

Induzione elettromagnetica

Gruppo IV:

Erica Brisigotti, Emmanuele Lotano, Ylenia Mascolo

Docente:

Prof.ssa Maria Bondani

Assistenti di laboratorio:

Filippo Pallotta
Magda Lucchetta



Laboratorio di Fisica II

Anno accademico 2019/2020

Università degli Studi dell'Insubria

Dipartimento di Scienza ed Alta Tecnologia

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Descrizione teorica del fenomeno	4
2	Apparato sperimentale	6
2.1	I tubi di caduta	6
2.2	L'oscilloscopio	7
3	Dati sperimentali	10
3.1	Tubo in PVC	10
3.1.1	Un magnete	10
3.1.2	Due magneti	15
3.1.3	Stima del valore dell'accelerazione	19
3.2	Tubo in alluminio	25
3.2.1	Un magnete	25
3.2.2	Due magneti	30
3.2.3	Stima del valore dell'accelerazione	35
3.3	Tubo in alluminio tagliato	40
3.3.1	Un magnete	40
3.3.2	Due magneti	45
3.3.3	Stima del valore dell'accelerazione	49
4	Conclusioni	54
5	Appendice	55
5.1	Derivazione della forza frenante $F = kv$	55
5.2	Distribuzione rettangolare	56
5.3	Deviazione standard	56
5.4	Interpolazione	57
5.5	Test del Chi Quadrato	58
5.6	Coefficiente di Determinazione	58
5.7	Propagazione degli errori	60
6	Fonti	61

1 Introduzione

L'esperimento analizzato in questa relazione dimostra la famosa *Legge di Faraday-Neumann-Lenz* che mette in relazione i fenomeni elettrici con quelli magnetici.

Nella prima metà del 1800, il fisico inglese Michael Faraday avviò degli studi su correnti e campi, scoprendo il fenomeno dell'induzione elettromagnetica: posizionando un conduttore in una regione nella quale esiste un campo magnetico \vec{B} e quindi un flusso magnetico Φ concatenato al circuito (variabile nel tempo), si osserva la presenza di una corrente nel circuito durante la variazione del flusso.

Di conseguenza, Faraday attribuì la produzione di correnti indotte alla variazione delle linee di forza del campo magnetico (codificando il fenomeno in una legge fisica che prenderà il suo nome).

In parallelo il fenomeno venne anche analizzato da altri, come ad esempio il fisico russo Heinrich Lenz, responsabile di una leggera modifica della legge.

Secondo Lenz, infatti, la forza elettromotrice (fem) ΔV , indotta da un campo elettromagnetico \vec{B} lungo una linea chiusa $\partial\Sigma$ è pari all'opposto della variazione del flusso magnetico $\Phi_\Sigma(\vec{B})$, nell'unità di tempo, attraverso la superficie $\Sigma(t)$ che ha come frontiera la linea chiusa stessa.

$$\Delta V = - \frac{\partial \Phi_\Sigma(\vec{B})}{\partial t} \quad (1)$$

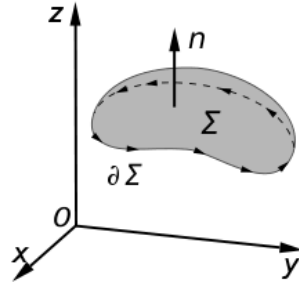


Figura 1: Orientazione del circuito e superficie Σ

Il contributo di Lenz risiede nell'aggiunta del segno meno ($-$), il quale indica che la corrente prodotta si oppone alla variazione del flusso magnetico compatibilmente con il principio di conservazione dell'energia. Infatti, se il flusso concatenato diminuisce, il campo magnetico generato dalla corrente indotta cercherà di opporsi evitando incoerenze fisiche.

1.1 Descrizione teorica del fenomeno

Un modo per dimostrare la *Legge di Faraday-Neumann-Lenz* prevede di lasciar cadere un magnete dall'alto in un condotto (vedremo in seguito di quali materiali) e di osservare la generazione di una fem nelle bobine avvolte attorno al tubo.

Infatti il magnete cadendo, acquista un'accelerazione dovuta alla forza gravitazionale; passando attraverso ogni bobina, però, il flusso del campo magnetico varia, creando una corrente indotta che genera un campo magnetico opposto alla variazione che lo ha generato: pertanto il magnete sarà respinto dalla forza magnetica e rallentato nella sua caduta.

Lo scopo di questa esperienza, quindi, prevede di verificare sperimentalmente una decelerazione nel moto del magnete (da attribuire all'induzione) e confrontare i valori dell'accelerazione ottenuti con l'accelerazione gravitazionale $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$.

Dovrà essere ricavata anche la velocità limite raggiunta dal magnete dopo aver percorso l'intera lunghezza del tubo.

Per ricavare teoricamente le leggi che spiegano il fenomeno in esame è possibile considerare una sezione longitudinale del tubo.

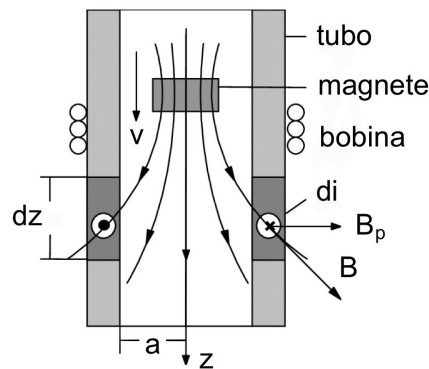


Figura 2: Schematizzazione del magnete in caduta libera attraverso una sezione del tubo. La forza elettromotrice viene misurata dalle bobine.

Come illustrato in *Figura 2*, il magnete cade con una velocità \vec{v} all'interno di un conduttore tubolare, in questo modo il campo \vec{B} viene prodotto dal magnete stesso ed è diretto verso il basso, parallelo alla velocità. Considerando un elemento del tubo della dimensione di un anello di lunghezza dz , tale anello trasporta una corrente elettrica indotta di .

La forza ritardante¹ sul magnete risulta essere:

$$F = kv \quad (2)$$

dove k rappresenta il cosiddetto *dragging magnetico* ed è legato al coefficiente di conducibilità del tubo considerato nella specifica analisi.

Se m è la massa del magnete, il suo moto dipenderà solo dal peso e dalla forza frenante:

$$m\left(\frac{dv}{dt}\right) = mg - kv \quad (3)$$

Da questa equazione è possibile ricavare la velocità in funzione del tempo:

$$v(t) = v_L[1 - e^{(t/\frac{m}{k})}] \quad (4)$$

dove:

$$v_L = \frac{mg}{k} \quad (5)$$

corrisponde alla velocità limite raggiunta dal magnete, che ci proponiamo di stimare sperimentalmente.

¹vedi *Appendice: Derivazione della forza frenante* $F = kv$

2 Apparato sperimentale

Per la realizzazione dell'esperimento sono stati utilizzati pochi strumenti:

- dei tubi aventi tutti la stessa lunghezza (in particolare due tubi di alluminio, di cui uno tagliato lungo la verticale e uno in PVC);
- dei magneti cilindrici (di dimensioni e masse sconosciute) per l'acquisizione dei dati;
- un *oscilloscopio*.

Attorno ad ogni tubo sono avvolte diverse bobine conduttrici, distanziate appositamente e collegate tra loro attraverso un cavo da connettere all'oscilloscopio.



Figura 3: Tubi utilizzati per l'esperimento.

L'esperimento consiste nel far cadere uno o due magneti nei diversi tubi. Le bobine hanno il compito di rilevare il passaggio dei magneti inviando i segnali all'oscilloscopio che visualizzerà la variazione di corrente.

2.1 I tubi di caduta

Di seguito preciseremo le caratteristiche relative ad ogni tubo utilizzato.

La lunghezza di ciascuno è circa 1 m ; tale lunghezza è stata stimata sommando le distanze tra le bobine successive (che può quindi variare a seconda del tubo in esame).

In particolare:

- il tubo in PVC presenta 11 bobine conduttrici poste circa alla stessa distanza l'una dall'altra;
- il tubo in alluminio ha 10 bobine, distanziate in modo analogo agli altri tubi;
- il tubo in alluminio tagliato, presenta un solco pari a 70 *cm* rispetto alla sua lunghezza totale, collocato nella porzione terminale; presenta 11 bobine (8 delle quali avvolte nella zona tagliata) distanziate nello stesso modo delle precedenti.

Nella seguente tabella riportiamo la media delle distanze tra le bobine di ogni tubo e i loro rispettivi errori associati.

In questo caso, gli errori associati corrisponderanno alla sensibilità dello strumento con il quale sono state prese le distanze (ovvero un metro a fettuccia metallica):

Tabella 1: Tabella contenente le distanze medie tra le bobine (relative ad ogni tubo) e l'errore associato corrispondente alla sensibilità dello strumento.

Tubo	Distanza media tra bobine (m)	Errore (m)
PVC	0.0968	0,001
Alluminio	0.0997	0.001
Alluminio tagliato	0.0857	0.001

2.2 L'oscilloscopio

L'oscilloscopio è uno strumento di misura elettronico che consente di visualizzare e registrare (su un grafico bidimensionale) l'andamento nel tempo dei segnali elettrici (in genere segnali periodici) prodotti dal rivelatore utilizzato: questi vengono trasmessi e rappresentati sotto forma di differenze di potenziale, ma possono essere interpretati fisicamente come intensità di corrente, potenza ed energie.

I segnali da misurare o analizzare vengono prelevati tramite appositi connettori. Naturalmente, è possibile poi considerare tutte le diverse funzionalità dello strumento regolando tramite un apposito pannello di controllo.

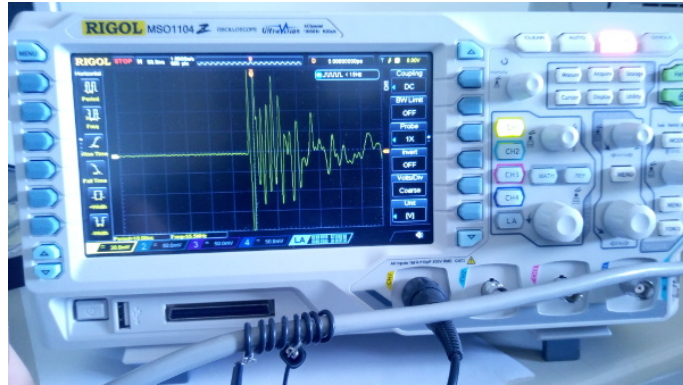


Figura 4: Le bobine conduttrici rilevano il passaggio del magnete e l'oscilloscopio visualizza i valori trovati.

In questo caso specifico, i valori ricavati permettono di estrarre il “*sampling period*” che corrisponde all’intervallo temporale fra due punti successivi, utile per stabilire l’asse orizzontale dei dati.

Il numero dei punti registrati è maggiore del numero di punti mostrato sullo schermo. Per l’appunto, lo schermo mostra 10 divisioni pari a $10s$, quindi il numero di punti mostrato è 250 ma quello registrato è 500.

Le misure lette sul *display grafico*, sono misure in funzione della differenza di potenziale (rappresentata sull’asse verticale) e periodo (con il tempo rappresentato sull’asse orizzontale).

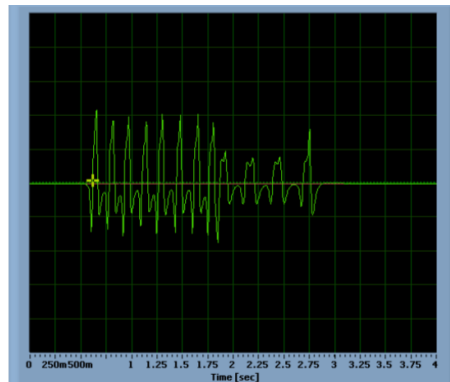


Figura 5: Esempio di visualizzazione dei segnali di differenza di potenziale relativi al passaggio dei magneti. I dati registrati sono relativi al passaggio in un tubo tagliato.

E’ possibile osservare che la sensibilità dell’oscilloscopio è variabile; inoltre, per via del metodo di salvataggio (che destina 8 *bit* ai dati raccolti da ciascun quadretto), la scala verticale visualizzata sul *monitor* dell’oscilloscopio non corrisponde

alla sensibilità in questione ma ad un suo multiplo (nel nostro caso, a 256 volte tanto).

Di conseguenza, si può associare un errore ai dati ricavati uguale a:

$$\sigma_{\Delta V} = \frac{\delta}{256\sqrt{12}} \quad (6)$$

dove δ è la larghezza del quadretto e 256 è numero di valori salvabili, mentre $\sqrt{12}$ è dovuto alla possibilità di assimilare il segnale ad una distribuzione rettangolare².

²vedi *Appendice: Distribuzione rettangolare*

3 Dati sperimentali

Di seguito ci occuperemo di analizzare separatamente i dati relativi a ciascun tubo, riportando le varie casistiche: per ogni tubo sono state registrate diverse misure di differenza di potenziale al variare del tempo, utilizzando prima un solo magnete e poi due.

3.1 Tubo in PVC

3.1.1 Un magnete

Per questo primo caso, le misure sono state ripetute 10 volte. I dati originali ottenuti dalla rilevazione con l'oscilloscopio presentano la seguente forma:

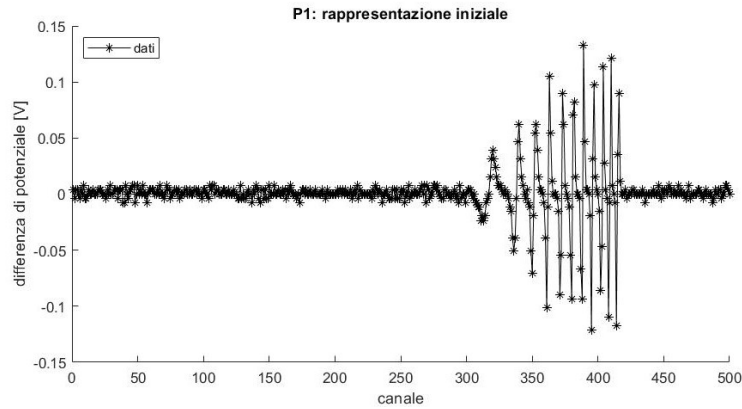


Figura 6: Esempio di visualizzazione del segnale relativo al passaggio di un magnete. I dati registrati sono relativi ad un tubo in PVC.

E' possibile notare la presenza di alcuni picchi il cui numero uguaglia quello delle bobine, responsabili della variazione della differenza di potenziale visibile appunto sotto forma di segnale più alto.

Visualizzando i dati di tutte le misure prese si può notare come, nel nostro caso, ci sia una set avente un andamento opposto agli altri. Per evitare complicazioni nell'analisi, e avendo già abbastanza misure per una buona statistica decidiamo di scartare questo set.

Poiché l'analisi deve essere svolta in funzione di grandezze fisiche reali, è necessario modificare l'ascissa dei dati utilizzando l'informazione del “*sampling period*”: $sp = 0.0040s$.

Per distinguere correttamente i picchi dal rumore si considera la *deviazione standard*³ dei dati che precedono il primo picco visibile, situati nell'intorno della retta orizzontale passante per il punto zero.

³vedi *Appendice: Deviazione standard*

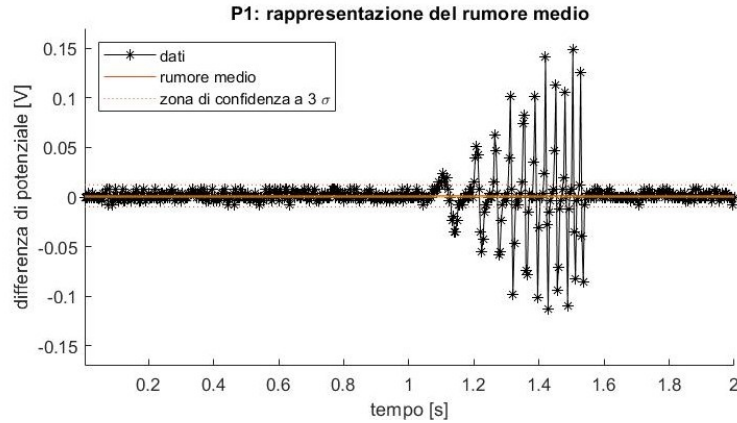


Figura 7: Dati originali con retta di rumore medio.
Le linee tratteggiate delincono la zona di confidenza a 3σ .

