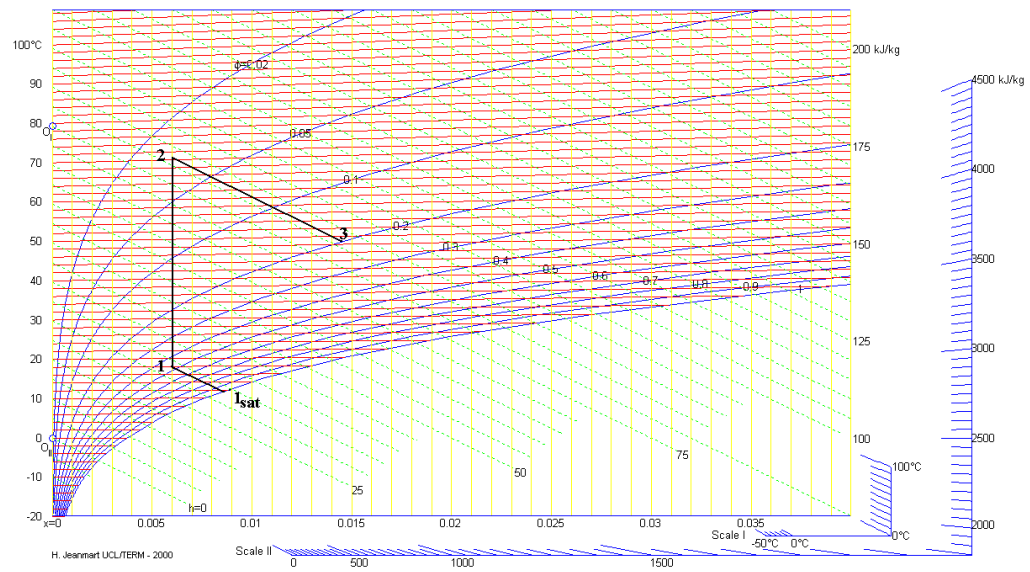


# MECA 1855 Thermodynamique et Energétique

## Solutions de la séance 10

### Exercice 1 - Séchage du bois



Une première étape à considérer est l'estimation de la quantité de bois à sécher par heure et de là, le calcul de la quantité d'eau à prélever par heure de ces planches.

Calcul de l'équivalent-débit de bois dans l'installation :

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_{\text{bois}} &= \frac{V \times \rho_{\text{bois}}}{\text{Temps}} \\
 &= \frac{N \times \text{Surface} \times \text{Epaisseur} \times \rho_{\text{bois}}}{\text{Temps}} \\
 &= \frac{60 \times 4 \times 0.02 \times 750}{48} \\
 &= 75 \left[ \frac{\text{kg}_{\text{bois}}}{\text{h}} \right]
 \end{aligned}$$

Calcul du débit d'eau à extraire :

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_{eau} &= \frac{\text{quantité d'eau à enlever}}{\text{Temps}} \\
 &= \text{quantité d'eau à enlever par kg de bois} \times \text{Débit de bois} \\
 &= (\text{humidité finale} - \text{humidité initiale}) \times \text{Débit de bois} \\
 &= (0.2 - 0.04) \dot{m}_{bois} \\
 &= 12 \left[ \frac{kg_{eau}}{h} \right]
 \end{aligned}$$

## Etape 1 : Caractéristiques des différents états

TABLE 1 – Exerice 5 - Caractéristiques initialement connues de l'air humide

	Pression [bar]	Température [°C]	Enthalpie [kJ/kg]	x [-]	φ [-]
1 <sub>sat</sub>	1	12			1
1	1	18			
2	1	70			
3	1				0.2

### Caractéristiques de l'état 1

Sur base des températures humides et sèches de l'air à l'état 1, on peut déterminer les humidités absolue et relative ainsi que l'enthalpie par voie graphique :

$$\phi_1 = 0.45 \quad h_1 = 34 \left[ \frac{kJ}{kg_{air sec}} \right] \quad x_1 = 0.006$$

### Caractéristiques de l'état 2

L'air humide pénètre dans un réchauffeur d'air isobare où sa température est portée à 70°C. Cette transformation ne modifie pas la quantité d'eau dans l'air, l'humidité absolue reste constante durant cette transformation ( $x_2 = x_1$ ).

$$\phi_2 = 0.03 \quad h_2 = 87 \left[ \frac{kJ}{kg_{air sec}} \right] \quad x_2 = 0.006$$

### Caractéristiques de l'état 3

De l'état 2 à l'état 3, l'air humide entre en contact avec le bois et se charge en eau, ce qui permet le séchage du bois (par diminution de sa masse d'eau). L'humidité absolue de l'air augmente donc puisque la quantité de vapeur d'eau augmente sans que la quantité d'air ne soit modifiée. Durant cette transformation, on fera l'hypothèse que l'enthalpie massique de l'air est conservée (hypothèse erronée car l'enthalpie du mélange d'air humide doit augmenter du fait de l'augmentation de la masse).

$$\phi_3 = 0.2 \quad h_3 = 87 \left[ \frac{kJ}{kg_{air sec}} \right] \quad x_3 = 0.0145 \quad t_3 = 48 [^{\circ}C]$$

TABLE 2 – Exerice 5 - Caractéristiques finales de l'air humide

	Pression [bar]	Température [°C]	Enthalpie [kJ/kg]	x [–]	φ [–]
1 <sub>sat</sub>	1	12	34	0.009	1
1	1	18	34	0.006	0.45
2	1	70	87	0.006	0.03
3	1	48	87	0.0145	0.2

### Par voie analytique

Par voie analytique, on trouve les valeurs suivantes :

$$\phi_{sat} = 1 \quad h_{sat} = 34.3179 \left[ \frac{kJ}{kg_{air\ sec}} \right] \quad x_{sat} = 0.0088$$

$$\phi_1 = 0.4944 \quad h_1 = 34.3179 \left[ \frac{kJ}{kg_{air\ sec}} \right] \quad x_1 = 0.0064$$

$$\phi_2 = 0.0327 \quad h_2 = 87.4708 \left[ \frac{kJ}{kg_{air\ sec}} \right] \quad x_2 = 0.0064$$

