

Legge di Biot-Savart

Gruppo IV:

Erica Brisigotti, Emmanuele Lotano, Ylenia Mascolo

Docente:

Prof.ssa Maria Bondani

Assistenti di laboratorio:

Filippo Pallotta
Magda Lucchetta



Laboratorio di Fisica II

Anno accademico 2019/2020

Università degli Studi dell'Insubria

Dipartimento di Scienza ed Alta Tecnologia

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Legge di Biot-Savart	3
1.2	Campo magnetico terrestre	4
2	Apparato sperimentale	5
2.1	Strumentazione	6
2.2	Bussola	7
3	Analisi dei dati sperimentali	8
3.1	Valore di riferimento per il campo magnetico terrestre	8
3.2	Dipendenza dall'intensità di corrente I	9
3.3	Dipendenza dalla distanza dal filo r	14
3.4	Dipendenza dall'angolo di posizionamento φ	16
4	Conclusioni	20
5	Appendice	21
5.1	Derivazione della Legge di Biot-Savart	21
5.2	Test del Chi Quadrato	22
5.3	Coefficiente di Determinazione	23
5.4	Propagazione degli errori	24
6	Fonti	25

1 Introduzione

L'esperienza che ci apprestiamo ad illustrare si pone come obiettivo la verifica della legge di Biot-Savart, che (nel campo della magnetostatica) permette di calcolare il campo magnetico \vec{B}_f generato dalla corrente elettrica percorrente un filo conduttore rettilineo.

Sarà inoltre possibile stimare l'intensità del campo magnetico terrestre \vec{B}_t , che sfrutteremo nel processo di misura tramite le relazioni vettoriali che intercorrono tra queste due grandezze:

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_t + \vec{B}_f \quad (1)$$

1.1 Legge di Biot-Savart

La legge in esame, che può essere ricavata a partire dalla prima legge elementare di Laplace¹, afferma che il campo magnetico generato da un filo rettilineo (di lunghezza finita $l = 2a$) nel suo piano mediano è costante su ogni circonferenza di raggio r e risulta tangente ad essa.

La proporzionalità tra queste grandezze avviene secondo la seguente relazione:

$$\vec{B}_f = \frac{\mu_0 I a}{2 \pi r \sqrt{r^2 + a^2}} \cdot \hat{e}_t \quad (2)$$

dove $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}$ è la permeabilità magnetica nel vuoto, I è l'intensità di corrente continua che percorre il filo ed \hat{e}_t è il versore tangente alle circonferenze di raggio r centrate nel punto di intersezione tra il piano mediano e il filo.

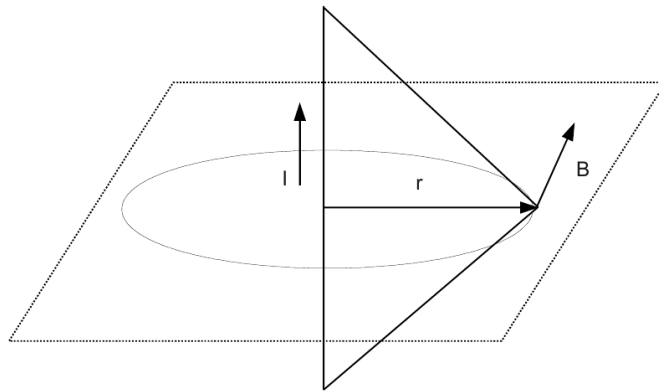


Figura 1: Immagine schematica delle grandezze in gioco.

¹vedi *Appendice: Derivazione della legge di Biot-Savart*

Se si considerano però piccole distanze r dal filo, tali per cui:

$$\frac{r}{a} \rightarrow 0 \quad (3)$$

l'equazione si semplifica diventando:

$$\vec{B}_f = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \cdot \hat{e}_t \quad (4)$$

Le condizioni di riproducibilità in laboratorio impongono però valori limitati di intensità di corrente ($I \sim 10 - 20$ A) e di raggi ($r \sim 10^{-1}$ m): pertanto l'intensità del campo magnetico generato dal filo sarà dell'ordine di una decina di microTesla.

1.2 Campo magnetico terrestre

Tramite strumenti molto semplici come un ago magnetico, è possibile verificare la presenza attorno a noi di un campo magnetico naturale (chiamato appunto *campo magnetico terrestre*). Questo corrisponde approssimativamente al campo generato da un dipolo, il cui asse forma un angolo di circa 15° con l'asse terrestre. Pertanto i punti in cui l'asse di dipolo interseca la superficie terrestre (detti *poli magnetici*) non corrispondono ai poli geografici ma distano meno di 2000 km da essi.

In un dato punto della superficie terrestre, tale campo magnetico può essere scomposto secondo una componente tangente al meridiano e una radiale. Il valore di ciascuna delle due componenti in vicinanza della superficie terrestre è anch'esso di una decina di microTesla: in particolare, il valore medio della sua componente orizzontale vale approssimativamente (a latitudini come quella in questione) $B_t^{\parallel} = 20 - 30 \mu\text{T}$.

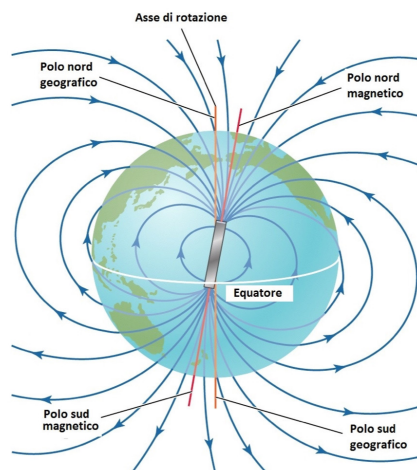


Figura 2: Linee di campo del campo magnetico terrestre.

2 Apparato sperimentale

Illustriamo ora come è stato possibile misurare il campo magnetico totale \vec{B}_{tot} , senza ricorrere all'utilizzo di metodi diretti di misura (come, ad esempio, una sonda Hall). La ragione alla base di questa strategia di indagine è l'impossibilità di annullare gli effetti dei numerosi campi magnetici che potrebbero intervenire nel processo di una misura. Sebbene sia possibile minimizzare gli effetti dovuti al campo magnetico generato dal circuito (di cui fa parte il filo conduttore) tramite alcuni accorgimenti, risulta estremamente complicato cercare di annullare i contributi dati dalle numerose sorgenti di campo magnetico che ci circondano: telefoni cellulari, impianti elettrici, computer, *smarthwatches*, arredi metallici, ecc.

Ricorreremo pertanto a misure indirette del campo magnetico totale, in particolare delle sue componenti parallele alla superficie terrestre \vec{B} :

$$\vec{B} = \vec{B}_{tot}^{\parallel} = \vec{B}_t^{\parallel} + \vec{B}_f^{\parallel} \quad (5)$$

a partire dalle grandezze illustrate nell'immagine a seguire.