Nella tabella seguente riportiamo, per ogni set di dati, il valore del rumore medio e l'incertezza su di esso (che corrisponde alla larghezza della distribuzione del rumore, la quale è supposta essere pressochè normale). Sono presenti solo nove misure coerentemente con l'eliminazione del set incompatibile.

Tabella 2: Rumore medio ed errore sul rumore

Rumore medio (V)	Incetezza sul rumore (V)
0.001	0.004
0.001	0.003
0.001	0.004
0.001	0.003
0.001	0.003
0.001	0.004
0.001	0.004
0.001	0.003
0.001	0.004

Il rumore risulta più piccolo rispetto al suo errore perché viene calcolato in un intorno della retta passante per zero, di conseguenza mediare valori positivi e negativi porta ai risultati ottenuti.

L'utilità dei dati rappresentati sta nel poter trovare l'ascissa corrispondente all'istante in cui il magnete transita per il punto medio delle bobine di lettura. Per semplificare l'analisi trasliamo tutti i set in modo tale che il tempo di passaggio per il punto medio della prima bobina sia $t = 0$.

La figura di seguito mostra la sovrapposizione di tutti i set di dati (compreso quello scartato di colore nero).

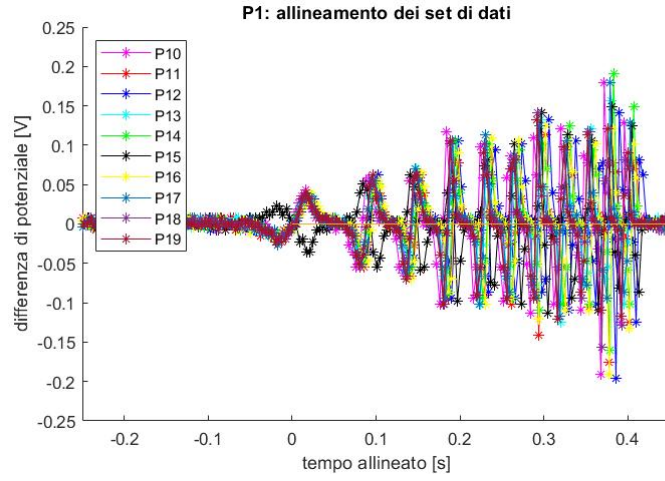


Figura 8: Allineamento dei vari set di dati.

Per continuare l'analisi, consideriamo singolarmente ogni set di dati.

Ci occupiamo di identificare i picchi corrispondenti ad ogni bobina mediante una funzione creata opportunamente: la funzione è capace di identificare il primo massimo relativo ed il primo minimo relativo (di ogni bobina) partendo da un punto di zero dato dall'utente. Ad esempio, nel caso di massimo relativo, la funzione esamina i punti in successione verificando che la distanza tra il dato e la retta del rumore sia maggiore della distanza tra il punto precedente e la retta stessa. In questo modo, quando la funzione si arresta, si ha modo di identificare il primo punto di massimo locale inerente alla bobina considerata.

Di seguito riportiamo un esempio di identificazione degli estremi utilizzati per ogni intervallo e i relativi picchi trovati.

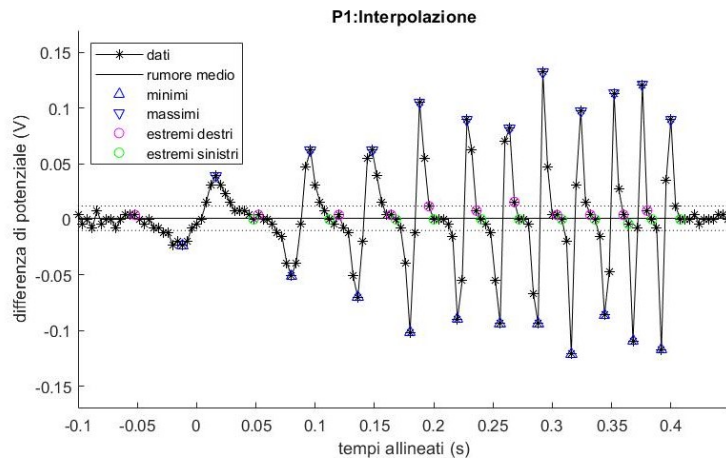


Figura 9: Identificazione degli estremi per gli intervalli considerati nella funzione e visualizzazione dei picchi.

Prima di trovare gli istanti di passaggio, è possibile fare alcune considerazioni sull'evoluzione temporale dei picchi e sulle aree sottese.

Dal grafico è facile notare come sotto ogni picco sia visualizzata un'area trapezoidale avente come base una porzione della retta del rumore medio compresa tra due punti estremi.

Tali punti sono stati identificati a partire dal massimo e dal minimo relativi (trovati con la funzione menzionata in precedenza) come i punti più prossimi all'intersezione del grafico con la retta del rumore (mostrati in figura precedente come estremo destro ed estremo sinistro).

Per ciascuna bobina si hanno due picchi, quindi si posso identificare due aree, una positiva e una negativa, in base alla posizione rispetto alla retta del rumore. Una conferma della buona presa dati prevede che le aree siano costanti ed un modo per verificarlo può essere quello di sommare le due aree per ciascuna bobina e ottenere un valore nullo.

Nella seguente figura riportiamo la rappresentazione della media, relativa a tutti i set di dati considerati, delle aree sottese per ciascuna bobina (che dimostriamo essere prossima a zero):

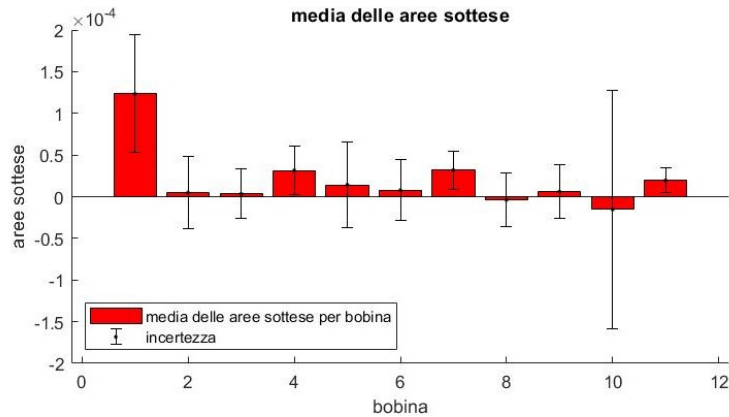


Figura 10: Rappresentazione della media delle aree sottese.

A questo punto, dopo aver identificato le coordinate di ogni picco, è possibile procedere con il *fit* per trovare gli istanti di passaggio.

Un metodo possibile prevede di utilizzare un *fit lineare*, facendo passare una retta tra i due picchi relativi a ciascuna bobina.

Nel nostro caso, però, sono presenti diversi punti che intercorrono tra un picco positivo e il successivo negativo, in particolare per la prima bobina.

Utilizzare un *fit lineare* renderebbe molto imprecisa l'identificazione del punto d'interesse.

Per questo motivo ricorriamo al metodo dell'*interpolazione polinomiale*⁴.

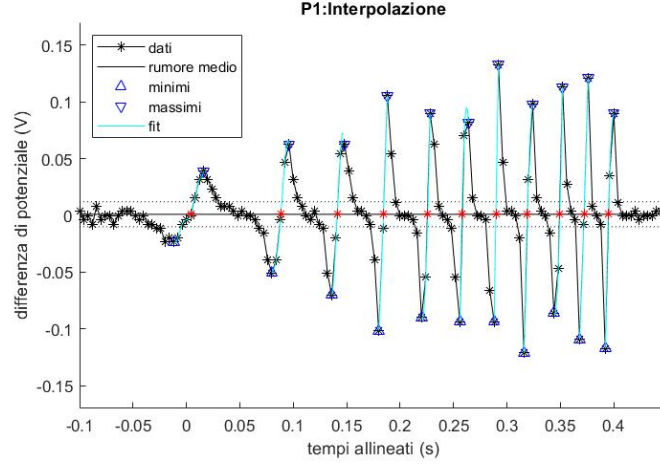


Figura 11: Identificazione dell'istante di passaggio mediante l'interpolazione.

Per associare un errore ai valori trovati si può sfruttare la presenza di diversi set di dati. E' possibile mediare su tutti i set di dati considerati, in modo da ottenere un singolo valore per ciascuna bobina.

A questo punto, ad ogni valore si può associare un errore dato da:

$$\sigma_t = \frac{\text{std}(t_i)}{\sqrt{N}} \quad (7)$$

dove $\text{std}(t_i)$ è la *deviazione standard* relativa agli istanti di passaggio (t_i) della bobina in questione e dove N è il numero di set di dati.

Tabella 3: Istanti di passaggio mediati su tutti i set di dati considerati, per ciascuna bobina.

Bobina	Istanti di passaggio (s)	Incertezza (s)
1	0.0015	0.0002
2	0.0902	0.0004
3	0.1441	0.0005
4	0.1878	0.0005
5	0.2295	0.0005
6	0.2627	0.0006
7	0.2942	0.0006
8	0.3247	0.0006
9	0.3541	0.0006
10	0.3775	0.0006
11	0.4012	0.0007

⁴vedi *Appendice: Interpolazione*

Ci occuperemo più avanti della stima dell'accelerazione e della velocità limite per un singolo magnete, avanzando in parallelo con le considerazioni sul prossimo caso analizzato.

3.1.2 Due magneti

Le misure prese, in questo caso, sono 10 e i dati originali si presentano nella seguente forma:

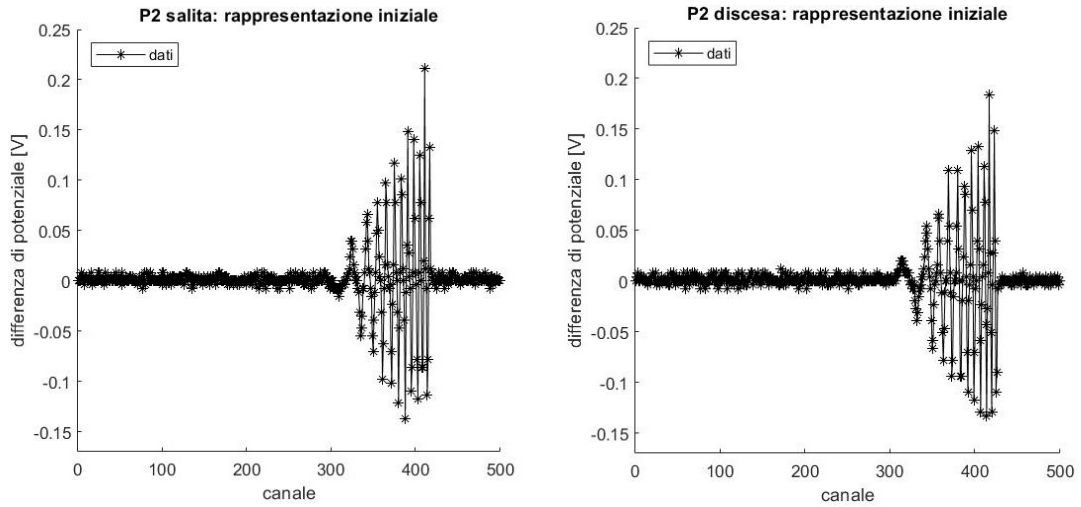


Figura 12: Dati originali dall'oscilloscopio. La prima figura rappresenta un set di dati in *salita*, la seconda ne rappresenta uno in *discesa*.

Come nel caso precedente, sono visibili dei segnali più alti corrispondenti alla posizione delle bobine.

Visualizzando tutti i set di dati ci siamo accorti che l'andamento di alcuni di questi risulta essere 'invertito': attribuiamo questo comportamento alla possibilità che per alcune misure il magnete sia stato inserito nel suo verso opposto, portando un'inversione del verso della corrente nella bobina.

Poiché questa volta si hanno più misure di questo tipo non è possibile scartare nessun set di dati. Infatti abbiamo analizzato separatamente le due tipologie: per semplicità distingueremo le misure prese in *salita*, ovvero aventi segmenti crescenti che collegano gli estremi dei picchi, dalle misure prese in *discesa*, aventi i segmenti decrescenti tra i picchi.

Anche in questo caso è necessario modificare l'ascissa dei dati utilizzando l'informazione del "*sampling period*": $sp = 0.0040s$.

Per distinguere correttamente i picchi dal rumore si considera la *deviazione standard* dei dati che precedono il primo picco visibile.

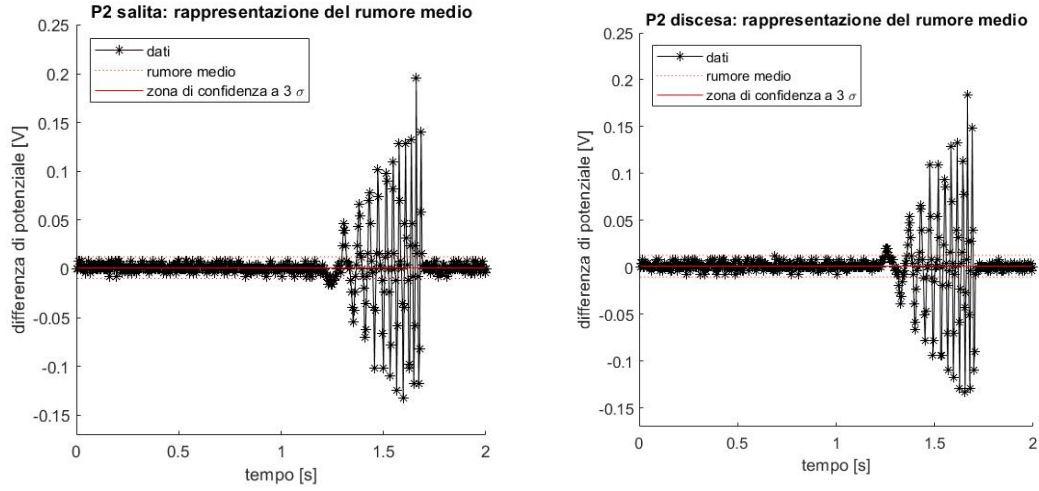


Figura 13: Dati originali con retta di rumore medio. Le linee tratteggiate delineano la zona di confidenza a 3σ . La prima figura rappresenta un *set* di dati in *salita*, la seconda ne rappresenta uno in *discesa*.

Nella tabella seguente distinguiamo la tipologia di dati considerati nella prima colonna e riportiamo (per ogni set di dati) il valore del rumore medio e la relativa incertezza.

Tabella 4: Valore del rumore medio e la relativa incertezza in funzione dei dati.

Set di dati	Rumore medio (V)	Incertezza (V)
discesa	0.001	0.003
discesa	0.001	0.004
discesa	0.001	0.003
salita	0.001	0.004
salita	0.001	0.004
salita	0.001	0.003
salita	0.001	0.003
salita	0.001	0.003
discesa	0.001	0.004
salita	0.001	0.004

Anche in questo caso il rumore risulta più piccolo rispetto alla sua incertezza perché viene calcolato in un intorno della retta passante per zero.

Per semplificare l'analisi trasliamo tutti i set in modo tale che il tempo di passaggio per il punto medio della prima bobina sia $t = 0$.

La figura di seguito mostra la sovrapposizione di tutti i set di dati.

