

Misure con tubo a raggi X

Gruppo III:

Erica Brisigotti, Emmanuele Lotano, Ylenia Mascolo

Docenti:

Prof.ssa Michela Prest
Prof. Erik Silvio Vallazza

Assistenti di laboratorio:

Christian Petroselli
Federico Ronchetti
Alessia Selmi



Laboratorio di Fisica III A - Modulo di Fisica Subnucleare

Anno accademico 2020/2021

Università degli Studi dell'Insubria

Dipartimento di Scienza ed Alta Tecnologia

Indice

0	Introduzione	3
0.1	Il tubo a raggi X	4
0.2	Presa dati	5
1	Misura della diffrazione di raggi X	6
2	Dipendenza dello spettro da tensione e corrente	9
2.1	Dipendenza dello spettro da tensione	9
2.2	Dipendenza dello spettro da corrente	10
3	Misura della costante di Planck	12
4	Appendice	14
5	Fonti	14

0 Introduzione

I raggi X sono stati scoperti da W. C. Roentgen nel 1895 (premio Nobel nel 1901), in un periodo di incredibile attività per la fisica sperimentale delle radiazioni: in quegli anni, infatti, avvennero la scoperta della radioattività naturale dall'uranio da parte di H. Becquerel (nel 1896), la scoperta dell'elettrone da parte di Thomson (nel 1897) e l'attività dei coniugi Curie.

Roentgen, lavorando con un tubo catodico, si accorse che uno schermo cosparso di platino-cianuro di bario, sistemato a grande distanza dal tubo stesso, stava brillando fiocamente: nel tentativo di scoprire le qualità dei raggi, mise la mano sulla traiettoria del fascio e si accorse che sullo schermo si vedeva l'ombra delle ossa della mano. Notò che tali raggi, chiamati "X" in quanto sconosciuti, scaturivano dal contatto dei raggi catodici con l'anodicatodo nel tubo. Sostituì lo schermo con una pellicola fotografica e chiese alla moglie di tenere ferma la mano sulla lastra. Dopo 15 minuti di applicazione dei raggi, i coniugi poterono osservare nitidamente le ossa della mano della moglie: in questo modo Roentgen ottenne la prima radiografia della storia.



Figura 1: Prima radiografia effettuata da Roentgen.

In poche settimane, la scoperta dei raggi X fece il giro del mondo e nacquero i primi laboratori per le radiografie.

In realtà, mentre la parte applicativa si sviluppava con velocità incredibile, ci sono voluti circa 30 anni per capire cosa fossero i raggi X. I lavori di Stokes, Sommerfeld, Barkla e di molti altri sulla natura ondulatoria di tali raggi, e quello di Bragg e Compton sulla loro natura corpuscolare culminarono nell'utilizzo dei raggi X come probe delle caratteristiche della materia (Von Laue e Moseley e la diffrazione di raggi X su cristalli).



Figura 2: Esempi di primi tubi a raggi X (tubi di Crookes).

0.1 Il tubo a raggi X

Il tubo a raggi X, schematizzato in figura (3), è costituito da un tubo a vuoto che contiene un filamento (catodo) che viene riscaldato per provocare l'emissione di elettroni e un anodo per la raccolta degli elettroni stessi. Questo fascio di elettroni viene accelerato tramite un'alta tensione che può variare tra qualche decina e qualche centinaio di kV.

Il fascio di elettroni interagisce con il materiale dell'anodo (di solito tungsteno e in alcuni casi particolari molibdeno) e produce raggi X tramite *bremssstrahlung* in direzione ortogonale a quella di arrivo degli elettroni, come è possibile notare dalla figura (4) a sinistra. L'energia irradiata corrisponde all'1% dell'energia totale che incide sull'anodo, mentre il resto viene disperso sottoforma di calore (che deve essere smaltito tramite un apposito sistema di raffreddamento).

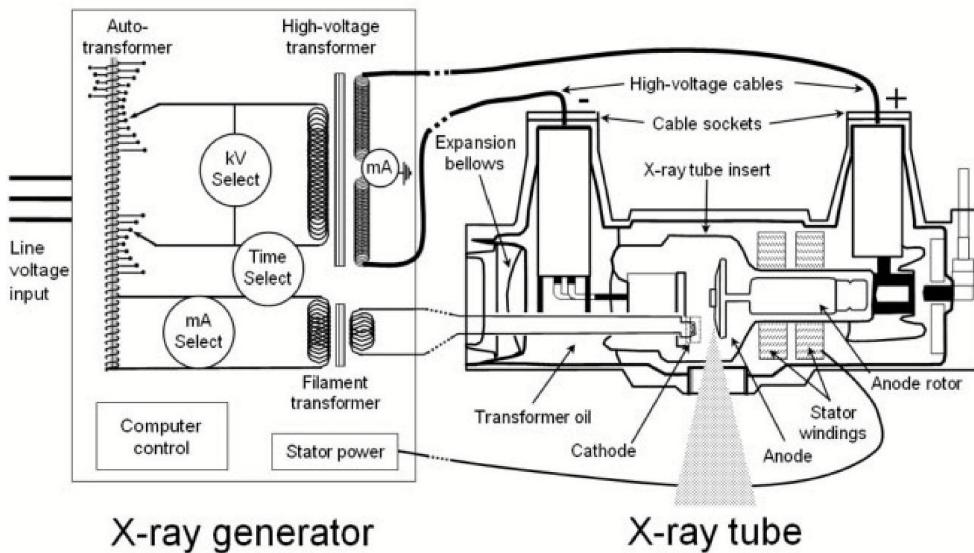


Figura 3: Schema di un tubo a raggi X.

