω_c, V_c et l'accélération normale Y_n et le temps t.

Trajectoire CD

- Ecrire les équations du mouvement, en supposant que le temps t = 0 quand ce mobile est en B.
- Calculer la valeur du module de l'accélération Y et l'intervalle de temps mis par le mobile entre l'instant où il quitte le point B et celui où il atteint le point D.

EXERCICE 2 :

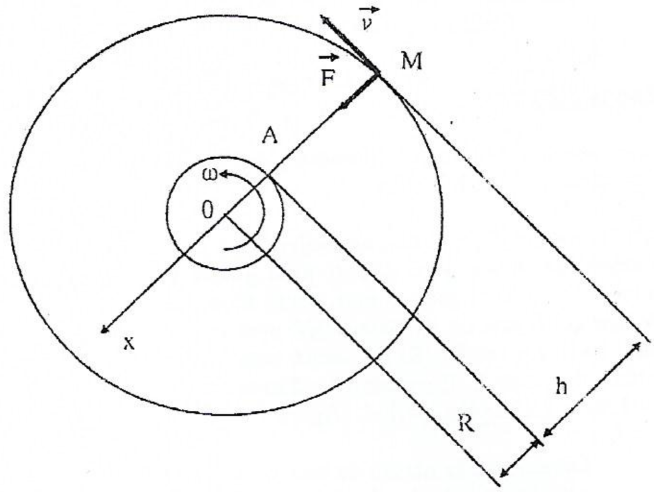
1°) Trouver l'expression de la relation, entre la vitesse V_M d'un satellite artificiel M, assimilable à un point matériel, et de la hauteur h, où il se trouve.

On considère que la trajectoire est circulaire autour de la terre. La force d'attraction F du satellite par la terre est considérée comme inversement proportionnelle au carré de la distance OM (satellite – centre de la terre)

$$F=\frac{Km}{(OM)^2}$$

Où m : masse du satellite

K : constante (à déterminer)



2°) Calculer à quelle hauteur de la terre en mouvement doit-on libérer le satellite pour que l'on puisse l'apercevoir immobile d'un point A sur la terre.

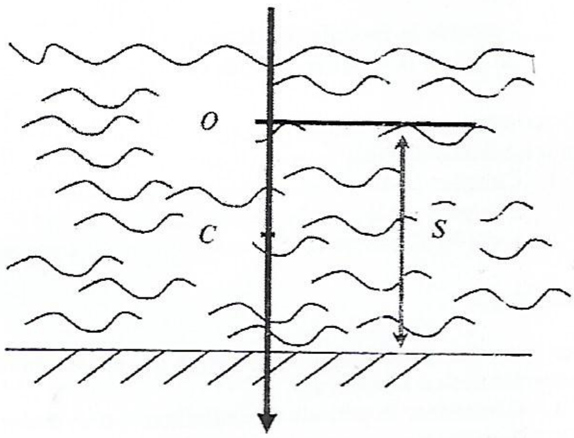
On donne : $g = 9.81\ m/s^2$

$R = 6370$ (rayon de la terre)

$\omega = 0.0007$ rd /s (module du vecteur vitesse angulaire de la rotation de la terre)

EXERCICE : 3

1°) On désire déterminer la profondeur d'un grand lac par l'étude du mouvement de descente d'une charge C, assimilable à un point matériel. En laissant descendre une charge C avec une vitesse V0, elle atteint le fond du lac après un certain temps T.



Déterminer l'expression S (chemin de la charge) si la projection sur l'axe des x des seules forces résistantes, à considérer de l'eau sur la charge est exprimée par :

$R = -km\,\dot{x}$

où :

m : masse de la charge

$\dot{x}$: projection de sa vitesse sur l'axe

k : constante positive

L'axe vertical ders x est orienté vers le bas.

O est l'origine de l'axe correspondant à la position de C au début de sa descente.