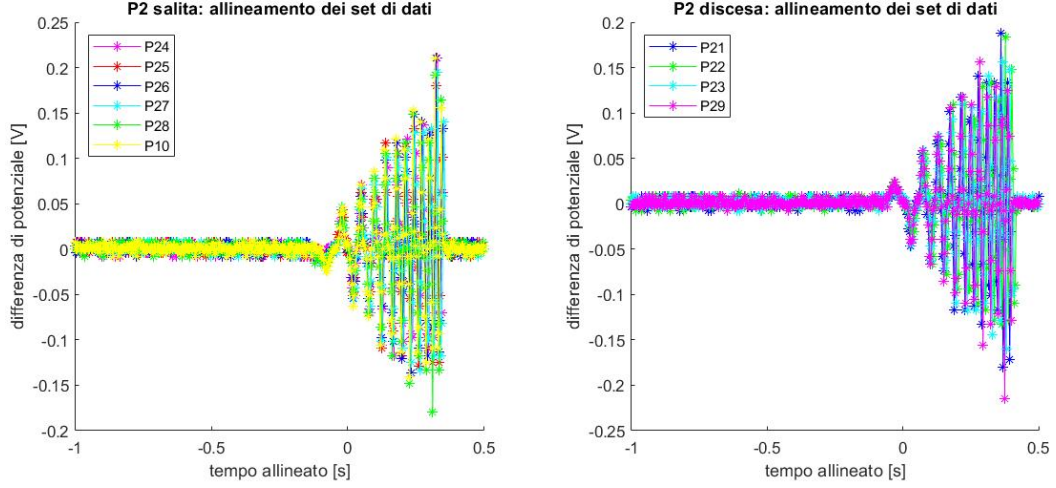


Figura 14: Allineamento dei vari set di dati. La prima figura rappresenta i dati in *salita*, la seconda rappresenta quelli in *discesa*.

Per procedere consideriamo singolarmente ogni set di dati ed identifichiamo i picchi corrispondenti ad ogni bobina.

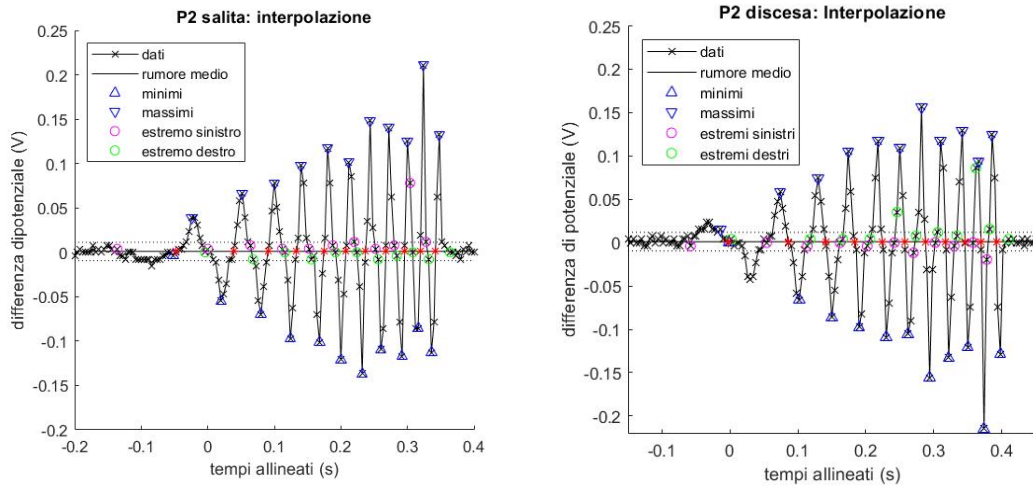


Figura 15: Identificazione degli estremi per gli intervalli considerati nella funzione e visualizzazione dei picchi. La prima figura rappresenta un set di dati in *salita*, la seconda ne rappresenta uno in *discesa*.

Anche in questo caso si possono avanzare considerazioni sulle aree sottese. Nelle seguenti figure riportiamo la rappresentazione della media, relativa a tutti i set di

dati considerati, delle aree sottese per ciascuna bobina (che dimostriamo essere prossima a zero):

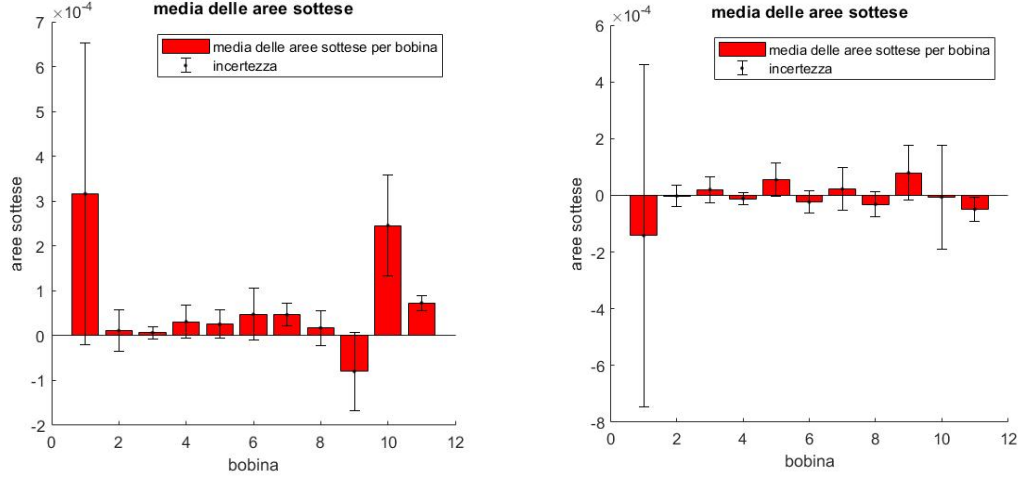


Figura 16: Esempio di aree sottese per ciascuna bobina.

La prima figura rappresenta la media dei dati dei set in *salita*,
la seconda rappresenta quella dei set in *discesa*.

I valori ottenuti sono approssimabili a zero, questo conclude che le aree sono costanti e i dati sono stati presi con una buona precisione.

Dopo aver identificato le coordinate di ogni picco, è possibile procedere con il *fit* per trovare gli istanti di passaggio.

Ricorriamo nuovamente al metodo dell'*interpolazione polinomiale*:

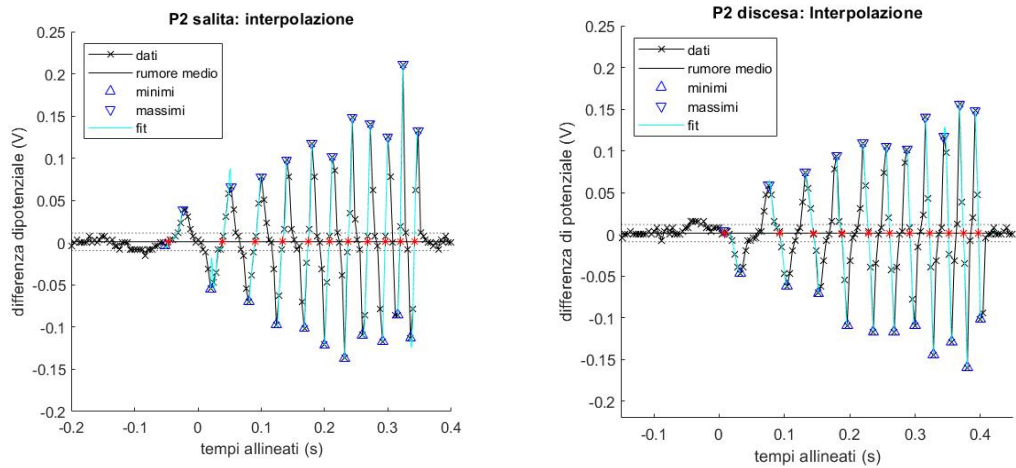


Figura 17: Identificazione dell'istante di passaggio mediante l'interpolazione: a destra un set di dati in *salita*, a sinistra uno in *discesa*.

A questo punto è possibile proseguire l'analisi dati senza considerare la distinzione tra dati in salita e in discesa.

Tabella 5: Istanti di passaggio (mediati sul numero di set di dati) e i relativi errori, calcolati come nell'**equazione (7)**.

Bobina	Istanti di passaggio (s)	Errore (s)
1	-0.0001	0.001
2	0.090	0.002
3	0.143	0.001
4	0.186	0.001
5	0.227	0.002
6	0.260	0.002
7	0.291	0.002
8	0.320	0.002
9	0.349	0.002
10	0.372	0.002
11	0.396	0.002

Rimandiamo alla prossima sezione per il proseguo dell'analisi dati.

3.1.3 Stima del valore dell'accelerazione

L'ultimo passaggio dell'analisi prevede di ricavare la legge oraria dei magneti e il valore dell'accelerazione, usando le informazioni sulle distanze fra le bobine (vedi Sezione: *I tubi di caduta*, Tabella 1).

Visualizziamo i dati ottenuti: sulle ascisse si hanno gli istanti di passaggio, mentre sulle ordinate la distanza tra le bobine.

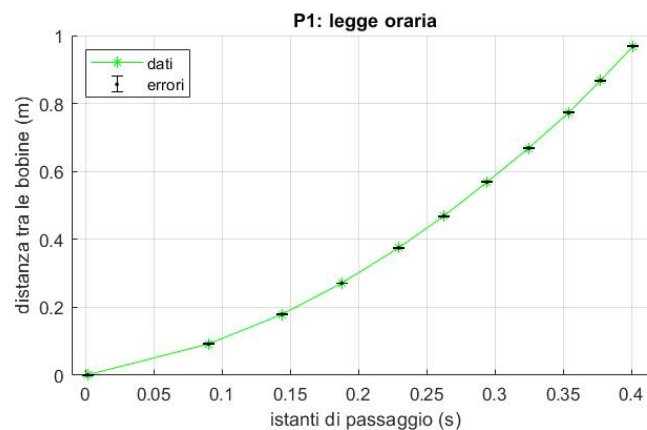


Figura 18: Rappresentazione della legge oraria di *un* magnete. Ogni dato è corredato dal relativo errore.

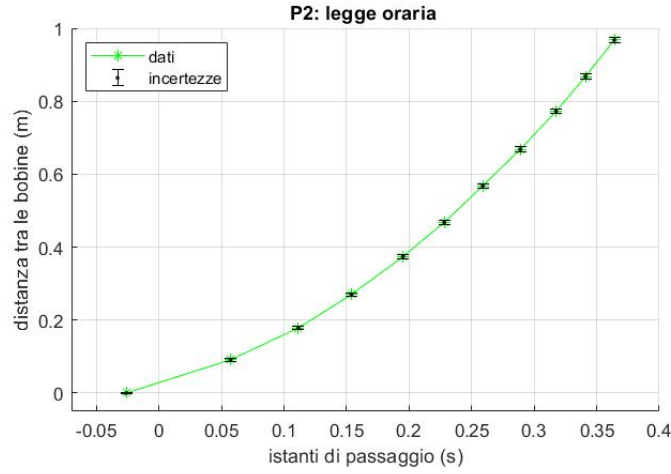


Figura 19: Rappresentazione della legge oraria di *due* magneti. Ogni dato è corredato dal relativo errore.

Sommando in quadratura l'errore sulle x e quello sulle y , è possibile ottenere i seguenti errori da tramutare in pesi per il *fit*:

$$\sigma_{fit} = \sqrt{\sigma_y^2 + \frac{(\sigma_x)^2 \cdot y^2}{x^2}} \quad (8)$$

dove σ_y corrisponde all'errore sulla distanza y tra le bobine e σ_x corrisponde all'errore sugli istanti medi x di passaggio (vedi Sezione: *Un magnete*, Tabella 3 e Sezione: *Due magneti*, Tabella 5).

Di seguito riportiamo i valori ottenuti:

Tabella 6: Errori relativi al fit.

Errore per fit: un magnete (m)	Errore per fit: due magneti (m)
0.001	0.001
0.001	0.005
0.001	0.005
0.001	0.005
0.001	0.005
0.001	0.005
0.001	0.006
0.002	0.006
0.002	0.006
0.002	0.007
0.002	0.007
0.002	0.007

Possiamo infine applicare un *curve fitting*. Il *fit* è stato corredato dai pesi derivati dagli errori in *Tabella 4*. I dati presentano l'andamento tipico di un moto uniformemente accelerato, con accelerazione a , ovvero:

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + at \\ x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \quad (9)$$

con v_0 velocità iniziale del magnete e x_0 posizione iniziale del corpo a $t = 0$. Ci aspettiamo che questi due coefficienti siano prossimi a zero poiché il magnete viene lasciato cadere da fermo (quindi privo di velocità iniziale) e la posizione iniziale dovrebbe corrispondere al punto medio della prima bobina (come visto in precedenza, le bobine sono state allineate in modo tale da far coincidere il punto medio della prima di queste con l'istante $t = 0$).

La formula inversa utile a ricavare l'accelerazione è la seguente:

$$a = \frac{2(x - x_0 - v_0t)}{t^2} \quad (10)$$

dove x nel nostro caso corrisponde alla lunghezza totale del tubo. Il valore di a può essere direttamente restituito dal *fit*, dal quale può essere estratto persino l'errore corrispondente.

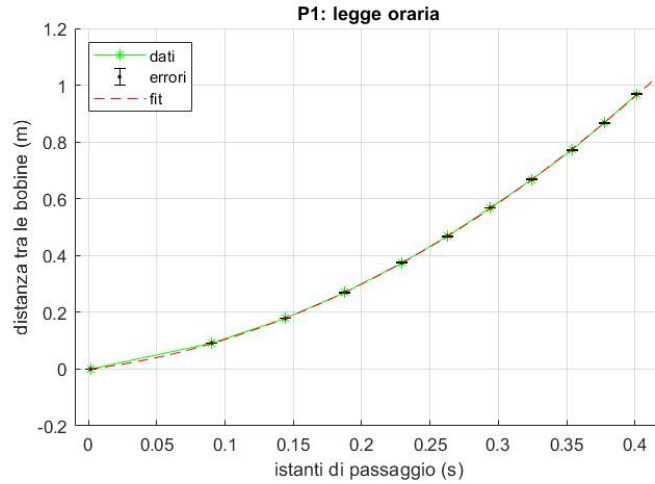


Figura 20: Rappresentazione del *fit* della legge oraria per *un* magnete. Ogni dato è corredato dal relativo errore.

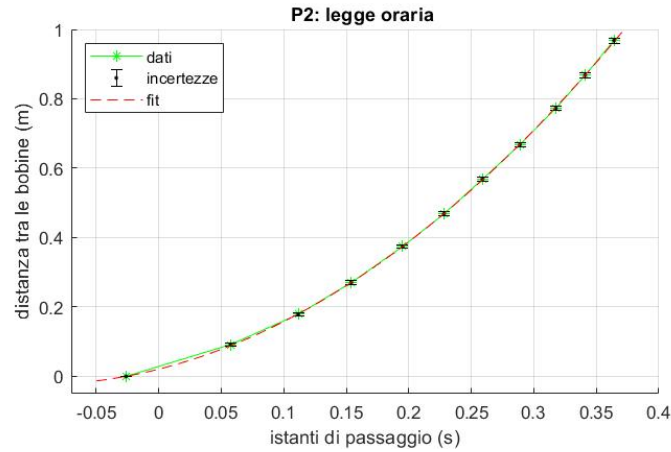


Figura 21: Rappresentazione del *fit* della legge oraria per *due* magneti. Ogni dato è corredato dal relativo errore.

E' possibile notare come il *fit* aderisca bene alla curva dei dati.

Una conferma è data dal valore del $\tilde{\chi}^2$ ⁵ e dal \bar{R}^2 ⁶:

Tabella 7: stima della bontà del *fit*.

N magneti	$\tilde{\chi}^2$	Coefficiente di Determinazione (\bar{R}^2)
1	1.6129	1.0000
2	0.1444	1.0000

I valori ottenuti risultano essere molto buoni, questo conferma la corretta riuscita del *fit* e quindi una giusta ipotesi di partenza. Ora possiamo estrarre i coefficienti dell'accelerazione, della velocità iniziale e della posizione iniziale con i relativi errori:

Tabella 8: coefficienti estratti dal *fit*.