Lo spettro X prodotto da un tubo è continuo e il punto di massima energia dipende dalla tensione di funzionamento del tubo, mentre l'intensità invece dipende dalla corrente di funzionamento, come è mostrato in figura (4) a destra.

La parte di bassa energia dello spettro (che in termini medici è la più pericolosa in quanto si ferma nel corpo andando a contribuire alla dose totale dell'esame radiografico) può essere facilmente attenuata tramite filtri dedicati.

I picchi presenti nello spettro sono quelli dovuti ai raggi X caratteristici del materiale di cui è costituito l'anodo. Tali picchi caratteristici sono il risultato delle lacune elettroniche che si creano nell'atomo in seguito all'impatto di un elettrone (accelerato dal catodo) contro un elettrone atomico, il quale risulta espulso se l'energia dell'elettrone impattante è tale da rompere il legame con il nucleo (ovvero se risulta maggiore di 20 keV).

Quindi, un elettrone appartenente ad un livello superiore decade emettendo radiazione X caratterizzato da uno spettro discreto mono-energetico.

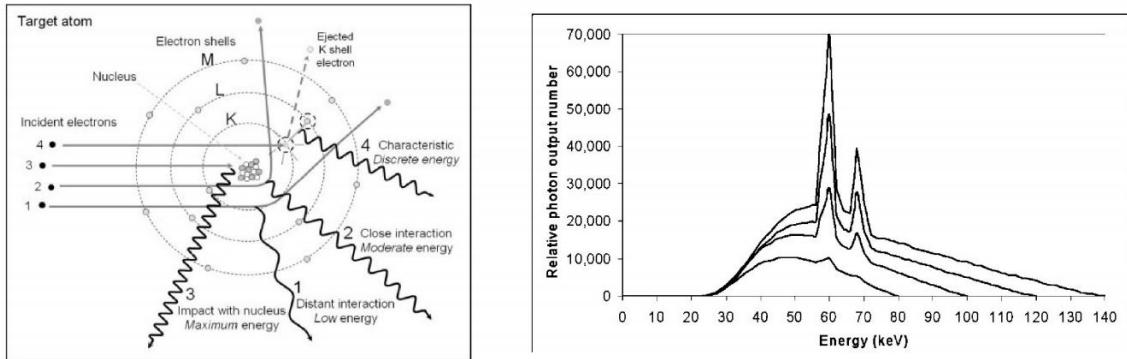


Figura 4: (a) Emissione di raggi X nell'interazione di un elettrone con un atomo.
(b) Spettro X per diversi potenziali acceleranti del fascio di elettroni.

0.2 Presa dati

L'esperienza prevede le seguenti misure:

1. misura della difrazione dei raggi X con un monocristallo;
2. misura dello spettro del tubo in funzione della tensione e della corrente di funzionamento del tubo;
3. misura della costante di Planck.

Per tutte le misure è stato utilizzato un monocristallo di NaCl con i piani del reticolo paralleli alle superfici cubiche della cella unitaria; la distanza tra i piani d è pari alla metà della costante del reticolo che vale $a_0 = 546.02 \text{ pm}$. Il tubo a raggi X è rappresentato in figura (5a) con anodo in molibdeno (tabella (1)) ed è usato in modalità *autoscan*.

	E [keV]	λ [pm]
K_α	17.443	71.08
K_β	19.561	63.095

Tabella 1: Picchi caratteristici del molibdeno.

Il rivelatore impiegato per l'acquisizione dati consiste in un contatore Geiger, accoppiato al monocristallo e ad un goniometro per lo *scan* angolare, come schematizzato in figura (5b).

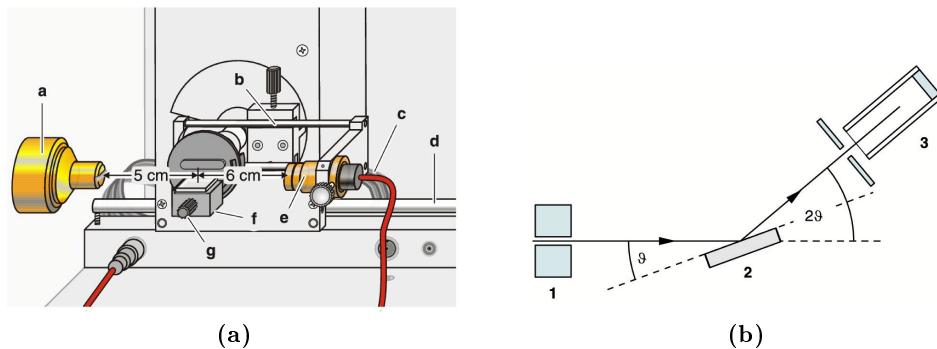


Figura 5: (a) Schema del tubo utilizzato nelle misure.
(b) Schema del *setup* di acquisizione.