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 1995-1996
Options : TOUTES
Matière : PHYSIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

Exercice n°1

Dans tout le problème, on prendra $g = 1$ m/s² et l'on néglige les frottements

A°) Un solide (S), que l'on assimilera à un point matériel de masse M = 200 g, peut glisser en suivant la ligne la plus grande pente d'un plan incliné qui forme un angle $\alpha = 30°$ avec le plan horizontal. Le solide (S) est lâché sans vitesse initiale du point A. Il parcourt la distance AB = l = 2.50 m sur le plan incliné. (figure 1)

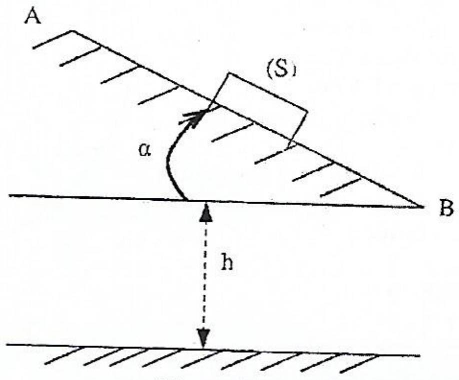


Figure 1

1. Déterminer la nature du mouvement pris par (S) et calculer la durée t_1 du trajet AB.
2. Calculer le module V_1 de la vitesse $\vec{V}_1$ de (S) en B. Quelles sont les composantes horizontale et verticale V_{1x} et V_{1y} ?

B°) Arrivée en B, le solide (S) animé de la vitesse $\vec{V}_1$ tombe sur le plan horizontal situé en contrebas à une distance h de B (figure 1). La chute dure $t_2 = 0.5$ s

1. Calculer la distance horizontale a,comprise entre la verticale passant par B et le point d'impact sur le plan horizontal, puis la hauteur h.
2. Calculer l'énergie cinétique du solide (S) à son arrivé sur le plan horizontal

Exercice n°2

Pour tous les problèmes, on néglige la masse du ressort et me mouvement selon la verticale.

1. Déterminer la période d'oscillations t_1 d'un ressort de constante de raideur k_1 au bout inférieur duquel on a suspendu une masse m.
2. On appelle T_1 et T_2, les périodes respectives des deux ressorts de constante de raideur k_1 et k_2, lorsque la même masse m est suspendue de leur bout respectif.On accroche maintenant bout à bout les deux ressorts comme le montre la figure de ci-contre.

En appelant T la période de l'ensemble lorsqu'on suspend la même masse m au bout du deuxième ressort.
Exprimer T en fonction de T_1 et T_2

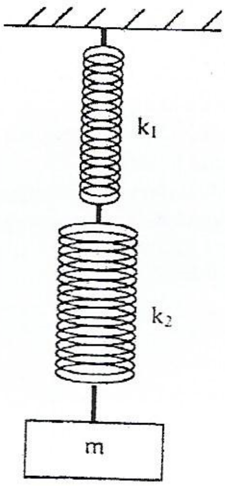


Figure 2

Exercice n°3

Entre les deux bornes A et B s'établit une ddp alternative de tension efficace Vo = 220 V et fréquence constante 50 Hz. Le schéma de la figure 3 est composé de :
-Une résistance R = 25 Ω

-Une inductance Lw = 60 Ω
-Un condensateur C de capacité variable
L'inductance L ne supporte pas de tension supérieure à V_1 = 120 V, au-delà de laquelle elle sera détruite. Dans la suite, on situe la position du problème à cette valeur limite V_1. On demande :
-Le diagramme de Fresnel des tensions ;
-La capacité limite 1/Cω du condensateur ;
-Le facteur de puissance maximale