N magneti	Accelerazione a (m/s^2)	Velocità v_0 (m/s)	Posizione s_0 (m)
1	9.01 ± 0.04	0.60 ± 0.02	-0.001 ± 0.001
2	9.22 ± 0.04	0.91 ± 0.01	0.0208 ± 0.0004

⁵vedi *Appendice: Test del Chi Quadro*

⁶vedi *Appendice: Coefficiente di Determinazione*

E' possibile notare dalla tabella qui sopra che:

- l'accelerazione a è più piccola di quella gravitazionale, in particolare nel caso di un magnete. Questo dimostra la presenza di una forza frenante debole, causata dall'attrito dell'aria esercitata sul corpo in caduta; inoltre, è possibile supporre anche una seconda forza d'attrito, generata dallo scontro tra il magnete e le pareti del tubo;
- le aspettative sulla velocità iniziale v_0 non sono del tutto soddisfatte, infatti ci aspettavamo una velocità nulla. Il valore trovato indica quindi che il corpo non è stato lasciato cadere da fermo ma gli è stata impressa una piccola velocità iniziale;
- per quanto riguarda la posizione iniziale s_0 di un magnete, otteniamo un valore approssimabile a zero, come ci aspettavamo. Per il caso di due magneti, invece, la posizione iniziale restituisce un valore meno preciso (supponiamo come spiegazione l'aumento di spessore causato da due magneti sovrapposti). Rimane comunque un valore accettabile che non inficia particolarmente i risultati finali.

Ora, per concludere questa analisi ci occupiamo di ricavare la velocità limite, tramite la seguente formula:

$$v_{max} = \sqrt{2aL + v_0^2} \quad (11)$$

dove L corrisponde alla lunghezza del tubo in PVC (vedi Sezione: *I tubi di caduta*, Tabella 1) e a corrisponde all'accelerazione trovata.

Attribuiamo ai valori un errore, ricavato dalla propagazione della formula scritta sopra, come segue:

$$\sigma_{v_{max}} = \sqrt{\frac{v_0^2 \sigma_{v_0}^2 + L^2 \sigma_a^2 + 2a^2 \sigma_L^2}{v_{max}}} \quad (12)$$

dove σ_{v_0} corrisponde all'errore sulla velocità iniziale, σ_a corrisponde all'errore sull'accelerazione e σ_L è l'errore sulla lunghezza del tubo, tutti estratti dal *fit*.

In tabella riportiamo i valori ottenuti:

Tabella 9: Coefficienti estratti dal *fit*.

N magneti	Velocità limite v_{max} (m/s)
1	4.22 ± 0.02
2	4.32 ± 0.02

Notiamo che la velocità del corpo, dopo aver percorso l'intero tubo, è ben diversa dalla velocità iniziale, coerentemente con un moto uniformemente accelerato.

Come previsto nell'**equazione (5)** la velocità limite e la massa risultano essere direttamente proporzionali, fatto che giustifica una velocità limite maggiore nel caso dei due magneti.

3.2 Tubo in alluminio

3.2.1 Un magnete

Per questo primo caso, le misure sono state ripetute 10 volte. I dati originali ottenuti dalla rilevazione con l'oscilloscopio presentano la seguente forma:

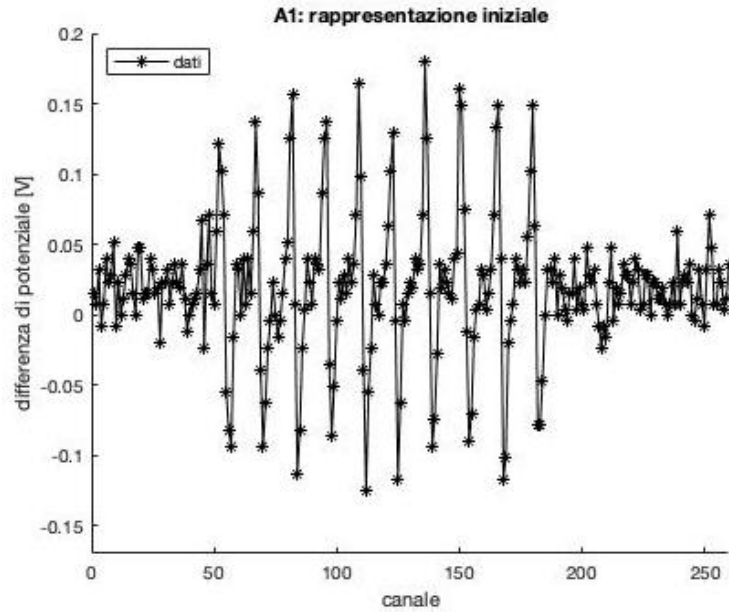


Figura 22: Esempio di visualizzazione del segnale relativo al passaggio di un magnete. I dati registrati sono relativi ad un tubo in alluminio.

Poiché l'analisi deve essere svolta in funzione di grandezze fisiche reali, è necessario modificare l'ascissa dei dati utilizzando l'informazione del “*sampling period*”: $sp = 0.0040s$.

E' possibile notare la presenza di alcuni picchi oltre alla presenza di molto rumore.

Per distinguere correttamente i picchi dal rumore si considera la *deviazione standard*⁷ dei dati che seguono l'ultimo picco visibile.

Per far fronte al rumore abbiamo considerato un'errore di 3σ sia in positivo che in negativo, tenendo come riferimento la linea del rumore medio.

⁷vedi *Appendice: Deviazione standard*

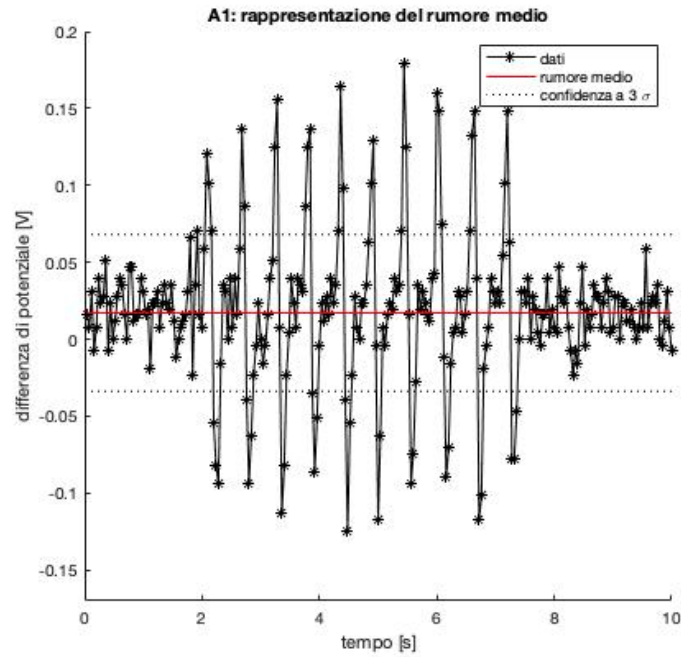


Figura 23: Dati originali con retta di rumore medio. Le linee tratteggiate delineano la zona di confidenza a 3σ .

Nella tabella seguente riportiamo, per ogni set di dati, il valore del rumore medio e la relativa incertezza.

Tabella 10: Rumore medio ed incertezza.

Rumore medio (V)	Incertezza (V)
0.02	0.02
0.02	0.02
0.02	0.01
0.02	0.02
0.02	0.02
0.02	0.02
0.02	0.02
0.02	0.02
0.02	0.02
0.02	0.02

L'utilità dei dati rappresentati sta nel poter trovare l'ascissa corrispondente all'istante in cui il magnete transita per il punto medio delle bobine di lettura.

Per semplificare l'analisi trasliamo tutti i set in modo tale che il tempo di passaggio per il punto medio della prima bobina sia $t = 0$.

La figura di seguito mostra la sovrapposizione di tutti i set di dati.

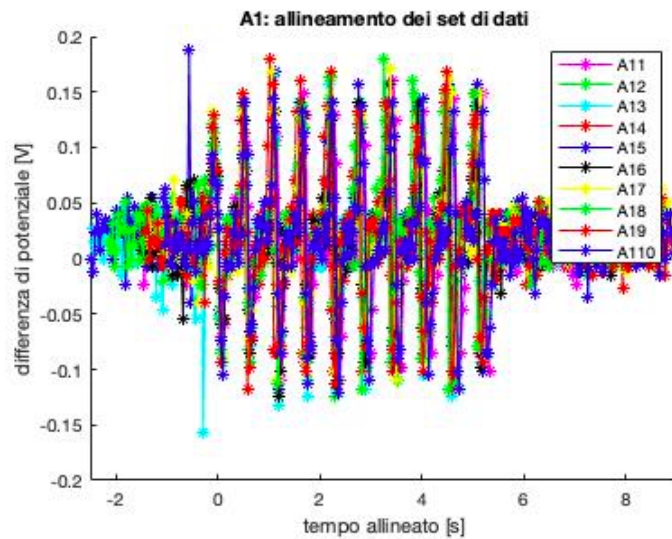


Figura 24: Allineamento dei vari set di dati.

Per continuare l'analisi, consideriamo singolarmente ogni set di dati.

Ci occupiamo di identificare i picchi corrispondenti ad ogni bobina mediante la funzione creata precedentemente (Sezione: *Tubo in PVC*).

Di seguito riportiamo un esempio di identificazione degli estremi utilizzati per ogni intervallo e i relativi picchi trovati:

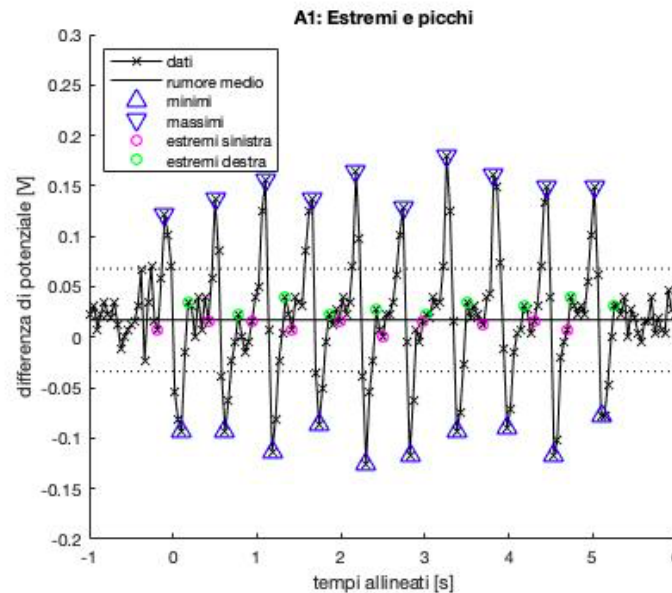


Figura 25: Identificazione degli estremi per gli intervalli considerati nella funzione e visualizzazione dei picchi.

Prima di trovare gli istanti di passaggio, è possibile fare alcune considerazioni sull'evoluzione temporale dei picchi e sulle aree sottese.

Una conferma della buona presa dati prevede che le aree siano costanti.

Nella seguente figura riportiamo la media su tutti i set di dati delle aree sottese per ciascuna bobina (che dimostriamo essere prossima a zero):

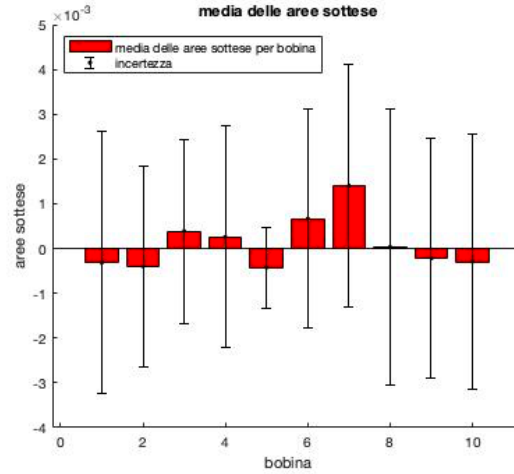


Figura 26: Media delle aree sottese.

A questo punto, dopo aver identificato le coordinate di ogni picco, è possibile procedere con il *fit interpolante*⁸ (dato che intercorrono tra un picco positivo e il successivo negativo numerosi punti) per trovare gli istanti di passaggio.

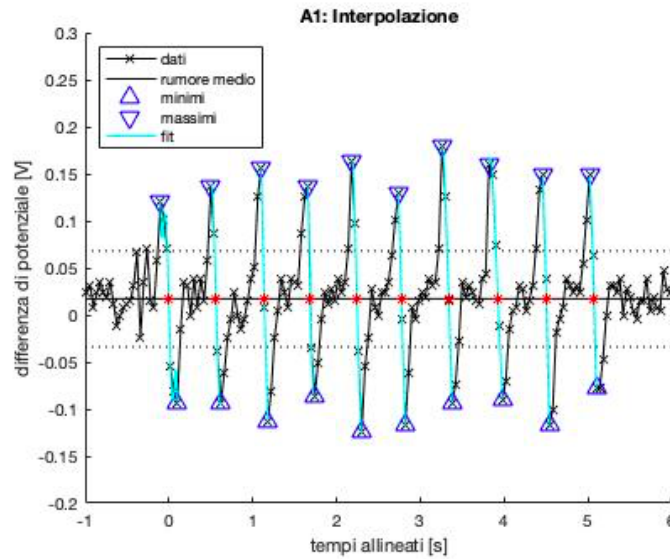


Figura 27: Identificazione dell'istante di passaggio mediante l'interpolazione.

⁸vedi *Appendice: Interpolazione*

Per associare un errore ai valori trovati si può sfruttare la presenza di diversi set di dati. E' possibile mediare su tutti i set di dati considerati, in modo da ottenere un singolo valore per ciascuna bobina.

A questo punto, ad ogni valore si può associare un errore dato da:

$$\sigma_{\bar{t}} = \frac{\text{std}(t_i)}{\sqrt{N}} \quad (13)$$

dove $\text{std}(t_i)$ è la *deviazione standard* relativa agli istanti di passaggio (t_i) della bobina in questione e dove N è il numero di set di dati.

Tabella 11: Istanti di passaggio mediati su tutti i set di dati considerati, per ciascuna bobina.

Bobina	Istanti di passaggio (s)	Errore (s)
1	0.009	0.001
2	0.572	0.002
3	1.146	0.003
4	1.697	0.003
5	2.265	0.004
6	2.835	0.004
7	3.422	0.005
8	4.008	0.006
9	4.585	0.005
10	5.147	0.005

Ci occuperemo più avanti della stima dell'accelerazione e della velocità limite per un singolo magnete, avanzando in parallelo con le considerazioni sul prossimo caso analizzato.

3.2.2 Due magneti

Le misure prese, in questo caso, sono 10 e i dati originali si presentano nella seguente forma:

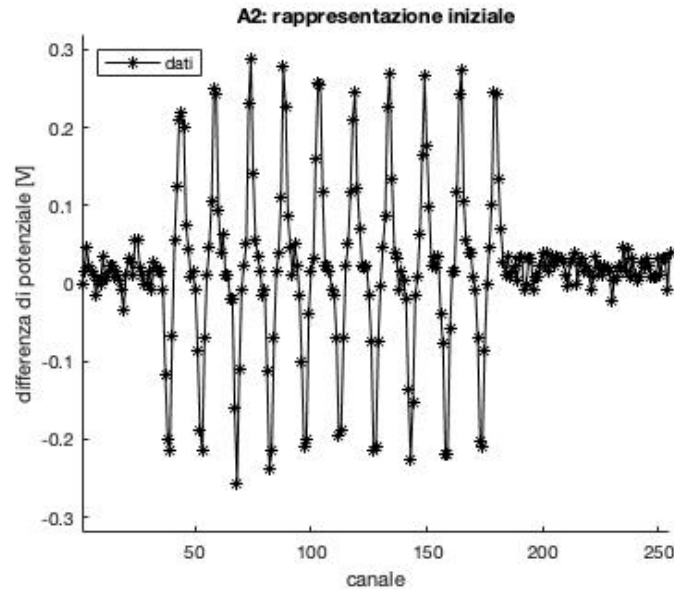


Figura 28: Dati originali dall'oscilloscopio.

Come nel caso precedente, sono visibili dei segnali più alti.

Visualizzando i dati di tutte le misure prese si può notare come, nel nostro caso, ci siano due set aventi un andamento opposto agli altri. Per evitare complicazioni nell'analisi, e avendo già abbastanza misure per una buona statistica decidiamo di scartare questi set di dati invertiti.

Anche in questo caso è necessario modificare l'ascissa dei dati utilizzando l'informazione del "*sampling period*": $sp = 0.0020s$.