1 Misura della diffrazione di raggi X

Nel 1913, H. W. e W. L. Bragg scoprirono come sia possibile riflettere un fascio di raggi X paralleli (considerati quindi come onde) tramite cristalli: ogni piano cristallino agisce come un centro di scattering che genera a sua volta onde il cui inviluppo corrisponde ad un'onda riflessa con la stessa lunghezza d'onda di quelle incidenti. Le onde riflesse possono fare interferenza costruttiva quando la differenza di percorso è un multiplo intero della lunghezza d'onda:

$$\Delta = n \cdot \lambda \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

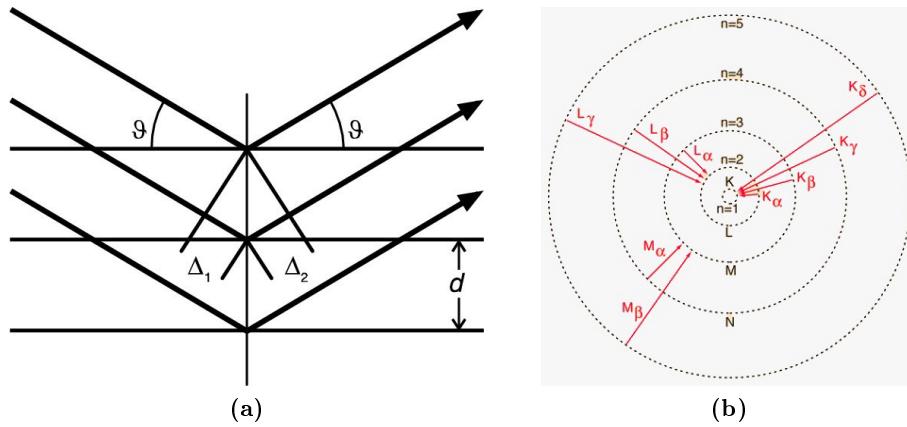


Figura 6: (a) Riflessione di raggi X tramite un monocristallo, con l'angolo θ noto come angolo di *glancing*. (b) Transizioni elettroniche e livelli energetici.

Considerando le differenze di cammino Δ_1 e Δ_2 indicate in figura (6a) e lo spazio d tra due piani del reticolo, si può ricavare la legge di Bragg della riflessione:

$$n\lambda = 2dsin\theta \quad (2)$$

Tale legge verrà verificata in questa misura sfruttando la radiazione caratteristica il cui angolo di *glancing*, fino al terzo ordine, è riportato in tabella (2). In particolare sono riportati due angoli per ciascun ordine, che corrispondono alle due diverse tipologie di radiazione caratteristica (figura (6b)) osservabili in questa esperienza. Gli angoli corrispondenti ad K_α si riferiscono all'emissione caratteristica che avviene quando un elettrone passa dal livello energetico L al livello energetico K; K_β si riferisce, invece, ad una transizione elettronica dal livello energetico M al livello energetico K.

n	$\theta(K_\alpha)$ [°]	$\theta(K_\beta)$ [°]
1	7.24	6.42
2	14.60	12.93
3	22.21	19.61

Tabella 2: Angolo di *glancing* fino al terzo ordine.

Il *setup* della misura è caratterizzato dai seguenti parametri:

- * una tensione di funzionamento $U = 35$ kV;
- * una corrente di funzionamento $I = 1$ mA;
- * un tempo di acquisizione per ogni *step* pari a 10 s;
- * uno *step* angolare di 0.1° (pari alla sensibilità dell'apparato utilizzato);
- * un *range* angolare da 2.5° a 24° .

Utilizzando il *setup* della misura, è stato possibile ottenere il seguente spettro contenente i picchi caratteristici di raggi X fino al terzo ordine:

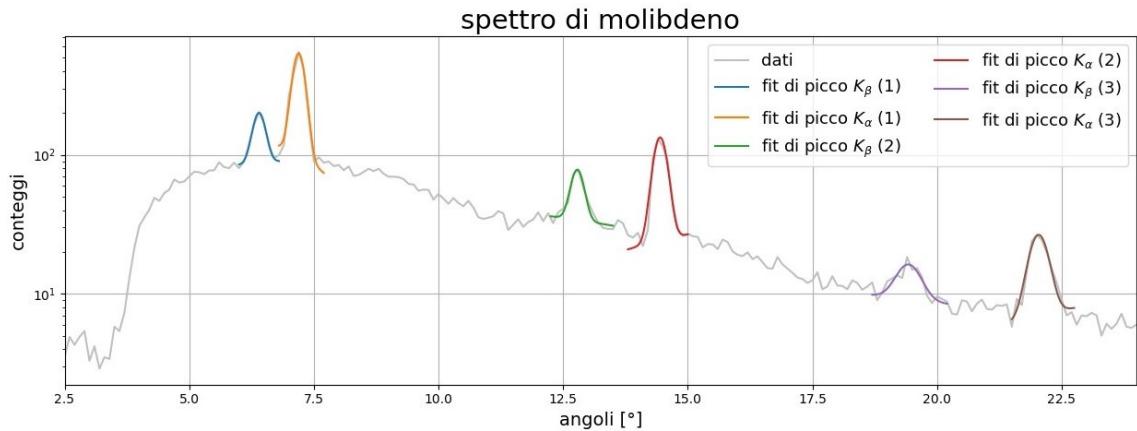


Figura 7: Spettro del tubo a raggi X limitato ai picchi caratteristici fino al terzo ordine.

