

Università degli Studi dell'Insubria  
Dipartimento di Scienze e Alta Tecnologia  
Corso di Laurea Triennale in Fisica

# Simulazione di gas perfetti

Erica Brisigotti & Ylenia Mascolo



Esame di Laboratorio di Fisica I  
Docente: Prof. Dott. Massimo Luigi Maria Caccia  
Assistente di Laboratorio: Dott.ssa Samuela Lomazzi  
Anno Accademico 2018-2019

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Descrizione teorica del fenomeno . . . . .	3
1.1.1	Libero cammino medio secondo un approccio geometrico . . . . .	3
1.1.2	Libero cammino medio secondo una descrizione statistica . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Raccolta dati</b>	<b>5</b>
2.1	Descrizione dell'apparato sperimentale . . . . .	5
2.2	Acquisizione e registrazione dei dati relativi ai lanci . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Analisi dati</b>	<b>8</b>
3.1	Verifica delle ipotesi . . . . .	8
3.1.1	Verifica dell'omogeneità della distribuzione di chiodini . . . . .	8
3.1.2	Verifica dell'omogeneità degli ottanti di entrata e di uscita . . . . .	10
3.2	Calcolo del libero cammino medio . . . . .	12
3.2.1	Stima geometrica del libero cammino medio . . . . .	12
3.2.2	Verifica del carattere poissoniano del numero di urti . . . . .	13
3.2.3	Stima statistica del libero cammino medio . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Appendice</b>	<b>18</b>
5.1	Media e relativa incertezza . . . . .	18
5.2	Test del Chi Quadrato . . . . .	18
5.3	Propagazione degli errori . . . . .	19
5.4	Pesi . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Fonti</b>	<b>19</b>

# 1 Introduzione

L'esperienza che ci apprestiamo a descrivere si pone come obiettivo di simulare la dinamica degli urti che avvengono tra le molecole di un gas perfetto. Per ricreare tali condizioni ci serviremo di un corpo esteso in moto all'interno di uno spazio bidimensionale disseminato di centri diffusori uniformemente distribuiti.

## 1.1 Descrizione teorica del fenomeno

Il moto di un corpo esteso in una regione di spazio disseminata di centri diffusori può essere schematizzato come una serie di urti elastici tra i quali il corpo segue un moto rettilineo uniforme.

Una traiettoria di questo tipo è difficilmente prevedibile in modo deterministico per via dei continui urti: pertanto si privilegia un approccio statistico, che permette di caratterizzare il moto del corpo in funzione di medie temporali o spaziali. In questo caso particolare, l'attenzione sarà focalizzata sul **libero cammino medio**, che corrisponde allo spazio medio percorso dal corpo tra due urti successivi.

È possibile ottenere stime differenti del libero cammino medio a seconda del modello utilizzato. Di seguito vengono introdotti i due possibili modelli (uno geometrico e uno più affine alla meccanica statistica), che verranno impiegati nelle rispettive strategie di analisi.

Comune alle due strategie è l'ipotesi di omogeneità della distribuzione di centri diffusori, che garantisce l'assenza di direzioni privilegiate per il moto e l'indistinguibilità delle regioni considerate. Inoltre, in entrambe le schematizzazioni il corpo esteso in esame viene assimilato (nel piano bidimensionale) ad una circonferenza di raggio  $R$ . Analogamente, i centri diffusori non sono considerati puntiformi ma hanno associato un raggio  $r_c$ : in particolare è possibile osservare che la distanza minima  $\rho$  necessaria perchè avvenga un urto sia uguale alla somma dei raggi in questione:

$$\rho = R + r_c$$

Per semplificare la descrizione degli urti, i modelli utilizzati sfruttano una descrizione equivalente basata su urti fittizi che avvengono tra centri diffusori puntiformi e circonferenze (particelle fittizie di gas) di raggio  $\rho$ .

### 1.1.1 Libero cammino medio secondo un approccio geometrico

Sia una particella fittizia di gas di raggio costante  $\rho$ , che percorre uno spazio  $s$  con velocità costante  $v = \frac{ds}{dt}$  tra due urti distanti  $\Delta t$ . L'area  $A$  percorsa dal corpo può essere stimata come:

$$A = 2 \rho s$$

mentre la frequenza di urti  $f$  è data da:

$$f = \frac{dN}{dt} = \frac{d(A n)}{dt} = n \frac{dA}{dt} = n \frac{d(2 \rho s)}{dt} = 2 n \rho \frac{ds}{dt} = 2 n \rho v = 2 n (R + r_c) v$$

dove  $n$  è la densità superficiale di centri diffusori ed è costante nel tempo.

Si ottiene quindi che l'intervallo di tempo  $\tau$  che intercorre tra due urti consecutivi vale:

$$\tau = \frac{1}{f} = \frac{1}{2 n (R + r_c) v}$$

Il libero cammino medio  $\lambda_g$  (ottenuto secondo questo primo modello geometrico) viene identificato come lo spazio percorso durante l'intervallo di tempo appena trovato: siccome il moto è rettilineo uniforme, questo può essere calcolato semplicemente come:

$$\lambda_g = \tau v = \frac{1}{2n(R + r_c)}$$

### 1.1.2 Libero cammino medio secondo una descrizione statistica

Si consideri una particella fittizia di gas che percorre una distanza  $s$  all'interno della regione di spazio disseminata di centri diffusori e si definisca  $p_{ds}$  la probabilità che la particella sia coinvolta in un urto elastico avendo percorso una distanza infinitesima  $ds$ .

La distanza  $s$  percorsa può essere trovata a partire dal numero di campionamenti  $N$  come:

$$s = N ds \quad (1)$$

corrisponde cioè all'unione di  $N$  intervalli di lunghezza  $ds$ .

La probabilità che la particella subisca  $n$  urti percorrendo la distanza  $s$  si ottiene quindi utilizzando la funzione di densità di probabilità Binomiale riportata di seguito:

$$p(n, s) = \mathbb{P}_{\mathbb{B}}(n, N; p_{ds}) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \cdot p_{ds}^n (1 - p_{ds})^{N-n} \quad (2)$$

Il valore atteso di questa distribuzione è noto:

$$\mu_s = \mathbb{E}[\mathbb{P}_{\mathbb{B}}(N; p_{ds})] = N p_{ds} \quad (3)$$

e corrisponde infatti numero medio di urti  $\mu_s$  che occorrono percorrendo una distanza  $s$ .

Questa quantità corrisponde però anche al rapporto tra la distanza percorsa  $s$  e il libero cammino medio  $\lambda_s$  associato:

$$\mu_s = \frac{s}{\lambda_s} \quad (4)$$

Nel caso in cui il campionamento sia grande<sup>1</sup> (ovvero  $N \rightarrow \infty$ ) e quindi la probabilità di avere urti risulti molto ridotta ( $p_{ds} = \frac{\mu_s}{N} \rightarrow 0$ ), si ottiene che la densità di probabilità della distribuzione è approssimabile a quella Poissoniana:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mathbb{B}}(n, N; p_{ds}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{n!(N-n)!} p_{ds}^n (1 - p_{ds})^{N-n} = \mathbb{P}_{\mathbb{P}}(n; \mu_s) = \frac{\mu_s^n e^{-\mu_s}}{n!} \quad (5)$$

Sostituendo quindi l'espressione trovata in precedenza per  $\mu_s$ , si ottiene che la probabilità di ottenere  $n$  lanci avendo percorso una distanza  $s$  è pari a:

$$p(n, s) = \frac{\mu_s^n e^{-\mu_s}}{n!} = \frac{\mu_s^n e^{-\mu_s}}{n!} = \frac{1}{n!} \left( \frac{s}{\lambda} \right)^n e^{-\frac{s}{\lambda}} \quad (6)$$

Siccome nell'analisi a seguire ci si è interessati solamente della distanza percorsa prima del primo urto, si esplicita il caso che si ottiene per  $N = 0$ :

$$p(0, s) = e^{-\frac{s}{\lambda}} \quad (7)$$

Si osserva quindi che la probabilità  $p(0, s)$  di non avere urti dopo una distanza  $s$  decresce esponenzialmente rispetto ad essa, secondo un fattore di proporzionalità pari al reciproco del libero cammino medio  $\lambda_s$ .

