

Legge di Malus

Gruppo IV:

Erica Brisigotti, Emmanuele Lotano, Ylenia Mascolo

Docente:

Prof.ssa Maria Bondani

Assistenti di laboratorio:

Filippo Pallotta
Magda Lucchetta



Laboratorio di Fisica II

Anno accademico 2019/2020

Università degli Studi dell'Insubria

Dipartimento di Scienza ed Alta Tecnologia

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Legge di Malus	3
1.2	Radiazione elettromagnetica e luce polarizzata	4
1.3	Filtro polarizzatore	5
2	Apparato sperimentale	7
2.1	Strumenti di misura	7
2.1.1	Ampiezza "picco-picco" in un oscilloscopio	7
2.2	Descrizione della procedura sperimentale	9
3	Analisi Dati	9
3.1	Rappresentazione e descrizione dei dati	9
3.2	Analisi specifica dei dati forniti	10
3.2.1	Individuazione dell'angolo φ di sfasamento	10
3.2.2	Ulteriore stima di I'_0 tramite <i>fit</i> lineare	14
4	Conclusione	15
5	Appendice	16
5.1	Errore sulla distribuzione rettangolare	16
5.2	Test del Chi Quadrato	16
5.3	Coefficiente di Determinazione	17
5.4	Propagazione degli errori	19
6	Fonti	20

1 Introduzione

1.1 Legge di Malus

L'esperienza illustrata nelle pagine seguenti ha lo scopo di verificare la veridicità della legge di Étienne-Louis Malus (fisico, ingegnere e matematico francese) che scoprì nel 1809 l'effetto di polarizzazione della luce.

Attraverso la misurazione dell'intensità della luce passante tra due filtri polarizzanti, si è in grado di misurare il coefficiente di proporzionalità tra queste due grandezze, che sarà legato all'angolo formato dai piani di trasmissione dei due polarizzatori.

La Legge di Malus, infatti, afferma che:

$$I = I_0 \cdot \cos^2 \theta \quad (1)$$

dove I è l'intensità della luce in uscita dal filtro polarizzato, I_0 è l'intensità della luce in entrata e θ corrisponde all'angolo tra l'asse di trasmissione e il piano di vibrazione del campo elettrico, nonché l'angolo tra le due direzioni di polarizzazione entranti ed uscenti.

Il filtro polarizzatore, infatti, viene attraversato solo dalla componente del campo elettrico parallela all'asse di polarizzazione, che vale:

$$E_{\parallel} = E_0 \cdot \cos \theta \quad (2)$$

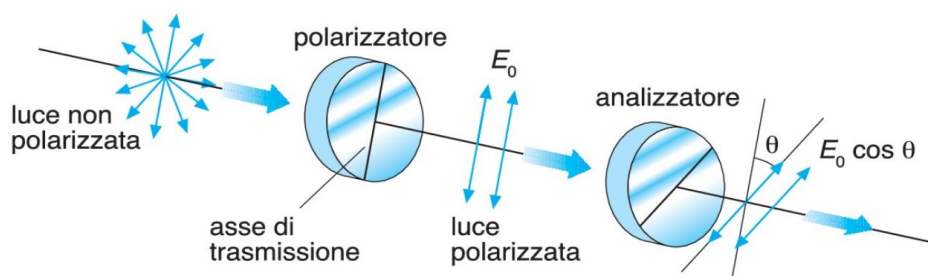


Figura 1: Schematizzazione dell'uso di due filtri polarizzanti con una sorgente di luce che li attraversa.

Il primo filtro polarizzante (o *polarizzatore*) seleziona la componente della luce incidente polarizzata linearmente lungo la direzione dell'asse di trasmissione, mentre la seconda lente polarizzata (o *analizzatore*) è usata per riconoscere lo stato di polarizzazione della radiazione incidente tramite la verifica della legge di Malus.

1.2 Radiazione elettromagnetica e luce polarizzata

Quando consideriamo, come in questo caso, un fascio di raggi luminosi generati da una sorgente di luce, possiamo associare a ciascuno di essi una radiazione elettromagnetica.

Le vibrazioni dell'intero fascio avvengono simultaneamente in tutte le direzioni perpendicolari alla linea di propagazione del raggio luminoso, cosicché se guardiamo all'estremità del fascio vediamo le vibrazioni nelle varie direzioni.

Ciascuna di queste vibrazioni, però, può essere considerata come derivata dalle due componenti nelle due direzioni reciprocamente perpendicolari.