Si noti prima però che, per la legge di Biot-Savart stessa, il campo magnetico generato dal filo coincide interamente con la proiezione in questione:

$$\vec{B}_f \equiv \vec{B}_f^{\parallel} \quad (6)$$

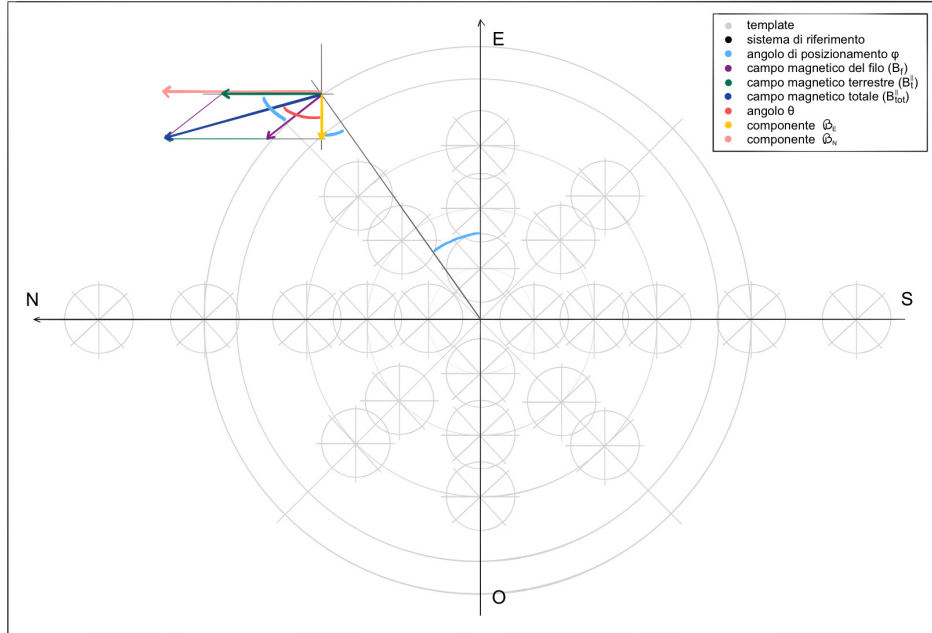


Figura 3: Rappresentazione di vettori, angoli e sistema di riferimento in questione, nel caso di intensità di corrente uscente dal piano.

Osserviamo dal grafico che l'equazione (5) può essere riscritta in componenti come:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_N = \mathcal{B} \cdot \sin(\theta) = B_t^{\parallel} + B_f \cdot \cos(\varphi) \\ \mathcal{B}_E = \mathcal{B} \cdot \cos(\theta) = B_f \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \quad (7)$$

Si noti che la forma semplice di queste equazioni è dovuta alla possibilità di ruotare il *template* utilizzato in modo da allineare la sua direzione nord-sud (individuata tramite la bussola prima di avviare il generatore di corrente) con un asse del sistema di riferimento.

Rielaborando le equazioni otteniamo che:

$$\frac{\mathcal{B}_N}{\mathcal{B}_E} = \tan(\theta) = \frac{B_t^{\parallel} + B_f \cdot \cos(\varphi)}{B_f \cdot \sin(\varphi)} \quad (8)$$

dove:

- φ è l'angolo compreso tra l'asse est-ovest e la riga del template su cui ci si è posizionati, nonché l'angolo compreso tra la componente parallela del campo magnetico terrestre \vec{B}_t^{\parallel} e il campo magnetico prodotto dal filo \vec{B}_f ;
- θ è l'angolo compreso tra l'asse est-ovest (orientato sempre verso est) e la componente parallela del campo magnetico totale $\vec{\mathcal{B}}$, che può essere misurato sulla base dell'orientamento assunto dalla bussola;
- ricordiamo che $B_f = B_f(I, r)$ è funzione dell'intensità di corrente continua I che percorre il filo e della distanza r del punto considerato dal filo.

Tramite la misura dell'angolo θ al variare di due dei tre parametri φ , I , r , sarà possibile verificare la legge di Biot-Savart.

2.1 Strumentazione

Il materiale necessario a riprodurre questa esperienza è costituito in:

- una bussola graduata (vedi sotto);
- una coppia di cavalletti e una tavola di legno forata (le cui dimensioni limitano inevitabilmente i valori di r);
- un *template*, su cui posizionare la bussola, e del nastro adesivo, in modo da poter fissare il primo una volta individuata la direzione del nord magnetico;
- un'asta conduttrice (nel nostro caso di alluminio) di lunghezza molto maggiore della propria sezione, dotata di lunghi cavi di collegamento;

- un alimentatore, a cui collegare il circuito appena menzionato, che permette di generare intensità di corrente variabili: nel caso specifico di questo esperimento, questo era caratterizzato da un *fondo scala* (valore massimo assumibile) pari a $I_{max} = 20A$.

Inoltre, è necessario prestare attenzione alla disposizione di questi oggetti, in modo tale che il campo magnetico generato dal passaggio di corrente all'interno del circuito così costruito interferisca il meno possibile con la misura. In particolare, è possibile sistemare tale circuito in una configurazione simmetrica rispetto all'asta conduttrice in modo tale che i contributi di campo magnetico dovuti a porzione opposte della spira si annullino.

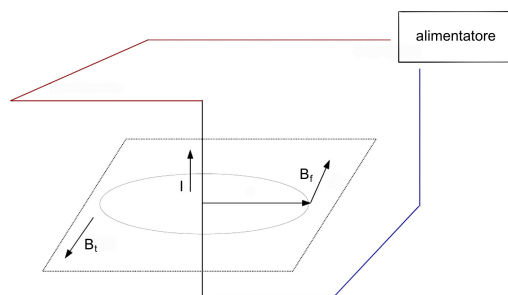


Figura 4: Disposizione del circuito.

2.2 Bussola

Lo strumento chiave per l'acquisizione di queste misure indirette è stata quindi una bussola: essa possiede un ago magnetizzato che ha la proprietà di allinearsi con le linee di forza del campo magnetico in cui questa è immersa. Un funzionamento di questo tipo è permesso da un meccanismo di eliminazione degli attriti (di tipo meccanico) che permette all'ago di ruotare liberamente sotto l'influenza del campo magnetico.

La bussola è inoltre dotata di una corona graduata, di sensibilità 2° , tramite cui è possibile osservare quantitativamente la direzione indicata. Nella misura entrano però in gioco anche le ridotte dimensioni della bussola e la presenza del vetro tra la corona graduata e l'osservatore: pertanto non è certo che la sensibilità riportata sopra sia rispecchiata nelle misure prese.



Figura 5: esempio di bussola con sensibilità 2° .

3 Analisi dei dati sperimentali

In questa sezione, ci proponiamo di verificare la legge di Biot-Savart a partire dalle misure forniteci: vedremo che, nel fare questo, saremo inoltre in grado di stimare il valore della componente parallela del campo magnetico terrestre \vec{B}_t^{\parallel} .