Les caractéristiques du point 3 doivent être obtenues par itération :

$$t = \frac{h_3 - \left[ 0.622 \left( \frac{\phi p_{sat}(t)}{1 - \phi p_{sat}(t)} \right) \right] 2501.6}{1.009 + 1.854 \left[ 0.622 \left( \frac{\phi p_{sat}(t)}{1 - \phi p_{sat}(t)} \right) \right]}$$

$$\phi_3 = 0.2 \quad t_3 = 48.8 [^{\circ}C] \quad h_3 = 87.4708 \left[ \frac{kJ}{kg_{air\ sec}} \right] \quad x_3 = 0.0144$$

### Etape 2 : Calcul du débit d'air initial

Le débit d'eau à prélever dans le bois à été calculer dans les étapes préliminaires de l'exercice. Ce débit d'eau est entièrement transféré à l'air humide durant la transformation  $2 \rightarrow 3$  permettant l'augmentation de son humidité absolue de  $x_2$  à  $x_3$ . La quantité d'eau reçue par l'air humide par kg d'air sec vaut :

$$m_{eau} = m_{air\ sec} \times (x_3 - x_1)$$

Ce qui permet le calcul du débit d'air sec dans l'installation :

$$\dot{m}_{air\ sec} = \frac{\dot{m}_{eau}}{(x_3 - x_1)} = 1412 \left[ \frac{kg_{air\ sec}}{h} \right]$$

Et comme il n'y a pas de variation de débit d'air sec dans l'installation, ce débit reste valable en tous les états parcourus par le fluide. Par contre, le débit d'air humide varie à chacune des étapes du calcul :

Et on vérifie bien que la différence de débit d'air humide est simplement égal au débit d'eau prélevé :  $12 [kg/h]$ .

TABLE 3 – Exerice 5 - Variations locales des débits

Etats	Débit d'air sec	Débit d'air humide
	$\left[ \frac{kg_{air\ sec}}{h} \right]$	$\left[ \frac{kg_{air\ humide}}{h} \right]$
1	1412	$1412 \times (1 + 0.006) = 1422.5$
2	1412	$1412 \times (1 + 0.006) = 1422.5$
3	1412	$1412 \times (1 + 0.0145) = 1434.5$

### Etape 3 : Energie consommée et rendement de séchage

$$\begin{aligned}
 E_{\text{séchage}} &= \dot{m}_{\text{air sec}} \times \Delta_1^2 h \times t \\
 &= 1412 \times (87 - 34) \times 48 \\
 &= 3592 \text{ [MJ]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\text{séchage}} &= \dot{m}_{\text{air sec}} \times \Delta_1^2 h \\
 &= 1412 \times (87 - 34) \\
 &= 20.79 \text{ [kW]}
 \end{aligned}$$

### Rendement de séchage

Potentiel énergétique du bois :

$$P_{\text{bois}} = \dot{m}_{\text{bois}} PCI_{\text{bois}} = 75 \times 18 = 1350 \left[ \frac{MJ}{h} \right] = 375 \text{ [kW]}$$

Le rendement de séchage est de :

$$\eta_{\text{sec.}} = 1 - \frac{20.79}{375} = 0.9446$$

## Variante de l'exercice 1

Même exercice que précédemment, avec, cette fois-ci, une augmentation de la température du bois de 15 [ $^{\circ}C$ ] durant l'opération de séchage.

### Solution

Etant donné que le bois va se réchauffer d'une quinzaine de degrés, l'air humide va perdre de l'enthalpie durant le processus de séchage. En effet, l'énergie étant conservée, le gain d'enthalpie du bois doit être compensé par la perte de l'enthalpie de l'air. On écrit donc le bilan d'enthalpie (les indices  $e$  représentent l'entrée du composé à sécher et  $f$  sa sortie) :

$$\begin{aligned}\dot{m}_{air\ sec} h_2 + (\dot{m}_{bois\ sec} c_{bois} + \dot{m}_{eau} c_{p, eau}) t_e &= \dot{m}_{air\ sec} h_3 + \dot{m}_{bois} c_{bois\ sec} t_s \\ \frac{\dot{m}_{eau}}{(x_3 - x_2)} h_2 + (\dot{m}_{bois} - \dot{m}_{eau}) c_{bois} t_e + \dot{m}_{eau} c_{p, eau} t_e &= \frac{\dot{m}_{eau}}{(x_3 - x_2)} h_3 + (\dot{m}_{bois} - \dot{m}_{eau}) c_{bois} t_s \\ \frac{\dot{m}_{eau}}{(x_3 - x_2)} (h_3 - h_2) + (\dot{m}_{bois} - \dot{m}_{eau}) c_{bois} (t_s - t_e) - \dot{m}_{eau} c_{p, eau} t_e &= 0 \\ \frac{12}{(x_3 - 0.006)} (h_3 - 87.4708) + (75 - 12) \times 1.5 \times 15 - 12 \times 4.186 \times 288.15 &= 0\end{aligned}$$

De plus, l'humidité absolue :

$$x_3(t_3) = 0.622 \left( \frac{0.2 p_{sat}(t_3)}{1 - 0.2 p_{sat}(t_3)} \right)$$

et l'enthalpie :

$$h_3(t_3) = 1.009 t_3 + \left[ 0.622 \left( \frac{0.2 p_{sat}(t_3)}{1 - 0.2 p_{sat}(t_3)} \right) \right] (2501.6 + 1.854 t_3)$$

Il suffit donc d'itérer ces équations sur  $t_3$  pour calculer les caractéristiques de l'air en sortie du séchage.

## Exercice 2 - Tour de refroidissement

Cet exercice se replace dans la thématique suivie tout au long des séances de tp autour du fonctionnement des centrales électriques. Le fonctionnement des tours de refroidissement est l'objectif de cet exercice. Le principe est assez simple : de l'air atmosphérique est aspiré à la base de la tour. Dans la tour, l'eau du cycle secondaire de la centrale qui a permis la condensation de la vapeur du cycle principal, est finement pulvérisée. L'air aspiré (par tirage naturel) se charge en vapeur d'eau, augmentant son humidité. Le refroidissement et le prélèvement de l'eau ainsi effectué permet le refroidissement de l'eau circulant dans le circuit secondaire. Cette méthode permet d'éliminer la chaleur perdue au condenseur vers l'air ambiant plutôt que vers la rivière, ce qui est moins négatif pour l'environnement.