Per distinguere correttamente i picchi dal rumore si considera la *deviazione standard* dei dati che seguono l'ultimo picco visibile.

A seguire, infatti, mostriamo la retta del rumore medio.

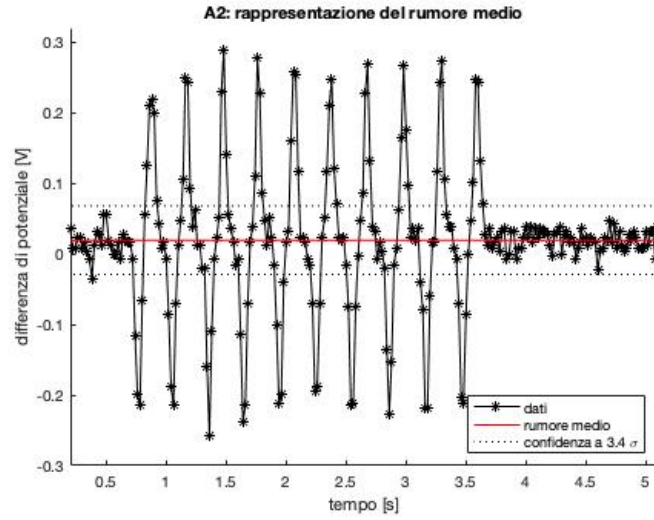


Figura 29: Dati originali con retta di rumore medio.

Nella tabella seguente riportiamo (per ogni set di dati) il valore del rumore medio e la relativa incertezza (scartando i due set di dati opposti, come detto precedentemente).

Tabella 12: Valore del rumore medio e la relativa incertezza in funzione dei dati.

Set di dati	Rumore medio (V)	Incertezza(V)
salita	0.02	0.01
salita	0.02	0.01
salita	0.02	0.01
salita	0.02	0.01
salita	0.02	0.01
salita	0.02	0.01
salita	0.02	0.01
salita	0.02	0.02

L'utilità dei dati rappresentati sta nel poter trovare l'ascissa corrispondente all'istante in cui il magnete transita per il punto medio delle bobine di lettura: per semplificare l'analisi trasliamo tutti i set in modo tale che il tempo di passaggio per il punto medio della prima bobina sia $t = 0$.

La figura di seguito mostra la sovrapposizione di tutti i set di dati, esclusi quelli scartati.

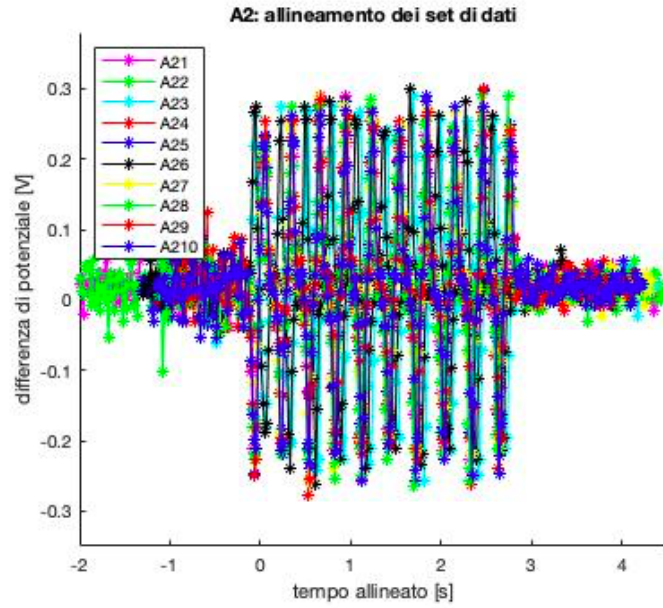


Figura 30: Allineamento dei vari set di dati.

Per procedere consideriamo singolarmente ogni set di dati. Ci occupiamo di identificare i picchi corrispondenti ad ogni bobina:

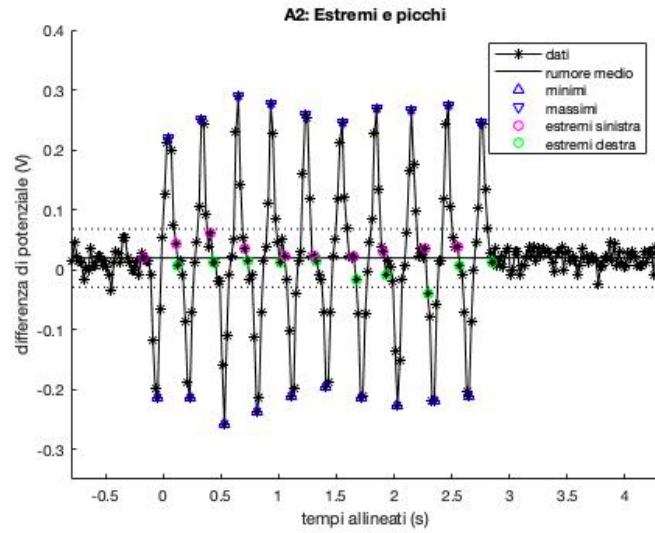


Figura 31: Identificazione degli estremi per gli intervalli considerati nella funzione e visualizzazione dei picchi.

Anche in questo caso si possono avanzare considerazioni sulle aree sottese. In figura sono riportati i valori corrispondenti alla media su tutti i set di dati per ciascuna bobina.

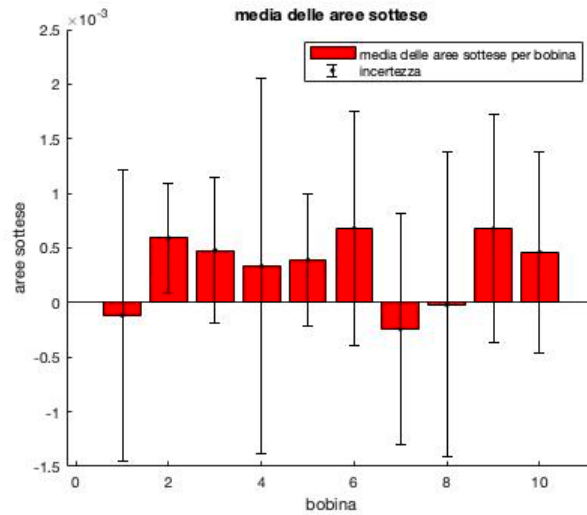


Figura 32: Esempio della media delle aree per ciascuna bobina.

I valori ottenuti sono approssimabili a zero, questo conclude che le aree sono costanti e i dati sono stati presi con una buona precisione.

Dopo aver identificato le coordinate di ogni picco, è possibile procedere con il *fit* per trovare gli istanti di passaggio.

Ricorriamo nuovamente al metodo dell'*interpolazione polinomiale*:

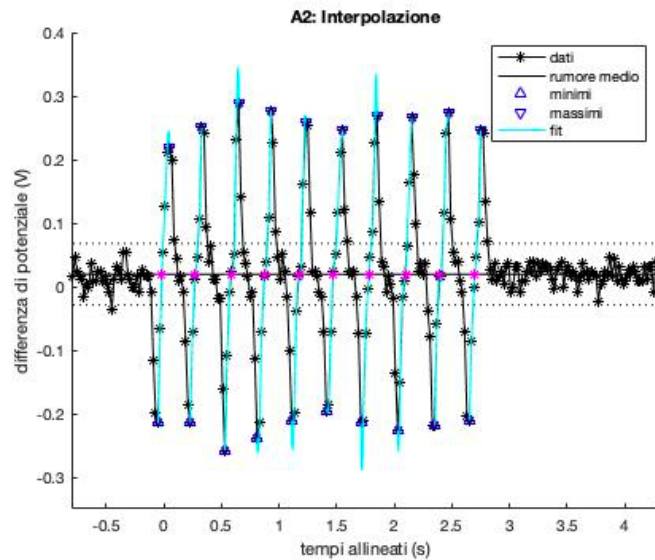


Figura 33: Identificazione dell'istante di passaggio mediante l'interpolazione.

In tabella a seguire sono riportati i valori degli istanti di passaggio, mediati sul numero di set di dati, e i relativi errori, calcolati come nell'**equazione (13)**.

Tabella 13: Istanti di passaggio mediati su tutti i set di dati considerati, per ciascuna bobina.

Bobina	Istanti di passaggio (s)	Errore (s)
1	-0.015	0.001
2	0.283	0.001
3	0.590	0.002
4	0.875	0.001
5	1.174	0.002
6	1.468	0.001
7	1.774	0.002
8	2.088	0.001
9	2.388	0.002
10	2.689	0.001

Rimandiamo alla prossima sezione per il continuo dell'analisi dati e le considerazioni finali sul confronto dei casi: un magnete e due magneti.

3.2.3 Stima del valore dell'accelerazione

L'ultimo passaggio dell'analisi prevede di ricavare la legge oraria dei magneti e il valore dell'accelerazione, usando le informazioni sulle distanze fra le bobine (vedi Sezione: *I tubi di caduta*, Tabella 1).

Visualizziamo i dati ottenuti: sulle ascisse si hanno gli istanti di passaggio, mentre sulle ordinate la distanza tra le bobine.

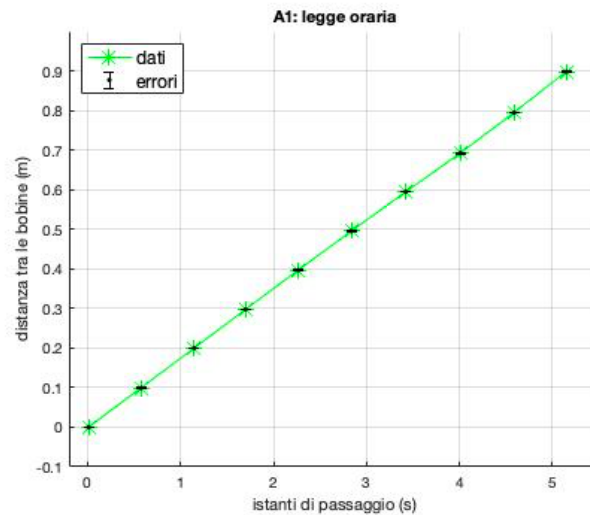


Figura 34: Rappresentazione della legge oraria di *un* magnete. Ogni dato è corredato dal relativo errore.

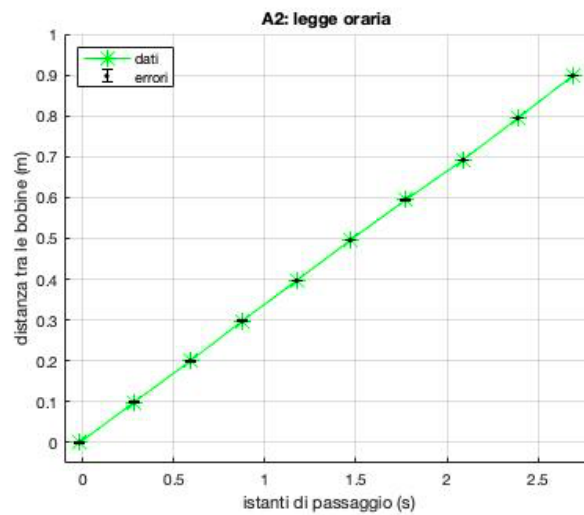


Figura 35: Rappresentazione della legge oraria di *due* magneti. Ogni dato è corredato dal relativo errore.

Sommando in quadratura l'errore sulle x e quello sulle y , è possibile ottenere i seguenti errori da tramutare in pesi per il *fit*:

$$\sigma_{fit} = \sqrt{\sigma_y^2 + \frac{(\sigma_x)^2 \cdot y^2}{x^2}} \quad (14)$$

dove σ_y corrisponde all'errore sulla distanza y tra le bobine e σ_x corrisponde all'errore sugli istanti medi di passaggio x (vedi Sezione: *Un magnete*, Tabella 10 e Sezione: *Due magneti*, Tabella 12).

Di seguito riportiamo i valori ottenuti:

Tabella 14: Errori sui dati relativi al *fit*.

Errore per <i>fit</i> : un magnete (m)	Errore per <i>fit</i> : due magneti (m)
0.001	0.001
0.001	0.001
0.001	0.001
0.001	0.001
0.001	0.001
0.001	0.001
0.001	0.001
0.001	0.001
0.002	0.001
0.001	0.001
0.001	0.001

Possiamo infine applicare un *curve fitting*. Il *fit* è stato correato dai pesi derivati dagli errori in *Tabella 14*. I dati presentano l'andamento tipico di un moto rettilineo uniforme, ovvero:

$$x(t) = x_0 + v_0(t) \cdot t \quad (15)$$

con $v_0(t)$ velocità costante e x_0 posizione iniziale del magnete a $t = 0$. Ci aspettiamo che quest'ultimo coefficiente sia prossimo a zero poiché dovrebbe corrispondere al punto medio della prima bobina (come visto in precedenza, le bobine sono state allineate in modo tale da far coincidere il punto medio della prima di queste con l'istante $t = 0$).

Inoltre, per avere un'ulteriore conferma del moto rettilineo uniforme, abbiamo usato comunque un polinomio di 2° grado per il *fit*; ci aspettiamo così che il coefficiente relativo all'accelerazione sia nullo.

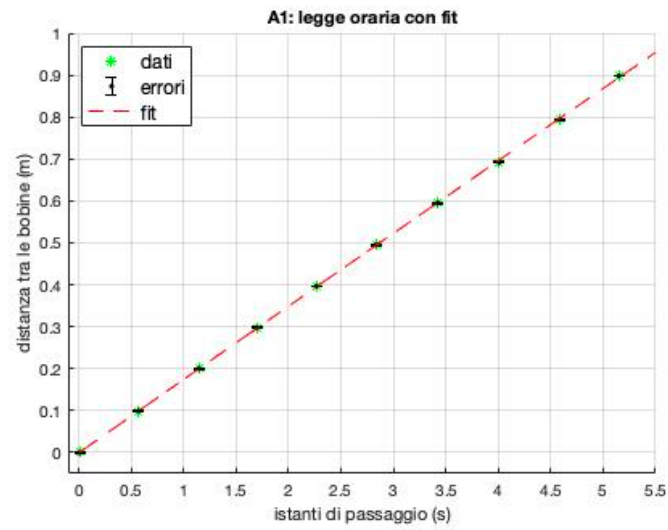


Figura 36: Rappresentazione del *fit* della legge oraria per *un* magnete. Ogni dato è corredato dal relativo errore.

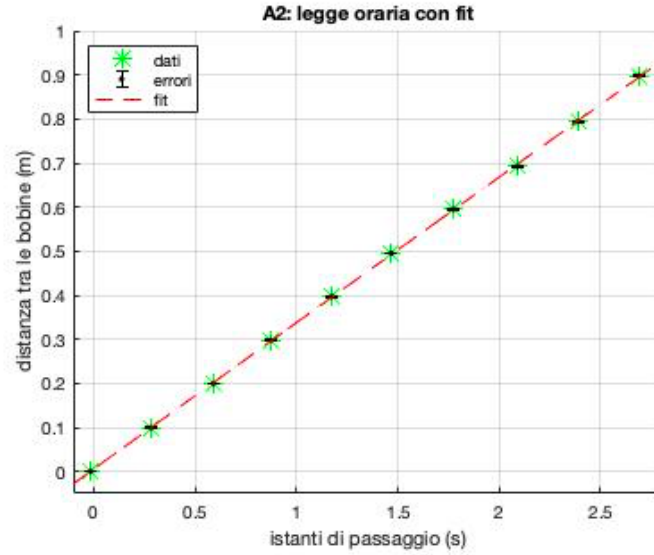


Figura 37: Rappresentazione del *fit* della legge oraria per *due* magneti. Ogni dato è corredato dal relativo errore.

E' possibile notare come il *fit* aderisca bene alla curva dei dati.

Una conferma è data dal valore del $\tilde{\chi}^2$ ⁹ e dal \bar{R}^2 ¹⁰:

Tabella 15: Stima della bontà del *fit*.