Nello spettro rappresentato in figura (7) sono stati identificati sei picchi, a coppie corrispondenti ai primi tre ordini ($n = 1, 2, 3$) dell'angolo di *glancing*.

Ciascuno picco è stato fittato utilizzando una funzione della forma:

$$y(x) = A e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}} + (Bx + C) \quad (3)$$

dove il primo termine gaussiano è volto a descrivere il picco (di cui si vuole stimare la posizione a partire dai parametri), mentre il secondo termine lineare modellizza lo spettro continuo corrisponde al bremsstrahlung.

Di seguito sono riportati le posizioni $\mu = \theta(K)$ stimate dai *fit* dei picchi considerati:

n	$\theta(K_\alpha)$ [°]	$\theta(K_\beta)$ [°]
1	7.2 ± 0.1	6.4 ± 0.1
2	14.5 ± 0.1	12.8 ± 0.1
3	22.0 ± 0.1	19.4 ± 0.1

Tabella 3: Angoli di *glancing* stimati dal *fit*, fino al terzo ordine, correddati da errori pari allo *step* angolare utilizzato (siccome le incertezze ottenute dal fit risultavano di un ordine di grandezza inferiore).

I valori di angoli di *glancing* ottenuti sperimentalmente, riportati in tabella (3), sono stati confrontati con i valori teorici in tabella (2) e risultando compatibili entro 1σ .

Gli angoli di *glancing* appena riportati sono stati sostituiti nella formula (2) per calcolare la lunghezza d'onda λ sperimentale, ottenendo:

n	$\lambda(K_\alpha)$ [pm]	$\lambda(K_\beta)$ [pm]
1	71 ± 6	63 ± 6
2	70 ± 3	62 ± 3
3	71 ± 3	63 ± 7
media	71 ± 2	63 ± 3

Tabella 4: Valori di lunghezza d'onda λ ottenuti sperimentalmente.

Infine, i valori di lunghezza d'onda λ riportati in tabella (4), per i tre ordini di grandezza, sono stati mediati tra loro in base alla transizione elettronica considerata e tali valori medi risultano compatibili (entro 1σ) con i valori teorici riportati in tabella (1).

Attraverso la stessa procedura descritta sopra è stato possibile analizzare un ulteriore *set* di dati riguardante un *range* di angoli successivo al precedente, compreso tra 26° e 40° . Di seguito si riporta lo spettro ottenuto contenente i picchi di raggi X corrispondenti al quarto e quinto ordine:

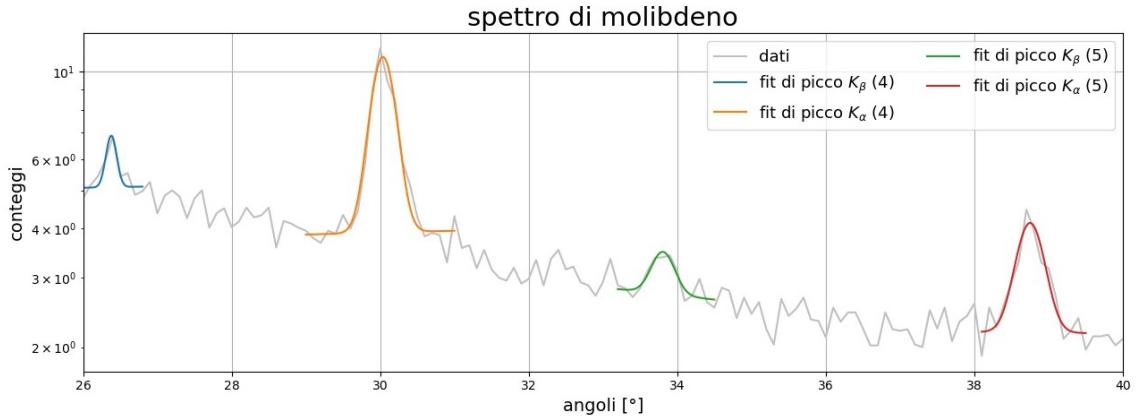


Figura 8: Spettro del tubo a raggi X limitato ai picchi caratteristici corrispondenti al quarto e quinto ordine.

Nello spettro rappresentato in figura (8) sono stati identificati quattro picchi, ciascuno dei quali è stato fittato utilizzando la funzione (3). Di seguito sono riportati le posizioni $\mu = \theta(K)$ stimate dai *fit* dei picchi considerati:

n	$\theta(K_\alpha)$ [$^\circ$]	$\theta(K_\beta)$ [$^\circ$]
4	30.0 ± 0.1	26.4 ± 0.1
5	38.8 ± 0.1	33.8 ± 0.1

Tabella 5: Angoli di *glancing* stimati dal *fit* corredati da errori pari allo *step* angolare utilizzato (siccome le incertezze ottenute dal fit risultavano di un ordine di grandezza inferiore).

