大作业2

2015080072 自53 韩载贤

1. 方案设计

- $SEIR模型\begin{cases}\frac{dS}{dt}=-\frac{r\beta IS}{N}\\ \frac{dE}{dt}=\frac{r\beta IS}{N}-aE\\ \frac{dI}{dt}=aE-\gamma I\\ \frac{dR}{dt}=\gamma I\end{cases}$ ，其中，$\gamma=0.5,\ E_0=2000,\ I_0=0,\ N=10000, r=10,\ \beta=0.02, a=0.4$

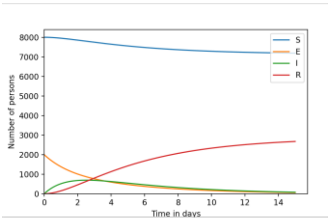
通过Euler方法实现S(t),E(t),I(t),R(t)。

  - 欧拉方法：h为步长，$y'=hf(x_n,y_n)$

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$

$$\therefore\begin{cases}S_{n+1}=S_n+h(-\frac{r\beta IS_n}{N})\\ E_{n+1}=E_n+h(\frac{r\beta I_nS_n}{N}-aE_n)\\ I_{n+1}=I_n+h(aE_n-\gamma I_n)\\ R_{n+1}=R_n+h(\gamma I_n)\end{cases}$$

Python实现结果：



结果可发现在T等于15到20时，参数收敛。（因为cpu性能，T设为15）

2. 误差分析

欧拉法组要考虑两种误差：方法累积误差，存储累积误差。

-方法累积误差：

$$\Delta_{n+1}\le(1+hM)\Delta_n+\frac{h^2}{2}L,\qquad \Delta_{n+1}+\frac{1}{hM}\frac{Lh^2}{2}\le(1+hM)\left[\Delta_n+\frac{1}{hM}\frac{Lh^2}{2}\right]\le\cdots\le(1+hM)^{n+1}[\Delta_0+\frac{1}{hM}\frac{Lh^2}{2}]$$

-存储（舍入）累积误差：

$$\delta_{n+1}\le(1+hM)^{n+1}\delta_0+\frac{1}{2}10^{-m},\ \ \delta_{n+1}\le(1+hM)^{n+1}\left(\delta_0+\frac{1}{2}\frac{1}{hM}\times10^{-m}\right)$$

在两个误差中，$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\le M,\ \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|=\left|y^{(2)}(x)\right|\le L$。

首先需要求M，L的值。在这儿可以利用线性代数的定理。为了计算的方便S，I，E，R中取最大值，使得获得M，L值。

$$Y'_{n\times1}=f(x,Y_{n\times1})=B_{n\times1}Y^T_{n\times1}A_{n\times n}\ Y_{n\times1}+C_{n\times n}\ Y_{n\times1}=\begin{bmatrix}-2\times10^{-5}\\2\times10^{-5}\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S&E&I&R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0.5&0\\0&0&0&0\\0.5&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S\\E\\I\\R\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-0.4&0&0\\0&0.4&-0.5&0\\0&0&0.5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S\\E\\I\\R\end{bmatrix}$$

$$Y''=2BY^TAY'+CY'=(2BY^TA+C)(BY^TA+C)Y=(2\begin{bmatrix}-2\times10^{-5}\\2\times10^{-5}\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S&E&I&R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0.5&0\\0&0&0&0\\0.5&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-0.4&0&0\\0&0.4&-0.5&0\\0&0&0.5&0\end{bmatrix})(\begin{bmatrix}-2\times10^{-5}\\2\times10^{-5}\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S&E&I&R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0.5&0\\0&0&0&0\\0.5&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-0.4&0&0\\0&0.4&-0.5&0\\0&0&0.5&0\end{bmatrix})\begin{bmatrix}S\\E\\I\\R\end{bmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0.0000000002s-0.00002\ldots+0.0000100002i\\-0.0000040002s+0.43494\ldots-0.0000140002i\\0.000004s-0.97858\ldots+0.250004i\\-0.25i+0.54365\ldots\end{pmatrix}$$
。因此，可以取s,e,i,r 的最大值。

$$\frac{\partial Y'}{\partial Y}=2BY^TA+C=2\begin{bmatrix}-2\times10^{-5}\\2\times10^{-5}\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S&E&I&R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0.5&0\\0&0&0&0\\0.5&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-0.4&0&0\\0&0.4&-0.5&0\\0&0&0.5&0\end{bmatrix}$$

在题目输入的总误差上限为b。所以可以写方法累积误差$\le\frac{b}{2}$， 舍入累积误差$\le\frac{b}{2}$。最后，反复代入减少的h可以得到 满足条件的h，m的值。

题目条件b=10，python运行结果可见

```
h:
1.0000000000000002e-06
m:
5.301031081399914
```

， h(步长) $=1.0\times10^{-6}$,此时，$m\ge6$，方法累积误差为0.90731824⋯，m=6时，舍入累积误差为1.0000025...