

Università degli Studi dell'Insubria
Dipartimento di Scienze e Alta Tecnologia
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Attrito residuo su rotaia a cuscino d'aria

Erica Brisigotti & Ylenia Mascolo



Esame di Laboratorio di Fisica I
Docente: Prof. Dott. Massimo Luigi Maria Caccia
Assistente di Laboratorio: Dott.ssa Samuela Lomazzi
Anno Accademico 2018-2019

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Descrizione teorica del fenomeno	3
1.2	Stima delle accelerazioni	5
2	Raccolta dati	5
2.1	Apparato sperimentale e misure preliminari	5
2.2	Calibrazione	7
3	Analisi dati	8
3.1	Calcolo delle velocità istantanee	8
3.2	Calcolo delle distanze tra le fotocellule	9
3.3	Stima dei parametri a partire dalla relazione su v	11
3.4	Stima dei parametri a partire dalla relazione su v^2	13
4	Conclusioni	15
5	Appendice	16
5.1	Media e relativa incertezza	16
5.2	Test del Chi Quadrato	16
5.3	Propagazione degli errori	17
5.4	Coefficiente di Determinazione	17
5.5	Pesi	18
6	Fonti	18

1 Introduzione

Questa esperienza di laboratorio ha come obiettivo la valutazione del coefficiente di attrito residuo di una rotaia ad aria, sul cui piano inclinato viene fatto scorrere un carrello mobile. La bontà dei dati ottenuti sarà verificata tramite l'utilizzo di vari test di ipotesi e comparando i valori degli angoli di inclinazione ottenuti sperimentalmente con le misure preliminari.

L'utilizzo di un dispositivo di lancio ha permesso infatti di studiare il moto del corpo sia durante la sua discesa sul piano inclinato che in salita, fatto che ha reso possibile la determinazione di due delle variabili coinvolte nella descrizione teorica del fenomeno (angolo di inclinazione e coefficiente di attrito residuo) a partire dagli istanti di passaggio e dalle velocità.

1.1 Descrizione teorica del fenomeno

Tramite le leggi della meccanica classica è possibile descrivere il moto di un corpo che scorre, sotto l'effetto del proprio peso, su di un piano inclinato.

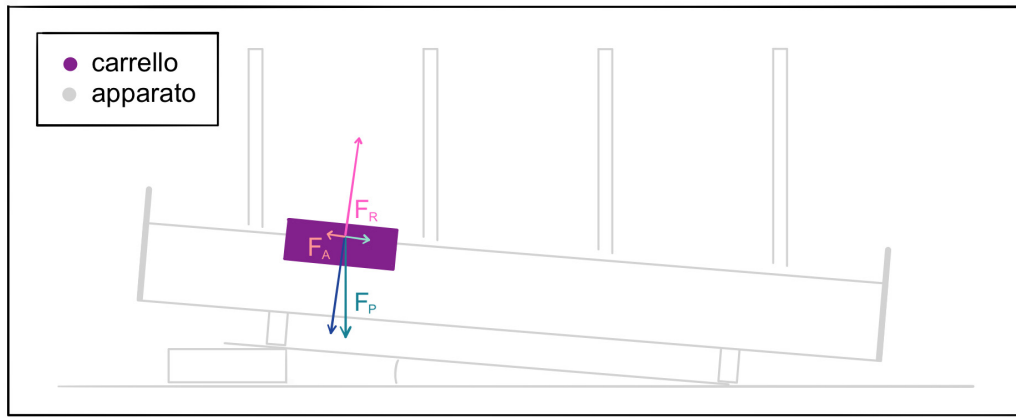


Figura 1: Schematizzazione del piano inclinato

Come mostrato in figura, il corpo è soggetto a diverse forze:

- la forza peso \vec{F}_P , che dipende dalla massa m dell'oggetto e dall'accelerazione gravitazionale di modulo $g = 9.80665 \pm 0.00001 \frac{m}{s^2}$:

$$\vec{F}_P = m \cdot \vec{g} \quad (1)$$

- la reazione vincolare \vec{F}_R che controbilancia la forza premente esercitata dal corpo sul piano;
- la forza d'attrito \vec{F}_A che è direttamente proporzionale alla forza premente sul piano secondo il coefficiente di attrito radente dinamico μ_d relativo ai materiali in contatto durante il moto.

Per il secondo principio della dinamica, tali forze sono legate dalla seguente relazione vettoriale:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_P + \vec{F}_R + \vec{F}_A \quad (2)$$

Nel caso che ci apprestiamo ad esaminare, l'utilizzo di tale relazione è duplice per via della possibilità di esaminare il moto del corpo sia in salita che in discesa.

Per esplicitare la relazione (2), è stato introdotto un sistema di riferimento (\hat{x}, \hat{y}) solidale al piano inclinato, rispetto ai cui assi sono state scomposte le leggi del moto:

- per il corpo in **salita** la forza di attrito radente dinamico si sommerà alla forza peso nel frenare il moto:

$$\begin{cases} \hat{x}: m \cdot a_S = mg \sin(\alpha) + \mu_d R \\ \hat{y}: 0 = R - mg \cos(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x}: a_S = g \sin(\alpha) + \mu_d g \cos(\alpha) \\ \hat{y}: R = mg \cos(\alpha) \end{cases} \quad (3)$$

dove a_S corrisponde all'accelerazione che il corpo possiede in salita.

- nel caso del corpo in **discesa**, la forza di attrito radente dinamico diminuirà l'effetto frenante della forza peso:

$$\begin{cases} \hat{x}: m \cdot a_D = mg \sin(\alpha) - \mu_d R \\ \hat{y}: 0 = R - mg \cos(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x}: a_D = g \sin(\alpha) - \mu_d g \cos(\alpha) \\ \hat{y}: R = mg \cos(\alpha) \end{cases} \quad (4)$$

dove a_D è l'accelerazione del corpo nella fase di discesa.

Osserviamo quindi che, a parità di angolo di inclinazione α e coefficiente di attrito dinamico μ_d , varrà che $a_D < a_S$.

Le relazioni appena menzionate possono essere semplificate per via delle dimensioni dell'apparato sperimentale (che preciseremo in seguito¹): è infatti possibile supporre che $\alpha \ll 1$ rad, per cui si ottiene che $\sin \alpha \sim \alpha$ e $\cos \alpha \sim 1$. Combinando linearmente le equazioni (3) e (4) e applicando le approssimazioni appena menzionate si ottiene che:

$$\begin{cases} a_S - a_D = 2\mu_d \cdot g \cos \alpha \simeq 2\mu_d g \\ a_S + a_D = 2g \sin \alpha \simeq 2\alpha g \end{cases} \quad (5)$$

Da queste relazioni sarà possibile stimare il coefficiente di attrito dinamico μ_d e l'angolo α di inclinazione:

$$\mu_d = \frac{a_S - a_D}{2g} \quad , \quad \alpha = \frac{a_S + a_D}{2g} \quad (6)$$

i quali verranno dotati di un'incertezza pari a:

$$\sigma_{\mu_d} = \sqrt{\frac{1}{4g^2} (\sigma_{a_S}^2 + \sigma_{a_D}^2) + \frac{a_S - a_D}{4g^4} \sigma_g^2} \quad , \quad \sigma_{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{4g^2} (\sigma_{a_S}^2 + \sigma_{a_D}^2) + \frac{a_S + a_D}{4g^4} \sigma_g^2} \quad (7)$$

dove σ_{a_S} è l'incertezza legata al valore dell'accelerazione trovato per il moto in salita, σ_{a_D} è l'incertezza sull'accelerazione in discesa e σ_g è corrisponde alla precisione del valore di accelerazione gravitazionale utilizzato.