### Etape 1 : caractéristiques des différents états

TABLE 4 – Exercice 6 - Caractéristiques initiales de l'air humide

	Pression [bar]	Température [°C]	Enthalpie [kJ/kg]	x [–]	$\phi$ [–]
1	1	15			0.8
2	1	25			1

Les caractéristiques de l'air ambiant fixe nous fournissent son enthalpie et son humidité absolue via le diagramme h-x :

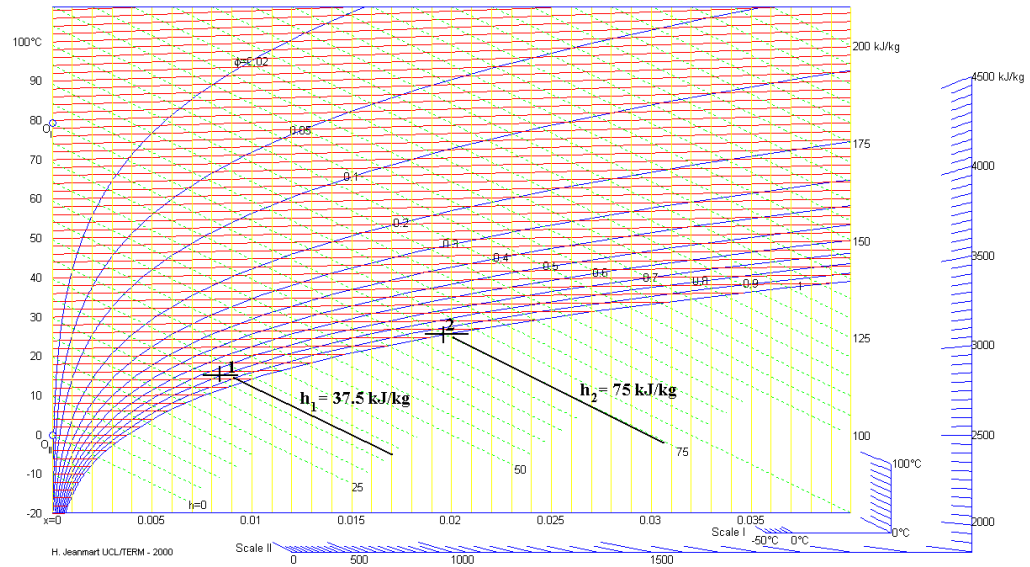
$$t_{air\ humide,1} = 15\ ^\circ C \quad \phi = 0.8 \quad \Rightarrow \quad h_{air\ humide,1} = 37.5 \left[ \frac{kJ}{kg_{air\ sec}} \right] \quad x_{air\ humide,1} = 0.0085$$

On fixe comme contrainte de conception la minimisation du panache de fumée. Ce panache est inexistant tant que  $\phi \leq 1$ . Techniquement, plus l'humidité relative est importante, plus petit sera le débit d'air aspiré. Le choix d'une humidité relative  $\phi = 1$  minimise donc le débit d'air (et donc la taille de la tour de refroidissement et, partant de là, l'investissement nécessaire à la construction) tout en assurant qu'il n'y ait pas de panache de fumées en sortie de tour. On trouve ainsi les caractéristiques de sortie des fumées :

$$t_{air\ humide,2} = 25\ ^\circ C \quad \phi = 1 \quad \Rightarrow \quad h_{air\ humide,2} = 75 \left[ \frac{kJ}{kg_{air\ sec}} \right] \quad x_{air\ humide,2} = 0.0195$$

TABLE 5 – Exercice 6 - Caractéristiques finales de l'air humide

	Pression [bar]	Température [°C]	Enthalpie [kJ/kg]	x [–]	$\phi$ [–]
1	1	15	37.5	0.0085	0.8
2	1	25	75	0.0195	1



## Etape 2 : Calcul du débit d'air nécessaire

Pour calculer le débit d'air nécessaire au refroidissement de l'eau du condenseur, on écrit le bilan d'énergie dans la tour de refroidissement <sup>1</sup> :

$$\Delta H = 0 \rightarrow H_{\text{entrée}} = H_{\text{sortie}}$$

$$\dot{m}_{(\text{air sec} - 1)} h_1 + \dot{m}_{\text{eau}} c_{p_{\text{eau},l}} t_s = \dot{m}_{(\text{air sec} - 2)} h_2 + (\dot{m}_{\text{eau}} - \dot{m}_{\text{eau évap}}) c_{p_{\text{eau},l}} t_e$$

Ainsi que le bilan de masse de vapeur d'eau et d'air humide dans la tour de refroidissement :

$$\dot{m}_{(\text{air humide} - 1)} + \dot{m}_{\text{eau évap}} = \dot{m}_{(\text{air humide} - 2)}$$

$$\dot{m}_{\text{air sec}} (x_2 - x_1) = \dot{m}_{\text{eau évap}}$$

On obtient donc l'équation suivante :

$$\dot{m}_{\text{air sec}} (h_2 - h_1) - \dot{m}_{\text{air sec}} (x_2 - x_1) c_{p_{\text{eau},l}} t_e = \dot{m}_{\text{eau}} c_{p_{\text{eau},l}} (t_s - t_e)$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\text{air sec}} &= \frac{8 \cdot 10^3 \times 4.18 \cdot 10^3 \times (42.8 - 30)}{(75 \cdot 10^3 - 37.5 \cdot 10^3) + (0.0085 - 0.0195) \times 4.186 \cdot 10^3 \times 30} \\ &= 11850 \text{ [kg/s]} \end{aligned}$$

**Remarque importante :** Dans la formule précédente, la température de l'eau  $t_e$  doit être exprimée en degré Celsius dans la formule car la référence arbitraire d'enthalpie utilisée dans le diagramme de l'air humide est fixée à 0 kJ/kg à 0 °C.

1. Les enthalpies s'exprimant en  $\left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}_{\text{air sec}}} \right]$ , le bilan d'énergie nécessite l'utilisation des débits d'air sec en 1 et en 2.