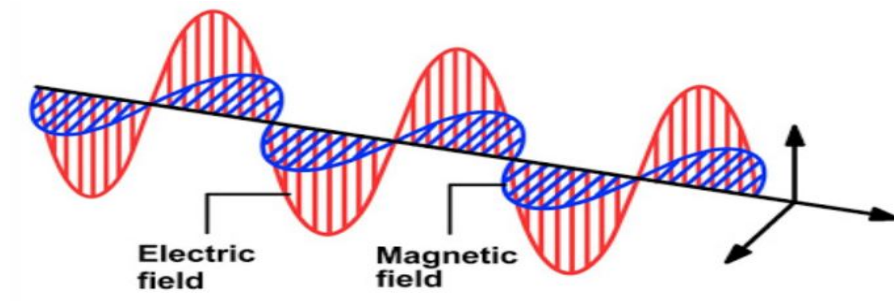


Figura 2: Onda elettromagnetica

La luce polarizzata, quindi, è una luce in cui una delle componenti vettoriali è stata rimossa. La radiazione elettromagnetica risultante si trova quindi in un unico piano, come mostrato in figura *Figura 3*.

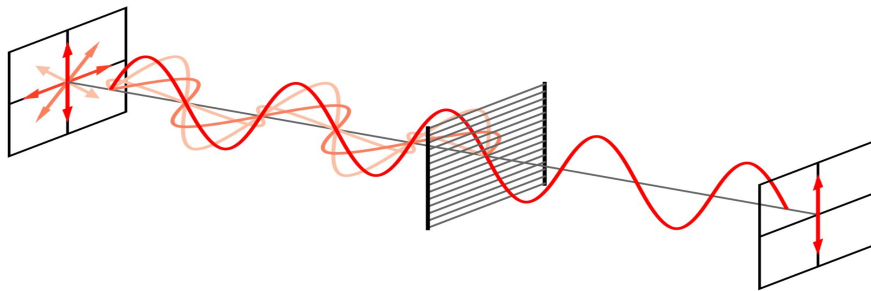


Figura 3: Unica componente della luce polarizzata

1.3 Filtro polarizzatore

Tenendo presenti le considerazioni fatte precedentemente riguardo alla natura della luce, possiamo definire un polarizzatore (anche detto *filtro polarizzante*) come un filtro capace di bloccare la radiazione elettromagnetica a seconda della direzione di oscillazione del campo (detta polarizzazione).

Le proprietà di questi oggetti si basano su una specifica struttura, ottenuta manipolando il materiale in modo tale da allineare artificialmente i polimeri che lo costituiscono.

Il filtro polarizzatore lascia passare solo una precisa polarizzazione piana, dipendente dalla direzione dell'onda incidente rispetto alla polarizzazione del filtro stesso.

Riportiamo qui sotto alcuni esempi significativi:

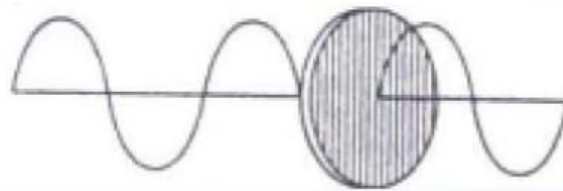


Figura 4: L'onda passa inalterata (onda incidente polarizzata a 0°)

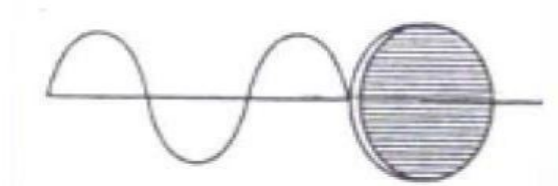


Figura 5: L'onda non passa (onda incidente polarizzata a 90°)

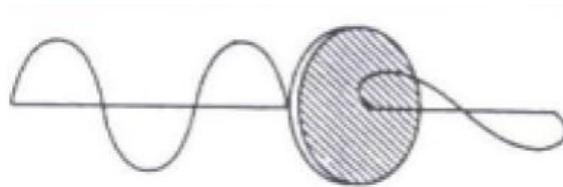


Figura 6: L'onda passa parzialmente (onda incidente polarizzata a 45°)

In conclusione, si avrà massimo passaggio di luce quando entrambi i filtri polarizzanti in serie avranno i piani di polarizzazione paralleli tra loro; al contrario, si deduce che tra due polarizzatori in serie, con piani di polarizzazione perpendicolari tra loro, non può passare alcuna luce perché entrambi i polarizzatori assorbono una delle due componenti di polarizzazione (come mostrato in *Figura 7*).



Figura 7: Filtri polarizzatori perpendicolari tra loro

2 Apparato sperimentale

2.1 Strumenti di misura

Per questo esperimento ci siamo serviti di pochi ma fondamentali strumenti:



Figura 8: Apparato strumentale

Per effettuare le misure è stato necessario disporre di una *sorgente* che emettesse *luce* con intensità sufficientemente costante nel tempo (un laser) e di un fotodiodo collegato ad un *oscilloscopio* capace di visualizzare e registrare il segnale elettrico del sensore.

Sono stati poi montati in sequenza *due filtri polarizzatori*, di cui il secondo montato su supporto rotante, i quali hanno permesso di effettuare rapidamente misure con un buon grado di precisione.

Per misurare l'angolo fra le direzioni di trasmissione dei due filtri polarizzatori si usufruiva della *scala goniometrica* solidale con il supporto rotante del secondo filtro polarizzato.

2.1.1 Ampiezza "picco-picco" in un oscilloscopio

L'oscilloscopio è uno strumento di misura elettronico che consente di visualizzare e registrare (su un grafico bidimensionale) l'andamento nel tempo della differenza di potenziale (nel nostro caso prodotta dal fotodiodo), utile ad esempio per la valutazione di correnti, potenze ed energie. Naturalmente, è possibile poi considerare tutte le diverse funzionalità dello strumento regolandole tramite un apposito pannello di controllo.

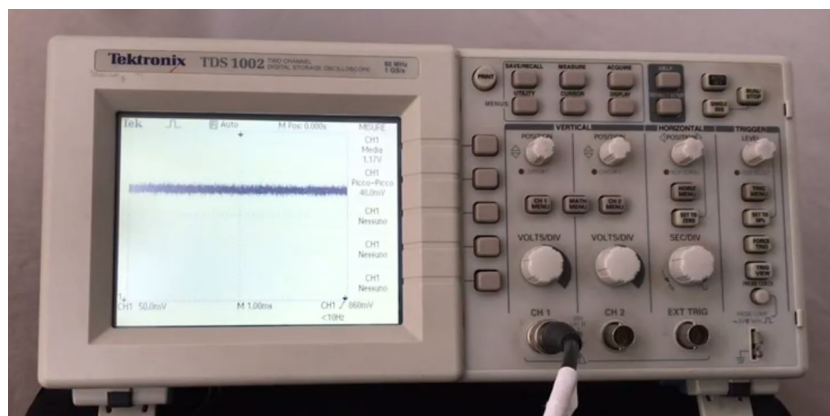


Figura 9: Traccia di una luce continua di un generico laser

In base alle impostazioni selezionate sul pannello di controllo, è possibile visualizzare a schermo una serie di grandezze caratteristiche del segnale. Tali grandezze sono funzione della *differenza di potenziale entrante* (rappresentata sull'asse verticale) e del *tempo* (rappresentata sull'asse orizzontale).

In tutti i casi, è stato registrato il *valor medio* della differenza di potenziale, siccome esso non varia nel tempo.

Nei primi due casi (*vedi in seguito Figura 11*), questo valore è accompagnato da un relativo valore di *ampiezza picco-picco* che sarà fondamentale per stimare poi un errore sui nostri dati.

Il valore di "ampiezza picco-picco" corrisponde alla differenza tra la massima cresta (massimo valore di ampiezza) e il minimo ventre (valore di ampiezza più basso, anche negativo) dell'onda.

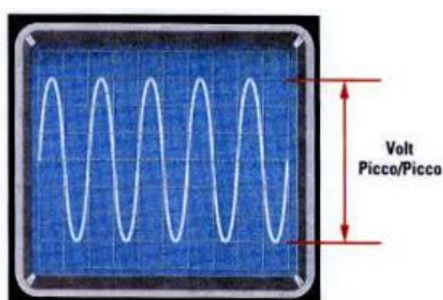


Figura 10: Ampiezza Picco-Picco

Per l'ultimo caso (*vedi in seguito Figura 12*), invece, non è stato registrato questo dato ma la misura è stata ripetuta più volte per compensare l'assenza di questo dato nell'analisi degli errori.

2.2 Descrizione della procedura sperimentale

Per prima cosa si cerca di allineare i due filtri polarizzati ed il rilevatore di intensità luminosa, in modo tale che ciascuno di essi sia disposto perpendicolarmente alla direzione della luce incidente.

E' quindi possibile fissare l'angolo del polarizzatore (definito φ) per misurare al variare dell'angolo dell'analizzatore (definito θ) i valori di intensità polarizzata in uscita.

I dati mostrati in seguito, sono stati ottenuti con quattro valori differenti di φ e ruotando per circa un periodo l'angolo θ .

3 Analisi Dati

3.1 Rappresentazione e descrizione dei dati

Rappresentiamo i dati originali fornitici che, come detto in precedenza, sono le intensità uscenti dall'analizzatore in funzione dell'angolo θ .

Le prime due misure (che chiameremo M11 e M20) sono state accompagnate da un valore di "ampiezza picco-picco", rappresentato come barra d'errore sui dati a seguire, da cui stimare l'errore.

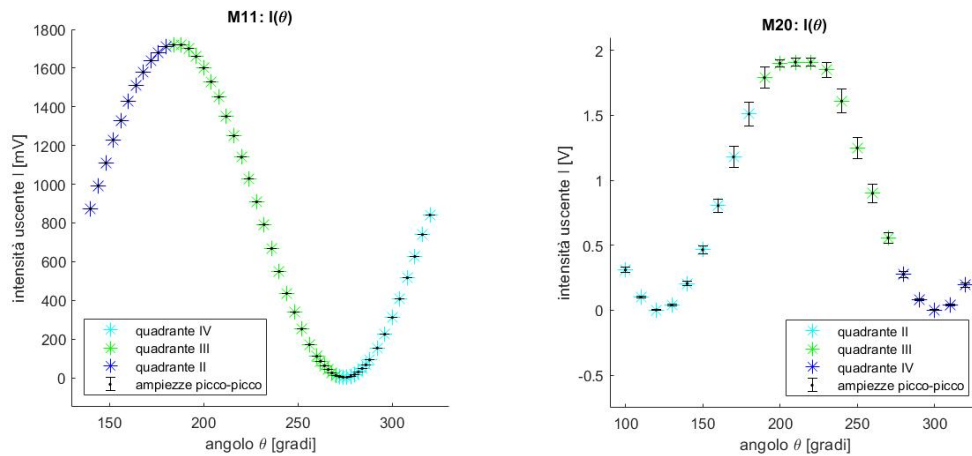


Figura 11: sono rappresentate le intensità uscenti dall'analizzatore al variare dell'angolo relativo θ dotate di un barra d'errore, pari al relativo valore di ampiezza picco-picco.

E' stata fornita, invece, un'ulteriore serie di misure (a cui ci riferiremo con M30) costituita da quattro diversi valori misurati di intensità per ciascuno

angolo θ ; questi dati, però, a differenza di quelli precedenti, non presentavano il valore di ampiezza picco-picco.

In figura mostriamo la media delle quattro serie di dati.

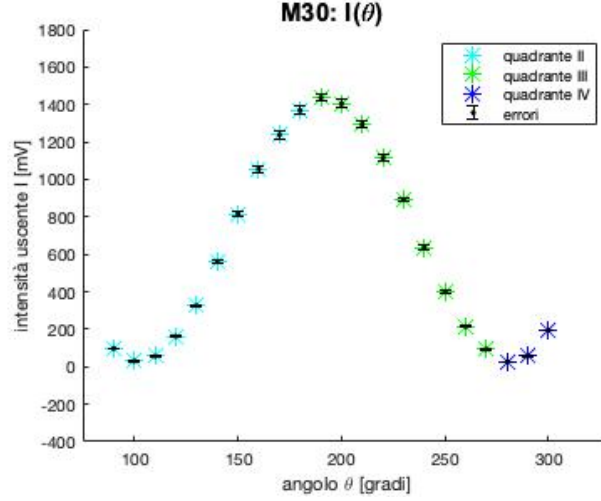


Figura 12: rappresentazione della media dei quattro set di dati forniti dotati di errore sul valore medio.

Per chiarezza rappresentativa abbiamo anche distinto con vari colori i punti appartenenti ai diversi quadranti: in particolare, i dati in *azzurro* ricadono nel II quadrante, i dati in *verde* ricadono nel III quadrante e i dati in *blu* ricadono nel IV quadrante.

3.2 Analisi specifica dei dati fornitici

Grazie alla distinzione in quadranti nelle rappresentazioni precedenti (*vedi Figura 11 e Figura 12*) è stato possibile osservare che gli estremi del coseno non corrispondono ai multipli di π , ma sono sfasati di un certo angolo.

Tale angolo dipende dal set di dati che stiamo analizzando e lo identificheremo con φ dato che rappresenta l'angolo relativo presente tra l'asse del polarizzatore e l'angolo di riferimento (angolo zero) dell'analizzatore.

Nella prossima sezione sarà effettuato un *fit* per stimare il valore di φ , in cui otterremo anche una prima misura dell'intensità entrante.

3.2.1 Individuazione dell'angolo φ di sfasamento

Per prima cosa, per effettuare un *fit* fisicamente significativo, è necessario ricavare i pesi da utilizzare al suo interno.

Essi possono essere calcolati a partire dagli errori sui dati, secondo la formula seguente:

$$w_k = \frac{1}{\sigma_f^2} \quad (3)$$

dove σ_f è l'errore ibrido ottenuto a partire da una serie di errore sull'angolo (σ_θ) e da una serie di errori sui valori di intensità (σ_k).

La relazione che lega queste due grandezze coinvolge anche la tangente nel punto $P = (x, y)$ considerato:

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_k + \tan(P) \cdot \sigma_\theta} = \sqrt{\sigma_k + \frac{y}{x} \cdot \sigma_\theta} \quad (4)$$

Per individuare questi errori, nei primi due casi abbiamo sfruttato la geometria del segnale registrato sull'oscilloscopio per trovare una relazione che legasse gli errori e le ampiezze picco-picco.

Tale formula, si basa sulla possibilità di approssimare il potenziale registrato ad un fronte piatto, di larghezza pari all'ampiezza picco-picco A_k .

L'errore su una distribuzione di questo tipo ¹ è:

$$\sigma_k = \frac{A_k}{\sqrt{12}} \quad (5)$$

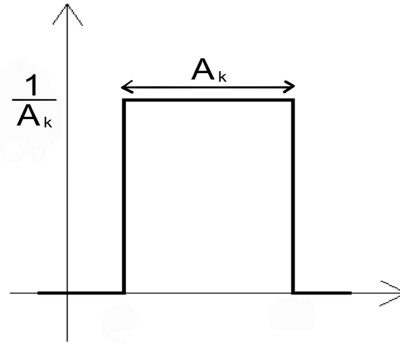


Figura 15: Distribuzione rettangolare

Nell'ultimo caso invece, in cui non ci è stata fornita questa informazione, abbiamo considerato come errore la *deviazione standard* tra le quattro serie di valori.

¹vedi *Appendice: Errore sulla distribuzione rettangolare*

La formula per la *deviazione standard* utilizzata è:

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{j=1}^N |I_{j,k} - \bar{I}_k|^2} \quad (6)$$

dove $j = 1, \dots, N$ si riferisce al set di dati considerato, e dove $N = 4$ è il numero di set di dati confrontati.

Di conseguenza $I_{j,k}$ è il k -esimo valore di intensità registrato nel j -esimo set di dati.

Viene, inoltre, calcolato il *valore medio* ottenuto dalla formula:

$$\bar{I}_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N I_{j,k} \quad (7)$$

che è stata utilizzata per passare da quattro set di dati (nell'ultimo caso *M30*) ad uno unico, che verrà utilizzato per l'analisi vera e propria.

A questo punto, avendo calcolato tutte le grandezze in gioco, possiamo passare all'analisi del *fit* di ciascun set, utilizzando il seguente modello:

$$I_k = I_0 \cdot \cos^2 \left(\frac{2\pi}{360} \cdot (\theta_k + \varphi) \right) + R \quad (8)$$

dove I_0 è l'intensità entrante, φ è l'angolo relativo ed R è il rumore, tutti questi stimati dal set di dati in questione.

Per facilitare la convergenza del *fit*, questo è stato indirizzato tramite i seguenti valori iniziali:

Tabella 1: Valori iniziali per il parametro φ , osservati a partire dalle figure

Serie di dati	φ [gradi]
M11	-4
M20	-30
M30	-10

Inoltre, nel caso di *M20* abbiamo escluso i punti che costituivano il fronte piatto in corrispondenza del picco, siccome i valori elevati di differenza di potenziale saturavano lo strumento di misura (*vedi in seguito Figura 17*).

Per quanto riguarda, invece, i valori iniziali assegnati a I_0 ed R sono stati ricavati direttamente a partire dai dati come:

$$I_0 = \max I_k - \min I_k \quad (9)$$

ed inoltre:

$$R = \min I_k \quad (10)$$

Giunti a questo punto, abbiamo ottenuto i seguenti risultati ricavati direttamente dal *fit*:

Tabella 2: Valori ottenuti

Dati	φ [gradi]	I_0 [mV]	R [mV]	$\tilde{\chi}^2$	\bar{R}^2
M11	-4.58 ± 0.03	1721 ± 1	0.4 ± 0.8	0.8003	0.9998
M20	-31.9 ± 0.1	2069 ± 21	0.6 ± 1	0.9792	0.9984
M30	-11.8 ± 0.2	1418 ± 20	28 ± 1	8.8604	0.9960

In quest'ultima tabella sono stati inoltre riportati i valori del $\tilde{\chi}^2$ e \bar{R}^2 ricavati dal *fit*, che forniscono un'indicazione di quanto i dati risultino aderenti alla funzione ottenuta ².

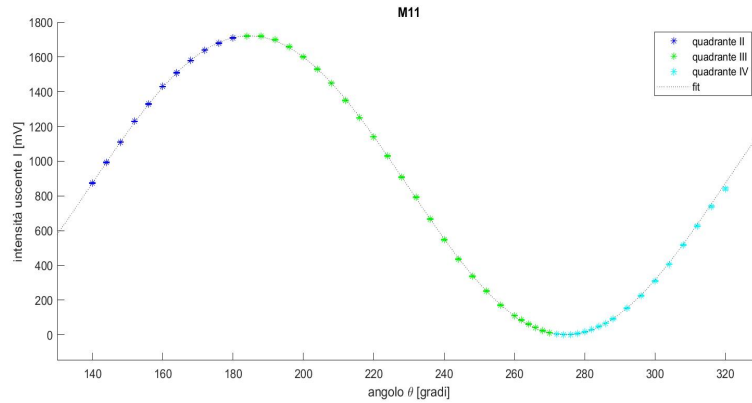


Figura 16: M11: *fit* di $I(\theta)$

²vedi *Appendice: Test del Chi Quadrato* ed *Appendice: Coefficiente di Determinazione*

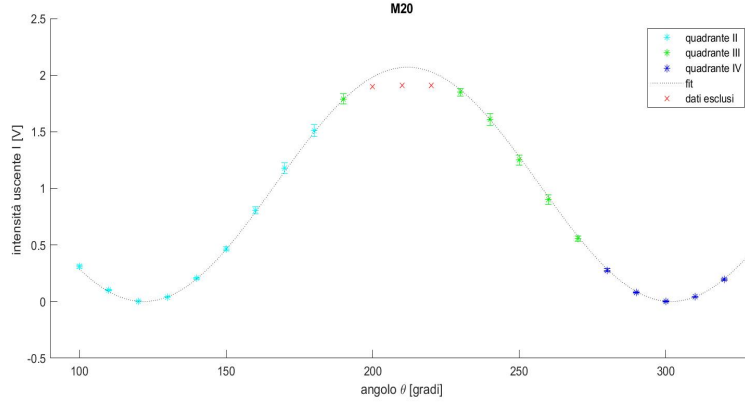


Figura 17: M20: *fit* di $I(\theta)$

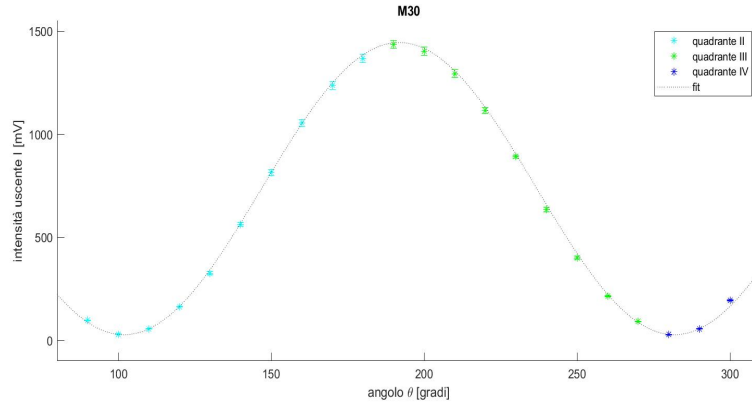


Figura 18: M30: *fit* di $I(\theta)$

3.2.2 Ulteriore stima di I'_0 tramite *fit* lineare

Un'ulteriore stima del valore dell'intensità entrante I'_0 può essere ottenuta tramite un *fit lineare* a partire dalla formula:

$$I_k = I'_0 \cdot x_k + R' \quad (11)$$

dove il valore di x_k può essere determinato dalla seguente relazione:

$$x_k = \cos^2 \left(\frac{2\pi}{360} \cdot (\theta_k + \varphi) \right) \quad (12)$$

Questa strategia può essere utile nel caso in cui gli algoritmi di *fit* non siano particolarmente robusti: in tal caso l'impiego di funzioni trigonometriche

(come messo in pratica nella sezione precedente) può compromettere la convergenza dei dati.

Per la sua semplicità, eseguire un *fit lineare* potrebbe essere conveniente per ricavare con maggiore precisione una stima dei parametri desiderati.

Per fare ciò, come visto in precedenza, si dovrà tener conto di un angolo di sfasamento φ che può essere individuato a partire dal grafico.

4 Conclusione

L'obiettivo di questa analisi dati è stata la conferma della *Legge di Malus*: questo proposito è stato raggiunto tramite dei test di ipotesi sui set di dati in riferimento alla formula in esame. Come vedremo tali analisi si sono rivelate compatibili con il modello.

Nell'analisi dati abbiamo usato due diversi test di ipotesi:

- abbiamo inizialmente considerato il $\tilde{\chi}^2$ per cercare di capire se accettare o rifiutare il modello complessivo, indipendentemente dal set di dati considerato.

Questa nostro proposito, però, non è stata possibile poichè i risultati finali si sono rivelati contrastanti.

Infatti, in entrambe le tipologie di *fit* eseguite, i valori ottenuti per i dati di M30 superano (ma non in modo particolarmente significativo) il valore di aspettazione generico, nonostante i rimanenti quattro valori siano accettabili.

- abbiamo quindi optato per l'utilizzo di un nuovo estimatore di qualità del *fit*, il **coefficiente di determinazione corretto**³ (comunemente indicato con \bar{R}^2), caratterizzato da una maggiore versatilità.

In tutti questi casi, quindi, i valori ottenuti sono risultati prossimi al valore di aspettazione: pertanto il test di ipotesi è risultato efficace e concorde con la conferma della *Legge di Malus*.

³vedi *Appendice: Coefficiente di Determinazione*

5 Appendice

5.1 Errore sulla distribuzione rettangolare

In teoria delle probabilità la distribuzione rettangolare (o continua uniforme) $U(S)$ è una distribuzione di probabilità continua ed uniforme su l'insieme S di definizione.

Pertanto, questa attribuisce a tutti i sottoinsiemi di S con la stessa misura la stessa probabilità di verificarsi.

Nel nostro caso specifico, l'insieme di definizione $S = [a, b]$ è un intervallo di larghezza $(b - a) = A_k$.

La sua densità di probabilità è:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(S)} & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases} \quad (13)$$

dove $\mu(S)$ è la misura dell'insieme S .

Inoltre, il suo *valore di aspettazione* risulta essere:

$$E[U] = \frac{a + b}{2} \quad (14)$$

mentre la varianza può essere ottenuta tramite la formula:

$$\text{Var}[U] = \frac{(a - b)^2}{12} \quad (15)$$

5.2 Test del Chi Quadrato

Il *Test del Chi Quadrato* è un test di verifica delle ipotesi utilizzato in statistica, basato sulla distribuzione del χ^2 .

Siano un set di dati sperimentali $\{x^s\}$, caratterizzati da incertezze $\{\sigma^s\}$, e dei valori attesi $\{x^t\}$; si definisce il *Chi Quadrato* come:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^s \cdot (x_i^s - x_i^t)^2 \quad (16)$$

dove i pesi usati nell'equazione precedente possano essere calcolati, a partire dagli errori $\{\sigma^s\}$, come:

$$\omega_i^s = \frac{1}{(\sigma_i^s)^2} \quad (17)$$

Il valore utile per la verifica delle ipotesi è però il *Chi Quadrato Ridotto* che viene calcolato come:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{\text{dfe}} \quad (18)$$

dove il numero di *gradi di libertà* dfe si ottiene a partire dal numero di dati considerati n_{dati} , dal numero di parametri del *fit* n_{par} e dal numero di punti esclusi n_{esc} ; la formula, considerati tali parametri, risulta essere:

$$\text{dfe} = n_{\text{dati}} - n_{\text{par}} - n_{\text{esc}} \quad (19)$$

In generale, il valore di aspettazione per questa distribuzione è di 1, pertanto per $\tilde{\chi}^2 \gg 1$ si può dedurre che la distribuzione sperimentale non segua quella teorica ipotizzata.

5.3 Coefficiente di Determinazione

Il *coefficiente di determinazione* è una proporzione tra la variabilità dei dati e la correttezza del modello statistico utilizzato.

Di seguito spiegheremo nel caso più semplice (*regressione lineare*) come sia definito e come siano intuitivamente ottenuti i suoi valori di aspettazione. Siano un set di variabili indipendenti (nel nostro caso sono le x_i) e un set di variabili dipendenti (nel nostro caso sono le y_i) che ipotizziamo di poter assimilare ad una retta ($y_r(x) = mx + q$).

Definiamo *devianza totale* TSS come lo scarto quadratico medio dei dati rispetto alla media (\bar{y}):

$$\text{TSS} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (20)$$

Introduciamo, inoltre, il concetto di *devianza residua* RSS come lo scarto quadratico delle variabili dipendenti y_i rispetto ai corrispettivi punti del modello lineare $y_r(x_i)$:

$$\text{RSS} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_r(x_i))^2 \quad (21)$$

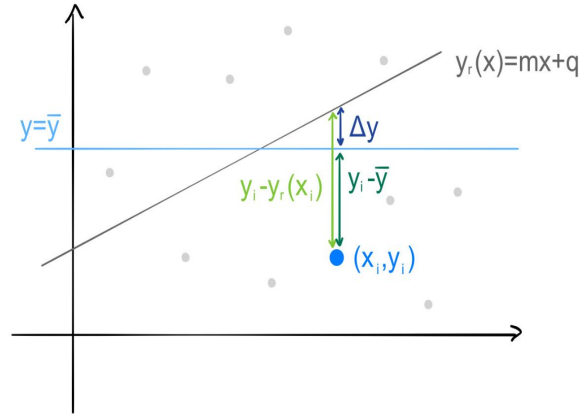


Immagine rappresentativa delle quantità appena considerate:
 si osservi la complementarietà fra $(y_i - \bar{y})$ e Δy , da cui nasceranno le
 prossime considerazioni, dove Δy è la porzione di devianza
 descritta dal modello utilizzato.

Con queste premesse, si definisce *coefficiente di determinazione* il seguente rapporto:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} \quad (22)$$

Siccome la quantità $\frac{\text{RSS}}{\text{TSS}}$ rappresenta la frazione di variazione che dipende dal modello lineare della retta, se tale modello rappresenta correttamente i dati allora il rapporto appena menzionato sarà prossimo a zero ($R^2 \sim 1$).

Una quantità utile collegata a questo concetto è il *coefficiente di determinazione corretto*, che può essere ottenuto secondo la seguente formula:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1} \cdot \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} \quad (23)$$

in cui n corrisponde al numero di punti realmente utilizzati nel *fit* e k al numero di parametri utilizzati nel modello.

Per definizione $\bar{R}^2 \leq R^2$ ed il valore di R^2 varia tra 0 ed 1.

Possiamo, quindi, concludere che:

- tanto più il valore si avvicinerà a 0, sempre meno il modello utilizzato spiegherà i dati in esame;
- quando, invece, il valore sarà prossimo ad 1, il modello risulterà coerente con i dati analizzati.

5.4 Propagazione degli errori

Sia una funzione continua $f(x_1, \dots, x_n)$ dipendente da n variabili x_1, \dots, x_n , caratterizzate rispettivamente da incertezze $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Supponendo che tali incertezze possano essere ritenute indipendenti e casuali, è possibile stimare l'incertezza σ_f sul valore di $f(x_1, \dots, x_n)$ nel seguente modo:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_i^2} \quad (24)$$

6 Fonti

1. John R. Taylor, *Introduzione agli analisi degli errori* , 1999
(ISBN: 88 0817 656 1)
2. Maria Garetto: *Statistica: lezioni ed esercizi* , 2002
3. Khan Academy: *R-squared or coefficient of determination*
4. (English) Wikipedia: *Polarizer* ; *Electromagnetic radiation* ; *Oscilloscope*