¹vedi **2.1 Apparato sperimentale e misure preliminari**.

1.2 Stima delle accelerazioni

Per stimare le quantità sopra specificate è quindi necessario stimare i valori di a_S e a_D per fare ciò verranno utilizzati dei *curve fitting* che utilizzeranno le seguenti leggi del moto uniformemente accelerato:

- Relazione su v :

$$v(t) = v_0 + at \quad (8)$$

dove $v(t)$ corrisponde alla velocità del carrello al generico tempo t e v_0 è la velocità iniziale del corpo. Pertanto questa relazione può essere sfruttata per ricavare l'accelerazione a partire dai tempi di passaggio e dalle velocità corrispondenti di passaggio

- Relazione su v^2 :

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \\ v(t) = v_0 + at \end{cases} \Rightarrow v^2(t) = v_0^2 + 2a(s(t) - s_0) \quad (9)$$

dove $s(t)$ indica la posizione del carrello al generico tempo t e s_0 corrisponde alla posizione iniziale. L'accelerazione a può essere ricavata quindi tramite la relazione trovata sfruttando la velocità quadratica e le relative posizioni.

2 Raccolta dati

2.1 Apparato sperimentale e misure preliminari

Per verificare il modello teorico ipotizzato è stato utilizzato un apparato sperimentale formato da una rotaia a cuscinetto d'aria sulla quale è stato posto un carrello mobile libero di scorrere e quattro fotocellule, disposte in successione lungo la rotaia.

Sul carrello sono state montate due diverse velette, una per ogni metodo utilizzato, per permettere alle fotocellule di registrarne il passaggio, secondo due diverse modalità.

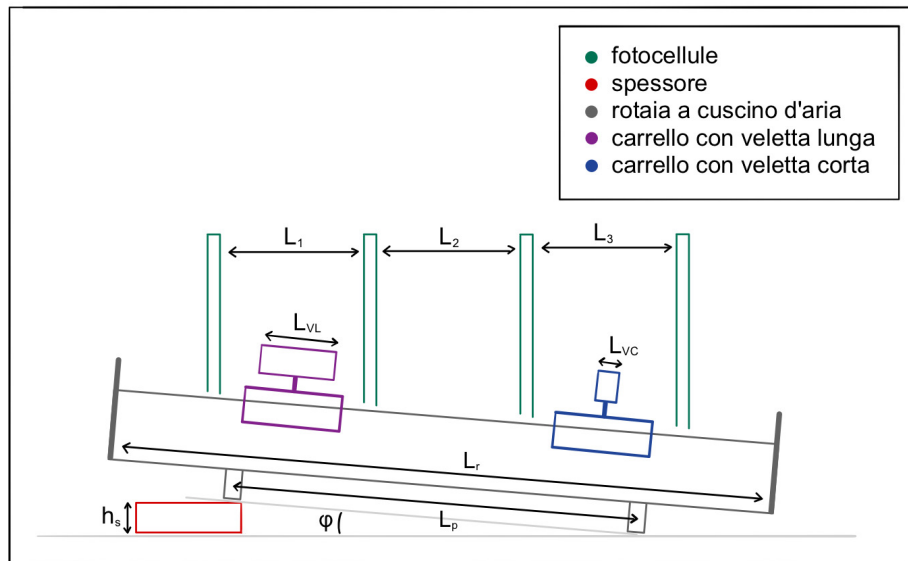


Figura 2: Schematizzazione dell'apparato sperimentale.

Le fotocellule possono infatti registrare i tempi secondo due modalità differenti:

- **I tempi di oscuramento**, corrispondono all'intervallo di tempo in cui il carrello passa davanti alla fotocellula in questione;
- **Gli istanti di passaggio**, corrispondono invece al passaggio della veletta attraverso la prima fotocellula che svolge il ruolo di 'trigger', azionando le fotocellule successive che registrano il tempo fino a quando vengono fermate in corrispondenza del passaggio della veletta per la relativa fotocellula.

Per il primo caso si utilizza una veletta più lunga in modo tale da ridurre possibili registrazioni errate nel caso di velocità elevate. Nel secondo caso, invece basta una veletta più corta.

Di seguito riportiamo le dimensioni di tali velette:

Veletta lunga (L_{VL})	Veletta corta (L_{VC})
0.100 ± 0.001 m	0.025 ± 0.001 m

Tabella 1: Dimensioni delle velette utilizzate.

e le distanze presenti tra le fotocellule:

L_1	L_2	L_3	L_r
0.435 ± 0.001 m	0.505 ± 0.001 m	0.471 ± 0.001 m	2.040 ± 0.001 m

Tabella 2: Distanza tra le fotocellule e lunghezza del piano inclinato.

Oltre alle grandezze appena menzionate, sono state essenziali le misure dell'altezza h_s dei rialzi utilizzati per inclinare la rotaia e della distanza $L_p = 1.458 \pm 0.001$ m tra le due gambe della rotaia: queste hanno permesso di stimare preliminarmente gli angoli d'inclinazione φ della rotaia mediante la seguente relazione trigonometrica:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{h_s}{L_r}\right) \quad (10)$$

I valori di h_s misurati e i corrispondenti angoli² ottenuti sono:

h_s^α	h_s^β
2.000 ± 0.001 m	1.500 ± 0.001 m
α	β
0.014 ± 0.001 rad	0.010 ± 0.001 rad

Tabella 3: Misure del rialzo e degli angoli corrispondenti con relative incertezze.

e risultano coerenti con l'approssimazione per piccoli angoli che è stata possibile eseguire, sui bilanci di forze, tra le equazioni (4) e (6).

Gli angoli così ottenuti saranno confrontati con quelli stimati dall'analisi dati, per ottenere un'ulteriore conferma dei dati che verranno ricavati.

²vedi **5.3 Appendice: Propagazione degli errori**.

2.2 Calibrazione

L'utilizzo di una rotaia a cuscinetto d'aria e di un dispositivo di lancio hanno permesso di acquisire misure in corrispondenza del passaggio del carrello sia in discesa sia in salita. Nel primo caso si è sfruttata una componente della forza peso, quindi il carrello è stato lasciato scivolare verso il basso con una velocità iniziale nulla. Per la salita, invece, è stato necessario imprimere una quantità di energia (tramite il dispositivo di lancio) che permettesse al corpo di raggiungere l'estremità opposta del piano: la velocità iniziale sarà quindi sicuramente non nulla.