### Etape 3 : Calcul de la puissance cédée au réfrigérant

La puissance cédée au réfrigérant s'obtient simplement comme étant la variation d'enthalpie de l'air multipliée par son débit.

$$\dot{m}_{\text{air sec}} (h_2 - h_1) = 444 [MW]$$

### Etape 4 : Calcul du débit d'eau évaporé lors de son refroidissement

Le débit d'eau évaporé lors du refroidissement est entièrement transmis à l'air. Il s'agit donc de la différence entre le débit d'air humide initial et le débit d'air humide final (le débit d'air sec est constant lui).

$$\begin{aligned}\dot{m}_{\text{eau}} &= \dot{m}_{\text{air humide } 2} - \dot{m}_{\text{air humide } 1} \\ &= \dot{m}_{\text{air sec}} \times (1 + x_2) - \dot{m}_{\text{air sec}} \times (1 + x_1)\end{aligned}$$

$$\dot{m}_{\text{eau}} = \dot{m}_{\text{air sec}} (x_2 - x_1) = 11850 \times (0.0195 - 0.0085) = 130 [kg/s]$$

## Exercice 3

### Etape 1 : calcul de la quantité d'eau évaporée

La quantité d'eau évaporée à la tour de refroidissement doit être exactement égale à la quantité qu'il faut réinjecter dans le cycle pour garder un fonctionnement constant au système de refroidissement. Cette quantité peut être exprimée à l'aide d'un bilan de masse dans la tour de refroidissement.

$$\begin{aligned}\dot{m}_{\text{air humide } 1} + \dot{m}_{\text{eau évaporée}} &= \dot{m}_{\text{air humide } 2} \\ \dot{m}_{\text{air sec } 1} \times (1 + x_1) + \dot{m}_{\text{eau évaporée}} &= \dot{m}_{\text{air sec } 2} \times (1 + x_2)\end{aligned}$$

Or la quantité d'air sec reste constante durant le passage dans la tour de refroidissement (au contraire du débit d'air humide qui augmente). On en déduit une expression du débit d'eau évaporée dans la tour de refroidissement :

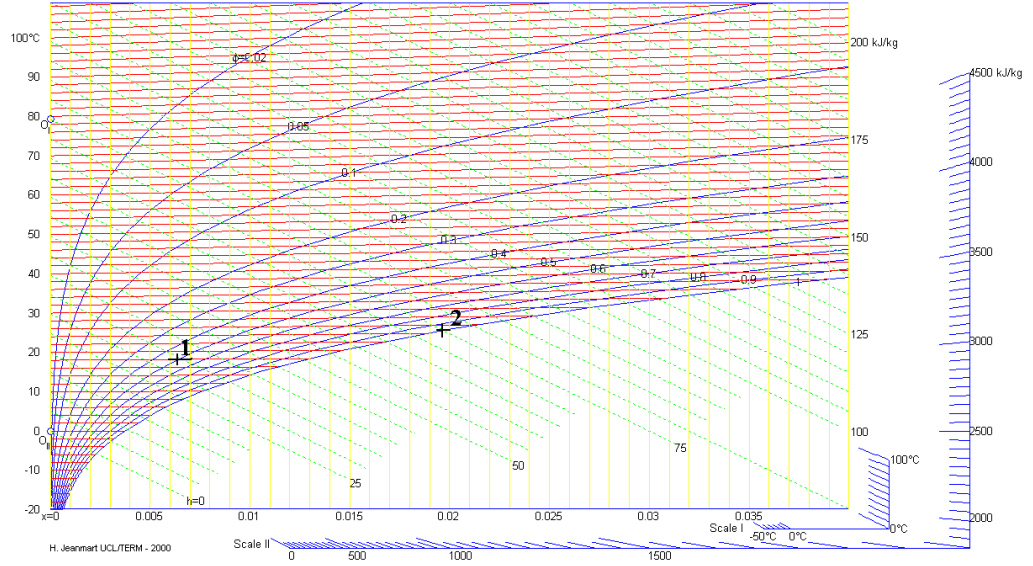
$$\dot{m}_{\text{air sec}} (x_2 - x_1) = \dot{m}_{\text{eau évaporée}}$$

Le calcul de ce débit nécessite la connaissance du débit massique d'air sec, ainsi que l'évolution de l'humidité absolue de l'air humide. Pour cela, la masse volumique de l'air en entrée de la tour de refroidissement doit être calculé.

TABLE 6 – Exerice 7 - Caractéristiques initiales de l'air humide

	Pression [bar]	Température [°C]	Enthalpie [kJ/kg]	x [-]	φ [-]
1	1	18			0.5
2	1	26			1





### Caractéristiques de l'état initial

A l'entrée de la tour de refroidissement, la pression, la température et l'humidité relative de l'air humide sont connues. La pression de saturation de la vapeur d'eau à cette température vaut :

$$p'_v = 0.0206 \text{ [bar]} \rightarrow p_{v,1} = \phi p'_v = 0.0103 \text{ [bar]}$$

dont la pression partielle  $p_{v,1}$  a été déduite. Le calcul de cette pression partielle va permettre de déterminer l'humidité absolue en entrée de tour :

$$x_1 = 0.622 \frac{\phi p'_v}{p - \phi p'_v} = 0.0065$$

L'humidité absolue en sortie de tour de refroidissement vaut ( $p'_v(26^\circ\text{C}) = 0.0336$ ) :

$$x_1 = 0.622 \frac{\phi p'_v}{p - \phi p'_v} = 0.622 \frac{1 \times 0.0336}{1 - 1 \times 0.0336} = 0.0216$$

Les valeurs d'enthalpie aux points 1 et 2 peuvent s'obtenir graphiquement ou analytiquement :

$$\begin{aligned} h_1 &= 1.009 t_1 + x_1 (2501.6 + 1.854 t_1) \\ &= 1.009 \times 18 + 0.0065 \times (2501.6 + 1.854 \times 18) \\ &= 34.64 \left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}_{\text{air sec}}} \right] \\ h_2 &= 1.009 t_2 + x_2 (2501.6 + 1.854 t_2) \\ &= 1.009 \times 26 + 0.0216 \times (2501.6 + 1.854 \times 26) \\ &= 81.3 \left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}_{\text{air sec}}} \right] \end{aligned}$$