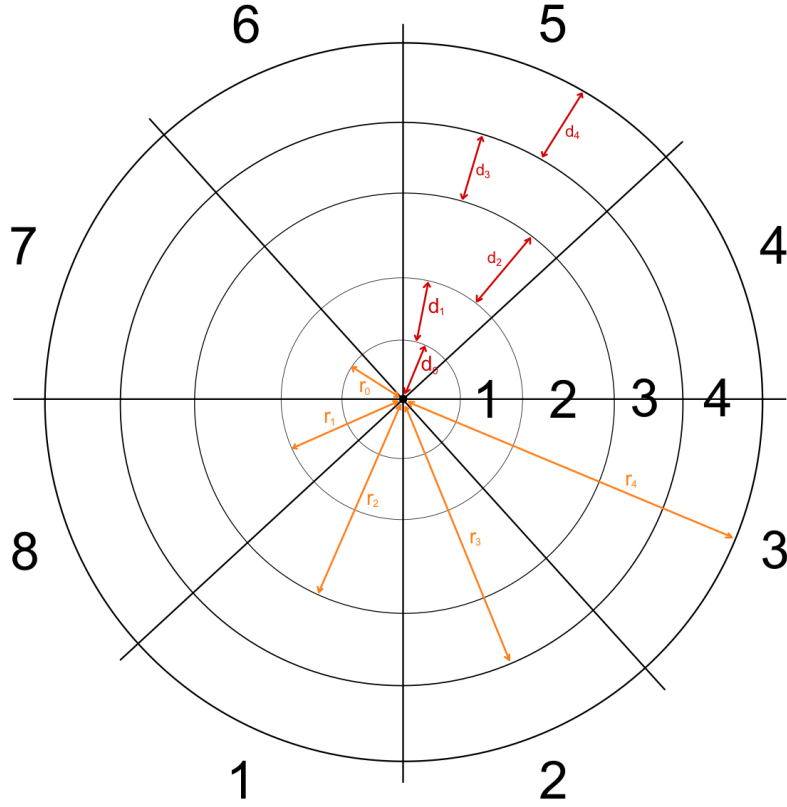
---

<sup>1</sup>Per campionamento grande si intende  $N \geq 50$  e  $p \leq 0.1$ .

## 2 Raccolta dati

Il processo di raccolta dei dati sperimentali è stato naturalmente suddiviso in due *step*: ci si è prima concentrati sulla registrazione di tutte le grandezze necessarie per descrivere l'apparato, per quindi passare ai dati relativi a varie serie di lanci ripetuti.

### 2.1 Descrizione dell'apparato sperimentale



**Figura 1:** Schematizzazione dell'apparato sperimentale, delle distanze  $d_i$  misurate e dei raggi  $r_i$  di ciascuna corona.

L'apparato sperimentale utilizzato per riprodurre il sistema appena menzionato è composto di:

- un piano di legno laminato di forma quadrata: una regione circolare di tale piano è stata costellata di  $N_{tot}$  chiodi di raggio  $r_c$ , che svolgono il ruolo dei centri diffusori.
- un manicotto rotante cavo, utilizzato per fornire una velocità iniziale  $v$  alle biglie che venivano lasciate cadere al suo interno (da una altezza pressochè costante): le biglie in questione, di raggio  $R$ , hanno invece svolto il ruolo delle particelle di gas. Questo è stato possibile per via del fatto che le particelle di gas sono analizzate singolarmente: è pertanto bastato ripetere più volte la procedura di misura con una unica biglia (per tipo), iterando su un numero consistente di lanci per caso analizzato per via dell'approccio statistico utilizzato.

Il valore  $r_c = 0.0008 \pm 0.0002$  m appena menzionato è stato stimato come media di 20 misure effettuate con un calibro, di sensibilità 0.00001 m, e il suo errore corrisponde quindi alla deviazione standard sulla media.

Lo stesso procedimento è stato utilizzato per stimare i raggi  $R_k$  e gli errori  $\sigma_{R_k}$  associati alle due biglie impiegate nelle misure, riportati di seguito:

$R_1 \pm \sigma_{R_1}$	$R_2 \pm \sigma_{R_2}$
$0.0064 \pm 0.0002 \text{ m}$	$0.0074 \pm 0.0002 \text{ m}$

**Tabella 1:** Valori stimati per i raggi delle due biglie, corredati dai rispettivi errori.

È stato possibile stimare i raggi  $r_i$  (con  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ) delle circonferenze che delimitano le corone a partire dalle distanze  $d_i$  visualizzate in figura (1) nel seguente modo:

$$r_i = \sum_{j=0}^i d_j \quad (8)$$

I risultati così ottenuti sono stati corredati da un errore pari alla somma delle sensibilità  $\sigma_{d_i} = \sigma_d$  su ciascun raggio (misurato con un righello di sensibilità  $\sigma_d = 0.001 \text{ m}$ ):

$$\sigma_{r_i} = \sum_{j=0}^i \sigma_{d_j} = (i+1) \sigma_d \quad (9)$$

e sono riportati a seguire:

$d_0 \pm \sigma_{d_0}$	$d_1 \pm \sigma_{d_1}$	$d_2 \pm \sigma_{d_2}$	$d_3 \pm \sigma_{d_3}$	$d_4 \pm \sigma_{d_4}$
$0.04 \pm 0.001 \text{ m}$	$0.043 \pm 0.001 \text{ m}$	$0.094 \pm 0.001 \text{ m}$	$0.097 \pm 0.001 \text{ m}$	$0.152 \pm 0.001 \text{ m}$
$r_0 \pm \sigma_{r_0}$	$r_1 \pm \sigma_{r_1}$	$r_2 \pm \sigma_{r_2}$	$r_3 \pm \sigma_{r_3}$	$r_4 \pm \sigma_{r_4}$
$0.04 \pm 0.001 \text{ m}$	$0.083 \pm 0.002 \text{ m}$	$0.177 \pm 0.003 \text{ m}$	$0.274 \pm 0.004 \text{ m}$	$0.426 \pm 0.005 \text{ m}$

**Tabella 2:** Valori misurati per le distanze  $d_i$  e per i raggi  $r_i$ , corredati dei rispettivi errori.

Queste misure hanno permesso di ricavare le aree corrispondenti alle corone e agli ottanti visualizzati in figura (1).

A partire dalle aree delle corone circolari  $A_i$  (con  $i = 1, 2, 3, 4$ ):

$$A_i = \pi(r_i^2 - r_{i-1}^2) \quad (10)$$

sono state stimate le aree delle singole porzioni di ottante come:

$$A_{ij} = \frac{A_i}{8} \quad \text{con } j = 1, \dots, 8 \quad (11)$$

alle quali sono stati associati il seguente errore:

$$\sigma_{A_{ij}} = \frac{\pi}{4} \sqrt{r_i^2 \sigma_{r_i}^2 + r_{i-1}^2 \sigma_{r_{i-1}}^2} \quad (12)$$

Si riportano di seguito i valori ottenuti:

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$A_{ij} \pm \sigma_{A_{ij}} [\text{m}^2]$	$0.0021 \pm 0.0001$	$0.0096 \pm 0.0004$	$0.017 \pm 0.001$	$0.042 \pm 0.002$

**Tabella 3:** Valori stimati per le aree: i valori  $A_{ij}$  corrispondono alle aree dei  $j$ -esimi ottanti della  $i$ -esima corona (che, per  $i$  fissato, risultano essere equiestese), corredate dei rispettivi errori.

Inoltre, è stato registrato il numero di chiodini presenti in ciascun ottante, in modo da verificarne l'omogeneità. I risultati ottenuti sono riportati in tabella (4), corredati da incertezze Poissoniane  $\sigma_{N_{ij}}$  pari alla radice del numero di chiodini in questione.

$N_{ij} \pm \sigma_{N_{ij}}$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$	$j = 8$
$i = 1$	$1 \pm 1$	$1 \pm 1$	$1 \pm 1$	$2 \pm 1$	$0 \pm 0$	$1 \pm 1$	$1 \pm 1$	$0 \pm 0$
$i = 2$	$1 \pm 1$	$1 \pm 1$	$3 \pm 2$	$1 \pm 1$	$3 \pm 2$	$1 \pm 1$	$2 \pm 1$	$3 \pm 2$
$i = 3$	$4 \pm 2$	$4 \pm 2$	$1 \pm 1$	$4 \pm 2$	$4 \pm 2$	$4 \pm 2$	$5 \pm 2$	$3 \pm 2$
$i = 4$	$6 \pm 2$	$8 \pm 3$	$7 \pm 3$	$10 \pm 3$	$8 \pm 3$	$7 \pm 3$	$9 \pm 3$	$8 \pm 3$

**Tabella 4:** Valori stimati per il numero di chiodini  $N_{ij}$ , corrispondenti ai  $j$ -esimi ottanti della  $i$ -esima corona, corredati dei rispettivi errori  $\sigma_{N_{ij}}$ .

## 2.2 Acquisizione e registrazione dei dati relativi ai lanci

L'apparato sperimentale sopra descritto è stato impiegato per riprodurre il moto di una particella all'interno di un gas perfetto. Per fare questo è stato impiegato il manicotto centrale (di lunghezza  $r_0$ ) per lanciare la biglia in analisi nel sistema bidimensionale, fornendole una velocità iniziale (che si assume essere costante in una stessa serie di lanci).

Sono state effettuate 4 serie di misure, i cui dettagli sono riportati in tabella (5), tutte caratterizzate da numerosi lanci validi: sono stati considerati accettabili solo i lanci che hanno permesso alle biglie di uscire dal piano in analisi, siccome il contrario non avrebbe rispecchiato il modello utilizzato basato su urti elastici.

Serie	n° lanci	raggio biglia	velocità
I	200	$R_2 = 0.0074 \pm 0.0002$ m	intermedia
II	100	$R_2 = 0.0074 \pm 0.0002$ m	elevata
III	100	$R_2 = 0.0074 \pm 0.0002$ m	bassa
IV	100	$R_1 = 0.0064 \pm 0.0002$ m	intermedia

**Tabella 5:** Specifiche relative alle serie di lanci effettuati.

Per ciascuna serie di lanci sono state registrate le quantità seguenti:

- \* Ottante di entrata;
- \* Ottante di primo urto;
- \* Corona di primo urto;
- \* Ottante di uscita;
- \* Numero totale di urti.

Queste informazioni sono state ricavate dalla visione di vari filmati registrati in *slow-motion* e sono state registrate sottoforma di matrici archiviate in *cell-array*, assieme alle specifiche riportate in tabella (5).

### 3 Analisi dati

I dati raccolti sono stati inizialmente analizzati per verificare l'ipotesi che il moto delle biglie sia effettivamente randomico (ovvero che riproduca quello di un gas perfetto).

Una volta confermata l'omogeneità delle distribuzioni è stato stimato il libero cammino medio  $\lambda$  della biglia tramite le due strategie illustrate nell'introduzione teorica.

#### 3.1 Verifica delle ipotesi

La verifica delle ipotesi di omogeneità si è articolata in due fasi: la prima si è focalizzata sulla distribuzione spaziale dei chiodini in modo tale da accertarsi che non esistano zone in cui è più probabile ottenere urti; la seconda fase, invece, si è proposta di analizzare le distribuzioni degli ottanti di entrata e di uscita in modo da verificare un'eventuale presenza di direzioni privilegiate del moto.

##### 3.1.1 Verifica dell'omogeneità della distribuzione di chiodini

La distribuzione spaziale di chiodini è stata trovata a partire dal numero di chiodini  $N$  e dall'area  $A$  considerata, con la seguente formula:

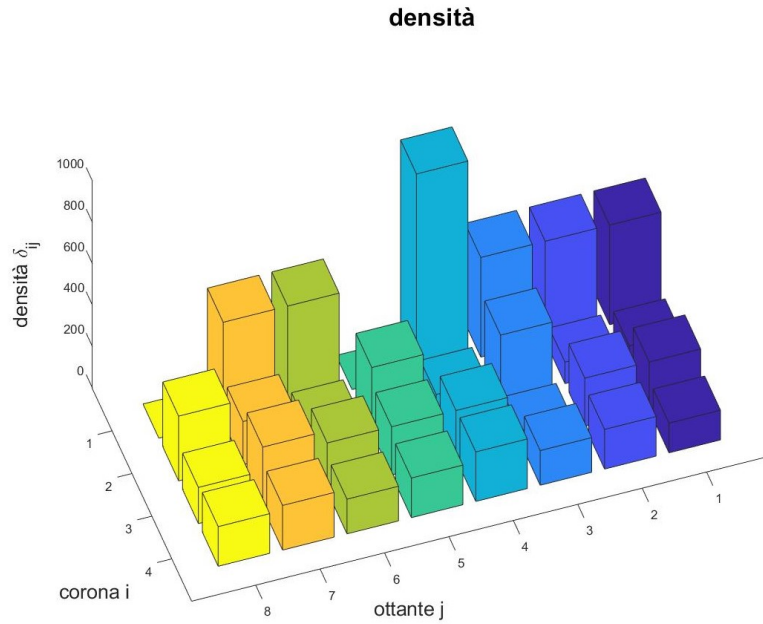
$$\delta = \frac{N}{A} \quad (13)$$

corredata da un'incertezza ottenuta tramite la propagazione degli errori<sup>2</sup>:

$$\sigma_\delta = \sqrt{\sigma_N^2 \frac{1}{A^2} + \sigma_A^2 \frac{N^2}{A^4}} \quad (14)$$

dove  $\sigma_A$  è l'incertezza associata all'area  $A$  e  $\sigma_N$  quella associata al numero di chiodini.

Si rappresentano nella figura a seguire le densità di chiodini ottenuta per ciascuna zona considerata, i cui valori  $\delta_{ij}$  ed incertezze  $\sigma_{\delta_{ij}}$  sono riportati in tabella (6):



**Figura 2:** Rappresentazione grafica delle densità  $\delta_{ij}$  ottenute per ciascuna zona.

<sup>2</sup>vedi 5.3 Appendice: Propagazione degli errori.



$\delta_{ij} [\text{m}^{-2}]$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$	$j = 8$
$i = 1$	$480 \pm 30$	$480 \pm 30$	$480 \pm 30$	$960 \pm 60$	$0 \pm 0$	$480 \pm 30$	$480 \pm 30$	$0 \pm 0$
$i = 2$	$104 \pm 5$	$104 \pm 5$	$310 \pm 10$	$104 \pm 5$	$310 \pm 10$	$104 \pm 5$	$208 \pm 9$	$310 \pm 10$
$i = 3$	$230 \pm 10$	$230 \pm 10$	$58 \pm 3$	$230 \pm 10$	$230 \pm 10$	$230 \pm 10$	$290 \pm 20$	$170 \pm 10$
$i = 4$	$144 \pm 7$	$191 \pm 9$	$167 \pm 8$	$240 \pm 10$	$191 \pm 8$	$167 \pm 8$	$220 \pm 10$	$191 \pm 9$

**Tabella 6:** Densità di chiodini  $\delta_{ij}$  (corrispondenti alla zona appartenente al  $j$ -esimo ottante e alla  $i$ -esima corona) corredati dalle rispettive incertezze  $\sigma_{\delta_{ij}}$ .

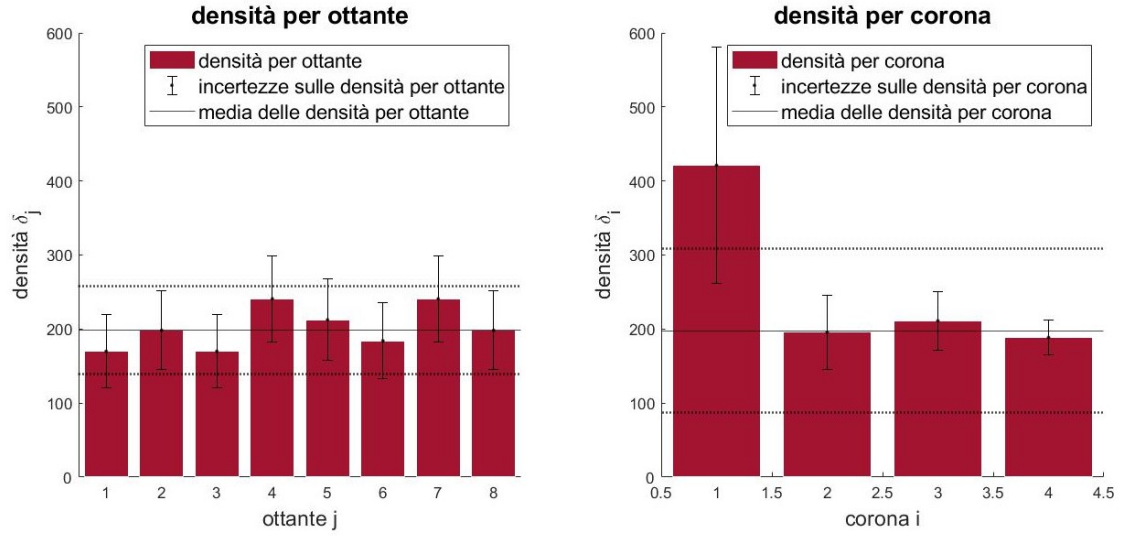
Dalla figura (2) e dalla tabella (6) è possibile osservare che la densità dei chiodini non è spazialmente costante: in particolare si nota una serie di valori particolarmente anomali (per la maggior parte molto elevati) in corrispondenza della prima corona.

Per via di questa apparente asimmetria, si è deciso di analizzare le densità per corona  $\delta_i$  e per ottante  $\delta_j$ , le quali sono state calcolate sfruttando la formula (13) e sono state corredate di un errore ottenuto con l'equazione (14).

Si riportano di seguito, in tabella (7), i risultati così ottenuti, che sono anche stati rappresentati in figura (3).

$\delta_i \text{ [m}^{-2}\text{]}$	$400 \pm 100$	$190 \pm 50$	$210 \pm 40$	$190 \pm 20$				
$\delta_j \text{ [m}^{-2}\text{]}$	$170 \pm 50$	$200 \pm 50$	$170 \pm 50$	$240 \pm 60$	$210 \pm 50$	$180 \pm 60$	$240 \pm 60$	$200 \pm 50$

**Tabella 7:** Dall'alto, si riportano i valori (assieme alle relative incertezze) ottenuti per le densità per corone  $\delta_i$  e per le densità per ottante  $\delta_j$ .



**Figura 3:** Da sinistra rappresentazione delle densità per ottante  $\delta_j$  e per corona  $\delta_i$ , con relativi errori e *fit* (con evidenziata l'area di confidenza a  $3\sigma$ ) per stimare la densità media.

Come è possibile visualizzare in figura (3), a ciascuna delle due serie di dati ottenute  $\delta_k$  è stato affiancato un valore medio trovato da un *fit* (con pesi<sup>3</sup>) dei dati di partenza secondo una retta orizzontale (della forma  $y = q$ ), il cui parametro  $q$  ottimizzato e la cui bontà sono riportati, di seguito, in tabella (8).

<sup>3</sup>vedi 5.4 Appendice: Pesi.

Come estimatore di bontà<sup>4</sup> è stato impiegato il  $\overline{\chi^2}$ , i cui valori sono risultati accettabili (in quanto minori di 1) e hanno quindi permesso di confermare l'ipotesi di compatibilità (di entrambe le distribuzioni di chiodini in analisi) con una distribuzione costante.

	densità media da <i>fit</i>	$\overline{\chi^2}$ di <i>fit</i>	densità con media pesata
per corone $\overline{\delta_i}$	$200 \pm 20 \text{ m}^{-2}$	0.27	$201.25 \pm 0.02 \text{ m}^{-2}$
per ottante $\overline{\delta_j}$	$200 \pm 40 \text{ m}^{-2}$	0.74	$248.50 \pm 0.03 \text{ m}^{-2}$

**Tabella 8:** Da sinistra, si riportano i valori di densità media ottenuti tramite il *fit* della forma  $y = q$  con i relativi estimatore di bontà  $\overline{\chi^2}$ , e i corrispettivi valori teorici ottenuti come media pesata delle densità in tabella (7).

I valori stimati tramite il *fit* lineare sono stati confrontati con una media pesata  $\overline{\delta_k}$  di tutte le corone (per  $k = i$ ) o di tutti gli ottanti (per  $k = j$ ), calcolata come:

$$\overline{\delta_k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k}{\sigma_{\delta_k}^2} \quad \sigma_{\overline{\delta_k}} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_{\delta_k}^2}} \quad (15)$$

I risultati così ottenuti sono stati quindi riportati anch'essi in tabella (8), corredati dal relativo errore sulla media pesata  $\sigma_{\overline{\delta_k}}$ : tali valori ricadono entro 1  $\sigma$  e 2  $\sigma$  (sulla densità media stimata dal *fit*) dalle rispettive stime di densità per corona  $\overline{\delta_i}$  e densità per ottante  $\overline{\delta_j}$  ottenute dai *fit*, e risultano pertanto accettabili.

### 3.1.2 Verifica dell'omogeneità degli ottanti di entrata e di uscita

Il passaggio successivo consiste nel dimostrare un'eventuale presenza di direzioni privilegiate del moto delle biglie nell'apparato sperimentale, che inficierebbero la distribuzione degli ottanti di entrata e degli ottanti di uscita delle biglie rendendola non-uniforme.

Pertanto, per tutte le serie di misure, sono state rappresentate (nelle figure (4) e (5)) le distribuzioni di probabilità di entrata e di uscita per un determinato ottante  $j$ , affiancandole un *fit* secondo una funzione costante  $y = q$ , i cui parametri  $q$  ottimizzati ed estimatori di bontà sono riportati nelle tabelle (9) e (10).

serie	I	II	III	IV
probabilità media da <i>fit</i>	$0.12 \pm 0.01$	$0.11 \pm 0.03$	$0.11 \pm 0.03$	$0.10 \pm 0.04$
$\chi^2$ di <i>fit</i>	0.40	1.70	1.84	2.34

**Tabella 9:** Probabilità media, relativa incertezza ed estimatori di bontà, ottenuti a partire dalle distribuzioni di probabilità degli **ottanti di entrata** (per ciascuna serie di misure), tramite dei *fit* della forma  $y = q$ .

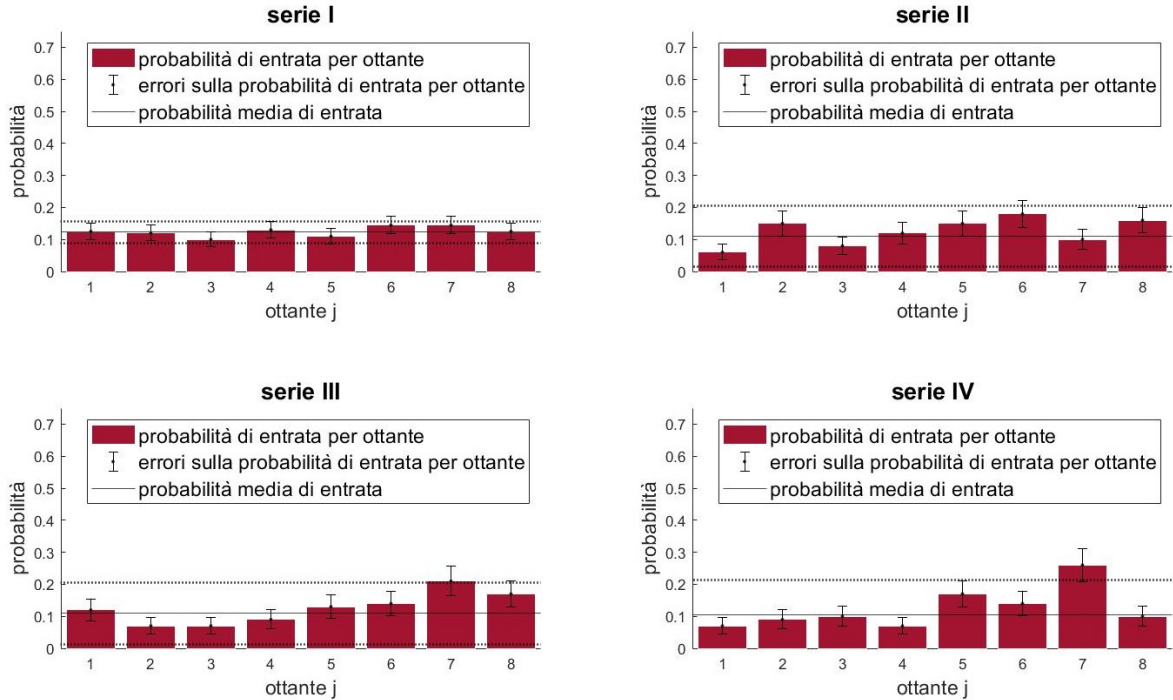
serie	I	II	III	IV
probabilità media da <i>fit</i>	$0.09 \pm 0.01$	$0.05 \pm 0.04$	$0.11 \pm 0.02$	$0.09 \pm 0.02$
$\chi^2$ di <i>fit</i>	0.68	5.87	0.46	0.72

**Tabella 10:** Probabilità media, relativa incertezza ed estimatori di bontà, ottenuti a partire dalle distribuzioni di probabilità degli **ottanti di uscita** (per ciascuna serie di misure), tramite dei *fit* della forma  $y = q$ .

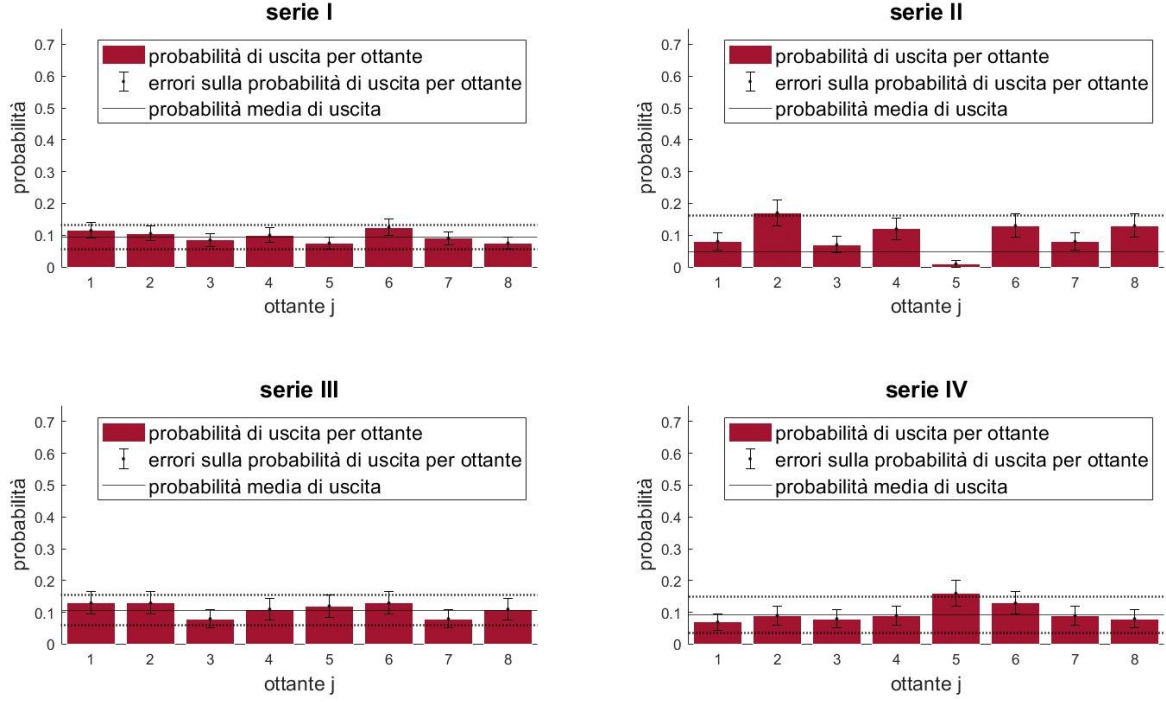
<sup>4</sup>vedi 5.2 Appendice: Test del Chi Quadrato.

A partire dai risultati così ottenuti, riportati nelle tabelle (9) e (10), è possibile osservare che:

- \* tutte le probabilità medie di entrata ricavate tramite i *fit* risultano compatibili, entro  $1\sigma$ , con il valore teorico  $\frac{1}{8} = 0.125$ . Un'ulteriore conferma della correttezza dei *fit* effettuati (e quindi dei valori medi ottenuti) è data dai valori di  $\overline{\chi^2}$ , che sono risultati prossimi al valore di aspettazione 1 e hanno quindi confermato la bontà dell'ipotesi di una distribuzione omogenea;
- \* tutte le probabilità medie di uscita ottenute con i *fit* risultano compatibili, entro  $3\sigma$ , con il valore teorico  $\frac{1}{8} = 0.125$ . Un'ulteriore conferma della correttezza dei *fit* effettuati (e dei valori medi) è data dai valori di  $\overline{\chi^2}$ , che nella maggior parte dei casi sono risultati minori di 1. L'unica eccezione è costituita dal valore di  $\overline{\chi^2}$  ottenuto per la serie II, in corrispondenza di cui si ha anche la minore probabilità media stimata: questo valore è una diretta conseguenza dell'impiego di pesi nel procedimento di *fit*, che risultano maggiormente incidenti al diminuire degli errori da cui sono ricavati. Si deduce quindi che il minimo valore di probabilità media segue da una media pesata in cui hanno influito maggiormente le probabilità più ridotte, caratterizzate pertanto da incertezze minori e da pesi più grandi. Siccome il test di ipotesi in questione risulta falsato, si decide di considerare la compatibilità, entro  $2\sigma$ , del dato ottenuto dal *fit* con il valore teorico. Può quindi essere ritenuta soddisfacente anche la probabilità media stimata nella serie II, confermando così la correttezza dell'ipotesi di una distribuzione omogenea.



**Figura 4:** Rappresentazione delle **probabilità di entrata** per ottante, corredate dalle relative barre di errore e dei valori medi stimati (con zona di accettabilità a  $3\sigma$ ) per ciascuna serie di misure analizzate.



**Figura 5:** Rappresentazione delle **probabilità di uscita** per ottante, con le relative barre di errore e i valori medi stimati (con zona di accettabilità a  $3\sigma$ ) per ciascuna serie.

### 3.2 Calcolo del libero cammino medio

Una volta verificate le ipotesi di omogeneità è possibile passare al calcolo del libero cammino medio attraverso la strategia geometrica, la quale ha permesso di verificare il carattere poissoniano della distribuzione del numero di urti totali, ipotesi essenziale per la stima statistica del libero cammino medio. Le strategie analizzate di seguito sono state illustrate teoricamente nella Sezione 1.

#### 3.2.1 Stima geometrica del libero cammino medio

Per ottenere il valore del libero cammino medio  $\lambda$  attraverso una stima geometrica è necessario considerare la densità di chiodini totale associata all'apparato sperimentale utilizzato:

$$\delta_{tot} = \frac{N_{tot}}{A_{tot}} = 200 \pm 20 \text{ m}^{-2} \quad (16)$$

dove  $N_{tot} = 114 \pm 11$  corrisponde al numero totale di chiodini ed è stato trovato sommando tutti i dati presenti in tabella (4), mentre  $A_{tot} = 0.5651 \pm 0.0002 \text{ m}^2$  corrisponde all'area totale del piano bidimensionale, calcolata sommando i dati riportati in tabella (3).

A partire da questi dati, è stato possibile stimare il valore di libero cammino medio tramite la seguente formula:

$$\lambda = \frac{1}{2\delta_{tot}(R + r_c)} \quad (17)$$

dove  $R$  corrisponde al raggio della biglia utilizzata,  $r_c = 0.0008 \pm 0.0002 \text{ m}$  è il raggio medio dei chiodini utilizzati e  $\delta_{tot}$  è la densità superficiale dei chiodini appena calcolata.

Al valore di libero cammino medio è stato attribuito un errore ottenuto tramite la propagazione degli errori<sup>5</sup>:

$$\sigma_\lambda = \frac{\sqrt{4\delta_{tot}^2(\sigma_R^2 + \sigma_{r_c}^2) + 4(R + r_c)^2\sigma_{\delta_{tot}}^2}}{[2\delta_{tot}(R + r_c)]^2} \quad (18)$$

Poichè nelle serie di misure sono state utilizzate due biglie caratterizzate da raggi diversi, sono state ottenute due stime di  $\lambda$  riportate nella tabella a seguire.

serie	I + II + III	IV
raggio [m]	$R_2 = 0.0074 \pm 0.0002$	$R_1 = 0.0064 \pm 0.0002$
libero cammino medio [m]	$0.30 \pm 0.03$	$0.35 \pm 0.04$

**Tabella 11:** Valori stimati geometricamente per il libero cammino medio, corredati di relativa incertezza.

### 3.2.2 Verifica del carattere poissoniano del numero di urti

Per verificare che la distribuzione del numero di urti totali sia di tipo poissoniano, prima di tutto è necessario calcolare il valore medio  $\mu_s$  della distribuzione del numero di urti<sup>6</sup> corrispondente a ciascuna serie di misure. La formula utilizzata è la seguente:

$$\mu_s = \frac{s}{\lambda} \quad (19)$$

dove  $\lambda$  corrisponde al libero cammino medio (e dipende dalla biglia utilizzata) e  $s$  è la distanza massima percorribile nel piano bidimensionale.

Per trovare il numero medio  $\mu_s$  di urti sull'intero tragitto  $s$  per ciascuna delle due biglie utilizzate, sono stati impiegati i valori di libero cammino medio stimati geometricamente e riportati in tabella (11). I valori trovati sono i seguenti:

$$\mu_1 = \frac{s}{\lambda_1} = \frac{0.39}{0.30} = 1.30 \text{ urti}$$

$$\mu_2 = \frac{s}{\lambda_2} = \frac{0.39}{0.35} = 1.12 \text{ urti}$$

Ora, moltiplicando la distribuzione di probabilità poissoniana per il numero totale di lanci  $N_0$  (per ciascuna serie), si ottengono dei valori  $N_i(n)$  da confrontare (per ciascuna biglia  $i$  utilizzata, cioè per  $i = 1, 2$ ) con la distribuzione del numero di urti riportati in figura (6):

$$N_i(n) = N_0 \cdot \frac{\mu_i^n e^{-\mu_i}}{n!}$$

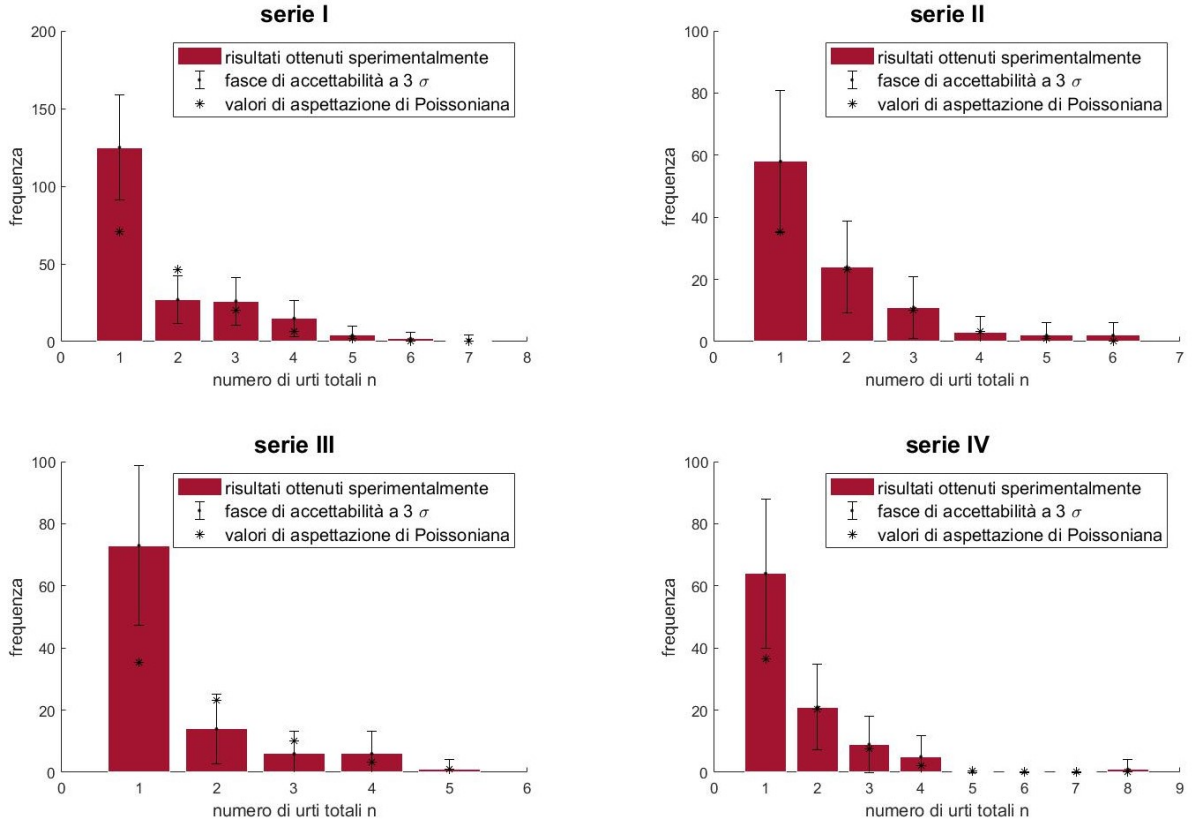
con:

$$N_0 = \begin{cases} 200 & \text{per serie I} \\ 100 & \text{per serie II, III, IV} \end{cases} \quad (20)$$

<sup>5</sup>vedi **5.3 Appendice: Propagazione degli errori**.

<sup>6</sup>come menzionato in precedenza, non sono stati conteggiati lanci di biglie che non sono uscite dal piano bidimensionale.

Le distribuzioni del numero di urti totali per ciascun set di dati considerato sono riportate nella figura seguente:



**Figura 6:** Rappresentazione delle distribuzioni del numero totale di urti, con le relative fasce di accettabilità (pari a  $3\sigma$ ) e i valori di aspettazione della distribuzione poissoniana, per ciascuna serie.

Per verificare la compatibilità tra la distribuzione e i valori teorici è stato calcolato (per ciascuna serie) un valori di  $\chi^2$  utilizzando la sua definizione teorica<sup>7</sup>

$$\overline{\chi^2} = \frac{1}{\text{dfe}} \cdot \sum_{i=1}^n \omega_i^s \cdot (x_i^s - x_i^t)^2 \quad (21)$$

I risultati ottenuti sono riportati nella seguente tabella:

serie	I	II	III	IV
$\overline{\chi^2}$	1.67	0.47	1.47	0.46

**Tabella 12:** Valori di  $\overline{\chi^2}$  stimati attraverso la formula (21).

I valori ottenuti risultano prossimi al valore di aspettazione di 1: pertanto viene confermata l'ipotesi di un comportamento poissoniano del numero di urti totale.

<sup>7</sup>vedi 5.2 Appendice: Test del Chi Quadrato.

### 3.2.3 Stima statistica del libero cammino medio

Per ottenere il valore del libero cammino medio  $\lambda$  attraverso una stima statistica è necessario considerare i dati corrispondenti alla corona di primo urto, in particolare il numero  $N$  di lanci corrispondenti a biglie che non hanno subito urti entro una certa corona a cui si fa corrispondere una distanza netta:

$$s_i = \frac{r_{i+1} + r_i}{2} - r_0 \quad (22)$$

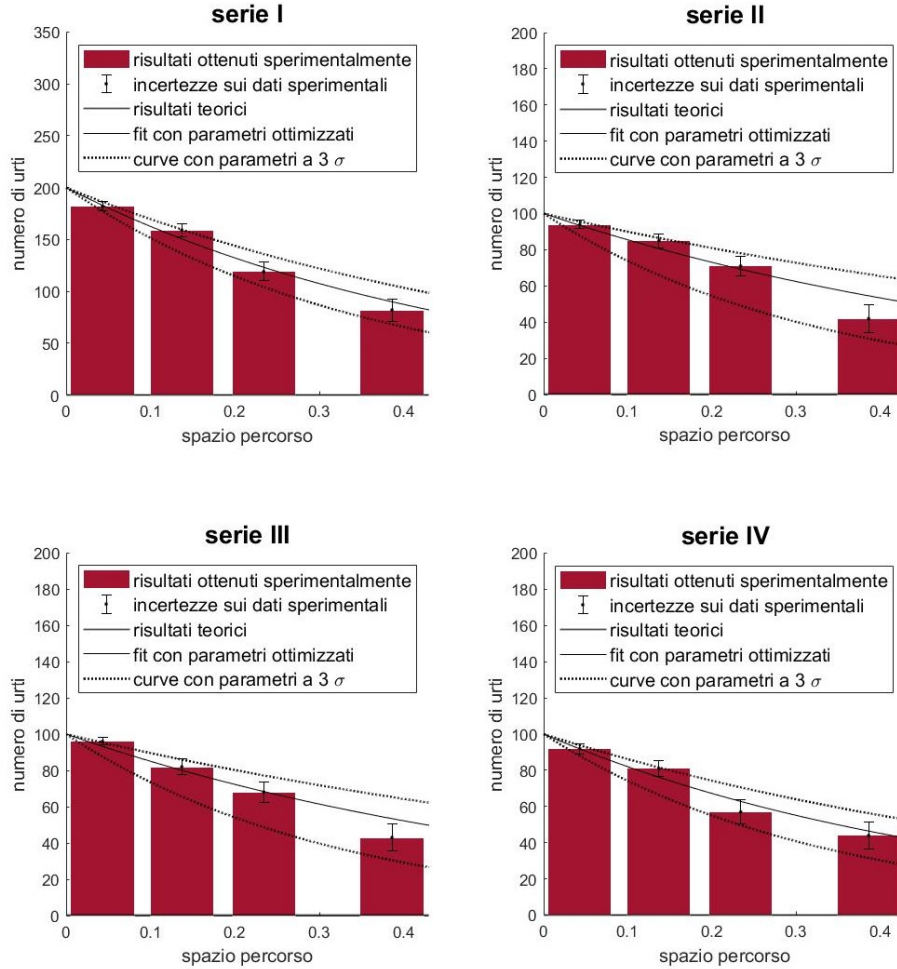
e che hanno una distribuzione:

$$N(s) = N_0 \cdot e^{-\frac{s}{\lambda}} \quad (23)$$

dove  $N_0$  corrisponde al numero di lanci effettuati per ogni set considerato e vale:

$$N_0 = \begin{cases} 200 & \text{per serie I} \\ 100 & \text{per serie II, III, IV} \end{cases} \quad (24)$$

I grafici a seguire rappresentano quindi i lanci sopra menzionati (corredati da errori pari alla radice dei conteggi) in funzione dello spazio percorso: inoltre è rappresentato un *fit* esponenziale della distribuzione volto a stimare il libero cammino medio  $\lambda$  in ciascuna serie analizzata, in base alla relazione (23).



**Figura 7:** Rappresentazione delle distribuzioni del numero di biglie non ancora urtate per spazio percorso, con le relative barre di errore e *fit* esponenziali tramite la formula (23) (con zona di accettabilità a 3  $\sigma$ ).

Dai *fit* eseguiti è stato possibile ricavare il valore di libero cammino medio (con relativo errore) e, per verificarne la bontà, è stato estratto il  $\overline{\chi^2}$  per ciascuna serie analizzata:

serie	I	II	III	IV
libero cammino medio [m]	$0.35 \pm 0.03$	$0.46 \pm 0.06$	$0.44 \pm 0.03$	$0.36 \pm 0.03$
$\chi^2$ di <i>fit</i>	0.84	0.95	0.35	0.44

**Tabella 13:** Valori stimati per il libero cammino medio tramite *fit* esponenziale, corredati di relativa incertezza ed estimatori di bontà, ottenuti a partire dalle distribuzioni di numero di biglie per spazio percorso (prima del primo urto).

In tutti e quattro i casi, il test d'ipotesi è risultato soddisfacente in quanto le stime di  $\overline{\chi^2}$  risultano minori di 1; inoltre i valori di libero cammino medio  $\lambda$  sono tra loro compatibili entro  $2\sigma$  (sul valore massimo ottenuto per la serie II).

## 4 Conclusioni

È stato quindi verificato che non esistono zone o direzioni privilegiate per gli urti: inoltre, è stata confermata l'ipotesi di carattere poissoniano della distribuzione del numero di urti. Pertanto è stato possibile procedere con la stima del libero cammino medio  $\lambda$  secondo le due strategie illustrate teoricamente nella sezione 1.

Per poter confrontare i valori ottenuti nei due metodi, è stato necessario effettuare una media pesata dei valori (corrispondenti alle serie I, II e III) ottenuti statisticamente nel caso del raggio maggiore  $R_2$ ; questo è stato possibile siccome (come già visto nei commenti riguardanti la tabella (13)) i dati distano l'uno dall'altro meno di  $2\sigma$  e risultano quindi compatibili.

Si riportano di seguito il valore così ottenuto e i valori precedentemente ricavati:

serie	I + II + III	IV
raggio [m]	$R_2 = 0.0074 \pm 0.0002$	$R_1 = 0.0064 \pm 0.0002$
$\lambda$ geometrico [m]	$0.30 \pm 0.03$	$0.35 \pm 0.04$
$\lambda$ statistico [m]	$0.392 \pm 0.001$	$0.36 \pm 0.03$

**Tabella 14:** Valori ottenuti per il libero cammino medio  $\lambda$  dai due diversi metodi: si ricordi che, nel caso statistico, il valore corrispondente a  $R_2$  è mediato.

Si osserva che i due metodi non presentano significative differenze nella stima dei valori di libero cammino medio ottenuti, siccome questi sono caratterizzati da errori equiparabili. Infatti, la ragione per cui esiste un valore più preciso (per la stima statistica del caso  $R_2$ ) è legata alla media menzionata in precedenza e non alla strategia utilizzata.

Operativamente, il confronto dei valori di libero cammino medio è avvenuto calcolando gli scarti  $\Delta_i = |\lambda_{g_i} - \lambda_{s_i}|$  presenti tra i due valori (corrispondenti al medesimo raggio  $R_i$ ) e l'errore  $\sigma_{eq_i}$  equivalente ad essi, ottenuto come:

$$\sigma_{eq_i} = \sqrt{\sigma_{g_i}^2 + \sigma_{s_i}^2} \quad \text{con } i = 1, 2 \quad (25)$$

cioè come la somma in quadratura delle varianze  $\sigma_{g_i}^2$  e  $\sigma_{s_i}^2$  dei liberi cammini medi ottenuti dai due metodi.



É stato quindi considerato il rapporto  $Q_i$  tra gli scarti  $\Delta_i$  e i rispettivi errori equivalenti  $\sigma_{eq_i}$ , i cui valori sono riportati a seguire:

serie	I + II + III	IV
raggio [m]	$R_2 = 0.0074 \pm 0.0002$	$R_1 = 0.0064 \pm 0.0002$
$\Delta_i$ [m]	0.09	0.01
$\sigma_{eq_i}$ [m]	0.03	0.05
$Q_i$	3	0.2

**Tabella 15:** Valori ottenuti per il rapporto  $Q_i$  tra gli scarti  $\Delta_i$  e i rispettivi errori equivalenti  $\sigma_{eq_i}$ , per ciascuna biglia considerata (di raggio  $R_i$ ).

É possibile osservare che il rapporto  $Q_i$  appena calcolato corrisponde al numero di deviazioni standard  $\sigma_{eq_i}$  equivalenti ad una distanza pari allo scarto  $\Delta_i$ : pertanto, si osserva che i valori ottenuti per ciascuna biglia risultano compatibili in quanto distanti meno di 3  $\sigma_{eq_i}$ .

Per questa ragione, è stato calcolato un valore medio di libero cammino medio  $\bar{\lambda}_i$  (corredato di un errore pari a  $\sigma_{eq_i}$ ) caratteristico del moto della biglia di raggio  $R_i$ , che è riportato nella tabella seguente:

serie	I + II + III	IV
raggio [m]	$R_2 = 0.0074 \pm 0.0002$	$R_1 = 0.0064 \pm 0.0002$
$\bar{\lambda}_i \pm \sigma_{eq_i}$ [m]	$0.35 \pm 0.03$	$0.36 \pm 0.05$

**Tabella 16:** Valori medi ottenuti per il libero cammino medio  $\bar{\lambda}_i$  caratteristico del moto della biglia di raggio  $R_i$ , corredato di un errore pari a  $\sigma_{eq_i}$ .

Si può quindi concludere che l'esperienza, volta a simulare la dinamica degli urti tra molecole di un gas perfetto, è riuscita in quanto ha permesso di ricavare in modo soddisfacente la quantità caratteristica di tale moto, cioè il libero cammino medio.

## 5 Appendice

### 5.1 Media e relativa incertezza

Sia  $x_i$  un *set* di  $N$  dati. Si definisce *valore medio*:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \quad (26)$$

Inoltre, è possibile attribuire a questo valore un'incertezza pari a:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\text{std}(x_i)}{\sqrt{N}} \quad (27)$$

Dove  $\text{std}(x_i)$  è la *deviazione standard* che può essere calcolata tramite la seguente formula:

$$\text{std}(x_i) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|^2} \quad (28)$$

### 5.2 Test del Chi Quadrato

Il *Test del Chi Quadrato* è un test di verifica delle ipotesi utilizzato in statistica, basato sulla distribuzione del  $\chi^2$ .

Siano un set di dati sperimentali  $\{x^s\}$ , caratterizzati da incertezze  $\{\sigma^s\}$ , e dei valori attesi  $\{x^t\}$ ; si definisce il *Chi Quadrato* come:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^s \cdot (x_i^s - x_i^t)^2 \quad (29)$$

dove i pesi usati nell'equazione precedente possano essere calcolati, a partire dagli errori  $\{\sigma^s\}$ , come:

$$\omega_i^s = \frac{1}{(\sigma_i^s)^2} \quad (30)$$

Il valore utile per la verifica delle ipotesi è però il *Chi Quadrato Ridotto* che viene calcolato come:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{\text{dfe}} \quad (31)$$

dove il numero di *gradi di libertà* dfe si ottiene a partire dal numero di dati considerati  $n_{\text{dati}}$ , dal numero di parametri del *fit*  $n_{\text{par}}$  e dal numero di punti esclusi  $n_{\text{esc}}$ ; la formula, considerati tali parametri, risulta essere:

$$\text{dfe} = n_{\text{dati}} - n_{\text{par}} - n_{\text{esc}} \quad (32)$$

In generale, il valore di aspettazione per questa distribuzione è di 1, pertanto per  $\tilde{\chi}^2 \gg 1$  si può dedurre che la distribuzione sperimentale non segua quella teorica ipotizzata.

### 5.3 Propagazione degli errori

Sia una funzione continua  $f(x_1, \dots, x_n)$  dipendente da  $n$  variabili  $x_1, \dots, x_n$ , caratterizzate rispettivamente da incertezze  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ . Supponendo che tali incertezze possano essere ritenute indipendenti e casuali, è possibile stimare l'incertezza  $\sigma_f$  sul valore di  $f(x_1, \dots, x_n)$  nel seguente modo:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_i^2} \quad (33)$$

### 5.4 Pesi

Data una serie di dati  $\{y_i\}$  e il relativo *set* di incertezze  $\{\sigma_i\}$ , è possibile ricavare i pesi  $\{w_i\}$  da attribuire a  $\{y_i\}$  come:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i^2} & \sigma_i \neq 0 \\ 0 & \sigma_i = 0 \end{cases} \quad (34)$$

## 6 Fonti

1. John R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*, 1999  
(ISBN: 88 0817 656 1)
2. Maria Garetto, *Statistica: lezioni ed esercizi*, 2002