N magneti	$\tilde{\chi}^2$	Coefficiente di Determinazione (\bar{R}^2)
1	4.4176	0.9999
2	6.3802	0.9999

I valori ottenuti risultano essere molto buoni, questo conferma la buona riuscita del *fit* e quindi una corretta ipotesi di partenza. Ora possiamo estrarre i coefficienti dell'accelerazione, della velocità iniziale e della posizione iniziale con i relativi errori:

Tabella 16: Coefficienti estratti dal *fit*.

N magneti	Accelerazione a (m/s^2)	Velocità v_0 (m/s)	Posizione s_0 (m)
1	-0.0007 ± 0.0004	0.176 ± 0.002	-0.001 ± 0.002
2	-0.002 ± 0.002	0.333 ± 0.004	0.005 ± 0.002

E' possibile notare dalla tabella qui sopra che:

- l'accelerazione a è prossima a zero, come ci aspettavamo. Questo dimostra la presenza di una forza frenante, che compensa quasi del tutto l'accelerazione gravitazionale, dato l'utilizzo di un tubo in alluminio (ottimo conduttore);
- per quanto riguarda la posizione iniziale s_0 dei magneti, otteniamo un valore approssimabile a zero, come ci aspettavamo;
- la velocità iniziale v_0 , invece, presenta un valore consistente definito dal suo moto; per dimostrare, però, l'andamento costante dobbiamo confermare l'analogia tra questa velocità e la velocità limite.

Ci occupiamo di ricavare la velocità limite, tramite la seguente formula:

$$v_{max} = \sqrt{2aL + v_0^2} \quad (16)$$

dove L corrisponde alla lunghezza del tubo in alluminio (vedi Sezione: *I tubi di caduta*, Tabella 1) e a corrisponde all'accelerazione prossima a zero (ricavata dal *fit*).

⁹vedi *Appendice: Test del Chi Quadro*

¹⁰vedi *Appendice: Coefficiente di Determinazione*

Attribuiamo ai valori trovati un errore, ricavato dalla propagazione della formula scritta sopra, come segue:

$$\sigma_{v_{max}} = \sqrt{\frac{v_0^2 \sigma_{v_0}^2 + L^2 \sigma_a^2 + 2a^2 \sigma_L^2}{v_{max}}} \quad (17)$$

dove σ_{v_0} corrisponde all'errore sulla velocità iniziale, σ_a corrisponde all'errore sull'accelerazione e σ_L è l'errore sulla lunghezza del tubo, tutti estratti dal *fit*.

In tabella riportiamo i valori ottenuti:

Tabella 17: coefficienti estratti dal *fit*.

N magneti	Velocità limite v_{max} (m/s)
1	0.172 ± 0.001
2	0.328 ± 0.004

Come previsto nell'**equazione (5)** la velocità limite e la massa risultano essere direttamente proporzionali, fatto che giustifica una velocità limite maggiore nel caso dei due magneti.

Come si può vedere dalla tabella qui sopra, le velocità limite v_{max} sono analoghe alle velocità v_0 calcolate precedentemente per i rispettivi casi.

Notiamo, quindi, che la velocità del corpo (dopo aver percorso l'intero tubo) è costante nel tempo, coerentemente con un moto rettilineo uniforme.

3.3 Tubo in alluminio tagliato

3.3.1 Un magnete

Per questo primo caso, le misure sono state ripetute 10 volte. I dati originali ottenuti dalla rilevazione con l'oscilloscopio presentano la seguente forma:

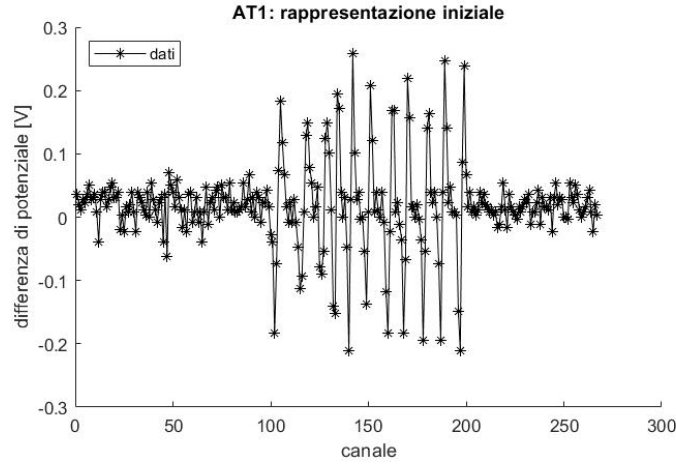


Figura 38: Esempio di visualizzazione del segnale relativo al passaggio di un magnete. I dati registrati sono relativi ad un tubo in alluminio tagliato.

Visualizzando i dati di tutte le misure prese si può notare come, nel nostro caso, ci siano due set aventi un andamento opposto agli altri. Per evitare complicazioni nell'analisi, e avendo già abbastanza misure per una buona statistica decidiamo di scartare i set di dati invertiti.

Poiché l'analisi deve essere svolta in funzione di grandezze fisiche reali, è necessario modificare l'ascissa dei dati utilizzando l'informazione del “*sampling period*”: $sp = 0.0040s$.

E' possibile notare la presenza di alcuni picchi oltre alla presenza di molto rumore (soprattutto nella parte iniziale del grafico).

Per distinguere correttamente i picchi dal rumore si considera la *deviazione standard*¹¹ dei dati che seguono l'ultimo picco visibile.

Per far fronte al rumore abbiamo considerato un'errore di 3σ sia in positivo che in negativo, tenendo come riferimento la linea del rumore medio.

¹¹vedi *Appendice: Deviazione standard*

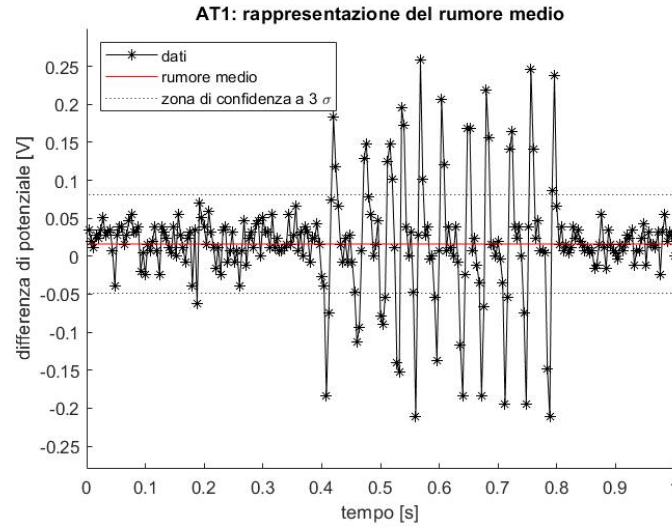


Figura 39: Dati originali con retta di rumore medio. Le linee tratteggiate delineano la zona di confidenza a 3σ .

Nella tabella seguente riportiamo (per ogni set di dati) il valore del rumore medio e la relativa incertezza (scartando i due set di dati opposti, come detto precedentemente).

Tabella 18: Rumore medio ed incertezza sul rumore.

Rumore medio (V)	Incertezza (V)
0.02	0.02
0.02	0.02
0.02	0.01
0.02	0.02
0.02	0.02
0.02	0.02
0.02	0.02
0.02	0.02
0.02	0.02
0.02	0.02

L'utilità dei dati rappresentati sta nel poter trovare l'ascissa corrispondente all'istante in cui il magnete transita per il punto medio delle bobine di lettura.

Per semplificare l'analisi trasliamo tutti i set in modo tale che il tempo di passaggio per il punto medio della prima bobina sia $t = 0$.

La figura di seguito mostra la sovrapposizione di tutti i set di dati.

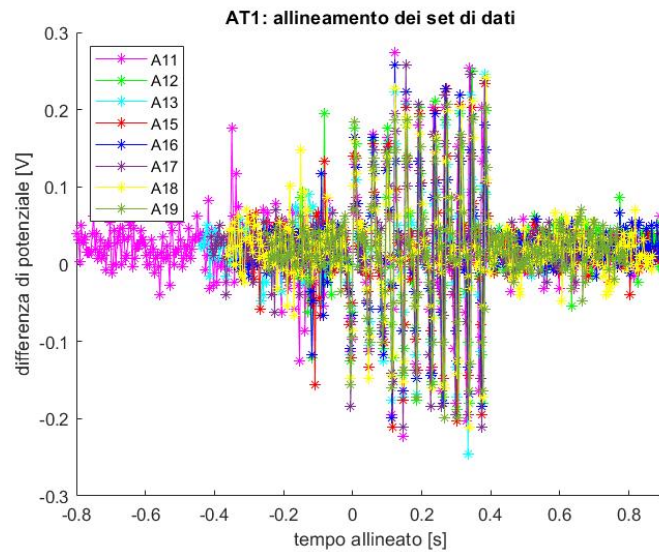


Figura 40: Allineamento dei vari set di dati.

Per continuare l'analisi, consideriamo singolarmente ogni set di dati.

Ci occupiamo di identificare i picchi corrispondenti ad ogni bobina mediante la funzione spiegata precedentemente (Sezione: *Tubo in PVC*).

Di seguito riportiamo un esempio di identificazione degli estremi utilizzati per ogni intervallo e i relativi picchi trovati:

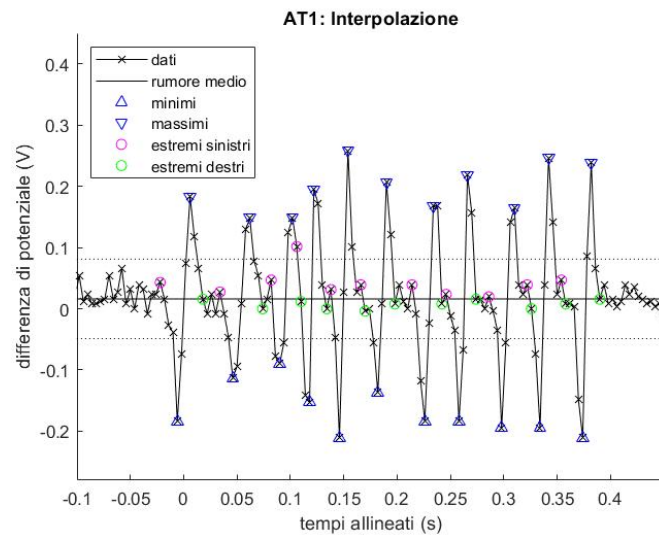


Figura 41: Identificazione degli estremi per gli intervalli considerati nella funzione e visualizzazione dei picchi.

Prima di trovare gli istanti di passaggio, è possibile fare alcune considerazioni sull'evoluzione temporale dei picchi e sulle aree sottese.

Nella seguente figura riportiamo l'esempio del calcolo della media su tutti i set delle aree sottese per ogni bobina (che dimostriamo essere prossima a zero), relativo al set di dati considerato per la figura precedente:

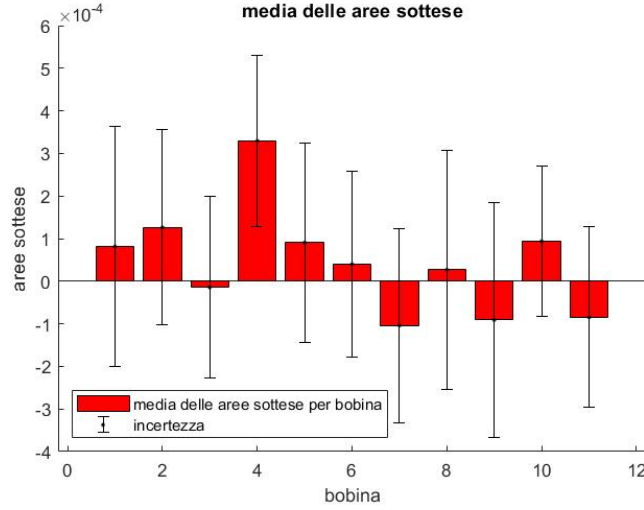


Figura 42: Calcolo della media delle aree sottese.

A questo punto, dopo aver identificato le coordinate di ogni picco, è possibile procedere con il *fit interpolante*¹² (dato che intercorrono tra un picco positivo e il successivo negativo numerosi punti) per trovare gli istanti di passaggio.

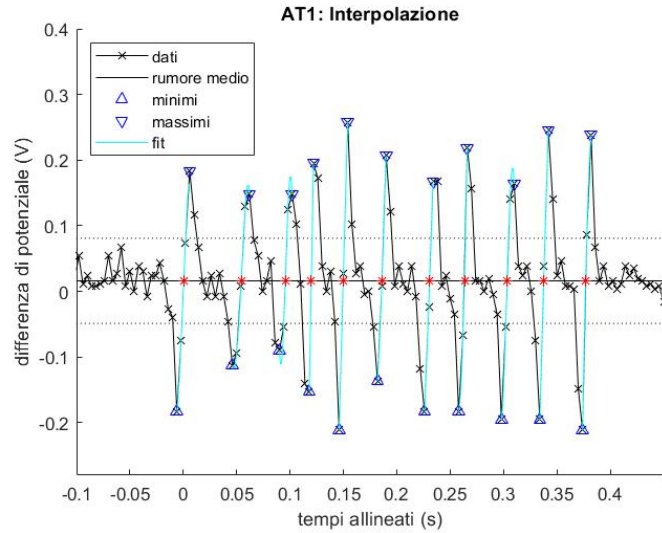


Figura 43: Identificazione dell'istante di passaggio mediante l'interpolazione.

¹²vedi *Appendice: Interpolazione*

Per associare un errore ai valori trovati si può sfruttare la presenza di diversi set di dati. E' possibile mediare su tutti i set di dati considerati, in modo da ottenere un singolo valore per ciascuna bobina.

A questo punto, ad ogni valore si può associare un errore dato da:

$$\sigma_{\bar{t}} = \frac{\text{std}(t_i)}{\sqrt{N}} \quad (18)$$

dove $\text{std}(t_i)$ è la *deviazione standard* relativa agli istanti di passaggio (t_i) della bobina in questione e dove N è il numero di set di dati.

Tabella 19: Istanti di passaggio mediati su tutti i set di dati considerati, per ciascuna bobina.

Bobina	Istanti di passaggio (s)	Errore (s)
1	0.00050	0.00003
2	0.0530	0.0001
3	0.0954	0.0001
4	0.1194	0.0001
5	0.1513	0.0001
6	0.1890	0.0002
7	0.2334	0.0003
8	0.2661	0.0003
9	0.3061	0.0004
10	0.3400	0.0004
11	0.3788	0.0005

Ci occuperemo più avanti della stima dell'accelerazione e della velocità limite per un singolo magnete, avanzando in parallelo con le considerazioni sul prossimo caso analizzato.

3.3.2 Due magneti

Le misure prese, in questo caso, sono 9 e i dati originali si presentano nella seguente forma:

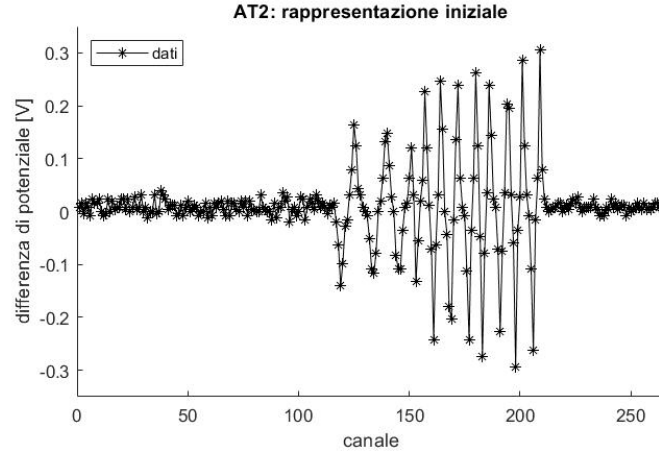


Figura 44: Dati originali dall'oscilloscopio.

Visualizzando i dati di tutte le misure prese si può notare come, nel nostro caso, ci siano tre set aventi un andamento opposto agli altri decidendo di scartarli.

Anche in questo caso è necessario modificare l'ascissa dei dati utilizzando l'informazione del “*sampling period*”: $sp = 0.0200s$.