La valeur recherchée pour réaliser les calculs de l'exercice est le débit massique d'air sec. Or le débit volumique d'air humide est donné dans l'énoncé. Il est donc important de déterminer la masse volumique du mélange pour obtenir le débit recherché. Pour cela, la constante des gaz parfaits de cet air humide doit être calculée :

$$\begin{aligned} R^* &= (air)_1 \times \frac{8.314}{28.96 \times 10^{-3}} + (H_2O)_1 \times \frac{8.314}{18 \times 10^{-3}} \\ &= \frac{1}{x+1} \times \frac{8.314}{28.96 \times 10^{-3}} + \frac{x}{x+1} \times \frac{8.314}{18 \times 10^{-3}} \\ &= 288.95 \end{aligned}$$

Grâce à l'équation d'état des gaz parfaits, la masse volumique de l'air humide entrant dans la tour de refroidissement est obtenue :

$$\rho_{air,1} = \frac{p_{air,1}}{R^* (273.15 + 18)} = 1.19 \left[ \frac{kg_{air\ humide}}{m^3} \right]$$

On calcule ainsi le débit massique d'air à partir de son débit volumique :

$$\dot{m}_{air,1} = \rho_{air,1} \dot{V}_{air} = 10.70 \left[ \frac{kg_{air\ humide}}{s} \right]$$

Ce qui permet le calcul du débit d'air sec :

$$\dot{m}_{air\ sec} = \frac{1}{1 + x_1} \dot{m}_{air,1} = 10.63 \left[ \frac{kg_{air\ sec}}{s} \right]$$

Ce débit d'air sec est constant durant tout le processus de refroidissement. On peut en déduire les débits d'eau en entrée et en sortie de la tour de refroidissement

$$\dot{m}_{eau,1} = \dot{m}_{air\ sec} x_1 = 0.069 \left[ \frac{kg_{eau}}{s} \right]$$

$$\dot{m}_{eau,2} = \dot{m}_{air\ sec} x_2 = 0.223 \left[ \frac{kg_{eau}}{s} \right]$$

Ce qui permet de calculer l'augmentation de débit d'eau, c'est-à-dire le débit d'eau évaporé dans la tour de refroidissement :

$$\dot{m}_{eau\ vaporisee} = \dot{m}_{eau,2} - \dot{m}_{eau,1} = 0.154 [kg/s]$$

TABLE 7 – Exerice 7 - Caractéristiques finales de l'air humide

	Pression [bar]	Température [°C]	Enthalpie [kJ/kg]	x [—]	φ [—]
1	1	18	35	0.0065	0.5
2	1	26	80	0.021	1

## Etape 2 : Température de sortie du circuit d'eau

Pour calculer la température en sortie du circuit d'eau, un bilan d'énergie est appliqué à la tour de refroidissement. En entrée de la tour l'air entre à un certain débit et une certaine enthalpie  $h_1$  tandis que l'eau entre à une enthalpie  $c_p T_1$ . En sortie, l'air est éliminé à une enthalpie  $h_2$  et l'eau à une enthalpie  $c_p T_x$ .

NB : Le bilan d'énergie à appliquer est  $\Delta H = 0$ . En conséquence de quoi, comme les enthalpies de l'air humide sont exprimées en kJ par kg d'air sec, il faut les multiplier par le débit d'air sec pour obtenir l'enthalpie absolue (en kJ). L'enthalpie de l'eau étant exprimée via une chaleur spécifique en kJ par kg d'eau et par Kelvin, les débits d'eau doivent être multipliés par le débit d'eau.

$$\dot{m}_{air\ sec} h_1 + \dot{m}_{eau} c_p T_1 = \dot{m}_{air\ sec} h_2 + (\dot{m}_{eau} - \dot{m}_{eau\ vaporisee}) c_p T_x$$

Ce qui nous donne :

$$10.63 \times 34.64 + \frac{0.006}{0.001} \times 4.186\ 44 = 10.63 \times 81.3 + \left( \frac{0.006}{0.001} - 0.154 \right) \times 4.186 \times T_x$$

On obtient une température de sortie du circuit d'eau de :

$$\Rightarrow T_x = 24.89\ [^{\circ}C]$$

## Exercice 4

### *Mélange de l'air de l'immeuble et de l'air extérieur.*

Connaissant les états 1 et 2, on sait que l'état 3 (mélange entre 1 et 2) se trouve sur la droite liant 1 et 2 dans le diagramme (h,x). Il suffit alors de connaître  $h_3$  ou  $x_3$  pour connaître totalement l'état 3.

- bilan sur l'air sec :  $\dot{m}_{as,3} = \dot{m}_{as,1} + \dot{m}_{as,2}$
- bilan sur l'eau :  $\dot{m}_{as,3} x_3 = \dot{m}_{as,1} x_1 + \dot{m}_{as,2} x_2$
- bilan sur l'énergie :  $\dot{m}_{as,3} h_3 = \dot{m}_{as,1} h_1 + \dot{m}_{as,2} h_2$

Calcul du débit massique d'air sec :

$$\dot{m}_{as} = \frac{1}{1+x} \dot{m}_{ah} = \frac{1}{1+x} \frac{\dot{V}_{ah}}{v_{ah}} = \frac{1}{1+x} \dot{V}_{ah} \frac{p}{R'T} = \frac{1}{1+x} \frac{\dot{V}_{ah} p}{T} \frac{1}{\left( \frac{R}{M_{m,as}} \frac{1}{1+x} + \frac{R}{M_{m,vap}} \frac{x}{1+x} \right)}$$

Débit massique d'air sec en provenance de l'extérieur,  $\dot{m}_{as,1} = 5.058\ kg/s$ .

Débit massique d'air sec en provenance de l'immeuble,  $\dot{m}_{as,2} = 7.066\ kg/s$ .

$\dot{m}_{as,3} = 12.124\ kg/s, x_3 = 0.0078\ \text{et}\ h_3 = 34.36\ kg/s. \Rightarrow T_3 \approx 15^{\circ}C\ \text{et}\ \phi_3 \approx 0.75$

Lors du passage de l'air dans le réfrigérant, l'humidité absolue reste constante.

$x_4 = x_3, T_4 = 12^{\circ}C \Rightarrow \phi_4 \approx 0.85\ \text{et}\ h_4 \approx 32\ kJ/kg$

Puissance calorifique cédée par l'air :  $P = \dot{m}_{as,3} (h_3 - h_4) = 28.61\ kW$ .