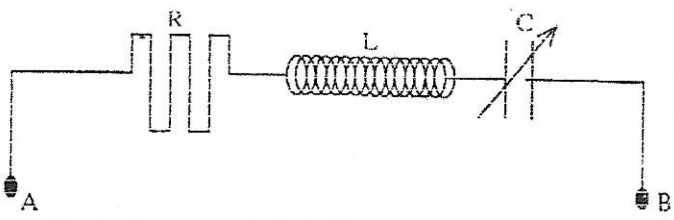


Figure 3

UNVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
CYCLE INGENIEUR

Année Universitaire 1994-1995
Options : TOUTES
Matière : PHYSIQUES
Durée : 3(trois) heures
Documents non autorisés

EXERCICE 1

Un mobile partant d'un point A, sans vitesse initiale, se déplace sur une voie rectiligne horizontale ABCD, orienté de A vers D, de la façon suivante :

-de A à B, d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $Y_1 = 0.1$ m /s²

-de B à C pendant 14 minutes d'un mouvement uniforme.

-de C à D, d'un mouvement rectiligne uniformément retardé d'accélération dont la valeur algébrique est $Y_2 = -0.1$ m/s² arrivant en D avec une vitesse nulle.

La distance AD est de 3.72 km.

1°) Calculer la vitesse maximum acquise par le mobile au cours de son parcours.

2°) Calculer le temps mis par le mobile pour faire le trajet ABCD

3°) Construire les diagrammes de la vitesse $v = v(t)$ et de l'accélération dans l'ensemble des trois phases.

EXERCICE 2

Un satellite décrit autour de la terre supposée sphérique, une orbite circulaire, à vitesse constante.

1°) a°) Déterminer la vitesse linéaire du satellite en km/s, lorsqu'il évolue à une altitude h = 3600 km

b°) Calculer la période de révolution du satellite en heures.

2°) A quelle altitude H doit graviter le satellite dans le plan équatorial si l'on veut qu'il reste fixe par rapport à une station terrestre (satellite géostationnaire).

On donne :

A l'altitude 0, $g_0 = 9.81$ m/s²

A l'altitude z, $g(z) = +g_0\frac{R^2}{(R+z)}$ où R = 6400 km (rayon de la terre)

EXERCICE 3

Une bille de masse m = 0.5 kg, assimilable à un point matériel, est accrochée à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur l. L'autre est fixée à un point O.

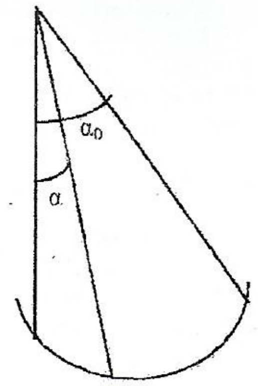
On néglige tous les frottements et on prend g = 9.81 m/s²

1°) Le fil est écarté de sa position d'équilibre verticale, d'un angle $\alpha_0 = 30°$ et on l'abandonne à lui même sans vitesse initiale. (cf figure 1)

Calculer la tension du fil dans les deux cas suivants :

a°) lorsque $\alpha = 30°$

b°)Lorsque le fil passe par la position d'équilibre verticale



2°) Le système (fil, bille peut tourner maintenant dans un plan vertical autour du point O. A la position B définie par $\beta = 60°$, on lance la bille avec une vitesse $\vec{V}_1$ (cf figure2).

a°) Donner l'expression de la tension du fil au point S en fonction de m, g, l, V_1, β

b°) Quelle doit-être la valeur minimale de V_1 pour que la bille atteigne le point S, le fil restant tendu.

c°) Calculer les accélérations tangentielle et normale de la bille au point B et au point S dans le cas où $V_1 = 5$ m/s.
On donne $l = 10$ cm

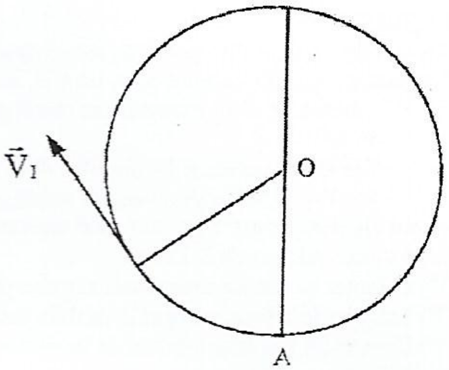


Figure 2

EXERCICE 4 :