I dati fornitici sono infatti suddivisi in 5 serie di dati, generalmente di lunghezza e contenuto differenti ma accomunati dalla presenza di misure di dell'angolo di deflessione θ . Pertanto, sfruttando varie rielaborazioni della **equazione (8)**, cercheremo di valutare l'andamento di tale angolo al variare di uno dei parametri menzionati in precedenza (ovvero I , r , φ).

L'analisi sarà suddivisa in quattro sezioni, in tre delle quali analizzeremo la dipendenza appena menzionata, mentre la prima sarà incentrata sull'individuazione di un valore di campo magnetico terrestre in condizioni più semplici, che utilizzeremo come valore di riferimento.

3.1 Valore di riferimento per il campo magnetico terrestre

Il primi dati sono:

grandezza	valore
intensità di corrente I	9.340 A
errore sull'intensità di corrente σ_I	0.003 A
distanza r	0.08 m
errore sulla distanza σ_r	0.001 m
angolo di posizionamento φ	0°
angolo di deflessione θ	90°

Tabella 1: dati utilizzati per la prima stima del campo magnetico terrestre.

Tali valori sono stati ottenuti cercando di sfruttare la configurazione più semplice del sistema mostrato in *Figura 3*. In un punto dell'asse est-ovest è infatti possibile osservare un comportamento anomalo dell'ago della bussola, in particolare rispetto all'andamento di questo nei punti prossimi ad esso.

Ciò avviene infatti quando la componente parallela del campo magnetico terrestre \vec{B}_t^{\parallel} e il campo magnetico prodotto dal filo \vec{B}_f hanno, oltre che stessa direzione, stesso modulo e verso opposto. Pertanto il modulo del primo può essere ottenuto come:

$$B_t^{\parallel} = \|\vec{B}_f\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 23.4 \mu\text{T} \quad (9)$$

Avendo a disposizione l'errore sull'intensità di corrente σ_I e l'errore sulla distanza dal filo σ_r , è stato possibile ricavare l'errore sul valore trovato sopra

tramite la propagazione degli errori²:

$$\sigma_{B_t^{\parallel}} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot \sqrt{\sigma_I^2 + \frac{I^2}{r^2} \cdot \sigma_r^2} = 0.3 \mu\text{T} \quad (10)$$

Inoltre, il fatto che tale punto sia stato individuato ad est (ovvero che $\varphi = 0^\circ$) implica che il campo magnetico generato dal filo \vec{B}_f sia orientato verso sud, ovvero che l'intensità di corrente risulti entrante nel piano.

3.2 Dipendenza dall'intensità di corrente I

Il secondo e il terzo *set* di dati fornitici sono accomunati dalla stessa struttura. Pertanto questi saranno analizzati in parallelo, confrontando i risultati ottenuti solo alla fine siccome i *set* di dati hanno parametri differenti:

grandezza	valore - <i>set</i> 1	valore - <i>set</i> 2
distanza r	0.08 m	0.12 m
angolo di posizionamento φ	135°	90°

Tabella 2: parametri fissi utilizzati nel calcolo della dipendenza dell'angolo di deflessione dall'intensità di corrente

I [A]	θ_1 [°]	θ_2 [°]
0.5	2	4
1.5	352	352
2.5	346	344
3.5	340	340
4.5	332	330
5.5	322	322
6.5	314	312
7.5	304	302
8.5	296	295
9.5	288	288
10.5	282	283
11.5	277	278
12.5	272	272
13.5	266	268
14.5	264	265

I [A]	θ_1 [°]	θ_2 [°]
0.5	358	357
1.5	353	353
2.5	348	349
3.5	343	343
4.5	340	339
5.5	336	336
6.5	332	332
7.5	329	328
8.5	325	325
9.5	322	322
10.5	320	319
11.5	318	317
12.5	314	314
13.5	312	312
14.5	340	310
15.5	308	308
16.5	307	307

Tabella 3: dati fornitici (da sinistra, *set* 1 e *set* 2) misurati per il calcolo della dipendenza dell'angolo di deflessione θ dall'intensità di corrente I

²vedi *Appendice: Propagazione degli errori*

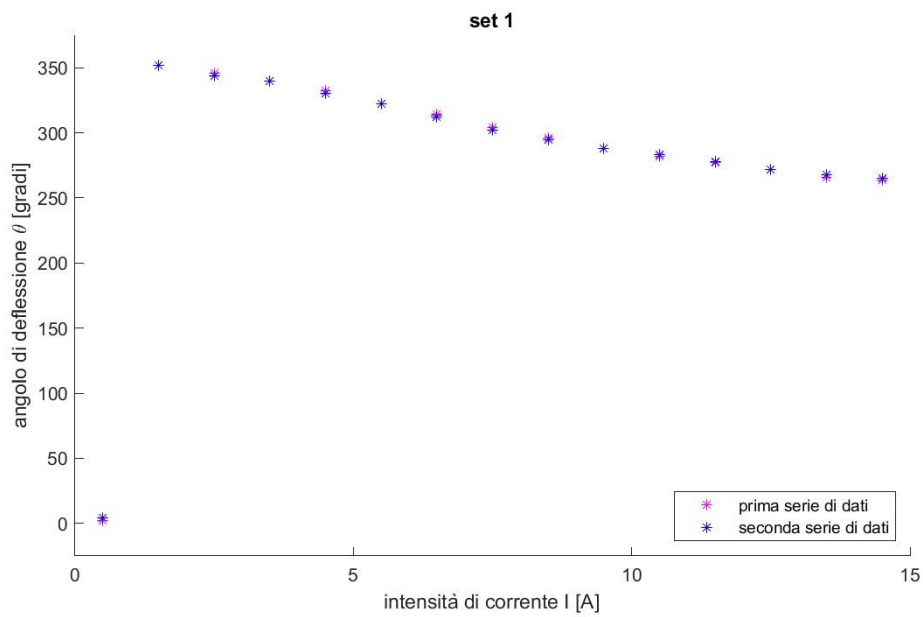


Figura 6: rappresentazione (per il primo *set*) degli angoli di deflessione in funzione dell'intensità di corrente I .

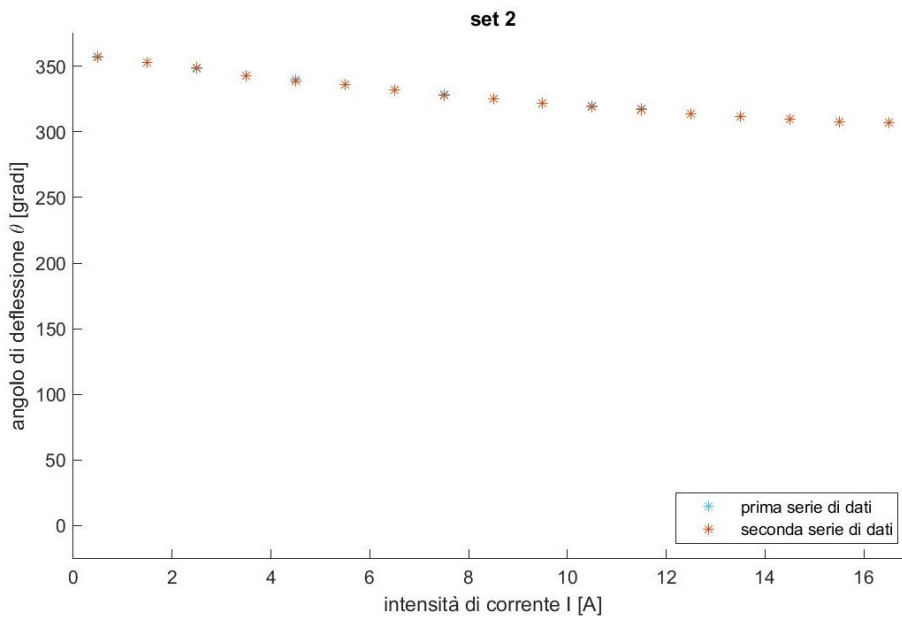


Figura 7: rappresentazione (per il secondo *set*) degli angoli di deflessione in funzione dell'intensità di corrente I .

Dai grafici appena presentati è stato possibile fare alcune osservazioni:

- per ogni *set* di dati fornitoci vi sono due serie di dati, di cui sarà utilizzata la media:

$$\bar{\theta}^i = \frac{1}{2}(\theta_1^i + \theta_2^i) \quad (11)$$

mentre l'errore sui valori sarà ottenuto come:

$$\sigma_{\bar{\theta}}^i = \begin{cases} \frac{1}{2}(\theta_1^i - \theta_2^i) & \theta_1^i \neq \theta_2^i \\ \frac{1}{2}\sigma_b & \theta_1^i = \theta_2^i \end{cases} \quad (12)$$

dove $\sigma_b = 2^\circ$ è la sensibilità della bussola.

- la coppia di punti più a sinistra del primo *set* di dati ha un comportamento molto incoerente rispetto a quello dei punti successivi: pertanto verrà esclusa dalla nostra analisi;
- sapendo che $I = 0 \Rightarrow B_f = 0$ è possibile osservare che, in questo caso specifico, il campo magnetico totale vale:

$$\vec{B} = (\mathcal{B}_N, \mathcal{B}_E) = (B_t^\parallel, 0) \quad (13)$$

Questo può avvenire però (secondo il **sistema di equazioni (7)**) soltanto se $\theta = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, con $k = 1, 2, 3, \dots$. Questo non concorda però con i grafici ottenuti, la cui intersezione con l'asse y sembra essere prossima a un valore di 360° . Pertanto considereremo uno sfasamento di un angolo θ_0 , che potrebbe essere giustificato da un differente posizionamento del sistema di riferimento durante la misura.

Procediamo quindi con l'individuazione di tale angolo di sfasamento tramite un *fit* della seguente forma, ottenuto rielaborando e combinando le **equazioni (4) e (8)** per angoli in gradi:

$$\bar{\theta} = \arctan\left(\frac{2\pi r B_t^\parallel}{\mu_0 \sin\left(\frac{2\pi}{360} \cdot \varphi\right)} \cdot \frac{1}{I} + \cotan\left(\frac{2\pi}{360} \cdot \varphi\right)\right) + \theta_0 \quad (14)$$

dove l'angolo di sfasamento θ_0 e il campo magnetico terrestre B_t^\parallel sono i parametri che verranno stimati dal *fit* nei seguenti intervalli e a partire dai seguenti valori iniziali:

parametro da stimare	estremo inferiore	valore iniziale	estremo superiore
l'angolo di sfasamento θ_0	-360°	0°	$+360^\circ$
campo magnetico terrestre B_t^\parallel	$-100 \mu\text{T}$	$23.4 \mu\text{T}$	$100 \mu\text{T}$

Tabella 4: valori utilizzati per indirizzare il *fit*

Per ottenere inoltre un *fit* fisicamente significativo, sono stati utilizzati dei pesi w^i ottenuti a partire dagli errori $\sigma_{\bar{\theta}}^i$ ottenuti nell'equazione (12) secondo la seguente formula:

$$w^i = \frac{1}{\sigma_{\bar{\theta}}^i} \quad (15)$$

Riportiamo e rappresentiamo di seguito i risultati ottenuti per ciascun *set* :

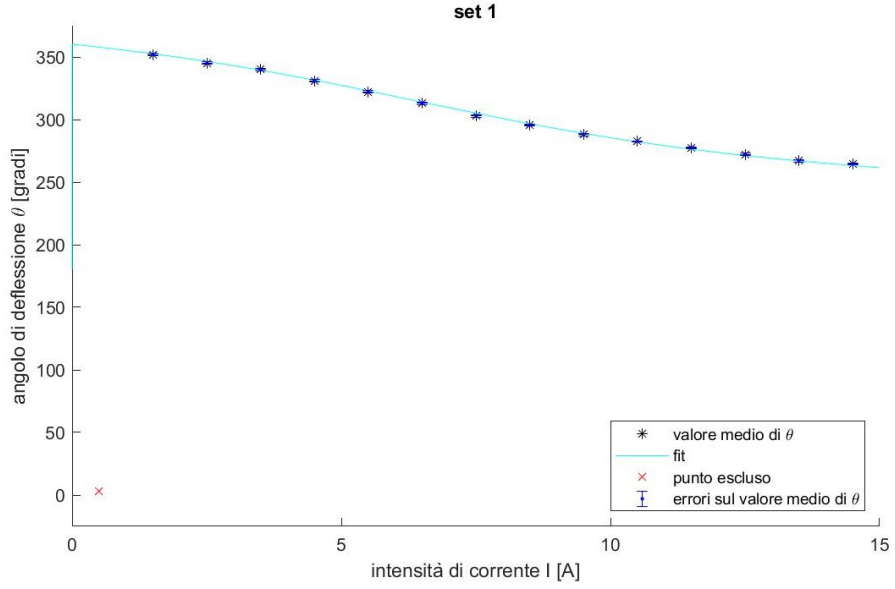


Figura 8: rappresentazione (per il primo *set*) degli angoli di deflessione medi $\bar{\theta}^i$ in funzione dell'intensità di corrente I , e del relativo *fit*.

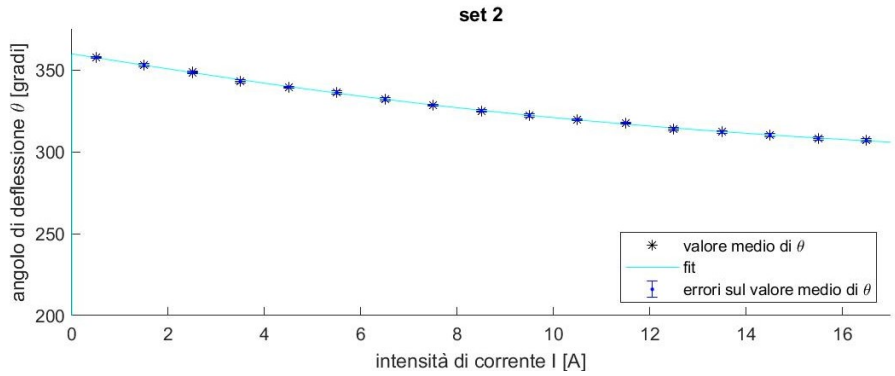


Figura 9: rappresentazione (per il secondo *set*) degli angoli di deflessione medi $\bar{\theta}^i$ in funzione dell'intensità di corrente I , e del relativo *fit*.

parametro	set 1	set 2
l'angolo di sfasamento θ_0	$270^\circ \pm 1^\circ$	$269.7^\circ \pm 0.2^\circ$
campo magnetico terrestre B_t^\parallel	$21.24 \pm 0.03 \mu\text{T}$	$20.7 \pm 0.2 \mu\text{T}$
valore di $\tilde{\chi}^2$	2.3858	0.2556
valore di \tilde{R}^2	0.9982	0.9995

Tabella 5: parametri ricavati dal *fit*.

Da entrambi i test di ipotesi effettuati³ deduciamo che il *fit* è appropriato. Inoltre, i valori di campo magnetico terrestre B_t^\parallel trovati sono prossimi a quello di riferimento. Pertanto ci concentriamo ora sull'interpretazione fisica dell'angolo di sfasamento θ_0 ricavato, che possiamo approssimare con la media pesata dei due valori ottenuti dal *fit*:

$$\theta_0 = \frac{w_\theta^1 \cdot \theta^1 + w_\theta^2 \cdot \theta^2}{w_\theta^1 + w_\theta^2} \sim 269.8^\circ \quad (16)$$

dove w_θ^1 e w_θ^2 sono i pesi ottenuti a partire dagli errori sui valori di θ_0 elencati nella Tabella (5) tramite l'utilizzo dell'**equazione (15)**.

A partire dalla formula per la propagazione degli errori⁴ si trova quindi che l'errore sull'angolo così ottenuto vale:

$$\sigma_{\theta_0} = \sqrt{w_\theta^1 + w_\theta^2} \sim 5^\circ \quad (17)$$

Rielaborando la formula utilizzata per il *fit* otteniamo che:

$$\Theta = \bar{\theta} - \theta_0 = \frac{360}{2\pi} \cdot \arctan \left(\frac{2\pi r B_t^\parallel}{\mu_0 \sin \left(\frac{2\pi}{360} \cdot \varphi \right)} \cdot \frac{1}{I} + \cotan \left(\frac{2\pi}{360} \cdot \varphi \right) \right) \quad (18)$$

Deduciamo quindi che il reale angolo di deflessione Θ (ovvero l'angolo compreso tra l'asse est-ovest ed il campo magnetico totale) è dato dalla differenza tra gli angoli fornitici e lo sfasamento ottenuto.

Come mostrato nell'immagine a seguire, ciò può essere giustificato dal fatto che i dati fornitici (corrispondenti alla lettura della bussola) non corrispondano all'angolo ipotizzato inizialmente, ma all'angolo compreso tra lo zero della bussola (ovvero la direzione del campo magnetico totale \vec{B} e perciò dell'ago) e la direzione di riferimento (nord-sud, presa in assenza di correnti).

A partire da queste considerazioni e dai dati fornitici, abbiamo quindi dedotto che il campo magnetico generato dal filo ha sempre direzione tangente alla circonferenza e verso orario: pertanto l'intensità di corrente utilizzata risulta sempre entrante nel piano.

³vedi *Appendice: test del Chi Quadrato* e *Appendice: Coefficiente di determinazione*

⁴vedi *Appendice: Propagazione degli errori*

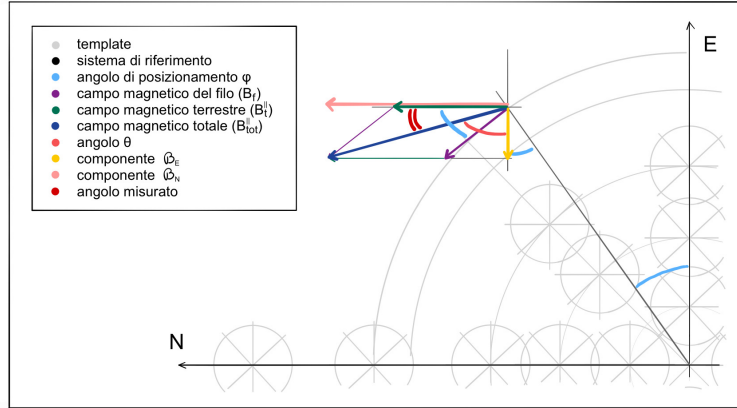


Figura 10: immagine ravvicinata del bilancio di forze mostrato in Figura 3, con l'indicazione dell'angolo misurato (per intensità di corrente uscente dal piano).

Le conclusioni appena tratte sull'angolo misurato saranno estese anche ai casi successivi, supponendo che le misure degli angoli θ fornitici siano state acquisite secondo la medesima procedura.

3.3 Dipendenza dalla distanza dal filo r

Analizziamo ora la dipendenza del campo magnetico generato dal filo \vec{B}_f (e quindi di quello totale osservato \vec{B}) dalla distanza r presente tra il filo e il punto considerato.

angolo θ [°]	distanza r [m]
60	0.24
49	0.18
36	0.12
28	0.08
18	0.04

Tabella 6: dati fornitici.

I dati fornitici consistono infatti in una serie di misure dell'angolo θ in funzione di diversi valori di r .

I parametri fissati valgono invece:

grandezza	valore
intensità di corrente I	17 A
angolo di posizionamento φ	135°

Tabella 7: parametri fissi utilizzati nel calcolo della dipendenza dell'angolo di deflessione dal raggio

Come anticipato nella sezione precedente, gli angoli misurati θ (riportati sopra) saranno considerati sfasati di un angolo θ_0 (ottenuto nell'**equazione (16)**) dovuto alle modalità di misura con la bussola.

Passiamo quindi al calcolo dei pesi utilizzati all'interno del *fit*: essi sono stati ottenuti tramite la formula nell'**equazione (15)** a partire dagli errori sugli angoli di deflessione:

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_b}{2} = 1^\circ \quad (19)$$

ottenuti come la semidispersione della sensibilità propria della bussola $\sigma_b = 2^\circ$. Mostriamo ora i risultati ottenuti tramite un *fit* della forma:

$$\theta = \arctan \left(\frac{2\pi B_t^\parallel}{\mu_0 I \sin \left(\frac{2\pi}{360} \cdot \varphi \right)} \cdot r + \cotan \left(\frac{2\pi}{360} \cdot \varphi \right) \right) + \theta_0 \quad (20)$$

dove l'angolo di posizionamento φ e il campo magnetico terrestre B_t^\parallel sono i parametri che verranno stimati dal *fit*.

Si è deciso, vista la complessa formula utilizzata, di lasciare libero un parametro in più rispetto al necessario, da cui verificare un possibile sfasamento. Il *fit* è stato indirizzato fornendo i seguenti valori iniziali e gli intervalli in cui ci aspettiamo che questi ricadano:

parametro da stimare	estremo inferiore	valore iniziale	estremo superiore
angolo di posizionamento φ	-360°	0°	$+360^\circ$
campo magnetico terrestre B_t^\parallel	$-100 \mu\text{T}$	$23.4 \mu\text{T}$	$100 \mu\text{T}$

Tabella 8: valori utilizzati per indirizzare il *fit*

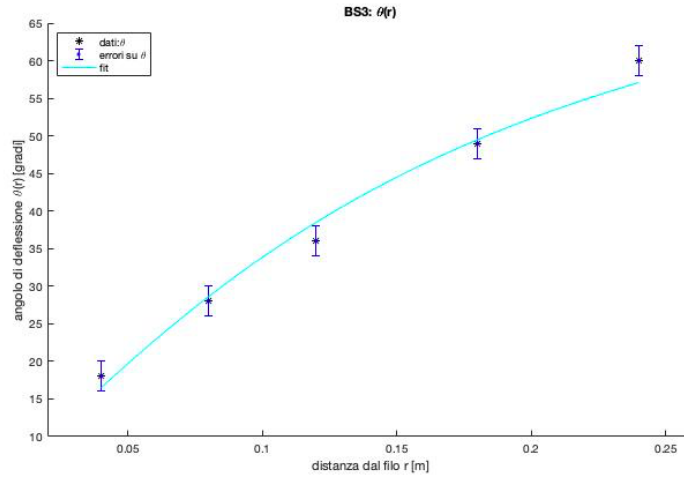


Figura 11: rappresentazione degli angoli di deflessione θ in funzione della distanza dal filo r , e del relativo *fit*.

Riportiamo di seguito i risultati ottenuti per ciascun *set* :

parametro	valore
angolo di posizionamento φ	$87.2^\circ \pm 0.9^\circ$
campo magnetico terrestre B_t^\parallel	$21 \pm 3 \mu\text{T}$
valore di $\tilde{\chi}^2$	1.5065
valore di \tilde{R}^2	0.9783

Tabella 9: parametri ricavati dal *fit*

Entrambi i test di ipotesi effettuati⁵ risultano più che buoni: pertanto deduciamo che il *fit* effettuato rispecchi l'andamento dei dati in esame. Inoltre, i valori di campo magnetico terrestre B_t^\parallel trovati sono prossimi a quello di riferimento, e l'errore ad esso associato può essere giustificato dalla presenza di soli 5 dati.

Possiamo pensare quindi che il valore dell'angolo di posizionamento φ ottenuto dal *fit* sia corretto, soprattutto vista la struttura del *template* utilizzato per la presa dati. Osservando infatti la *Figura (3)* è possibile vedere che (a meno di aggiunte fatte dagli sperimentatori) l'unica direzione in cui è possibile assumere 5 valori diversi di raggio è lungo l'asse nord-sud (ovvero per $\varphi = \pm 90^\circ$, come stimato) piuttosto che lungo le diagonali.

3.4 Dipendenza dall'angolo di posizionamento φ

Ci apprestiamo adesso ad analizzare la dipendenza dell'angolo di deflessione θ dall'angolo di posizionamento φ . I dati

angolo θ [°]	angolo φ [°]
302	0
269	45
180	91
93	135
57	181
24	225
360	271
333	315

Tabella 10: dati fornitici

⁵vedi *Appendice: test del Chi Quadrato* e *Appendice: Coefficiente di determinazione*

sono accomunati dai seguenti parametri:

grandezza	valore
intensità di corrente I	17 A
distanza dal filo r	0.08 m

Tabella 11: parametri fissi utilizzati nel calcolo della dipendenza dell'angolo di deflessione dall'angolo di posizionamento.

Come descritto nella seconda sezione, gli angoli misurati θ (riportati sopra) saranno considerati sfasati di un angolo θ_0 (ottenuto nell'**equazione (16)**) dovuto alle modalità di misura con la bussola.

La procedura per il calcolo dei pesi è analoga a quella effettuata nella sezione precedente, tramite le **equazioni (15) e (19)**.

È stato quindi effettuato un *fit* della forma:

$$\tan\left(\frac{2\pi}{360}(\theta - \theta_0)\right) = \frac{\frac{2\pi r B_t^{\parallel}}{\mu_0 I} + \cos\left(\frac{2\pi}{360} \cdot (\varphi + \varphi_0)\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{360} \cdot (\varphi + \varphi_0)\right)} \quad (21)$$

dove il campo magnetico terrestre B_t^{\parallel} e l'angolo di sfasamento φ_0 sono i parametri stimati.

Per facilitare la convergenza del *fit* è stata applicata una traslazione degli ultimi due punti più isolati sfruttando la periodicità (di periodo 2π) che si verifica sull'angolo di deflessione θ .

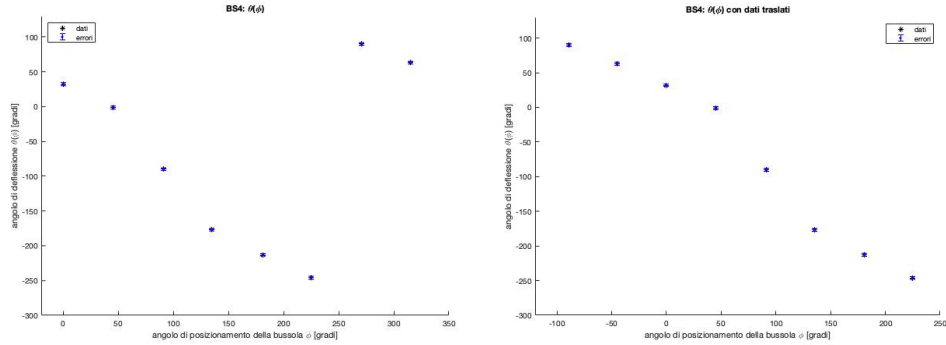


Figura 12: Da sinistra, dati originali e dati traslati.