Gli angoli di *glancing* appena riportati sono stati sostituiti nella formula (2) per calcolare la lunghezza d'onda sperimentale, ottenendo:

n	$\lambda(K_\alpha)$ [pm]	$\lambda(K_\beta)$ [pm]
4	71 ± 6	63 ± 6
5	70 ± 3	62 ± 3
media	71 ± 2	63 ± 2

Tabella 6: Valori di lunghezza d'onda λ ottenuti sperimentalmente.

Infine, i valori di lunghezza d'onda riportati in tabella (6), per i due ordini di grandezza, sono stati mediati tra loro in base alla transizione elettronica considerata e tali valori medi risultano coincidenti con i valori sperimentali stimati in precedenza e riportati in tabella (4) e risultano compatibili (entro 1σ) con i valori teorici riportati in tabella (1).

In entrambi i grafici riportati in questa sezione è stato possibile notare che la distanza tra i picchi di ciascuna coppia cresce all'aumentare dell'ordine n considerato, per via della natura geometrica del fenomeno di diffrazione. L'aumento di tale distanza si tradurrebbe in una maggiore identificabilità dei picchi (eventualmente anche di picchi di emissione K_γ , almeno per ordini n grandi) se non fosse stata presente una evidente riduzione del rapporto segnale-rumore, osservata in entrambi i grafici, che rende difficile la distinzione dei picchi di raggi X caratteristici dallo spettro continuo prodotto per *bremssstrahlung* (già osservabile per il picco a $\theta(K_\alpha) = 33.8 \pm 0.1^\circ$).

2 Dipendenza dello spettro da tensione e corrente

Il *setup* considerato è identico a quello precedente. La misura ha richiesto due fasi, ciascuna delle quali sarà analizzata separatamente:

1. con una corrente di 1 mA, un passo angolare per lo *scan* di 0.1° (sul *range* da 3° a 12.5°) e un tempo di acquisizione di 10 s per *step*, si è effettuato uno *scan* alle tensioni di 15, 20, 25, 30 e 35 kV;
2. con una tensione di 35 kV e con gli stessi parametri dello *scan* della fase 1, si sono analizzate le correnti di 0.4, 0.6, 0.8 e 1 mA.

2.1 Dipendenza dello spettro da tensione

I dati in questione, riguardanti il numero di conteggi e gli angoli, sono stati acquisiti variando la tensione U ; di seguito sono rappresentati gli spettri di molibdeno (per ciascuno dei cinque *set* analizzati) trasformando gli angoli in lunghezze d'onda λ , sfruttando la formula di Bragg (equazione (2)).

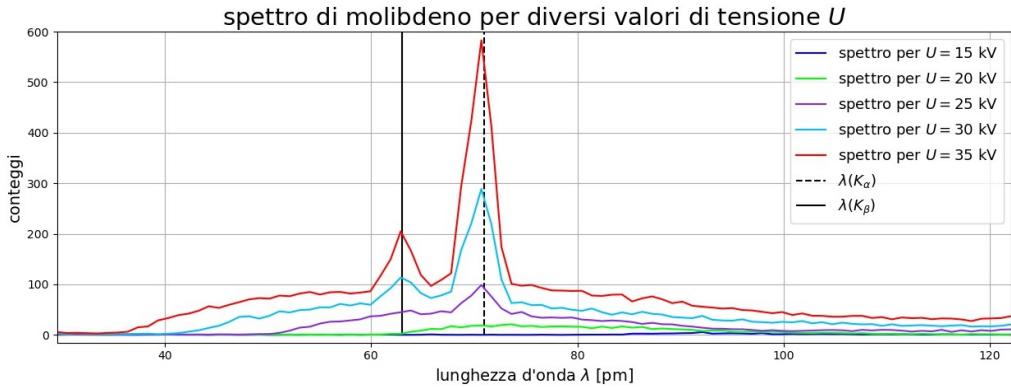


Figura 9: Dipendenza dello spettro del tubo a raggi X al variare della tensione.

Dagli spettri in figura (9) si può notare che le posizioni dei due picchi (di ciascun *set* analizzato) non variano e corrispondono ai valori medi di λ riportati in tabella (4).

Inoltre, aumentando la tensione cresce il numero di conteggi: questo è dovuto all'effetto della tensione che incrementa l'energia totale manifestandosi (per via della quantizzazione del fenomeno) in un numero maggiore di elettroni emanati dal tubo a raggi X.

Un ulteriore conseguenza diretta dell'aumento di tensione si osserva nei diversi troncamenti (in corrispondenza di una valle minima λ_{min} di lunghezza d'onda): tale effetto corrisponde proprio al caso fisico in cui l'intera energia E_{max} dell'elettrone impattante viene ceduta al fotone. Tale energia E_{max} risulta direttamente proporzionale alla tensione U utilizzata secondo la carica e dell'elettrone:

$$E_{max} = e \cdot U = \frac{h c}{\lambda_{min}} \quad (4)$$

Infine si può osservare che, per tensioni inferiori a 25 kV, non è possibile distinguere i due picchi caratteristici: questo è riconducibile alla necessità di una energia minima degli elettroni (e quindi di una tensione minima, attorno a 20 kV) che permetta la rottura del legame e la conseguente formazione di una lacuna in cui possa saltare un elettrone più esterno, emettendo così un raggio X caratteristico.