Un train d'onde plane se propage dans un milieu dont les articules sont animés d'un mouvement périodique définit par la relation :

$y = 4\sin\left(\frac{2x}{6}t + \varphi\right)$ t : [s] y : [cm]

1°) Calculer la vitesse de propagation du mouvement vibratoire, sachant que la longueur d'onde est égale à 24 cm.

2°)Calculer en degré le déphasage correspondant à deux positions occupées par la même particule à une seconde d'intervalle.

3°) Calculer (en radian) à un instant donné la différence de phase correspondant à deux particules séparées par une distance de 21 cm, dans la direction de propagation : l'exprimer en nombre fractionnaire de π.

4°) L'élongation à un instant donné t d'une certaine particule, est égale à 3 cm. Quelle sera l'élongation de la même particule 2 secondes plus tard ?

Année Universitaire 1998 - 1999
Matière : ELECTRICITE
Durée : 1 heure
Option : TEM

EXERCICE 1

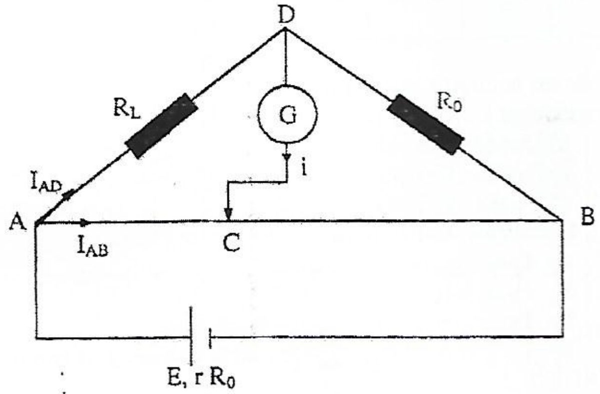
Un circuit électrique comprend un générateur de force électromotrice E=20V, de résistance r=1Ω, Un moteur de résistance r'=2Ω et une résistances R=7Ω placés en série.

1. Quelle est l'intensité du courant dans le circuit lorsque le moteur ne tourne pas ?
2. Calculer l'énergie thermique dissipée par effet Joule dans le moteur bloqué au bout de 10mn
3. On laisse le moteur tourner. Quand la vitesse de régime est atteinte, l'intensité du courant qui le traverse est 1A

a). Calculer la force électromotrice du moteur.
b). Calculer la puissance utile.
c). Calculer la tension entre ses bornes.

EXERCICE 2

Une lampe à incandescence porte les indications suivantes : 220V - 60W. Ces valeurs présentent la tension que l'on doit appliquer à la lampe pour un éclairage normal (tension nominale) et la puissance qu'absorbe la lampe dans ce cas (puissance nominale).



1). Calculer la résistance R_L du filament de la lampe à chaud à l'aide des valeurs nominales précédentes.

2). On désire mesurer la résistance du filament çà froid par la méthode du pont à fil.

E : Electromoteur
générateur de tension E=2V de résistance interne négligeable.
R_0 : Résistance étalon =20Ω
Segment AB est un fil calibré de résistance R=2Ω
Longueur AB=1m
En déplaçant le curseur C, on constate que le courant *i*
Le galvanomètre G s'annule pour AC=80 cm
Calculer dans ces conditions :

a. La résistance R'_L du filament ;
b. L'intensité du courant dans le fil AB ;
c. L'intensité du courant dans le filament R'_L et dans R_0 ;

2. Calculer la puissance dissipée par la lampe dans ces conditions

EXERCICE 3

Une bobine soumise à une tension continue de 3.9 V est traversée par un courant de 30 mA Soumise à une tension sinusoïdale de valeur efficace 5.4 V et de fréquence 50 Hz, l'intensité efficace est de 30 mA.