## Exercice 5

### Etape 0 : Caractéristiques initiales de l'air et de l'eau

#### Etat 0 - entrée d'air humide dans le laveur

Le débit d'air donné l'état en débit volumique normal, il est primordial de déterminer la constante des gaz parfaits de ce mélange d'air humide ainsi que son volume massique normal. Pour cela, en se référant aux données de l'exercice :

$$p_0 = 1 \text{ [bar]} \quad t_0 = 10 \text{ [}^\circ\text{C]} \quad \phi_0 = 0.5$$

le diagramme nous permet de trouver les valeurs suivantes :

$$x_0 = 0.004 \quad h_0 = 20 \left[ \frac{kJ}{kg_{air \text{ sec}}} \right]$$

Valeurs que l'on aurait trouvé plus précisément de façon analytique :

$$x_0 = 0.622 \frac{\phi p'v}{p - \phi p'v} = 0.622 \frac{0.5 \times 0.0123}{1 - 0.5 \times 0.0123} = 0.0038$$

$$h_0 = 1.009 t + x_0 (2501.6 + 1.854 t) = 1.009 \times 10 + 0.0038 (2501.6 + 1.854 \times 10) = 19.66 \left[ \frac{kJ}{kg_{air \text{ sec}}} \right]$$

En conséquence, on peut calculer la constante des gaz parfaits (avec  $x_0 = 0.004$ ) :

$$R^* = \left( \frac{1}{1 + x_0} \right) \frac{8.3145}{28.96 \times 10^{-3}} + \left( \frac{x_0}{1 + x_0} \right) \frac{8.3145}{18 \times 10^{-3}} = 291.7 \left[ \frac{kJ}{kg_{air \text{ sec}} K} \right]$$

Le volume massique normal se calcule en rappelant les conditions de l'état de référence normal ( $T_N = 273.15 K$  et  $p_N = 1 \text{ bar}$ ) :

$$v_N = \frac{R^* T_N}{p_N} = \frac{287.79 \times 273.15}{10^5} = 0.797 \left[ \frac{m_N^3}{kg} \right]$$

Ce qui permet de calculer le débit masse d'air humide à l'état 0 vaut :

$$\dot{m}_{air \text{ humide}} = \frac{\dot{V}}{v_N} = \frac{35000}{0.814} = 43915 \left[ \frac{kg_{a, hum}}{h} \right]$$

Le débit d'air sec

$$\dot{m}_{air \text{ sec}} = \frac{\dot{m}_{air \text{ humide}}}{1 + x_0} = \frac{42997}{1 + 0.004} = 43740 \left[ \frac{kg_{a, sec}}{h} \right]$$

#### Etat e - entrée d'eau dans le laveur

Les données concernant l'entrée de l'eau dans le laveur sont la température et le débit massique

$$t_e = 18 \text{ [}^\circ\text{C]} \quad \dot{m}_e = 70 \left[ \frac{kg_{eau}}{h} \right]$$

Ces données permettent de calculer l'enthalpie de cette eau :

$$h_e = c_{p, eau} t_e = 4.18 \times 18 = 75.24 \left[ \frac{kJ}{kg} \right]$$

## Etape 1 : Caractérisation des états

### Transformation $0 \rightarrow 1$ - Mélange air humide - eau

La première transformation ( $0 \rightarrow 1$ ) est un simple lavage de l'air humide prélevé à l'extérieur à l'aide de l'eau. La transformation est donc un simple mélange dont on obtient les caractéristiques en appliquant simplement les lois de conservation.

La conservation de la masse permet le calcul de l'humidité absolue en fin de mélange. En effet, le débit d'air humide en fin de lavage est égal à la somme du débit d'air humide entrant et du débit d'eau :

$$\begin{aligned}\dot{m}_{a, hum_0} + \dot{m}_{eau} &= \dot{m}_{a, hum_1} \\ \dot{m}_{a, sec_0} \times (1 + x_0) + \dot{m}_{eau} &= \dot{m}_{a, sec_1} \times (1 + x_1)\end{aligned}$$

$$\dot{m}_{eau} = \dot{m}_{a, sec} \times (x_1 - x_0)$$

$$x_1 = x_0 + \frac{\dot{m}_{eau}}{\dot{m}_{a, sec}} = 0.04 + \frac{70}{42825} = 0.0056$$

La conservation de l'énergie permet le calcul de l'enthalpie en fin de mélange (en n'oubliant pas de multiplier les enthalpies de l'air humide par le débit d'air sec et pas le débit d'air humide, en raison des unités).

$$\dot{m}_{a, sec_0} \times h_0 + \dot{m}_{eau} \times h_{eau} = \dot{m}_{a, sec_1} \times h_1$$

$$h_1 = h_0 + \frac{\dot{m}_{eau} h_{eau}}{\dot{m}_{air sec}} = 20 + \frac{70 \times 75.24}{42825} = 20.12 \left[ \frac{kJ}{kg} \right]$$

On trouve les valeurs manquantes sur le diagramme :

$$t_1 = 6.2 [^{\circ}C] \quad \phi_1 = 0.92$$

ou de façon analytique :

$$t_1 =$$

$$\phi_1 =$$

### Transformation $1 \rightarrow 1'$ - Compression polytropique pour amener l'air à la température de $25^{\circ}C$

Après lavement, le nouveau mélange d'air pénètre dans un compresseur comportant deux étages séparés par un refroidissement intermédiaire. Pour que les deux étages soient identiques, on réalise une précompression du mélange d'air humide jusqu'à température d'entrée du second étage pour que l'air humide entre dans le premier étage à la même température que dans le second.