Pertanto, nel caso dei lanci in salita sono stati testati i due lanciatori a disposizione, in modo da garantire la migliore riproducibilità possibile. L'indagine è consistita quindi nell'individuare il lanciatore con la minore deviazione standard sulla media σ^3 di vari lanci, siccome tale indice di dispersione statistico è intuitivamente associabile alla variabilità tra i lanci effettuati dal tiratore.

Ciascun tiratore ha effettuato $N_{lanci}^* = 20$ lanci e ed stato registrato per ciascuno di questi il tempo di passaggio tra la prima e la seconda fotocellula: su ciascuno di questi set di dati è stata poi calcolata la deviazione standard, che è riportata di seguito: Dalla tabella si nota

Lanciatore	Deviazione standard σ_{std}
E. Brisigotti	0.003 s
Y. Mascolo	0.001 s

Tabella 4: Deviazione standard sul valore medio dei 20 lanci eseguiti dai due lanciatori.

che il "miglior lanciatore" risulti essere Y. Mascolo, poiché è caratterizzato dal minor valore di deviazione standard. Si osserva inoltre che il miglior valore trovato $\sigma = 0.001$ s risulta essere pari alla sensibilità delle fotocellule $\sigma_f = 0.001$ s: pertanto parleremo di un unico errore σ associato al singolo lancio, indipendentemente dal verso di percorrenza della rotaia.

Il passo successivo consiste nello scegliere il numero di lanci ottimale per ottenere la minima incertezza $\sigma_{\bar{t}}$ sulla media dei lanci, calcolata come:

$$\sigma_{\bar{t}} = \frac{\text{std}(t_i)}{\sqrt{N_{lanci}^*}} \quad (11)$$

Sono stati utilizzati gli stessi dati raccolti in precedenza per il lanciatore Y. Mascolo. Di seguito è riportato l'andamento della deviazione standard sulla media all'aumentare del numero di lanci effettuati. La scelta nel numero ottimale si basa sull'andamento pressoché costante che è possibile osservare nel grafico in corrispondenza di $13 \leq N_{lanci}^* \leq 20$. All'intero plateau corrisponde anche il minimo valore di deviazione standard sulla media $\sigma_{\bar{t}_{14}} = 0.001$ s, che risulta essere pari alla deviazione standard sulla media ottenuta per 20 lanci.

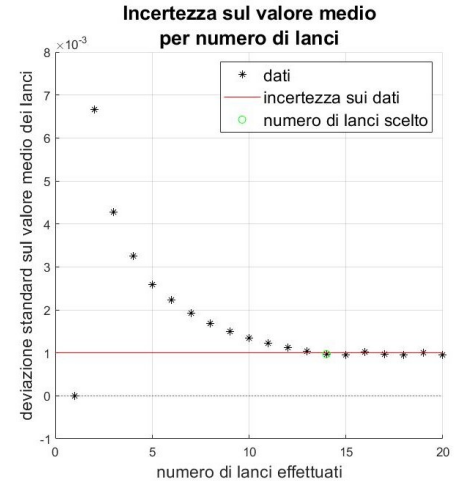


Figura 3: Deviazione standard sulla media dei lanci effettuati.

Pertanto si è deciso di effettuare serie di misure costituite $N_{lanci}^* = 14$ lanci (corrispondente all'inizio del plateau in figura (3)), a ciascuno dei quali sarà associata un'incertezza (approssimata per eccesso) di:

$$\sigma_{\bar{t}} = \frac{\sigma}{\sqrt{14}} = 0.001s \quad (12)$$

³vedi 5.1 Appendice: Media e relativa incertezza

3 Analisi dati

Le due tecniche di analisi dati che ci apprestiamo ad illustrare sono mirate all'individuazione dell'angolo di inclinazione φ e del coefficienti di attrito dinamico μ_d a partire dalle misure dei tempi di oscuramento e dei tempi di passaggio.

La prima strategia consiste nello stimare i parametri in questione a partire dalla relazione lineare che intercorre tra velocità e tempo in un moto uniformemente accelerato (vedi equazione (8)). La seconda tecnica, invece, ricava i medesimi parametri a partire dalla relazione lineare che intercorre tra il quadrato della velocità e lo spostamento (vedi equazione (9)) che il corpo compie lungo il suo moto uniformemente accelerato.

In entrambi i casi saranno quindi utilizzate:

- le velocità istantanee, che verranno ricavate a partire dai tempi di oscuramento;
- i tempi di passaggio: nel primo metodo questi saranno impiegati direttamente, mentre nella seconda strategia verranno utilizzati per stimare le distanze presenti tra le fotocellule (che saranno poi confrontate con le misure preliminari).

Per analizzare l'influenza di diversi parametri, le misure sono state prese in diverse condizioni, con diverse combinazioni dei parametri: per l'angolo d'inclinazione φ sono stati considerati due valori, α e β , ed in alcuni casi è stata impiegata una massa aggiuntiva m_+ rispetto a quella del carrello.

Inoltre, per ciascuna combinazione di parametri, è stato possibile analizzare il moto del carrello sia nella sua fase di salita che in quella di discesa (tramite l'utilizzo di un dispositivo di lancio) in modo tale da poter stimare contemporaneamente entrambe le quantità richieste.

3.1 Calcolo delle velocità istantanee

Il calcolo delle velocità istantanee, che ci apprestiamo ad illustrare, si basa sulla possibilità di approssimare la velocità istantanea che un corpo possiede in un determinato istante di tempo t con la velocità media calcolata in un intervallo infinitesimo simmetrico centrato in istante t .

Nella pratica, l'intervallo di tempo infinitesimo in questione può essere approssimato come il tempo di oscuramento (di una fotocellula) causato dal passaggio di un oggetto (nel nostro caso la veletta lunga) le cui dimensioni risultino molto minori rispetto allo spazio percorso lungo l'intero moto ($L_{VL} \ll L_p$).

Sfruttando l'approssimazione appena menzionata, otteniamo che la velocità istantanea v_i che il corpo possiede quando passa per il punto medio della i -esima fotocellula è pari a:

$$v_i = \frac{L_{VL}}{\overline{\Delta t_i}} \quad (13)$$

dove $\overline{\Delta t_i}$ è il tempo di oscuramento medio relativo alla i -esima fotocellula, calcolato come la media (sul numero di lanci effettuati) dei vari tempi di oscuramento Δt_{ij} misurati:

$$\overline{\Delta t_i} = \frac{1}{N_{lanci}} \sum_{j=1}^{N_{lanci}} \Delta t_{ij} \quad (14)$$

I valori così ottenuti sono stati quindi dotati di un'incertezza⁴ pari a:

$$\sigma_{v_i} = \frac{1}{\Delta t_i} \sqrt{\frac{\sigma_{\Delta t_i}^2}{\Delta t_i^4} + \sigma_L^2} \quad (15)$$

dove $\sigma_{\Delta t} = 2 \sigma_{\bar{t}}$ è l'errore attribuito ai tempi di oscuramento medio (a partire dall'errore di riproducibilità $\sigma_{\bar{t}}$ trovato in precedenza) e σ_L corrisponde alla sensibilità dello strumento (righello) utilizzato per misurare la lunghezza delle velette.