1°) Calculer la résistance r et l'inductance L de cette bobine.

2°) a°) Donner l'expression de l'intensité instantanée, la tension étant prise comme référence.

b°) A la même tension, quelle serait l'intensité efficace du courant pour une fréquence f = 10 KHz ?

3°) Cette bobine est ensuite montée ensuite avec une résistance R inconnue et un condensateur de capacité inconnue. On applique une tension sinusoïdale u de valeur efficace 6V et de fréquence 50Hz à ce dipôle. Un voltmètre indique les tensions efficaces suivantes :

U1 = 4.70 V pour la bobine
U2 = 8.00 V pour le condensateur
U3 = 0.26 V pour la résistance

a°) Calculer la capacité du condensateur et la résistance R. Le dipôle est-il inductif ou capacitif ?

b°) Donner l'expression de l'intensité instantanée, la tension u appliquée étant prise comme référence.

Année Universitaire 1999 - 2000
Matière : ELECTRICITE
Durée : 1 heure
Option : TEM

EXERCICE N°1 :

Soit un circuit constitué par l'oscillation en série d'une résistance R. d'une bobine de résistance r et d'inductance L et d'un condensateur de capacité c=2µF. Il est alimenté par un générateur basses fréquences fournissant une tension sinusoïdale de fréquence f et d'amplitude Vm. Un ampèremètre est inséré dans le circuit pour mesurer l'intensité du courant.

1.a) Faire un schéma de montage.

b) A l'aide d'un oscillographe on a obtenu les sinusoïdes de tension S_1 et S_2 dont les variations en fonction du temps ont été relevées. Le temps t =0 (milliseconde) est choisie arbitrairement.

T(ms)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
V(volts) (S1)	6	4,59	1,05	-2,98	-5,63	-5,65	-3,02	1,01	4,57	6
V(volts) (S2)	..	0,268	0,35	0,27	0,06	0,174	-0,328	-0,32	-1,76	0,06

Quelle est la courbe correspondant à v(t) tension aux bornes du générateur - et celle correspondant à $v_r(t)$ - aux bornes de la résistance R ? Justifiez votre réponse

b) Donner une valeur approximative de la fréquence des oscillations.

c) Evaluer l'amplitude de v(t) ainsi que celle de $v_r(t)$.

d) Donner le déphasage entre v(t) et $v_r(t)$. Indiquer si c'est un retard ou une avance.

2. L'ampèremètre indique une valeur de 25,5mA

a) Que signifie cette valeur ?

b) en déduire la valeur de R.

c) Déterminer l'impédance du circuit.

d) En déduire la résistance r de la bobine, puis son inductance L.

EXERCICE 2 :

Pour le circuit de la figure :

1) en utilisant le théorème de superposition

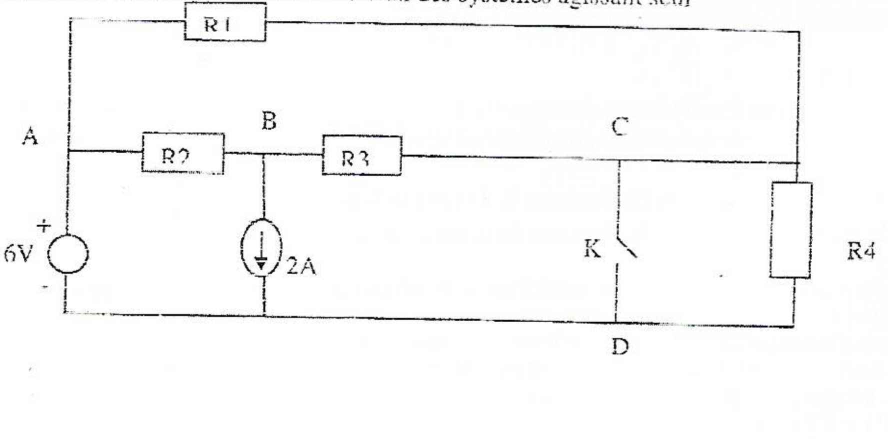
a) Calculer le courant dans la branche CD (directe) lorsque K est fermer.

b) Calculer V_{CD} lorsque K est ouvert.