- $1 \rightarrow 1'$  : Précompression jusqu'à  $25^{\circ}C$
- $1' \rightarrow 2$  : Premier étage du compresseur

- 2 → 3 : Refroidissement intermédiaire
- 3 → 4 : Second étage du compresseur

De cette transformation 1 → 1', les caractéristiques initiales sont connues ainsi que la température finale de la compression. La compression est de type polytropique adiabatique, c'est-à-dire que les travaux de frottements y sont proportionnels au travail moteur. Pour ces transformations, la loi à appliquer est de type :  $p v^m = \text{constante}$ . Ce qui donne, en termes de rapport de pression et de température :

$$\frac{T_1'}{T_1} = \left( \frac{p_1'}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}}$$

Pour déterminer la pression de sortie ou le volume massique de sortie, il est donc nécessaire de prédéterminer le coefficient polytropique  $m$  de cette transformation. Dans les données, le rendement polytropique est fourni. Or, on rappelle qu'il existe un lien direct entre ce rendement polytropique et le coefficient  $m$  pour les machines réceptrices :

$$\eta_{pi} = \frac{m}{m-1} \frac{\gamma-1}{\gamma} \rightarrow m = 1.615$$

Valeur obtenue en supposant l'air humide assimilable à un gaz parfait de coefficient de Poisson  $\gamma$  égal à 1.4 et en prenant le rendement polytropique donné dans l'énoncé. On suppose donc que la précompression a exactement le même rendement que les étages suivants.

Cela permet le calcul de la pression en sortie du précompresseur :

$$p_{1'} = p_1 \left( \frac{T_{1'}}{T_1} \right)^{\frac{m}{m-1}} = 1 \times \left( \frac{298}{279.2} \right)^{\frac{1.615}{0.615}} = 1.19 \text{ [bar]}$$

Ainsi que son enthalpie  $h_{1'}$  et son humidité relative  $\phi_{1'}$  :

$$h_{1'} = 1.009 t_1' + x_1' (2501.6 + 1.854 t_1') = 39.45 \left[ \frac{kJ}{kg_{\text{air sec}}} \right]$$

$$\phi_{1'} = \frac{p_1'}{p_v(t_1')} \frac{x_1'}{0.622 + x_1'} = 0.335$$

Etats	Pression [bar]	Température [°C]	Enthalpie [kJ/kg]	Humidité [—]	Humidité relative [—]
1	1	6.2	20.12	0.0056	0.92
1'	1.19	25	39.45	0.0056	0.335

### Transformation 1' → 2 - Compression polytropique dans le premier étage

Le rapport de pression final s'exprime comme le produit des rapports de compression  $x_n$  des  $n$  étages, du rapport de compression du précompresseur  $x_0$  et des pertes de pression dans les  $n$  refroidisseurs  $y_n$  :

$$X = x_0 \times (x_n)^n \times (y_n)^n$$

Le rapport de compression optimal pour chaque étage du compresseur multi-étagé :

$$x_i = \frac{p_i}{p_{i-1}} = \sqrt[n]{\frac{X}{x_0 y^n}}$$

Pour ce compresseur, il n'y a pas de pertes de pression dans le refroidisseur :  $y = 1$ , le rapport de compression total vaut  $X = 6$  et le nombre d'étages est égal à deux. Le rapport de précompression calculé à l'étape précédente vaut :

$$x_0 = \frac{p_{1'}}{p_1} = 1.19$$

Ce qui permet le calcul des rapports de compression à effectuer dans chacun des deux étages du compresseur :

$$x_i = \sqrt[2]{\frac{6}{1.19}} = 2.25$$

En sortie du premier étage, la pression vaudra donc :  $2.25 \times 1.19 = 2.6775 \text{ [bar]}$  et 6 [bar] en sortie du second étage.

La température en sortie des deux étages se calcule aussi facilement :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}} \rightarrow T_2 = T_1 \times 2.25^{\frac{0.615}{1.615}} \rightarrow t_2 = 132.8^\circ C$$

On en déduit donc aisément l'enthalpie

$$\begin{aligned} h_2 &= 1.009 t_2 + x_2 (2501.6 + 1.854 t_2) \\ &= 1.009 \times 60.5 + 0.0056 (2501.6 + 1.854 \times 60.5) \\ &= 149.2 \left[ \frac{kJ}{kg_{\text{air sec}}} \right] \end{aligned}$$

ainsi que l'humidité relative

$$\phi_2 = \frac{p_2}{p'_v(t_2)} \frac{x_2}{0.622 + x_2} = \frac{2.67}{2.86} \frac{0.0056}{0.622 + 0.0056} = 0.0083$$

Etats	Pression [bar]	Température [°C]	Enthalpie [kJ/kg]	Humidité [—]	Humidité relative [—]
1'	1.19	25	39.45	0.0056	0.335
2	2.67	132.8	149.2	0.0056	0.0083

### Transformation 2 → 3 - Refroidissement isobare dans le premier étage

Le refroidissement isobare pourrait provoquer la condensation d'une partie de l'eau, qui devrait alors être extraite par la purge (transformation 3 → 3<sub>0</sub>). Il faut donc vérifier si l'humidité absolue en 3 est supérieure à l'humidité absolue de saturation auquel cas il n'y a pas condensation. Dans le cas contraire, il faudra calculer la quantité d'eau extraite

de la purge.

Les caractéristiques de l'état 3 sont une pression égale à la pression de sortie du premier étage du compresseur et une température de  $25^{\circ}C$ . Etant donné que la composition du mélange n'a pas (encore) été modifiée, l'humidité absolue reste constante depuis l'état 1 :

$$p_3 = 2.67 \text{ [bar]} \quad t_3 = 25 \text{ [}^{\circ}C\text{]} \quad x_3 = 0.0056$$

Etats	Pression [bar]	Température [ $^{\circ}C$ ]	Enthalpie [kJ/kg]	Humidité [—]	Humidité relative [—]
2	2.67	132.8	149.2	0.0056	0.0083
3	2.67	25	39.2	0.0056	0.7515

A cette température, la pression de saturation de l'eau valant 0.0317 [bar], l'humidité absolue à saturation vaut :

$$x_{3,sat} = 0.622 \frac{\phi p'_v}{p - \phi p'_v} = 0.622 \frac{1 \times 0.0317}{2.677 - 1 \times 0.0317} = 0.0075$$

L'humidité absolue à saturation est supérieure à l'humidité absolue en sortie du refroidisseur :  $0.0075 > 0.0056$  ( $x_{3,sat} > x_3$ ). En conséquence de quoi, toute l'eau se présente sous forme de vapeur et la purge ne devra pas éliminer de liquide.

$$h_3 = 1.009 t_3 + x_3 (2501.6 + 1.854 t_3) = 1.009 \times 25 + 0.0056 (2501.6 + 1.854 \times 25) = 39.2 \left[ \frac{kJ}{kg_{air \text{ sec}}} \right]$$