A seguire sono riportati i valori ottenuti per le velocità istantanee in entrambe le direzioni:

discesa [m/s]	$v_1 \pm \sigma_{v_1}$	$v_2 \pm \sigma_{v_2}$	$v_3 \pm \sigma_{v_3}$	$v_4 \pm \sigma_{v_4}$
per α senza m_+	0.2423 ± 0.0005	0.438 ± 0.002	0.587 ± 0.003	0.692 ± 0.005
per α con m_+	0.2420 ± 0.0006	0.438 ± 0.002	0.587 ± 0.003	0.693 ± 0.004
per β senza m_+	0.2109 ± 0.0004	0.383 ± 0.001	0.512 ± 0.002	0.654 ± 0.004
per β con m_+	0.2108 ± 0.0005	0.381 ± 0.002	0.511 ± 0.003	0.604 ± 0.004

salita [m/s]	$v_1 \pm \sigma_{v_1}$	$v_2 \pm \sigma_{v_2}$	$v_3 \pm \sigma_{v_3}$	$v_4 \pm \sigma_{v_4}$
per α senza m_+	0.904 ± 0.008	0.829 ± 0.002	0.719 ± 0.005	0.614 ± 0.004
per α con m_+	0.732 ± 0.005	0.262 ± 0.004	0.478 ± 0.002	0.3011 ± 0.0009
per β senza m_+	0.913 ± 0.008	0.843 ± 0.007	0.768 ± 0.006	0.738 ± 0.005
per β con m_+	0.742 ± 0.006	0.654 ± 0.004	0.549 ± 0.003	0.443 ± 0.002

Tabella 5: Velocità di passaggio che il carrello possiede in corrispondenza delle fotocellule nel suo moto di discesa (prima) e di salita (dopo), suddivise in base all'angolo di inclinazione utilizzato (α o β) e alla presenza di masse aggiuntive m_+ rispetto a quella del corpo.

Le velocità così trovate saranno quindi sfruttate per stimare il coefficiente di attrito residuo μ_d e l'angolo di inclinazione tramite entrambe le relazioni menzionate in precedenza.

In particolare, nel secondo caso verrà impiegato il quadrato di tale velocità v_i^2 , che sarà corredato di un'incertezza pari a:

$$\sigma_{v_i^2} = 2 v_i \sigma_{v_i} \quad (16)$$

ottenuta a partire dall'incertezza sulla velocità σ_{v_i} dalla formula per la propagazione degli errori⁵.

3.2 Calcolo delle distanze tra le fotocellule

La valutazione delle distanze presenti tra due fotocellule successive è effettuata sfruttando la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \Delta s_i &= s(\bar{t}_{i+1}) - s(\bar{t}_i) = \frac{1}{2} a \bar{t}_{i+1}^2 + v_0 \bar{t}_{i+1} + t_0 - \frac{1}{2} a \bar{t}_i^2 - v_0 \bar{t}_i - t_0 = \\ &= \frac{1}{2} a (\bar{t}_{i+1}^2 - \bar{t}_i^2) + v_0 (\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i) = \frac{a (\bar{t}_{i+1} + \bar{t}_i) + 2v_0}{2} (\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i) = \\ &= \frac{a \bar{t}_{i+1} + v_0 + a \bar{t}_i + v_0}{2} (\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i) = \frac{v(\bar{t}_{i+1}) + v(\bar{t}_i)}{2} (\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i) \end{aligned} \quad (17)$$

che lega le velocità $v(\bar{t}_{i+1})$, $v(\bar{t}_i)$ di passaggio del corpo per le due fotocellule e i relativi istanti

⁴vedi 5.3 Appendice: Propagazione degli errori.

⁵vedi 5.3 Appendice: Propagazione degli errori.

medi di passaggio \bar{t}_{i+1} e \bar{t}_i , che sono stati individuati a partire dai tempi di passaggio misurati t_{ij} come:

$$\bar{t}_i = \frac{1}{N_{lanci}} \sum_{j=1}^{N_{lanci}} t_{ij} \quad (18)$$

Come in precedenza, tramite la formula per la propagazione degli errori è stata ricavata un'incertezza sugli intervalli appena trovati:

$$\sigma_{\Delta s_i} = \sqrt{\left(\sigma_{v_{i+1}}^2 + \sigma_{v_i}^2\right) \frac{(\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i)^2}{4} + \left(\frac{v(\bar{t}_{i+1}) + v(\bar{t}_i)}{2}\right)^2 2\sigma_{\bar{t}}^2} \quad (19)$$

Nelle tabelle a seguire riportiamo gli intervalli ottenuti.

intervalli salita [m]	$\Delta s_1 \pm \sigma_{\Delta s_1}$	$\Delta s_2 \pm \sigma_{\Delta s_2}$	$\Delta s_3 \pm \sigma_{\Delta s_3}$
per α senza m_+	0.452 ± 0.003	0.504 ± 0.003	0.440 ± 0.002
per α e m_+	0.451 ± 0.002	0.483 ± 0.002	0.463 ± 0.002
per β senza m_+	0.467 ± 0.003	0.517 ± 0.003	0.468 ± 0.003
per β e m_+	0.448 ± 0.002	0.488 ± 0.002	0.417 ± 0.002

intervalli discesa [m]	$\Delta s_1 \pm \sigma_{\Delta s_1}$	$\Delta s_2 \pm \sigma_{\Delta s_2}$	$\Delta s_3 \pm \sigma_{\Delta s_3}$
per α senza m_+	0.474 ± 0.002	0.504 ± 0.002	0.413 ± 0.001
per α con m_+	0.475 ± 0.002	0.506 ± 0.002	0.415 ± 0.001
per β senza m_+	0.506 ± 0.002	0.514 ± 0.002	0.421 ± 0.001
per β con m_+	0.484 ± 0.002	0.513 ± 0.002	0.422 ± 0.001

Tabella 6: Intervalli Δs_i misurati nel moto in discesa e in salita tra le fotocellule, suddivisi in base all'angolo di inclinazione utilizzato (α o β) e alla presenza di masse aggiuntive m_+ rispetto a quella del corpo.

E' stata calcolata una lunghezza media⁶ per ogni intervallo considerato:

	$\overline{\Delta s_1} \pm \sigma_{\overline{\Delta s_1}}$	$\overline{\Delta s_2} \pm \sigma_{\overline{\Delta s_2}}$	$\overline{\Delta s_3} \pm \sigma_{\overline{\Delta s_3}}$
lunghezza media [m]	0.4324 ± 0.0001	0.5035 ± 0.0001	0.4696 ± 0.0001

Tabella 7: Intervalli medi $\overline{\Delta s_i}$ misurati, corredati delle deviazioni standard sulla media $\sigma_{\overline{\Delta s_i}}$.

Confrontando i dati così ottenuti con quelli preliminari (in tabella (2)), tramite un test di ipotesi a due code è possibile notare come tutti i dati, a coppie, ricadono in un intervallo di confidenza a tre σ : pertanto le due serie di misure risultano compatibili. Pertanto, di seguito verrà impiegata quella appena ricavata, perché caratterizzata da minori incertezze.

A partire dagli intervalli trovati sopra, è stato possibile calcolare le distanze progressive e i relativi errori:

$$s_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^i \overline{\Delta s_j} & 2 \leq i \leq N_f \\ 0 & i = 1 \end{cases} \Rightarrow \sigma_{s_i} = \begin{cases} \sqrt{\sum_{j=1}^i \sigma_{\overline{\Delta s_j}}^2} & 2 \leq i \leq N_f \\ 0 & i = 1 \end{cases} \quad (20)$$

I valori così ottenuti saranno impiegati come ascisse di alcuni grafici nelle sezioni a seguire. Si osservi però che l'errore (e quindi il peso) attribuito alla posizione della prima fotocellula è nullo per via del valore (nullo) attribuito all'istante di passaggio per la fotocellula *trigger*.

⁶vedi **5.1 Appendice: media e relativa incertezza**.

3.3 Stima dei parametri a partire dalla relazione su v

A questo punto, dopo aver ottenuto i valori dei tempi di passaggio $\overline{\Delta t}$ (con i relativi errori $\sigma_{\overline{\Delta t}}$) e delle velocità istantanee v_i (con le relative incertezze σ_{v_i}), è possibile stimare le accelerazioni tramite dei *fit* lineari utilizzando la formula (8).

Avendo a disposizione le incertezze su entrambe le coordinate, i pesi⁷ utilizzati per far convergere il *fit* sono stati ottenuti a partire da un errore ibrido, ovvero come combinazione di quelli sulle velocità istantanee σ_{v_i} e sui tempi di passaggio $\sigma_{\overline{t_i}}$:

$$\sigma_{fit} = \sqrt{\sigma_{v_i}^2 + \sigma_{\overline{t_i}}^2 \frac{v_i^2}{\overline{t_i}^2}} \quad (21)$$

Di seguito sono riportati i grafici dei *curve fitting* relativi alla casistica in analisi:

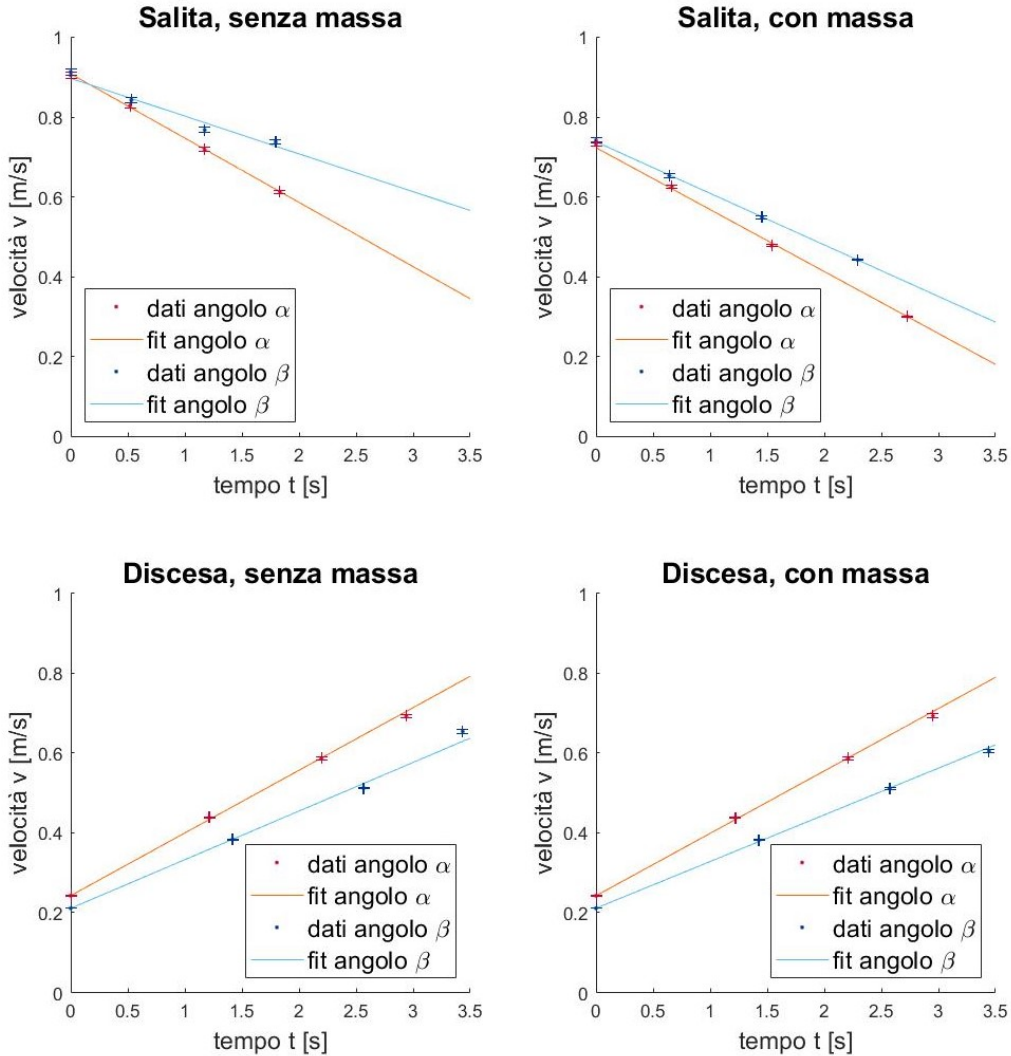


Figura 4: Rappresentazione dei *fit* lineari ottenuti nei vari casi analizzati: in ogni grafico è possibile confrontate le accelerazioni dovute ai due angoli differenti impiegati.

⁷vedi 5.5 Appendice: Pesi.

Per verificare la correttezza dei parametri stimati e la buona riuscita del *fit* utilizzato è possibile ricorrere a due estimatori di bontà: il χ^2 ridotto e il coefficiente di determinazione (*adjusted R*²). In tabella sono riportati i valori corrispondenti:

salita	χ^2 ridotto	<i>adjusted R</i> ²	discesa	χ^2 ridotto	<i>adjusted R</i> ²
per α con m_+	0.335	0.993	per α con m_+	5.590	0.999
per α senza m_+	7.129	0.998	per α senza m_+	6.719	0.999
per β con m_+	0.489	0.999	per β con m_+	6.376	0.999
per β senza m_+	8.696	0.931	per β senza m_+	26.086	0.998

Tabella 8: Estimatori di bontà dei *fit* effettuati per ciascuna combinazione di parametri.

La ragione alla base dell'utilizzo di due test di ipotesi è legata alla definizione delle due variabili *test*⁸. In questo caso particolare, infatti, le incertezze interessate sono risultate notevolmente ridotte, fatto che ha dato origine ad elevati valori per i pesi: siccome il valore di $\bar{\chi}^2$ risulta direttamente proporzionale al quadrato di tali pesi, è plausibile che questi abbiano portato a valori elevati di $\bar{\chi}^2$, che normalmente sarebbero sinonimo di una scarsa aderenza dei dati al *fit* così trovato. Pertanto, nelle considerazioni a seguire sulla bontà dei *curve fitting*, è stato privilegiato il confronto della variabile *test adjusted R*² (chiamata appunto coefficiente di determinazione ridotto), la cui definizione non risulta strettamente legata a pesi e per cui sono stati ottenuti valori più vicini a quelli di aspettazione.

Dal *fit* è possibile estrarre i valori delle accelerazioni a_S in salita e a_D in discesa con i relativi errori:

accelerazione [m/s ²]	per α con m_+	per α senza m_+	per β con m_+	per β senza m_+
a_S	0.155 ± 0.007	0.161 ± 0.005	0.129 ± 0.003	0.09 ± 0.03
a_D	0.156 ± 0.005	0.157 ± 0.005	0.117 ± 0.004	0.12 ± 0.01

Tabella 9: Valori delle accelerazioni in salita e in discesa nei vari casi analizzati.

A questo punto si possono ricavare i valori del coefficiente di attrito dinamico μ_d e l'angolo d'inclinazione con i relativi errori ottenuti tramite le formule (7):

	per α con m_+	per α senza m_+	per β con m_+	per β senza m_+
μ_d	0.0001 ± 0.0004	0.0002 ± 0.0004	0.0006 ± 0.0002	-0.001 ± 0.002
angolo [rad]	0.0159 ± 0.0004	0.0162 ± 0.0004	0.0125 ± 0.0002	0.011 ± 0.002

Tabella 10: Valori del coefficiente di attrito dinamico μ_d e dell'angolo d'inclinazione, con i relativi errori.

Dall'ultima tabella è possibile notare un valore negativo per un coefficiente di attrito residuo, nel caso relativo all'angolo β senza massa aggiuntiva m_+ : sia il valore ottenuto che le accelerazioni corrispondenti sono caratterizzati da un'incertezza maggiore (di un ordine di grandezza) rispetto alle restanti. Inoltre, il *fit* da cui sono stati estratti questi valori è caratterizzato dal minimo valore di coefficiente di determinazione: questo presuppone che i relativi dati non aderiscano perfettamente al modello lineare utilizzato. Una giustificazione di questo fatto può essere dovuta, da un lato al cuscinetto d'aria che ha più che compensato l'attrito dinamico (anche per via dei ridotti valori di massa totale e angolo impiegati), dall'altro da una serie sfortunata di lanci poco precisi.

⁸vedi 5.2 Appendice: Test del Chi Quadrato e 5.4 Appendice: Coefficiente di Determinazione.

3.4 Stima dei parametri a partire dalla relazione su v^2

Un'ulteriore stima delle accelerazioni e dei parametri è stata ottenuta a partire dai quadrati delle velocità istantanee v_i^2 (con i relativi errori $\sigma_{v_i^2}$) e dalle distanze progressive s_i tra le fotocellule (corredate dalle incertezze σ_{s_i}) tramite l'equazione (9).

Anche in questo caso è stato effettuato un *fit* lineare per ogni casistica analizzata e i pesi utilizzati sono stati ottenuti a partire da una combinazione delle incertezze su entrambe le quantità in questione:

$$\sigma_{fit} = \sqrt{\sigma_{v_i^2}^2 + \sigma_{s_i}^2 \frac{v_i^2}{s_i^2}} \quad (22)$$

Di seguito sono riportati i grafici dei *curve fitting* relativi ai vari casi analizzati:

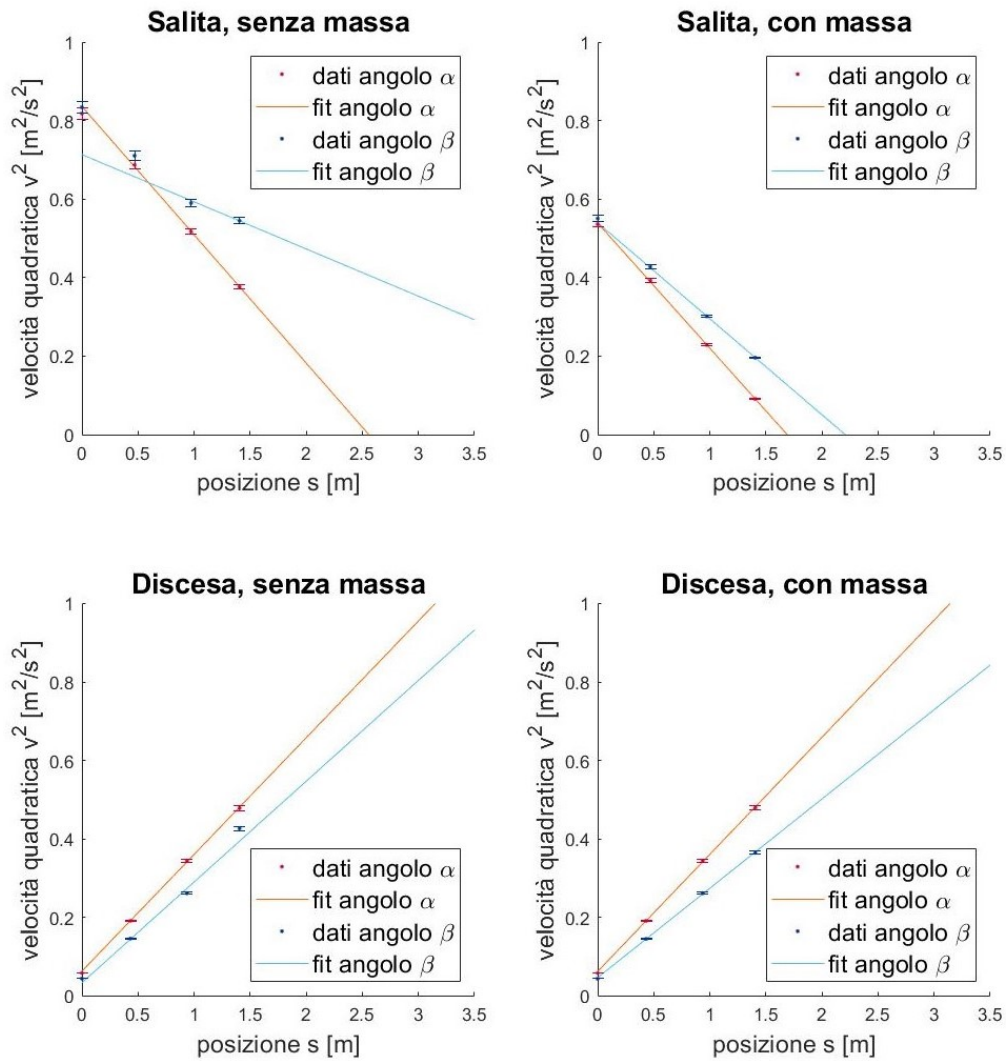


Figura 5: Rappresentazione dei *curve fitting* ottenuti nei vari casi analizzati. In ogni grafico sono raffigurate a confronto le accelerazioni relative ai due angoli utilizzati.

Per verificare la validità e la buona riuscita del *fit* utilizzato si è ricorso a due estimatori di bontà: il χ^2 ridotto e il coefficiente di determinazione (*adjusted R^2*).

In tabella sono riportati i valori corrispondenti:

salita	χ^2 ridotto	adjusted R^2	discesa	χ^2 ridotto	adjusted R^2
per α con m_+	0.259	1.000	per α con m_+	1.388	0.999
per α senza m_+	0.075	0.999	per α senza m_+	1.738	0.999
per β con m_+	0.135	1.000	per β con m_+	3.948	0.999
per β senza m_+	6.571	0.9072	per β senza m_+	322.022	0.976

Tabella 11: Estimatori di bontà del *fit*.

Come nel caso precedente, le ridotte incertezze sulle grandezze in questione hanno causato elevati valori dei pesi, influenzando i valori di $\bar{\chi}^2$: pertanto, per stabilire la correttezza dei *fit* effettuati è stato privilegiato l'utilizzo del coefficiente di determinazione \bar{R}^2 .

Dai *fit* lineari è possibile estrarre i valori delle accelerazioni a_S in salita e a_D in discesa e dei relativi errori:

accelerazione [m/s ²]	per α con m_+	per α senza m_+	per β con m_+	per β senza m_+
a_S	0.159 ± 0.001	0.163 ± 0.008	0.122 ± 0.001	0.06 ± 0.03
a_D	0.149 ± 0.003	0.149 ± 0.004	0.114 ± 0.003	0.13 ± 0.03

Tabella 12: Valori delle accelerazioni in salita e in discesa nei vari casi analizzati.

A questo punto si possono stimare il coefficiente di attrito dinamico μ_d e l'angolo d'inclinazione ed i relativi errori (ottenuti dalla propagazione degli errori⁹):

	per α con m_+	per α senza m_+	per β con m_+	per β senza m_+
μ_d	0.0005 ± 0.0002	0.0007 ± 0.0005	0.0004 ± 0.0002	-0.004 ± 0.002
angolo [rad]	0.0157 ± 0.0002	0.0159 ± 0.0005	0.0120 ± 0.0001	0.009 ± 0.002

Tabella 13: Valori del coefficiente di attrito dinamico μ_d e dell'angolo d'inclinazione, con i relativi errori.

Anche in questo caso è possibile notare un coefficiente di attrito dinamico residuo negativo e incertezze elevate sui parametri, in corrispondenza dell'angolo β senza massa aggiuntiva m_+ , al quale corrisponde di nuovo il valore più piccolo di coefficiente di determinazione ricavato.

Le motivazioni ipotizzate nella sezione precedente (sovracompensazione dell'attrito da parte della rotaia a cuscinetto d'aria, oppure una serie sfortunata di misure) rimangono valide, ma poiché i due metodi di analisi sono stati sviluppati in parallelo e hanno portato al medesimo risultato, è plausibile pensare che il problema sia da imputare all'apparato sperimentale utilizzato, piuttosto che alla casualità che può inficiare le misure.

⁹vedi **5.3 Appendice: Propagazione degli errori**.

4 Conclusioni

L'esperienza appena descritta si è rivelata per la maggior parte soddisfacente.

Confrontando caso per caso i valori ottenuti nei due metodi (vedi tabelle (10) e (13)), è possibile stabilire una equivalenza tra le due strategie di analisi utilizzate: pertanto possiamo affermare che i modelli lineari sfruttati (descritti dalle equazione (8) e (9)) per la descrizione del fenomeno si è rivelano adeguato, almeno in tre dei quattro casi analizzati.

Abbiamo infatti già osservato la presenza di un parametro anomalo ($\mu_d < 0$, senza realtà fisica), in corrispondenza dell'angolo minore β senza massa aggiuntiva m_+ , che reputiamo essere dovuto ad un'eccessiva correzione dell'attrito da parte della rotaia a cuscinetto ad aria, che si manifesta in particolare per piccoli carichi e anche per angoli di inclinazione ridotti.

I casi restanti sono quindi stati analizzati separatamente (in quanto meno, o persino non, inficiati da entrambe queste due aggravanti).

Per verificare la correttezza dei valori ottenuti per gli **angoli di inclinazione** è stato necessario trovare un unico dato da confrontare con le stime preliminari in tabella (3). Ciò è stato possibile grazie alla compatibilità (a 3σ) osservata in ciascuna coppia di valori di α (con e senza massa) ottenuti in ciascun metodo: è stato quindi possibile calcolare una valore medio complessivo di α per ciascun metodo (detti $\bar{\alpha}_1$ e $\bar{\alpha}_2$), che sono risultati nuovamente compatibili tra di loro (a 3σ) e quindi assimilabili nell'unico valore medio $\bar{\alpha}$ desiderato.

La stessa compatibilità è stata riscontrata tra i valori di β (con massa) ottenuti nei due metodi metodo, per cui è stato possibile trovare un unico valore medio $\bar{\beta}$. Il confronto degli angoli $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$

Metodo 1 ($\bar{\alpha}_1$)	Metodo 2 ($\bar{\alpha}_2$)	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
0.0160 ± 0.0003 rad	0.0158 ± 0.0003 rad	0.0159 ± 0.0002 rad	0.0123 ± 0.0001 rad

Tabella 14: Stime degli angoli ottenuti: nelle prime due colonne vengono riportati i due valori medi $\bar{\alpha}_1$ e $\bar{\alpha}_2$ ottenuti per ciascun metodo, la cui media $\bar{\alpha}$ si trova nella terza colonna. Infine, nella quarta è riportata la media dei valori di β (con massa) ottenuti in ciascun metodo.

con le stime geometriche riportate in tabella (3) confermano la bontà dell'analisi, sulla base del fatto che gli scarti tra i valori risultano inferiori o uguali a 2σ .

Per quanto riguarda i **coefficienti di attrito residuo**, i dati ottenuti per ciascun metodo (escludendo sempre β senza massa) hanno una buona compatibilità (a 1σ), per cui è stato possibile ottenere un valore medio $\bar{\mu}_{d_1}$ e $\bar{\mu}_{d_2}$. Lo stesso criterio ha reso possibile il calcolo di una media complessiva dei due valori, corrispondente al coefficiente di attrito residuo $\bar{\mu}_d$ stimato per la rotaia utilizzata.

Metodo 1 ($\bar{\mu}_{d_1}$)	Metodo 2 ($\bar{\mu}_{d_2}$)	$\bar{\mu}_d$
0.0003 ± 0.0002	0.0005 ± 0.0002	0.0004 ± 0.0001

Tabella 15: Stime dei coefficienti di attrito residuo ottenuti: nelle prime due colonne sono riportati i valori medi $\bar{\mu}_{d_1}$ e $\bar{\mu}_{d_2}$ ottenuti per ciascun metodo e la loro media complessiva $\bar{\mu}_d$ nella terza colonna.

In conclusione, ad eccezione del caso particolare già ampiamente discusso, l'esperimento si è rivelato soddisfacente in quanto è stato possibile stimare quantitativamente sia il coefficiente di attrito residuo sia gli angoli di inclinazione utilizzati, risultati coerenti con le misure preliminari.

5 Appendice

5.1 Media e relativa incertezza

Sia x_i un *set* di N dati. Si definisce *valore medio*:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \quad (23)$$

Inoltre, è possibile attribuire a questo valore un'incertezza pari a:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\text{std}(x_i)}{\sqrt{N}} \quad (24)$$

Dove $\text{std}(x_i)$ è la *deviazione standard* che può essere calcolata tramite la seguente formula:

$$\text{std}(x_i) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|^2} \quad (25)$$

5.2 Test del Chi Quadrato

Il *Test del Chi Quadrato* è un test di verifica delle ipotesi utilizzato in statistica, basato sulla distribuzione del χ^2 .

Siano un set di dati sperimentali $\{x^s\}$, caratterizzati da incertezze $\{\sigma^s\}$, e dei valori attesi $\{x^t\}$; si definisce il *Chi Quadrato* come:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^s \cdot (x_i^s - x_i^t)^2 \quad (26)$$

dove i pesi usati nell'equazione precedente possano essere calcolati, a partire dagli errori $\{\sigma^s\}$, come:

$$\omega_i^s = \frac{1}{(\sigma_i^s)^2} \quad (27)$$

Il valore utile per la verifica delle ipotesi è però il *Chi Quadrato Ridotto* che viene calcolato come:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{\text{dfe}} \quad (28)$$

dove il numero di *gradi di libertà* dfe si ottiene a partire dal numero di dati considerati n_{dati} , dal numero di parametri del *fit* n_{par} e dal numero di punti esclusi n_{esc} ; la formula, considerati tali parametri, risulta essere:

$$\text{dfe} = n_{\text{dati}} - n_{\text{par}} - n_{\text{esc}} \quad (29)$$

In generale, il valore di aspettazione per questa distribuzione è di 1, pertanto per $\tilde{\chi}^2 \gg 1$ si può dedurre che la distribuzione sperimentale non segua quella teorica ipotizzata.

5.3 Propagazione degli errori

Sia una funzione continua $f(x_1, \dots, x_n)$ dipendente da n variabili x_1, \dots, x_n , caratterizzate rispettivamente da incertezze $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Supponendo che tali incertezze possano essere ritenute indipendenti e casuali, è possibile stimare l'incertezza σ_f sul valore di $f(x_1, \dots, x_n)$ nel seguente modo:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_i^2} \quad (30)$$

5.4 Coefficiente di Determinazione

Il *coefficiente di determinazione* è una proporzione tra la variabilità dei dati e la correttezza del modello statistico utilizzato.

Di seguito spiegheremo nel caso più semplice (*regressione lineare*) come sia definito e come siano intuitivamente ottenuti i suoi valori di aspettazione.

Siano un set di variabili indipendenti (nel nostro caso sono le x_i) e un set di variabili dipendenti (nel nostro caso sono le y_i) che ipotizziamo di poter assimilare ad una retta ($y_r(x) = mx + q$).

Definiamo *devianza totale* TSS come lo scarto quadratico medio dei dati rispetto alla media (\bar{y}):

$$\text{TSS} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (31)$$

Introduciamo, inoltre, il concetto di *devianza residua* RSS come lo scarto quadratico delle variabili dipendenti y_i rispetto ai corrispettivi punti del modello lineare $y_r(x_i)$:

$$\text{RSS} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_r(x_i))^2 \quad (32)$$

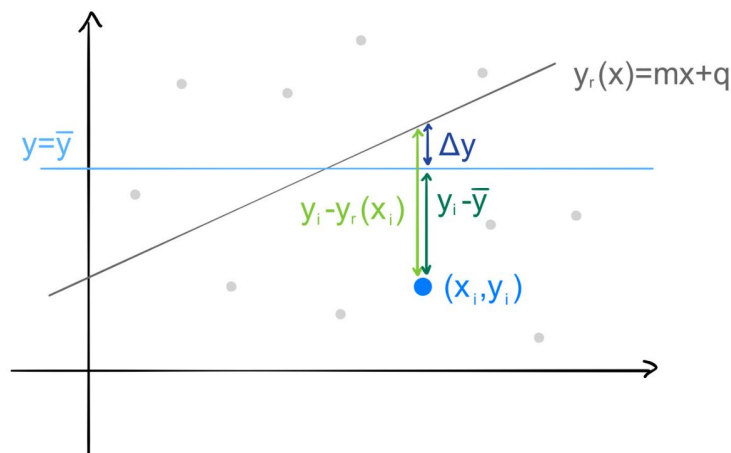


Figura 6: Immagine rappresentativa delle quantità appena considerate: si osservi la complementarità fra $(y_i - \bar{y})$ e Δy , da cui nasceranno le prossime considerazioni, dove Δy è la porzione di devianza descritta dal modello utilizzato.

Con queste premesse, si definisce *coefficiente di determinazione* il seguente rapporto:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} \quad (33)$$

Siccome la quantità $\frac{\text{RSS}}{\text{TSS}}$ rappresenta la frazione di variazione che dipende dal modello lineare della retta, se tale modello rappresenta correttamente i dati allora il rapporto appena menzionato sarà prossimo a zero ($R^2 \sim 1$).

Una quantità utile collegata a questo concetto è il *coefficiente di determinazione corretto*, che può essere ottenuto secondo la seguente formula:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1} \cdot \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} \quad (34)$$

in cui n corrisponde al numero di punti realmente utilizzati nel *fit* e k al numero di parametri utilizzati nel modello.

Per definizione $\bar{R}^2 \leq R^2$ ed il valore di R^2 varia tra 0 ed 1.

Possiamo, quindi, concludere che:

- tanto più il valore si avvicinerà a 0, sempre meno il modello utilizzato spiegherà i dati in esame;
- quando, invece, il valore sarà prossimo ad 1, il modello risulterà coerente con i dati analizzati.

5.5 Pesi

Data una serie di dati $\{y_i\}$ e il relativo *set* di incertezze $\{\sigma_i\}$, è possibile ricavare i pesi $\{w_i\}$ da attribuire a $\{y_i\}$ come:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i^2} & \sigma_i \neq 0 \\ 0 & \sigma_i = 0 \end{cases} \quad (35)$$

6 Fonti

1. John R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*, 1999 (ISBN: 88 0817 656 1)
2. Maria Garetto, *Statistica: lezioni ed esercizi*, 2002
3. Khan Academy: *R-squared or coefficient of determination*