2) calculer les intensités des courants dans les branches et les différentes tensions aux nœuds pour K ouvert

on donne : $R_1=2\omega\Omega$; $R_2=4\Omega$; $R_3=2\Omega$; $R_4=4\Omega$; générateur de tension : 6V ; générateur de courant 2A.

RAPPEL :*théorème de superposions* : lorsque dans un réseau de conducteur on superpose plusieurs systèmes de f.e.m et f.c.e.m l'intensité du courant dans chaque branche est égale à la somme des intensités dues à chacun des systèmes agissant seul



EXERCICE 3

On se propose d'utiliser un demi-anneau ($\frac{1}{2}$ cercle) d'un conducteur comme élément de chauffage d'un système. (par exemple carburateur d'un moteur pendant l'hiver).

Les caractéristiques de l'anneau sont:

- Rayon interne : R_1 - rayon externe : R_2 -épaisseur : e
- résistivité : ρ - surface latérale : S -masse : m
- Chaleur spécifique : c

1. Calculer la résistivité R du demi-anneau en fonction de ses caractéristiques.
2. Déterminer la valeur optimale de R pour laquelle la puissance dégagée par effet joule (dans l'anneau) est maximale, lorsque l'anneau est branché à un générateur de tension V et de résistance interne r. Donner des recommandations quant au choix du matériau à utiliser.
3. Donner l'expression de cette puissance maximale.
4. Une partie de l'énergie dQ reçue par le conducteur (isolé) est perdue pendant le temps dt suivant l'équation : $dQ=kS(T-T_a)dt$
   - K est une constante de proportionnalité
   - T_a est la température ambiante du milieu où le conducteur est placé.

Déterminer T=f(t) et montrer que T tend vers une température d'équilibre. Faire des remarques pertinentes.

Indication : L'énergie nécessaire pour élever de dT la température d'une masse m est mcdT.

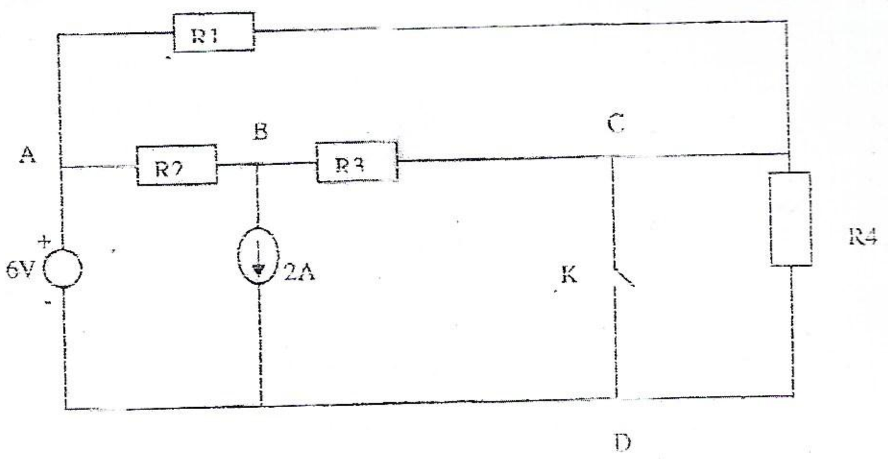


Table des matières

MATHEMATIQUES 1

Types de sujet, exercices .... 2 à 23

Sujets concours .... 23 à 61

PHYSIQUES 62

Types de sujet, exercices .... 63 à 79

Sujets concours .... 80 à 99