L'humidité relative à l'état 3 se détermine par :

$$\phi_3 = \frac{p_3}{p'_{v,3}} \frac{x_3}{0.622 + x_3} = \frac{2.67}{0.0317} \frac{0.0056}{0.622 + 0.0056} = 0.7515$$

### Transformation 3 $\rightarrow$ 4 - Compression polytropique dans le second étage

En sortie du second étage du compresseur, toute la compression envisagée doit avoir été effectuée. En conséquence de quoi, la pression finale vaut 6 fois la pression initiale, soit 6 bar. On vérifie d'ailleurs que :  $6 = (2.25 \times 2.67)$ . La température et l'enthalpie sont exactement égales à celles en sortie du premier étage, puisque les deux transformations partent de la même température avec le même rapport de compression :

$$p_4 = 6 \text{ [bar]} \quad t_4 = 132.8 \text{ [}^{\circ}C\text{]} \quad x_4 = 0.0056 \quad h_4 = 149.2 \left[ \frac{kJ}{kg_{air \text{ sec}}} \right]$$

$$\phi_4 = \left( \frac{p_4}{p'_{v,4}} \right) \frac{x_4}{0.622 + x_4} = 0.0187$$



Etats	Pression [bar]	Température [°C]	Enthalpie [kJ/kg]	Humidité [–]	Humidité relative [–]
3	2.67	25	39.2	0.0056	0.7515
4	6	132.8	149.2	0.0056	0.0187

### Transformation 4 → 5 - Refroidissement isobare dans le second étage

Le refroidissement risque de provoquer la condensation d'une partie de l'eau qui peut alors s'extraire par la purge. Nous devons vérifier si l'humidité absolue en 3 est supérieure à l'humidité absolue de saturation auquel cas il n'y a pas condensation.

$$p_5 = 6 \text{ [bar]} \quad t_5 = 25 \text{ [°C]} \quad x_5 = 0.0056$$

L'humidité absolue à saturation à cette pression et cette température s'exprime :

$$x_{5,sat} = 0.622 \frac{\phi p'_v}{p - \phi p'_v} = 0.622 \frac{1 \times 0.0317}{6 - 1 \times 0.0317} = 0.0033$$

L'humidité absolue est donc supérieure à l'humidité absolue de saturation :  $0.0033 < 0.0056$  ( $x_{5,sat} < x_5$ ). En conséquence de quoi, il sera nécessaire de purger l'eau sous sa forme liquide en sortie du refroidisseur du second étage du compresseur.

On calcule les valeurs d'enthalpie avant et après purge à l'état 5 :

$$\begin{aligned}
h_5 &= 1.009 t_5 + x_5 (2501.6 + 1.854 t_5) \\
&= 1.009 \times 25 + 0.0056 (2501.6 + 1.854 \times 25) \\
&= 39.2 \left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}_{\text{air sec}}} \right] \\
h_{5_0} &= 1.009 t_5 + x_{5,sat} (2501.6 + 1.854 t_5) \\
&= 1.009 \times 25 + 0.0033 (2501.6 + 1.854 \times 25) \\
&= 33.6 \left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}_{\text{air sec}}} \right]
\end{aligned}$$

Etats	Pression [bar]	Température [°C]	Enthalpie [kJ/kg]	Humidité [–]	Humidité relative [–]
4	6	132.8	149.2	0.0056	0.0187
5	6	25	39.2	0.0056	>1
5 <sub>0</sub>	6	25	33.6	0.0033	1

### Etat 6 - Caractéristiques au fond de la mine

Au fond de la mine, en raison des pertes de charge, de la gravité et de l'action calorifique, l'air arrive aux conditions suivantes :

$$p_6 = 6 \text{ [bar]} \quad t_6 = 35 \text{ [°C]} \quad x_6 = 0.0033$$

D'où on déduit les caractéristiques manquantes de l'air humide au fond de la mine :

$$h_6 = 1.009 t_6 + x_6 (2501.6 + 1.854 t_6) = 43.78 \left[ \frac{kJ}{kg_{\text{air sec}}} \right]$$

$$\phi_6 = \left( \frac{p_6}{p'_{v,6}} \right) \frac{x_6}{0.622 + x_6} = \frac{6}{0.0563} \frac{0.033}{0.622 + 0.0033} = 0.5624$$

Etats	Pression [bar]	Température [°C]	Enthalpie [kJ/kg]	Humidité [—]	Humidité relative [—]
6	6	35	43.78	0.0033	0.5624

## Etape 2 : Le débit aux purges

La première purge est inutile puisque l'air n'y est pas saturé en eau. Pour la seconde, le débit s'obtient par conservation de la masse :

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\text{air humide}, 5} &= \dot{m}_{\text{air humide}, 50} + \dot{m}_{\text{eau purgée}} \\ \dot{m}_{\text{air sec}, 5} \times (1 + x_5) &= \dot{m}_{\text{air sec}, 50} \times (1 + x_5) + \dot{m}_{\text{eau purgée}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\text{eau purgée}} &= (x_5 - x_{5,\text{sat}}) \dot{m}_{\text{air sec}} \\ &= (0.0056 - 0.0033) \times 42835 \\ &= 98.5 \left[ \frac{kg_{\text{eau}}}{h} \right] \end{aligned}$$

On lave donc en entrée de l'installation l'air en y ajoutant 70 kg d'eau par heure et on prélève à la purge du second étage du compresseur quasiment 100 kg d'eau par heure. Au total, l'air humide perd donc de sa masse.

## Etape 3 : Calcul du travail moteur et de la puissance

Les compresseurs sont des machines de type système ouvert adiabatique. Le travail moteur est donc entièrement transformé en variation d'enthalpie. On calcule alors la puissance motrice de l'installation (en n'oubliant pas de multiplier la variation d'enthalpie par le débit d'air sec pour rester cohérent dans les unités).

$$\begin{aligned} w_m &= (h_2 - h_1) + (h_4 - h_3) = 239.1 \left[ \frac{kJ}{kg_{\text{air sec}}} \right] \\ P_m &= w_m \dot{m}_{\text{air sec}} = 2841 [kW] \end{aligned}$$