Per distinguere correttamente i picchi dal rumore si considera la *deviazione standard* dei dati che precedono il primo picco visibile.

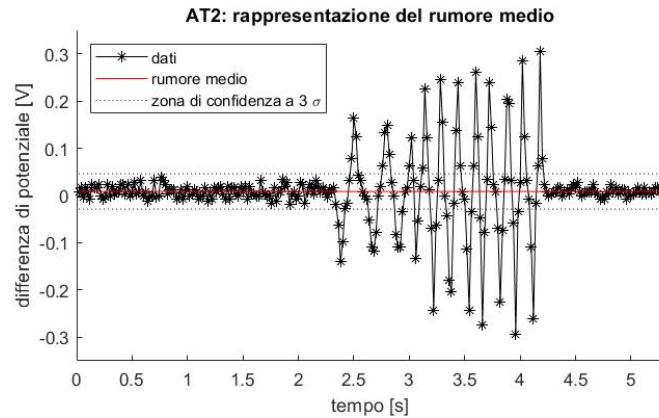


Figura 45: Dati originali con retta di rumore medio.

Nella tabella seguente riportiamo (per ogni set di dati) il valore del rumore medio e la relativa incertezza (scartando i tre set di dati opposti, come detto precedentemente).

Tabella 20: Valore del rumore medio e la relativa incertezza in funzione dei dati.

Set di dati	Rumore medio (V)	Incetezza (V)
salita	0.01	0.02
salita	0.01	0.01
salita	0.01	0.01
salita	0.01	0.01
salita	0.01	0.02
salita	0.01	0.01

Per semplificare l'analisi trasliamo tutti i set in modo tale che il tempo di passaggio per il punto medio della prima bobina sia $t = 0$.

La figura di seguito mostra la sovrapposizione di tutti i set di dati.

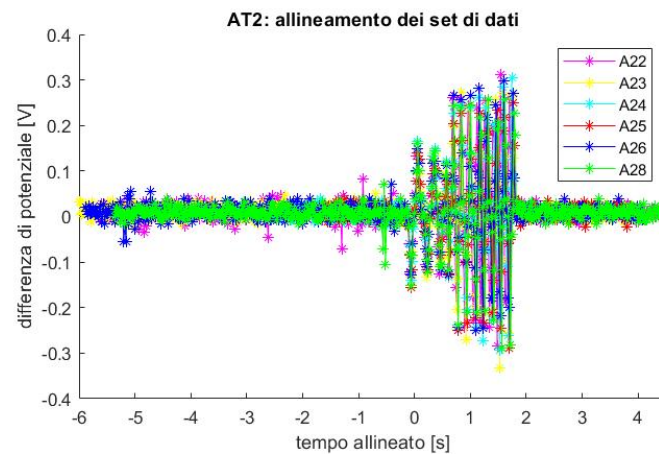


Figura 46: Allineamento dei vari set di dati.

Per procedere consideriamo singolarmente ogni set di dati.

Ci occupiamo di identificare i picchi corrispondenti ad ogni bobina.

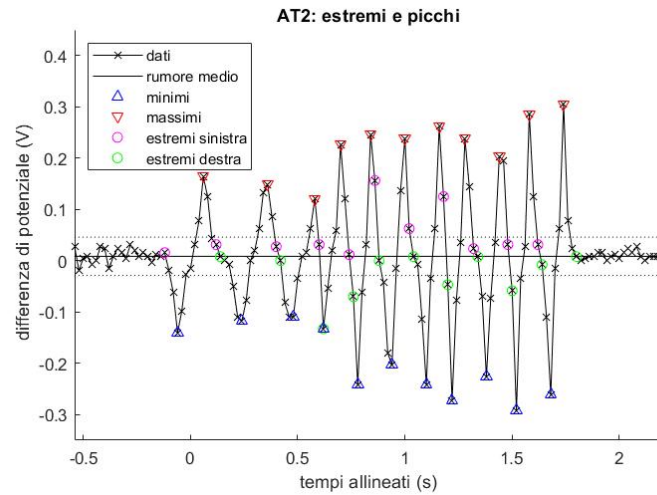


Figura 47: Identificazione degli estremi per gli intervalli considerati nella funzione e visualizzazione dei picchi.

Anche in questo caso si possono avanzare considerazioni sulle aree sottese. In figura sono riportati i valori corrispondenti alla media su tutti i set di dati delle aree sottese di ciascuna bobina:

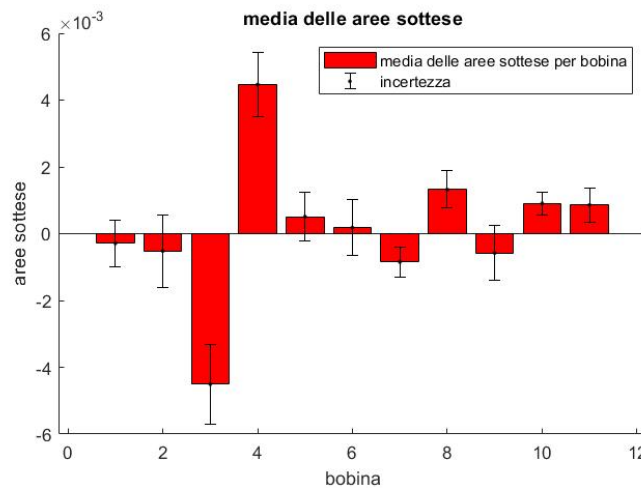


Figura 48: Calcolo delle medie per ciascuna bobina.

I valori ottenuti sono approssimabili a zero, questo conclude che le aree sono costanti e i dati sono stati presi con una buona precisione.

Dopo aver identificato le coordinate di ogni picco, è possibile procedere con il *fit* per trovare gli istanti di passaggio.

Ricorriamo nuovamente al metodo dell'*interpolazione polinomiale*:

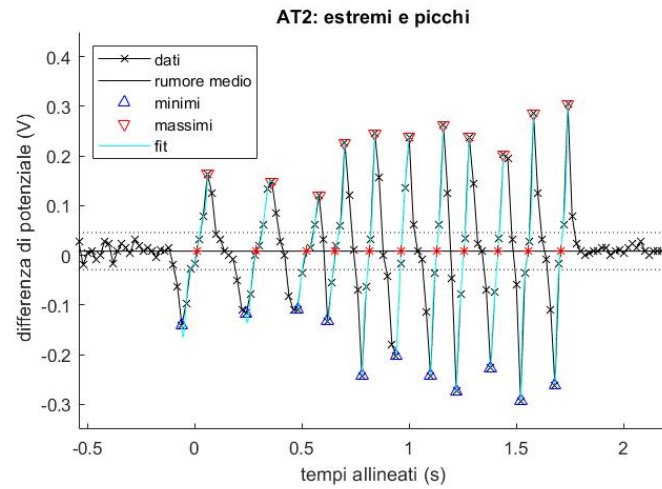


Figura 49: Identificazione dell'istante di passaggio mediante l'interpolazione.

In tabella sono riportati i valori degli istanti di passaggio, mediati sul numero di set di dati, e i relativi errori, calcolati come nell'**equazione (18)**.

Tabella 21: Istanti di passaggio mediati su tutti i set di dati considerati, per ciascuna bobina.

Bobina	Istanti di passaggio (s)	Errore (s)
1	-0.0003	0.002
2	0.289	0.002
3	0.519	0.002
4	0.653	0.001
5	0.807	0.002
6	0.959	0.003
7	1.125	0.004
8	1.260	0.004
9	1.425	0.005
10	1.559	0.004
11	1.715	0.005

Rimandiamo alla prossima sezione per il continuo dell'analisi dati e le considerazioni finali sul confronto dei casi: un magnete e due magneti.

3.3.3 Stima del valore dell'accelerazione

L'ultimo passaggio dell'analisi prevede di ricavare la legge oraria dei magneti e il valore dell'accelerazione, usando le informazioni sulle distanze fra le bobine (vedi Sezione: *I tubi di caduta*, Tabella 1).

Visualizziamo i dati ottenuti: sulle ascisse si hanno gli istanti di passaggio, mentre sulle ordinate la distanza tra le bobine.

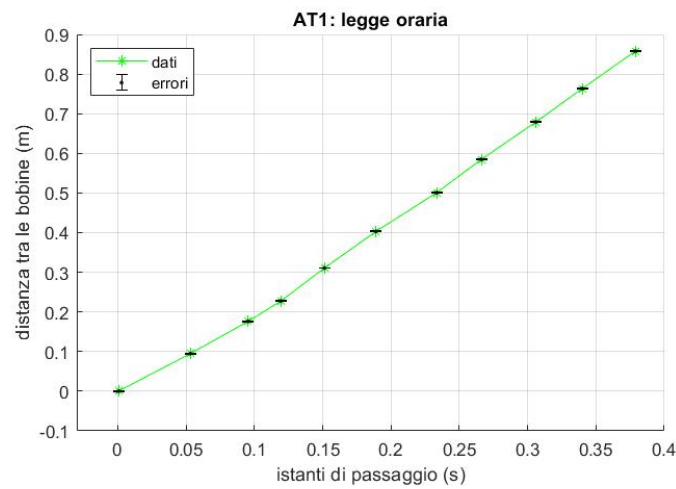


Figura 50: Rappresentazione della legge oraria di *un* magnete.
Ogni dato è corredato dal relativo errore.

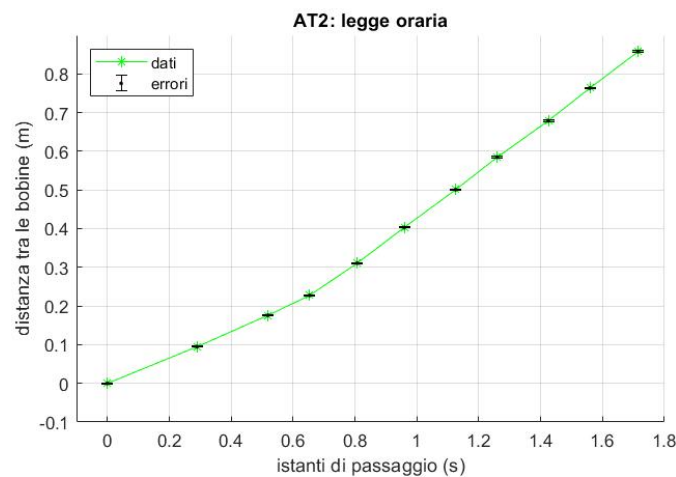


Figura 51: Rappresentazione della legge oraria di *due* magneti.
Ogni dato è corredato dal relativo errore.

Sommando in quadratura l'errore sulle x e quello sulle y , è possibile ottenere i seguenti errori da tramutare in pesi per il *fit*:

$$\sigma_{fit} = \sqrt{\sigma_y^2 + \frac{(\sigma_x)^2 \cdot y^2}{x^2}} \quad (19)$$

dove σ_y corrisponde all'errore sulla distanza y tra le bobine e σ_x corrisponde all'errore sugli istanti medi di passaggio x (vedi Sezione: *Un magnete*, Tabella 19 e Sezione: *Due magneti*, Tabella 21).

Di seguito riportiamo i valori ottenuti:

Tabella 22: Errori sui dati relativi al *fit*.

Errore per <i>fit</i> : un magnete (m)	Errore per <i>fit</i> : due magneti (m)
0.001	0.001
0.001	0.001
0.001	0.001
0.001	0.001
0.001	0.001
0.001	0.002
0.001	0.002
0.001	0.002
0.001	0.002
0.001	0.002
0.001	0.003

Possiamo infine applicare un *curve fitting*. Il *fit* è stato corredato dai pesi derivati dagli errori in *Tabella 22*.

I dati presentano l'andamento tipico di un moto rettilineo uniforme sia nel primo breve tratto sia nel secondo tratto più lungo.

Si consideri, infatti:

$$x(t) = x_0 + v_0(t) \cdot t \quad (20)$$

$$x(t) = x_1 + v_1(t) \cdot t \quad (21)$$

nel primo tratto, consideriamo v_0 velocità costante e x_0 posizione iniziale del magnete a $t = 0$; nel secondo tratto, invece, consideriamo v_1 velocità costante (diversa da v_0) e x_1 posizione iniziale del magnete dopo aver percorso il primo tratto.

Ci aspettiamo che x_0 sia prossimo a zero poiché dovrebbe corrispondere al punto medio della prima bobina (come visto in precedenza, le bobine sono state allineate in modo tale da far coincidere il punto medio della prima di queste con l'istante $t = 0$).

Il primo tratto risulta essere uguale ad un tubo in alluminio nel quale il magnete è privo di accelerazione (come visto in precedenza) quindi per il *fit* abbiamo considerato un polinomio di 1° grado; per il secondo tratto, invece, abbiamo considerato un polinomio di 2° grado e ci aspettiamo di ricavare un coefficiente di accelerazione nullo.

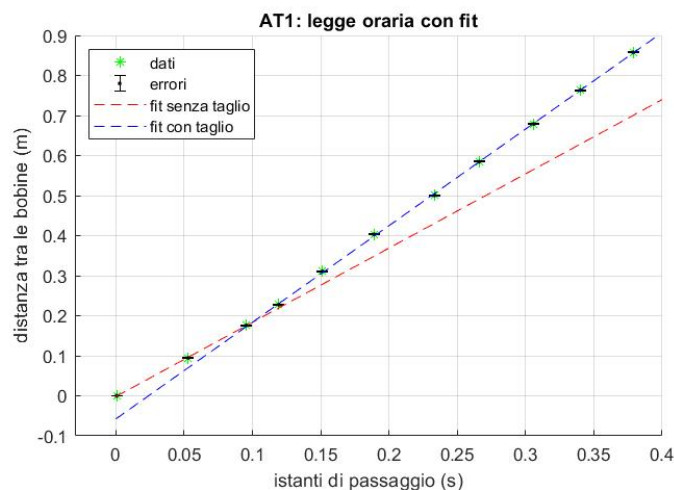


Figura 52: Rappresentazione del *fit* della legge oraria per *un* magnete. Ogni dato è corredato dal relativo errore.

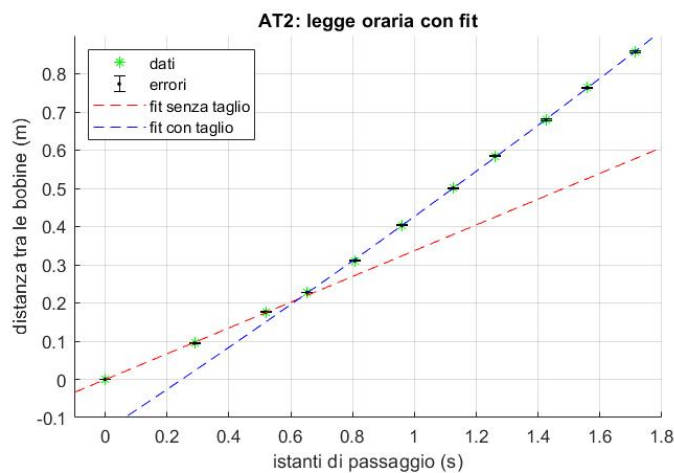


Figura 53: Rappresentazione del *fit* della legge oraria per *due* magneti. Ogni dato è corredato dal relativo errore.

E' possibile notare come i *fit* aderiscano bene alla curva dei dati.
Una conferma è data dal valore del $\tilde{\chi}^2$ ¹³ e dal \bar{R}^2 ¹⁴:

Tabella 23: Stima della bontà del *fit*.

N magneti		$\tilde{\chi}^2$	Coefficiente di Determinazione (\bar{R}^2)
1	1° tratto	5.0975	0.9997
	2° tratto	11.4778	0.9998
2	1° tratto	5.7447	0.9995
	2° tratto	2.6757	0.9999

I valori ottenuti risultano essere buoni (in particolare \bar{R}^2), questo conferma la corretta riuscita del *fit*.

Tabella 24: Coefficienti estratti dal *fit*.