2.2 Dipendenza dello spettro da corrente

I dati in questione, riguardanti il numero di conteggi e gli angoli, sono stati acquisiti varian- do l'intensità di corrente I ; sono rappresentati i quattro spettri di molibdeno, trasformando gli angoli in lunghezze d'onda λ sfruttando la formula di Bragg (equazione (2)).

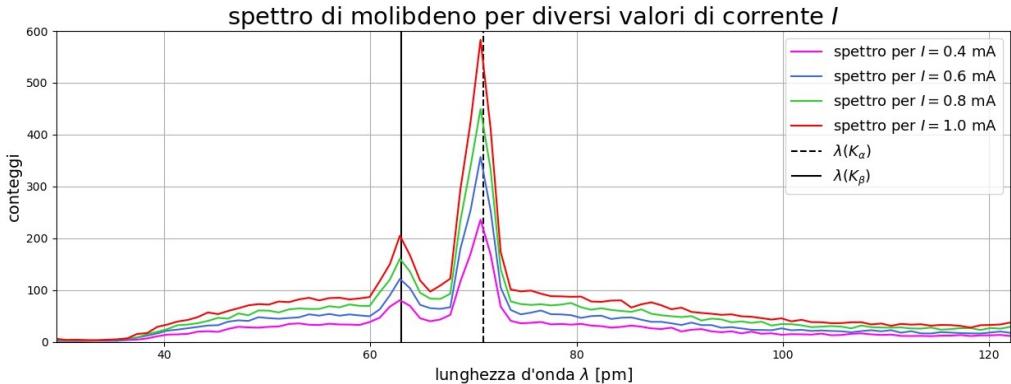


Figura 10: Dipendenza dello spettro del tubo a raggi X al variare della corrente.

Dagli spettri in figura (10) si può notare che le posizioni dei due picchi (di ciascun *set* analizzato) non variano e corrispondono ai valori medi di λ riportati in tabella (4).

Inoltre, aumentando l'intensità di corrente cresce il numero di conteggi: questo è dovuto all'effetto della corrente che incrementa l'intensità della sorgente manifestandosi (per via della quantizzazione del fenomeno) in un *rate* maggiore di conteggi.

Infine si può osservare che, nonostante la presenza di un *plateau* iniziale, all'aumentare della corrente I , sono sempre visibili i due picchi caratteristi per ciascun *set* considerato: è osservabile, infatti, che le aree A sottratte da ciascuno spettro presentano un andamento lineare in funzione della corrente I .

Per verificare tale andamento, è stato effettuato un *fit* della forma:

$$A = m \cdot I + q \quad (5)$$

dove A è stata calcolata come la somma dei conteggi registrati.

Di seguito è mostrato l'andamento lineare ipotizzato:

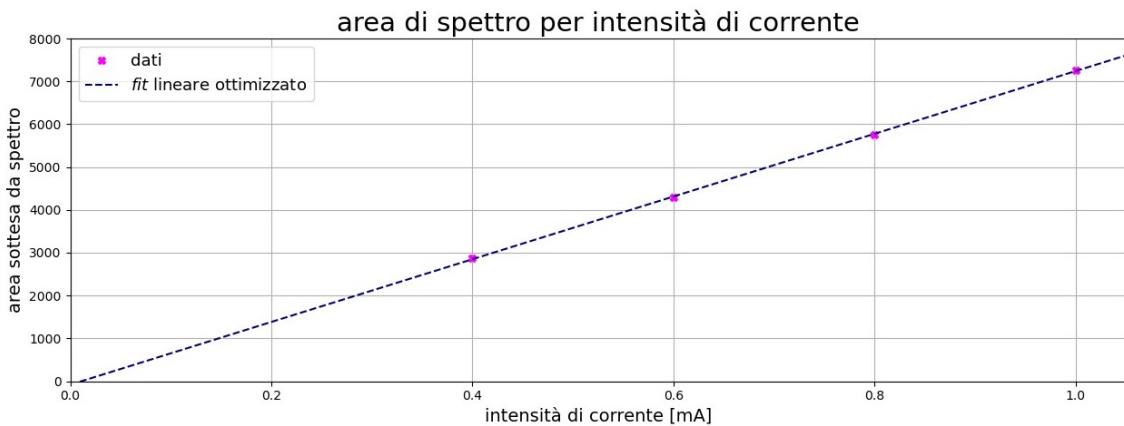


Figura 11: Rappresentazione dell'area in funzione dell'intensità di corrente per ciascuno spettro considerato.

Dal grafico in figura (11) è possibile notare che i dati aderiscono correttamente al *fit*, dal quale è stato possibile ricavare i seguenti parametri:

m [mA $^{-1}$]	q	$\tilde{\chi}^2$
1720 ± 70	-80 ± 50	0.2

Tabella 7: Parametri stimati dal *fit* lineare.