L'aggiunta di un fattore di sfasamento φ_0 si basa sul fatto che $\tan(\theta - \theta_0) = 0$ avviene quando:

$$\frac{2\pi r B_t^{\parallel}}{\mu_0 I} + \cos\left(\frac{2\pi}{360} \cdot (\varphi + \varphi_0)\right) = 0 \quad (22)$$

ovvero:

$$(\varphi + \varphi_0) = -\frac{360}{2\pi} \cdot \arccos\left(\frac{2\pi r B_t^{\parallel}}{\mu_0 I}\right) \quad (23)$$

Sfruttando la periodicit  della funzione coseno:

$$\arccos\left(\frac{2\pi r B_t^{\parallel}}{\mu_0 I}\right) = \arccos\left(\frac{2\pi r B_t^{\parallel}}{\mu_0 I}\right) - 2\pi \quad (24)$$

otteniamo che:

$$\varphi + \varphi_0 = -\frac{360}{2\pi} \cdot \left(\arccos\left(\frac{2\pi r B_t^{\parallel}}{\mu_0 I}\right) - 2\pi\right) \sim 310^\circ \quad (25)$$

Rielaborando la condizione sopra, e osservando dal grafico che l'annullamento si ha per $\varphi \sim 45^\circ$, otteniamo che:

$$\varphi_0 = (\varphi + \varphi_0) - \varphi \sim -265^\circ \quad (26)$$

Inoltre, il *fit*   stato indirizzato fornendo i seguenti valori iniziali:

parametro da stimare	estremo inferiore	valore iniziale	estremo superiore
sfasamento φ_0	-360°	-265°	$+360^\circ$
campo magnetico terrestre B_t^{\parallel}	$-100 \mu\text{T}$	$23.4 \mu\text{T}$	$100 \mu\text{T}$

Tabella 12: valori utilizzati per indirizzare il *fit*

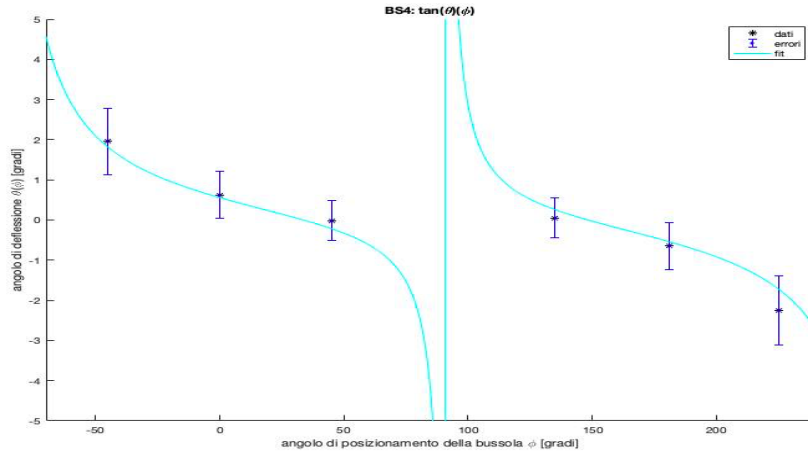


Figura 11: rappresentazione degli angoli di deflessione θ in funzione della distanza dal filo r , e del relativo *fit*.

Riportiamo di seguito i risultati ottenuti:

parametro	valore
sfasamento φ_0	$-268^\circ \pm 4^\circ$
campo magnetico terrestre B_t^\parallel	$30 \pm 4 \mu\text{T}$
valore di $\tilde{\chi}^2$	0.0112
valore di \tilde{R}^2	0.9942

Tabella 13: parametri ricavati dal *fit*

Entrambi i test di ipotesi effettuati⁶ risultano più che buoni: possiamo quindi assumere, per le considerazioni a seguire, che il *fit* effettuato rispecchi l'andamento dei dati in esame. Inoltre, il valore di campo magnetico terrestre B_t^\parallel trovato è accettabile, e l'errore ad esso associato può essere spiegato in funzione del numero ridotto di punti.

Ci occupiamo quindi di trovare una giustificazione fisica per il fattore di sfasamento φ_0 : abbiamo dedotto che il reale angolo di posizionamento vale:

$$\Phi = \varphi + \varphi_0 \Leftrightarrow \varphi = \Phi - \varphi_0 \quad (27)$$

ovvero gli angoli misurati φ differiscono di un quarto di angolo giro rispetto ai reali angoli di posizionamento (Φ).

A partire dalla struttura presente sul *template*, possiamo dedurre quindi che gli angoli φ siano stati misurati (in questo caso) a partire dal semiasse sud invece che da est.

⁶vedi *Appendice: test del Chi Quadrato* e *Appendice: Coefficiente di determinazione*

4 Conclusioni

Nelle analisi descritte sopra, abbiamo verificato la dipendenza del campo magnetico \vec{B}_f generato da un filo, dall'intensità di corrente I e dalla distanza dal filo r , e l'indipendenza dall'angolo di posizionamento φ sulla circonferenza, come previsto dalla Legge di Biot-Savart.

Inoltre, i valori ottenuti per la componente parallela alla superficie del campo magnetico terrestre $\vec{B}_{tot}^{\parallel}$ risultano qualitativamente corretti in relazione a quelli previsti, di $20 - 30 \mu\text{T}$:

tipo di analisi	campo magnetico B_{tot}^{\parallel}
riferimento	$23.4 \pm 0.3 \mu\text{T}$
$\theta(I)$: <i>set</i> 1	$21.24 \pm 0.03 \mu\text{T}$
$\theta(I)$: <i>set</i> 2	$20.7 \pm 0.2 \mu\text{T}$
$\theta(r)$	$21 \pm 3 \mu\text{T}$
$\tan(\theta)(\varphi)$	$30 \pm 4 \mu\text{T}$

Tabella 14: valori di campo magnetico terrestre ottenuti.

5 Appendice

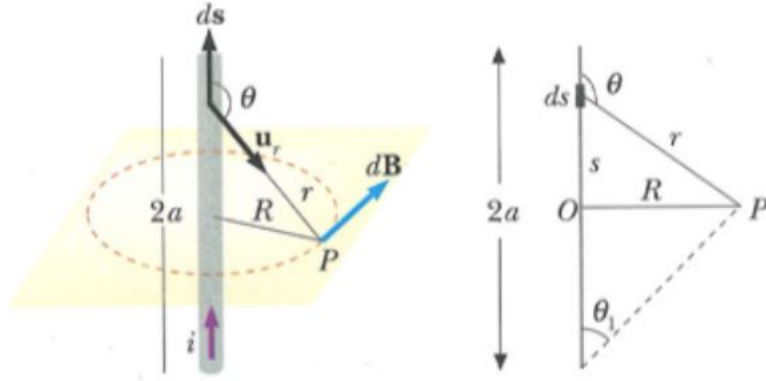
5.1 Derivazione della Legge di Biot-Savart

Osserviamo la *prima legge elementare di Laplace*, capace di esprimere (in termini di calcolo matematico) il campo magnetico generato da un circuito percorso da corrente in ogni punto dello spazio:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{ds \times u_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot ds}{r^2} \cdot (u_t \times u_r) \quad (28)$$

dove u_r corrisponde al versore della direzione orientata da dS a P , u_t è il versore tangente al filo e dS è un tratto infinitesimo dello stesso.

Si consideri un filo conduttore rettilineo, di lunghezza $2a$, percorso da corrente continua i , e ci si ponga sull'asse mediano del filo nel punto P distante R dal filo.



Un elemento di filo produce in P il campo magnetico:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{ds \times u_r}{r^2} \Rightarrow \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{ds \cdot \sin \theta}{r^2} \quad (29)$$

Osserviamo che:

$$r \cdot \sin(\pi - \theta) = r \cdot \sin \theta = R \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \quad (30)$$

$$s \cdot \tan(\pi - \theta) = -s \cdot \tan \theta = R \Rightarrow ds = \frac{R^2 \cdot d\theta}{\sin^2 \theta} \quad (31)$$

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{\sin \theta \cdot d\theta}{R} = -\frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{d(\cos \theta)}{R} \quad (32)$$

Il tratto di filo di lunghezza a (mezzo filo) produce quindi il campo di modulo:

$$B_a = -\frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi R} \int_{\cos\theta_1}^0 d(\cos\theta) = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot \cos\theta_1}{4\pi R} \quad (33)$$

e il campo di tutto il filo vale, esprimendo $\cos\theta_1$ in funzione della lunghezza del filo,

$$B = 2B_a = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot a}{2\pi R \cdot \sqrt{R^2 + a^2}} \quad (34)$$

Nel piano mediano il campo magnetico B è costante su ogni circonferenza di raggio R ed è tangente a tale circonferenza. Detto u_ϕ il versore tangente alla circonferenza e orientato rispetto al verso della corrente secondo la *regola della mano destra*, possiamo scrivere:

$$B = 2B_a = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot a}{2\pi R \cdot \sqrt{R^2 + a^2}} \cdot u_\phi \quad (35)$$

Facendo adesso tendere la lunghezza a all'infinito ovvero θ_1 a zero e $\cos\theta_1$ a 1. Quest'ultima equazione, allora diventa:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi R} \cdot u_\phi = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi R} \cdot u_t \times u_n \quad (36)$$

essendo u_t il versore parallelo al filo e concorde alla corrente e u_n il versore normale al filo diretto verso il punto P .

L'equazione (21) prende il nome di *Legge di Biot-Savart*.

5.2 Test del Chi Quadrato

Il *Test del Chi Quadrato* è un test di verifica delle ipotesi utilizzato in statistica, basato sulla distribuzione del χ^2 . Siano un *set* di dati sperimentali $\{x^s\}$, caratterizzati da incertezze $\{\sigma^s\}$, e dei valori attesi $\{x^t\}$; si definisce il *Chi Quadrato* come:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^s \cdot (x_i^s - x_i^t)^2 \quad (37)$$

dove i pesi usati nell'equazione precedente possano essere calcolati, a partire dagli errori $\{\sigma^s\}$, come:

$$\omega_i^s = \frac{1}{(\sigma_i^s)^2} \quad (38)$$

Il valore utile per la verifica delle ipotesi è però il *Chi Quadrato Ridotto* che viene calcolato come:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{\text{dfe}} \quad (39)$$

dove dfe si ottiene a partire dal numero di dati considerati n_{dati} , dal numero di parametri del *fit* n_{par} e dal numero di punti esclusi n_{esc} ; la formula, considerati tali parametri, risulta essere:

$$dfe = n_{dati} - n_{par} - n_{esc} \quad (40)$$

In generale, il valore di aspettazione per questa distribuzione è di 1, pertanto per $\tilde{\chi}^2 \gg 1$ si può dedurre che la distribuzione sperimentale non segua quella teorica ipotizzata.

5.3 Coefficiente di Determinazione

Il *coefficiente di determinazione* è una proporzione tra la variabilità dei dati e la correttezza del modello statistico utilizzato.

Di seguito spiegheremo nel caso più semplice (*regressione lineare*) come sia definito e come siano intuitivamente ottenuti i suoi valori di aspettazione.

Siano un *set* di variabili indipendenti (nel nostro caso sono le x_i) e un *set* di variabili dipendenti (nel nostro caso sono le y_i) che ipotizziamo di poter assimilare ad una retta ($y_r(x) = mx + q$).

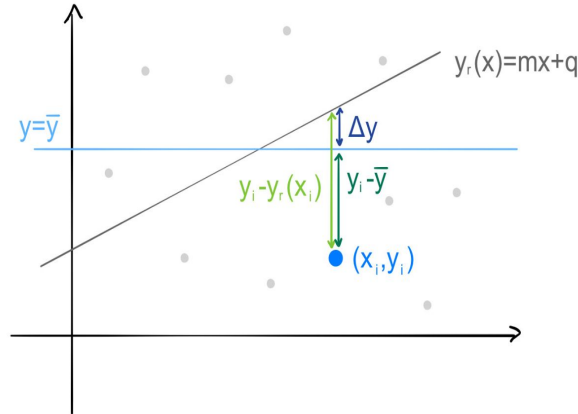


Figura: si osservi la complementarità fra $(y_i - \bar{y})$ e Δy , da cui nasceranno le prossime considerazioni, dove Δy è la porzione di devianza descritta dal modello utilizzato.

Definiamo *devianza totale* TSS come lo scarto quadratico medio dei dati rispetto alla media (\bar{y}):

$$TSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (41)$$

Introduciamo, inoltre, il concetto di *devianza residua* RSS come lo scarto quadratico delle variabili dipendenti y_i rispetto ai corrispettivi punti del modello lineare $y_r(x_i)$:

$$\text{RSS} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_r(x_i))^2 \quad (42)$$

Con queste premesse, si definisce *coefficiente di determinazione* il seguente rapporto:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} \quad (43)$$

Siccome la quantità $\frac{\text{RSS}}{\text{TSS}}$ rappresenta la frazione di variazione che dipende dal modello lineare della retta, se tale modello rappresenta correttamente i dati allora il rapporto appena menzionato sarà prossimo a zero ($R^2 \sim 1$). Una quantità utile collegata a questo concetto è il *coefficiente di determinazione corretto*, che può essere ottenuto secondo la seguente formula:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1} \cdot \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} \quad (44)$$

in cui n corrisponde al numero di punti realmente utilizzati nel *fit* e k al numero di parametri utilizzati nel modello. Per definizione $\bar{R}^2 \leq R^2$ ed il valore di R^2 varia tra 0 ed 1. Possiamo, quindi, concludere che:

- tanto più il valore si avvicinerà a 0, sempre meno il modello utilizzato spiegherà i dati in esame;
- quando, invece, il valore sarà prossimo ad 1, il modello risulterà coerente con i dati analizzati.

5.4 Propagazione degli errori

Sia una funzione continua $f(x_1, \dots, x_n)$ dipendente da n variabili x_1, \dots, x_n , caratterizzate rispettivamente da incertezze $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Supponendo che tali incertezze possano essere ritenute indipendenti e casuali, è possibile stimare l'incertezza σ_f sul valore di $f(x_1, \dots, x_n)$ nel seguente modo:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_i^2} \quad (45)$$

6 Fonti

1. Paolo Mazzoldi, Massimo Nigro, Cesare Voci: *Fisica II* , 2001
(ISBN: 88 7959 152 5)
2. John R. Taylor, *Introduzione agli analisi degli errori* , 1999
(ISBN: 88 0817 656 1)
3. Maria Garetto: *Statistica: lezioni ed esercizi* , 2002
4. Khan Academy: *R-squared or coefficient of determination*
5. (English) Wikipedia: *Compass ; Geomagnetic field*