N magneti		a (m/s^2)	v (m/s)	s (m)
1	1° tratto		1.9 ± 0.2	-0.001 ± 0.2
	2° tratto	-0.005 ± 0.3	2.4 ± 0.1	0.18 ± 0.02
2	1° tratto		0.34 ± 0.05	0 ± 0.05
	2° tratto	0.05 ± 0.01	0.53 ± 0.03	0.21 ± 0.02

E' possibile notare dalla tabella qui sopra che:

- l'accelerazione a del 2° tratto è prossima a zero, come ci aspettavamo. Questo dimostra la presenza della forza frenante, anche nel tubo tagliato, che compensa quasi del tutto l'accelerazione gravitazionale;
- per quanto riguarda la posizione iniziale s del 1° tratto, otteniamo un valore approssimabile a zero, come ci aspettavamo; invece, per quanto riguarda la posizione iniziale s del 2° tratto, otteniamo un valore assimilabile alla distanza tra l'inizio del tubo intatto e l'inizio del tubo tagliato;
- la velocità v , invece, presenta un valore consistente definito dal suo moto; facciamo notare, inoltre, che esiste una differenza di ordine di grandezza tra gli istanti di passaggio del caso di *un* magnete e quello di *due* magneti, a causa del diverso *sampling period*.

Per dimostrare, però, l'andamento costante nel 2° tratto dobbiamo dimostrare l'analogia tra la velocità v e la velocità limite.

¹³vedi *Appendice: Test del Chi Quadro*

¹⁴vedi *Appendice: Coefficiente di Determinazione*

Ci occupiamo di ricavare la velocità limite, tramite la seguente formula:

$$v_{max} = \sqrt{2aL + v_0^2} \quad (22)$$

dove L corrisponde alla lunghezza del tubo in alluminio (vedi Sezione: *I tubi di caduta*, Tabella 1) e a corrisponde all'accelerazione prossima a zero (ricavata dal *fit*).

Attribuiamo ai valori trovati un errore, ricavato dalla propagazione della formula scritta sopra, come segue:

$$\sigma_{v_{max}} = \sqrt{\frac{v_0^2 \sigma_{v_0}^2 + L^2 \sigma_a^2 + 2a^2 \sigma_L^2}{v_{max}}} \quad (23)$$

dove σ_{v_0} corrisponde all'errore sulla velocità iniziale, σ_a corrisponde all'errore sull'accelerazione e σ_L è l'errore sulla lunghezza del tubo, tutti estratti dal *fit*.

In tabella riportiamo i valori ottenuti:

Tabella 25: coefficienti estratti dal *fit*.

N magneti	Velocità limite v_{max} (m/s)
1	2.4 ± 0.3
2	0.61 ± 0.03

Come previsto nell'**equazione (5)** la velocità limite e la massa risultano essere direttamente proporzionali, fatto che giustifica una velocità limite maggiore nel caso dei due magneti (considerato, però, il diverso *sampling period*).

Come si può vedere dalla tabella qui sopra, le velocità limite v_{max} sono analoghe alle velocità v calcolate precedentemente per i rispettivi casi.

Notiamo, quindi, che la velocità dei magneti (dopo aver percorso il secondo tratto di tubo) è costante nel tempo, coerentemente con un moto rettilineo uniforme.

4 Conclusioni

Riassumendo per tutti e tre i tubi abbiamo trovato la legge oraria del moto di *uno* e *due* magneti in caduta libera.

Nel caso del **PVC** non ci aspettiamo alcuna induzione secondo la *Legge di Faraday-Neumann-Lenz* poiché il materiale del tubo risulta essere un ottimo isolante e non un conduttore. Il magnete, infatti, si muove con moto uniformemente accelerato, ma la sua accelerazione è risultata essere più piccola rispetto a quella gravitazionale.

Per prima cosa bisogna considerare che il valore di g varia spostandosi dai poli all'equatore e che, in provincia di Como, la misura ufficiale riportata è di $9,80516 \frac{m}{s^2}$, ma tale misura risulta essere ancora troppo distante dai dati ottenuti. La spiegazione più plausibile risiede nella presenza dell'attrito dell'aria esercitata sul corpo in caduta; inoltre, è possibile supporre ulteriore attrito generato dallo scontro tra il magnete e le pareti del tubo.

Nel caso dell'**alluminio**, invece, troviamo un moto rettilineo uniforme: in questo caso, infatti, il magnete cadendo, acquista un'accelerazione dovuta alla forza gravitazionale. Passando attraverso ogni bobina, però, il flusso del campo magnetico varia, creando una corrente indotta che genera un campo magnetico opposto alla variazione che lo ha generato: pertanto il magnete sarà respinto dalla forza magnetica e rallentato nella sua caduta.

Il fenomeno dell'induzione avviene grazie al fatto che l'alluminio è un ottimo conduttore. Per questo caso, quindi, si può concludere la veridicità della *Legge di Faraday-Neumann-Lenz*.

Anche per l'ultimo caso, ovvero **alluminio tagliato** otteniamo due moti rettilinei uniformi rispettivamente per la sezione integra e per la sezione tagliata:

- nel primo tratto (alluminio integro) le considerazioni sono analoghe a quelle svolte nel caso del tubo in alluminio;
- nel secondo tratto (alluminio tagliato) otteniamo un'accelerazione prossima a zero; ciò dimostra la presenza di una forza frenante che giustifica quindi la *Legge di Faraday-Neumann-Lenz*.

5 Appendice

5.1 Derivazione della forza frenante $F = kv$

La forza frenante, responsabile della decelerazione nel moto del magnete all'interno del tubo, si ricava considerando un elemento dz del tubo, delle dimensioni di un anello. Questo anello trasporta una corrente elettrica indotta di causata dalla variazione del flusso del campo magnetico.

Il campo magnetico generato dal magnete stesso può essere espresso in coordinate polari:

$$B_r = 2\mu \frac{\cos(\theta)}{r^3} \quad B_\theta = \mu \frac{\sin(\theta)}{r^3} \quad (24)$$

con μ momento di dipolo del magnete.

Invece di usare coordinate polari, si usano coordinate cilindriche (che rappresentano meglio la simmetria del problema) si può esprimere:

$$B_z = B_r \cos(\theta) - B_\theta \sin(\theta) = \frac{\mu}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \left[\frac{3z}{\rho^2 + z^2} - 1 \right] \quad (25)$$

$$B_\rho = B_\theta \cos(\theta) + B_r \sin(\theta) = \frac{3z\mu\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (26)$$

Per un anello di raggio a come quello di *Figura 2*, che si muove con v in B , la forza elettromotrice indotta risulta essere:

$$\epsilon_i = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = v B_\rho (2\pi a) = (2\pi a v) \frac{3z\mu a}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (27)$$

Se σ è la conducibilità del materiale del tubo e dA l'area dell'anello che abbiamo considerato di lunghezza $l = 2\pi a$, la conduttanza dell'anello risulta essere $dC = \frac{\sigma dA}{l}$ e la corrente indotta:

$$di = \epsilon_i dC = \epsilon_i \frac{\sigma dA}{l} B_\rho v \sigma dA \quad (28)$$

Se e è lo spessore del tubo, la forza magnetica dF sull'anello di altezza dz è:

$$dF = l B_\rho di = (2\pi a) B_\rho^2 v \sigma e dz \quad (29)$$

Se applichiamo il principio di azione e reazione, questa espressione rappresenta la forza che l'anello infinitesimale del tubo esercita sul magnete che cade lungo l'asse longitudinale.

L'integrale di dF fornisce la forza ritardante sul magnete e si ottiene un'espressione del tipo:

$$F = kv \quad \text{con} \quad k = \frac{36\pi f \sigma e \mu^2}{a^4} \quad (30)$$

5.2 Distribuzione rettangolare

In teoria delle probabilità la distribuzione rettangolare (o continua uniforme) $U(S)$ è una distribuzione di probabilità continua ed uniforme su l'insieme S di definizione.

Pertanto, questa attribuisce a tutti i sottoinsiemi di S con la stessa misura la stessa probabilità di verificarsi.

Nel nostro caso specifico, l'insieme di definizione $S = [a, b]$ è un intervallo di larghezza $(b - a) = A_k$.

La sua densità di probabilità è:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(S)} & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases} \quad (31)$$

dove $\mu(S)$ è la misura dell'insieme S .

Inoltre, il suo *valore di aspettazione* risulta essere:

$$E[U] = \frac{a + b}{2} \quad (32)$$

mentre la varianza può essere ottenuta tramite la formula:

$$\text{Var}[U] = \frac{(a - b)^2}{12} \quad (33)$$

5.3 Deviazione standard

Per associare un errore ad ogni dato si applica la formula seguente:

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{N - 1} \cdot \sum_{j=1}^N |x_{j,k} - \bar{x}_k|^2} \quad (34)$$

dove $j = 1, \dots, N$ si riferisce al set di dati considerato, e dove N è il numero di set di dati confrontati.

Di conseguenza $x_{j,k}$ è il k -esimo valore registrato nel j -esimo set di dati.

Infine, \bar{x}_k risulta essere il valore medio :

$$\bar{x}_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N x_{j,k} \quad (35)$$

5.4 Interpolazione

L'*interpolazione* è un metodo di analisi dati, capace di individuare una funzione del piano a partire da un serie di n punti dati distinti: ciò è possibile tramite l'utilizzo di un algoritmo capace di individuare la funzione (f detta *funzione interpolante*) di grado $n - 1$ passante per tutte le coppie (x_k, y_k) , chiamate *punto dati*.

$$f(x_k) = y_k \quad \text{con} \quad k = 1, \dots, n \quad (36)$$

Accade spesso di disporre di un certo numero di punti del piano ottenuti con apparecchiature di misura e di ritenere opportuno individuare una funzione che passi per tali punti.

L'*interpolazione polinomiale* (utilizzata per i nostri *fit*) può considerarsi una generalizzazione dell'*interpolazione lineare*, che corrisponde al metodo più semplice. Mentre l'interpolante lineare è una sequenza di funzioni lineari, nell'interpolazione polinomiale si cerca come interpolante un unico polinomio di un grado opportuno.

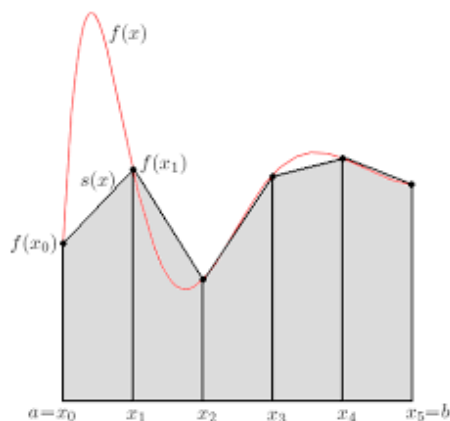


Immagine rappresentativa: Esempio di funzione polinomiale $f(x)$ interpolante confrontata con la funzione lineare $s(x)$ interpolante.

In generale, se abbiamo n punti dati, esiste esattamente un polinomio di grado $n - 1$ che passa attraverso tali punti.

5.5 Test del Chi Quadrato

Il *Test del Chi Quadrato* è un test di verifica delle ipotesi utilizzato in statistica, basato sulla distribuzione del χ^2 .

Siano un set di dati sperimentali $\{x^s\}$, caratterizzati da incertezze $\{\sigma^s\}$, e dei valori attesi $\{x^t\}$; si definisce il *Chi Quadrato* come:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^s \cdot (x_i^s - x_i^t)^2 \quad (37)$$

dove i pesi usati nell'equazione precedente possano essere calcolati, a partire dagli errori $\{\sigma^s\}$, come:

$$\omega_i^s = \frac{1}{(\sigma_i^s)^2} \quad (38)$$

Il valore utile per la verifica delle ipotesi è però il *Chi Quadrato Ridotto* che viene calcolato come:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{\text{dfe}} \quad (39)$$

dove il numero di *gradi di libertà* dfe si ottiene a partire dal numero di dati considerati n_{dati} , dal numero di parametri del *fit* n_{par} e dal numero di punti esclusi n_{esc} ; la formula, considerati tali parametri, risulta essere:

$$\text{dfe} = n_{\text{dati}} - n_{\text{par}} - n_{\text{esc}} \quad (40)$$

In generale, il valore di aspettazione per questa distribuzione è di 1, pertanto per $\tilde{\chi}^2 \gg 1$ si può dedurre che la distribuzione sperimentale non segua quella teorica ipotizzata.

5.6 Coefficiente di Determinazione

Il *coefficiente di determinazione* è una proporzione tra la variabilità dei dati e la correttezza del modello statistico utilizzato.

Di seguito spiegheremo nel caso più semplice (*regressione lineare*) come sia definito e come siano intuitivamente ottenuti i suoi valori di aspettazione.

Siano un set di variabili indipendenti (nel nostro caso sono le x_i) e un set di variabili dipendenti (nel nostro caso sono le y_i) che ipotizziamo di poter assimilare ad una retta ($y_r(x) = mx + q$).

Definiamo *devianza totale* TSS come lo scarto quadratico medio dei dati rispetto alla media (\bar{y}):

$$\text{TSS} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (41)$$

Introduciamo, inoltre, il concetto di *devianza residua* RSS come lo scarto quadratico delle variabili dipendenti y_i rispetto ai corrispettivi punti del modello lineare $y_r(x_i)$:

$$\text{RSS} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_r(x_i))^2 \quad (42)$$

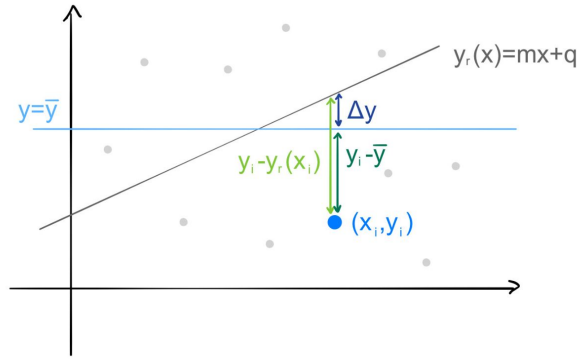


Immagine rappresentativa delle quantità appena considerate:
 si osservi la complementarietà fra $(y_i - \bar{y})$ e Δy , da cui nasceranno
 le prossime considerazioni, dove Δy è la porzione
 di devianza descritta dal modello utilizzato.

Con queste premesse, si definisce *coefficiente di determinazione* il seguente rapporto:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} \quad (43)$$

Siccome la quantità $\frac{\text{RSS}}{\text{TSS}}$ rappresenta la frazione di variazione che dipende dal modello lineare della retta, se tale modello rappresenta correttamente i dati allora il rapporto appena menzionato sarà prossimo a zero ($R^2 \sim 1$).

Una quantità utile collegata a questo concetto è il *coefficiente di determinazione corretto*, che può essere ottenuto secondo la seguente formula:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1} \cdot \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} \quad (44)$$

in cui n corrisponde al numero di punti realmente utilizzati nel *fit* e k al numero di parametri utilizzati nel modello.

Per definizione $\bar{R}^2 \leq R^2$ ed il valore di R^2 varia tra 0 ed 1.

Possiamo, quindi, concludere che:

- tanto più il valore si avvicinerà a 0, sempre meno il modello utilizzato spiegherà i dati in esame;
- quando, invece, il valore sarà prossimo ad 1, il modello risulterà coerente con i dati analizzati.

5.7 Propagazione degli errori

Sia una funzione continua $f(x_1, \dots, x_n)$ dipendente da n variabili x_1, \dots, x_n , caratterizzate rispettivamente da incertezze $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Supponendo che tali incertezze possano essere ritenute indipendenti e casuali, è possibile stimare l'incertezza σ_f sul valore di $f(x_1, \dots, x_n)$ nel seguente modo:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_i^2} \quad (45)$$

6 Fonti

1. Paolo Mazzoldi, Massimo Nigro, Cesare Voci: *Fisica II* , 2001
(ISBN: 88 7959 152 5)
2. John R. Taylor, *Introduzione agli analisi degli errori* , 1999
(ISBN: 88 0817 656 1)
3. Maria Garetto: *Statistica: lezioni ed esercizi* , 2002
4. Khan Academy: *R-squared or coefficient of determination*
5. (English) Wikipedia: *Oscilloscope*