Nonostante i parametri stimati presentino incertezze rilevanti (imputabili ad un ridotto numero di punti), un ridotto valore di estimatore di bontà $\tilde{\chi}^2 = 0.2$ (rispetto al valore di aspettazione 1) permette di accettare sia i parametri trovati che il modello lineare ipotizzato. Inoltre, la presenza di un'intercetta negativa q si traduce nell'esistenza di un valore di corrente minimo ($I_0 \sim 0.01$ mA) al di sopra del quale la radiazione viene effettivamente registrata.

3 Misura della costante di Planck

Nel 1915, W. Duan e F. L. Hunt scoprirono che:

$$\lambda_{min} \approx \frac{1}{U} \quad (6)$$

ovvero, la lunghezza d'onda minima λ_{min} risulta inversamente proporzionale alla tensione U .

$$\begin{cases} E_{max} = h \cdot \nu_{max} \\ E = e \cdot U \end{cases} \Rightarrow \nu_{max} = \frac{e}{h} \cdot U \quad (7)$$

Sostituendo l'espressione della frequenza ν_{max} nella definizione della lunghezza d'onda $\lambda = c/\nu$, si ottiene:

$$\lambda_{min} = \frac{h \cdot c}{e} \cdot \frac{1}{U} \quad (8)$$

Il fattore di proporzionalità tra la lunghezza d'onda minima λ_{min} dello spettro del tubo a raggi X e la tensione di funzionamento U (cioè il potenziale accelerante degli elettronni) contiene il valore della costante di Planck $h = 6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

Il *setup* della misura è lo stesso delle due precedenti: la corrente del tubo a raggi X vale 1 mA per tutti gli *scan* e lo *step* angolare corrisponde a 0.1°. Gli ulteriori parametri utilizzati sono riportati in tabella (8):

U [kV]	Δt [s]	Range angolare [°]
22	30	5.2 - 6.2
24	30	5.0 - 6.2
26	20	4.5 - 6.2
28	20	3.8 - 6.0
30	10	3.2 - 6.0
32	10	2.5 - 6.0
34	10	2.5 - 6.0
35	10	2.5 - 6.0

Tabella 8: Parametri della misura della costante di Planck.

Come in precedenza, i set di dati forniti sono consistiti in una serie di conteggi corrispondenti ad altrettanti angoli, i quali sono stati trasformati in lunghezza d'onda λ sfruttando la formula di Bragg (equazione (2)).

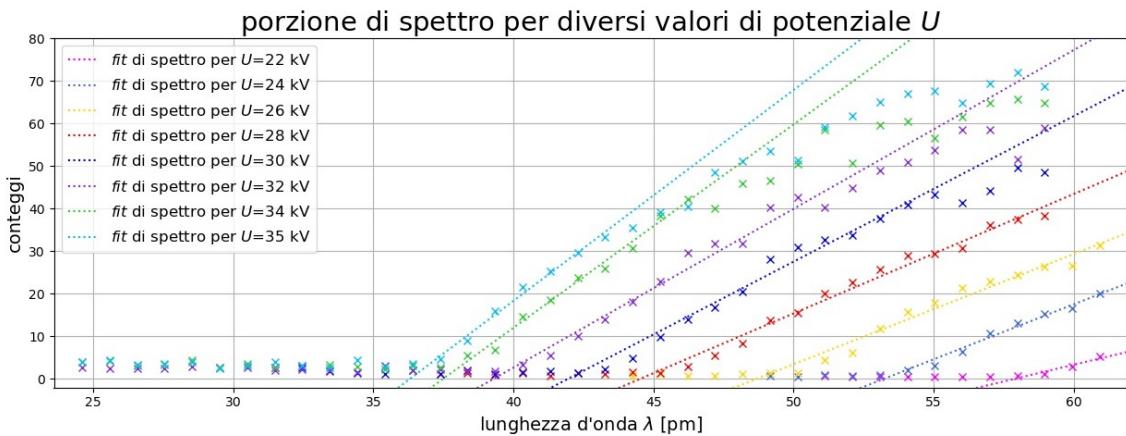


Figura 12: Parte sinistra dello spettro del tubo a raggi X per diversi valori di tensione U .

Parte di ciascuna serie di dati, corrispondente ad un determinato valore di tensione U , è stata analizzata tramite un *fit* lineare ($y = mx + q$) volto a stimare $\lambda_{min} = -q/m$ come l'intersezione della retta trovata con l'asse delle ascisse. Tali valori sono stati corredati da un'incertezza $\sigma_{\lambda_{min}}$ trovata tramite la formula della propagazione degli errori:

$$\sigma_{\lambda_{min}} = \frac{1}{m} \sqrt{\sigma_m^2 \cdot \lambda_{min}^2 + \sigma_q^2} \quad (9)$$

Di seguito, si riportano i valori appena menzionati:

U [kV]	m [pm^{-1}]	q	λ_{min} [pm]
22	1.6 ± 0.3	-90 ± 20	60 ± 20
24	2.6 ± 0.1	-138 ± 8	53 ± 4
26	2.6 ± 0.1	-126 ± 8	49 ± 4
28	2.8 ± 0.1	-125 ± 5	45 ± 2
30	3.4 ± 0.2	-140 ± 10	42 ± 3
32	3.7 ± 0.2	-147 ± 10	39 ± 4
34	4.8 ± 0.2	-179 ± 8	37 ± 2
35	5.0 ± 0.2	-180 ± 10	36 ± 3

Tabella 9: Parametri stimati tramite i *fit* lineari.

Come è possibile notare sia in tabella (9) che in figura (13), le incertezze $\sigma_{\lambda_{min}}$ corrispondenti ai valori più elevati di λ_{min} risultano particolarmente grandi a causa della proporzionalità riscontrata nella formula (9).

I valori di λ_{min} stimati sono stati rappresentati in funzione del reciproco del potenziale in modo da stimare (tramite un *fit* lineare della forma $y = k \cdot x$) il fattore di proporzionalità:

$$k = \frac{h \cdot c}{e} \quad (10)$$

a partire dal quale ricavare la costante di Planck h .

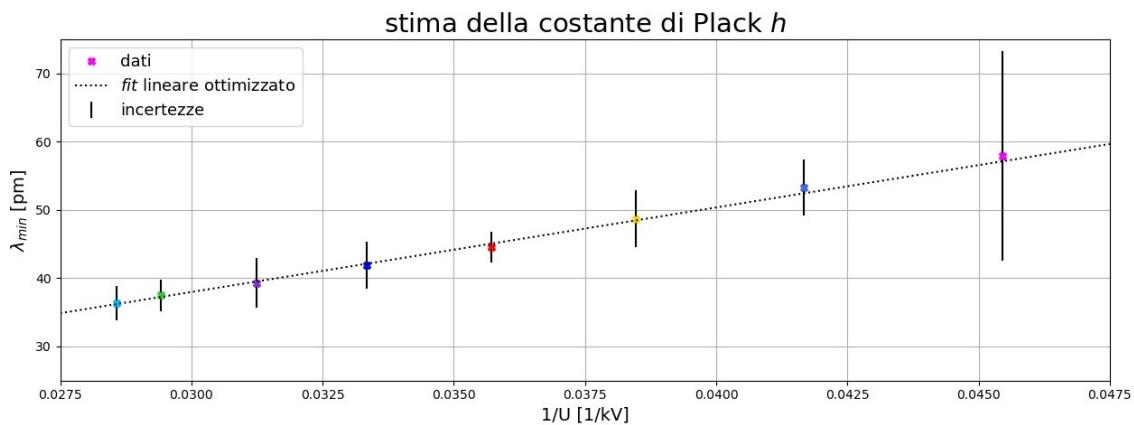


Figura 13: Rappresentazione dell'andamento di λ_{min} di ciascuno spettro considerato, in funzione del reciproco della tensione U .

Dal *fit* lineare si è ricavato un valore di fattore di proporzionalità $k = 1240 \pm 40$ pm · kV, che ha permesso di stimare un valore per la costante di Planck pari a:

$$h = \frac{k \cdot e}{c} = 6.627 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad \sigma_h = \frac{\sigma_k \cdot e}{c} = 0.002 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (11)$$

con $c = 2.99792458 \cdot 10^{20}$ m/s mentre $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C.

Lo scarto normalizzato, calcolato tra il valore sperimentale e quello teorico, vale 0.5 (cioè inferiore alla soglia standard di 3) e risulta quindi più che accettabile.

4 Appendice

Per bremsstrahlung si intende una tipologia di radiazione elettromagnetica che viene prodotta grazie all'accelerazione o decelerazione di una particella carica (tipicamente un elettrone) deviata dal campo magnetico generato da una seconda particella carica (tipicamente il nucleo atomico). Infatti, supponendo che vi siano particelle cariche in una porzione di materia e che un elettrone ad alta velocità ci passi vicino, la traiettoria di quest'ultimo verrà deviata a causa del campo elettrico attorno al nucleo atomico, come mostrato in figura (14)).

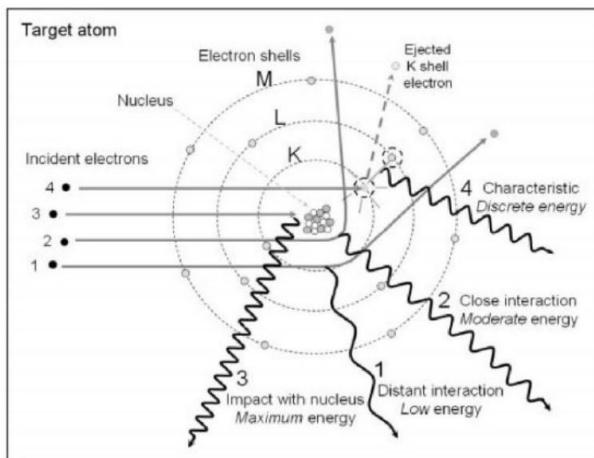


Figura 14: Emissione di raggi X nell'interazione di un elettrone con un atomo.

La particella in moto quando è deviata perde energia cinetica e, per soddisfare il principio di conservazione dell'energia, emette una radiazione (chiamata anche radiazione di frenamento) sotto forma di fotone; la bremsstrahlung è caratterizzata da una distribuzione continua di radiazione che diviene più intensa con l'aumentare dell'energia degli elettroni bombardanti.

5 Fonti

1. Lawrence Berkeley National Laboratory, *X-Ray Data Booklet*, Ottobre 2009
2. X-Ray Transitions
<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum>