

Università degli Studi dell'Insubria  
Dipartimento di Scienze e Alta Tecnologia  
Corso di Laurea Triennale in Fisica

# Stima di $g$ tramite pendolo di Kater

Erica Brisigotti & Ylenia Mascolo



Esame di Laboratorio di Fisica I  
Docente: Prof. Dott. Massimo Luigi Maria Caccia  
Assistente di Laboratorio: Dott.ssa Samuela Lomazzi  
Anno Accademico 2018-2019

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Descrizione del modello teorico . . . . .	3
1.2	Descrizione dell'apparato sperimentale . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Analisi dati</b>	<b>7</b>
2.1	Misure preliminari . . . . .	7
2.2	Calibrazione . . . . .	9
2.3	Misure di precisione e stima di $g$ . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Appendice</b>	<b>13</b>
3.1	Media e relativa incertezza . . . . .	13
3.2	Test del Chi Quadrato . . . . .	13
3.3	Propagazione degli errori . . . . .	14
3.4	Pesi . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Fonti</b>	<b>14</b>

# 1 Introduzione

Lo strumento protagonista di questa esperienza di laboratorio è il pendolo reversibile, il quale fu ideato dal matematico e ingegnere francese Gaspard de Prony e realizzato dal fisico inglese Henry Kater (di cui prese il nome), che lo utilizzò per stimare il valore dell'accelerazione di gravità  $g$ .

In modo analogo a quanto fatto da Kater, questa esperienza di laboratorio è stata finalizzata alla stima del valore di accelerazione gravitazionale  $g$  attraverso l'analisi del moto dell'omonimo pendolo e, in particolare, dei suoi punti di isocronia.

Le leggi che regolano il moto del pendolo di Kater sono state ricavate tramite una schematizzazione come pendolo complesso, che può essere fatto ruotare attorno a due differenti assi di sospensione corrispondenti ai suoi coltelli.

## 1.1 Descrizione del modello teorico

Si consideri un pendolo composto, cioè un corpo solido di massa  $m$  vincolato a ruotare attorno ad un asse di sospensione  $O$ , rispetto al quale il corpo ha un momento di inerzia  $I_O$ .

Il suo moto è regolato dall'equazione del momento assiale:

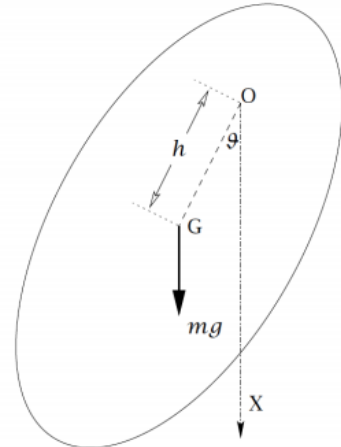
$$\frac{dL}{dt} = M \quad (1)$$

dove  $L$  è il momento angolare e  $M$  è il momento delle forze esterne.

Nel caso del pendolo di Kater, il momento delle forze esterne  $M$  corrisponde semplicemente al momento della forza gravitazionale associata al corpo, la quale è applicata nel centro di massa  $G$  del corpo ed è quindi caratterizzata da un braccio<sup>1</sup> pari  $h \sin(\theta)$ . Pertanto vale che:

$$M = |\vec{F} \times \vec{h}| = -mgh \sin(\theta) \quad (2)$$

dove  $m$  corrisponde alla massa totale del pendolo,  $\theta$  è l'angolo formato dal pendolo con l'asse verticale  $\hat{x}$  mentre  $h$  è la distanza del baricentro  $G$  dall'asse di sospensione  $O$ .



**Figura 1:** Schematizzazione del pendolo come corpo solido.

Come già anticipato, il momento delle forze  $M$  può essere anche calcolato come la derivata temporale del momento angolare  $L$ , che vale:

$$L = I_O \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{dL}{dt} = I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3)$$

Di conseguenza, si ottiene la seguente equazione del moto:

$$I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh \sin(\theta) \quad (4)$$

che lega l'accelerazione angolare  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  e l'angolo  $\theta$ .

<sup>1</sup>Il braccio corrisponde alla distanza (in particolare alla sua porzione nella direzione perpendicolare alla forza) presente tra il punto di applicazione  $G$  della forza e l'asse di rotazione  $O$ .

Si tratta di un'equazione differenziale di secondo grado, omogenea ma non lineare: per poterla integrare è quindi necessario limitarsi a piccole oscillazioni, cioè a valori di ampiezza massima  $\theta_0$  sufficientemente piccola, in modo tale da poter approssimare  $\sin(\theta) \sim \theta$  e da ottenere:

$$I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgh\theta = 0 \quad (5)$$

Inoltre, per il teorema di Huygens-Steiner il momento d'inerzia  $I_O$  rispetto all'asse di rotazione  $O$  può essere scritto come:

$$I_O = I_G + mh^2$$

dove  $I_G$  è il momento di inerzia del corpo attorno all'asse passante per il suo baricentro  $G$ . Sostituendo la relazione nella formula (5) si ottiene che:

$$(I_G + mh^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgh\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_G + mh^2}\theta = 0 \quad (6)$$

La formula così ottenuta corrisponde all'equazione differenziale tipica di un moto armonico per l'angolo  $\theta$ , caratterizzato da pulsazione:

$$\Omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_G + mh^2}} = \sqrt{\frac{g}{l^*}} \quad (7)$$

dove  $l^*$  è la lunghezza ridotta del pendolo, introdotta per analogia con il pendolo semplice (come la lunghezza del pendolo semplice isocrono a quello composto in analisi). Questa vale:

$$l^* = \frac{I_G + mh^2}{mh} = \frac{I_G}{mh} + h \quad (8)$$

Dalle due equazioni relative ad  $\Omega$  e  $l^*$  è quindi possibile ricavare un'espressione per l'accelerazione gravitazionale  $g$ :

$$g = \Omega^2 l^* \quad (9)$$

Tuttavia la stima diretta di  $g$  a partire da questa formula risulta ardua in quanto la lunghezza ridotta  $l^*$  del pendolo composto dipende dal valore di momento d'inerzia  $I_G$ , che non risulta facilmente misurabile o calcolabile per un corpo di forma così complessa.

Per ovviare questo problema si considera la proprietà, caratteristica del pendolo di Kater, di poter ottenere periodi identici considerando le oscillazioni del corpo rispetto ai suoi due assi.

Infatti, il pendolo può oscillare in modo analogo attorno al secondo coltello  $O'$ , il quale dista  $h'$  dal baricentro  $G$  del corpo e sarà quindi caratterizzato da pulsazione:

$$\Omega' = \sqrt{\frac{mgh'}{I_G + mh'^2}} \quad (10)$$

Pertanto, uguagliando i periodi e quindi le pulsazioni dei due moti:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\Omega'} = T \quad \Rightarrow \quad \Omega = \Omega' \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{mgh}{I_G + mh^2}} = \sqrt{\frac{mgh'}{I_G + mh'^2}} \quad (11)$$

è possibile ottenere due valori di distanza  $h'$ , pari a:

$$h' = h \quad , \quad h' = \frac{I_G}{mh} \quad (12)$$

Si nota quindi che è possibile riscrivere l'equazione (8) come:

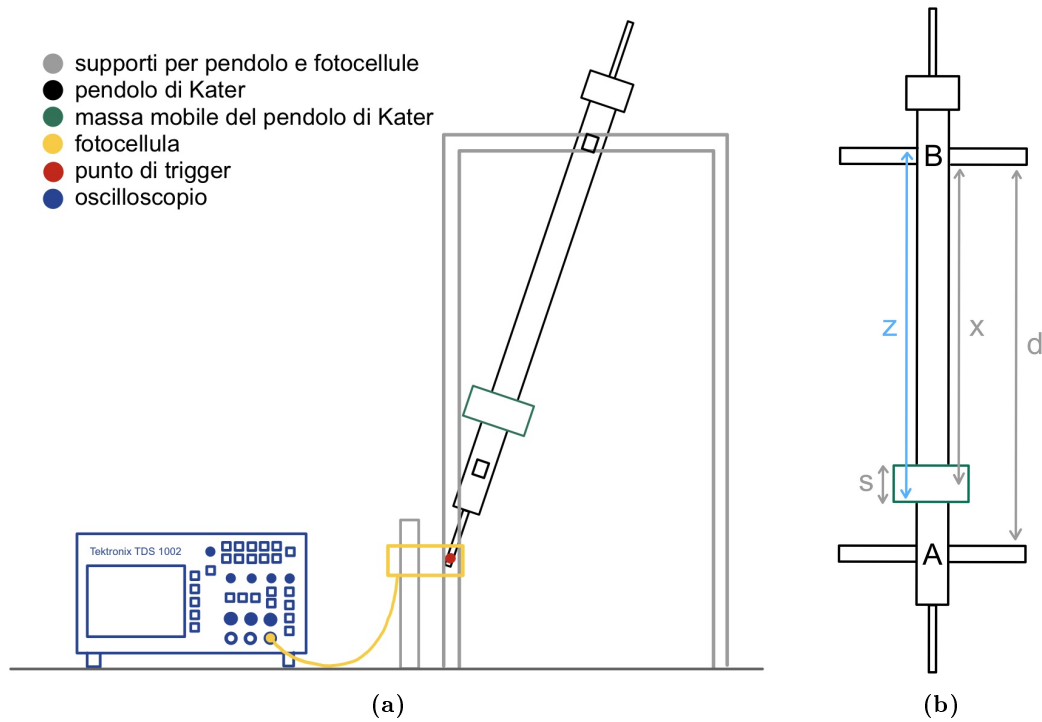
$$l^* = \frac{I_G}{mh} + h = h' + h \quad (13)$$

Si ottiene perciò che la lunghezza ridotta  $l^*$  può essere calcolata come la somma delle distanze  $h$  e  $h'$  (presenti tra il baricentro e i punti di sospensione  $O$  e  $O'$ ) in condizione di isocronia, ed che è quindi possibile stimare il valore dell'accelerazione gravitazionale  $g$  come:

$$g = \frac{4\pi^2 l^*}{T_{iso}^2} \quad (14)$$

con  $T_{iso} = T = T'$  periodo di isocronia.

## 1.2 Descrizione dell'apparato sperimentale



**Figura 2:** Da sinistra, rappresentazione dell'apparato sperimentale utilizzato (a) e del pendolo di Kater (b) (con indicate le misure  $z$ , le distanze  $d, s$  e quelle che saranno le ascisse  $x$  dei grafici nelle sezioni a seguire).

Per eseguire le misure sperimentali sono stati utilizzati i seguenti strumenti, schematizzati in figura (2):

- un calibro Palmer, caratterizzato da sensibilità  $\sigma_c = 0.01$  mm, che è stato sfruttato per ottenere le posizioni  $x$  della massa a partire dal *pivot* B: per ottenere le distanze  $x$  desiderate a partire dalle misure  $z$  effettuate con il calibro (vedi figura (2b)) è stato necessario sottrarre il diametro  $p = 11.08 \pm 0.01$  mm del coltello B e metà dello spessore  $s = 19.42 \pm 0.01$  mm della massa mobile:

$$x = z - p - \frac{1}{2}s \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = 3\sigma_c = 0.03 \text{ mm} \quad (15)$$

- un pendolo di Kater, formato da una barra di metallo dotata di due coltelli (o *pivot*) adatti per essere utilizzati come perni attorno a cui far ruotare oscillando il corpo: la distanza (misurata tramite un calibro Palmer tra i punti più interni dei due coltelli) vale  $d = 221.82 \pm 0.01$  mm. Tra i due *pivot* è presente una massa mobile che permette di modificare la posizione del baricentro e quindi il momento d'inerzia del pendolo: nell'esperienza che verrà di seguito descritta, lo spostamento della massa mobile permetterà di variare il periodo di oscillazione registrato, fino ad individuare la condizione di isocronia. Risulterà però possibile che i punti di isocronia non siano direttamente misurabili in quanto corrispondenti a distanze non raggiungibili dai coltelli: il baricentro ricade infatti nel punto medio della massa mobile, che può assumere posizioni (misurate a partire dai punti più interni dei due coltelli) nell'intervallo  $\frac{1}{2}s < x < d - \frac{1}{2}s$ , cioè sono limitate dallo spessore  $s$  della massa e dalla distanza  $d$  presente tra coltelli (tra i quali la massa è obbligata a muoversi);
- una fotocellula a raggi infrarossi, utilizzata per registrare i periodi di oscillazione del pendolo e collegata ad un oscilloscopio: l'interruzione (*trigger*) del raggio infrarosso da parte del prolungamento (coda) del pendolo viene infatti comunicata all'oscilloscopio da cui è possibile ottenere il periodo;
- un oscilloscopio *Tektronix TDS1002* elettronico che consente di visualizzare e registrare l'andamento temporale dei segnali (tensioni) prodotti dalla fotocellula utilizzata, collegata tramite appositi connettori. Le grandezze registrate possono essere visualizzate sotto forma di grafici bidimensionali; inoltre, le diverse funzionalità dello strumento sono regolabili tramite un apposito pannello di controllo.

Una funzionalità essenziale per la presa dati di questa esperienza risulta essere la possibilità di variare la sensibilità  $\delta$  di registrazione dell'oscilloscopio fino ad un valore minimo di  $0.1 \text{ ms} \leq \delta$ . A partire dalla sensibilità<sup>2</sup>  $\delta$  utilizzata nell'oscilloscopio, è possibile trovare l'incertezza sulle misure come:

$$\sigma = \frac{2\delta}{\sqrt{12}} \quad (16)$$

cioè schematizzando il segnale della fotocellula con una distribuzione rettangolare, la cui larghezza corrisponde al periodo e sarà caratterizzata da incertezza pari al doppio della sensibilità  $\delta$  utilizzata (siccome il periodo è identificato posizionando i due cursori dell'oscilloscopio in corrispondenza dei *trigger* e corrisponde quindi alla differenza tra i corrispondenti istanti di tempo). In alternativa, l'incertezza sulle misure di periodo  $\sigma$  può essere calcolata come:

$$\sigma = \frac{2\Delta_t}{R} \quad (17)$$

dove  $\Delta_t$  è la larghezza dell'ampiezza dell'intervallo visualizzato mentre  $R = 2048$  è il numero di campionamenti<sup>3</sup> questo è legato al metodo di salvataggio, che destina un certo numero di bit a quanto raccolto nella schermata visualizzata dall'oscilloscopio.

Il valore di incertezza  $\sigma$  sarà quindi individuato, nella fase di calibrazione (necessaria per ottenere stime soddisfacenti dell'accelerazione gravitazionale), come:

$$\sigma = \max\left(\frac{2\delta}{\sqrt{12}}, \frac{2\Delta_t}{R}\right) \quad (18)$$

in modo tale da evitare di sottostimare gli errori.

---

<sup>2</sup>Per sensibilità  $\delta$  si intende la minima variazione, visualizzabile sull'interfaccia dell'oscilloscopio e rilevabile con le manopole utilizzate per misurare gli istanti di passaggio per il *trigger* e quindi il periodo.

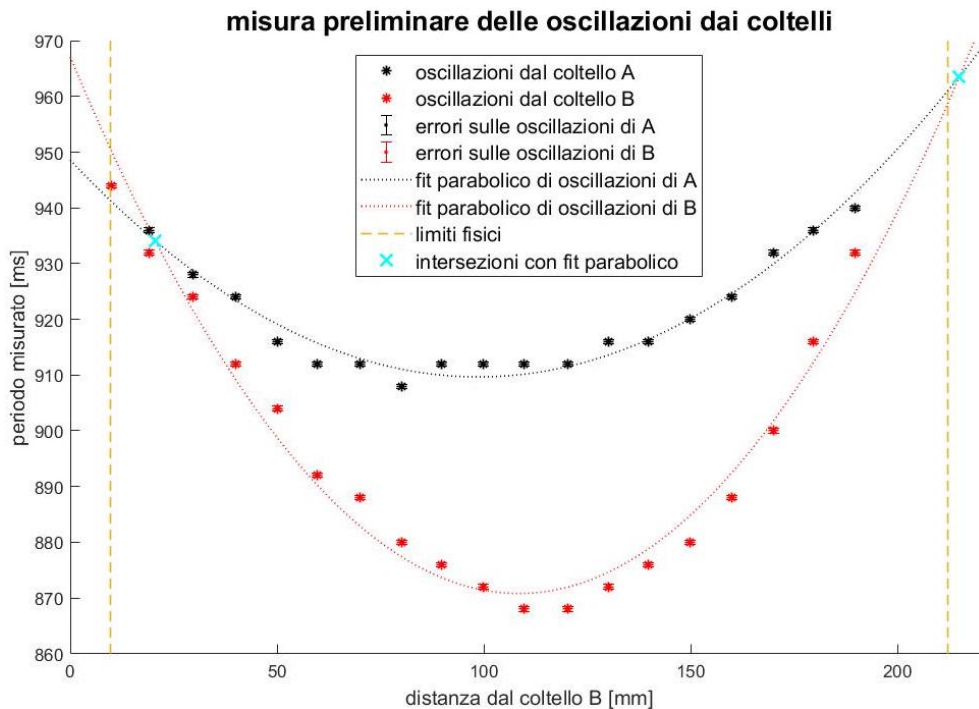
<sup>3</sup>Le specifiche relative all'oscilloscopio sono state prese dal *datasheet* fornito dalla casa produttrice.

## 2 Analisi dati

Vista la variabilità data dall'utilizzo dell'oscilloscopio, la presa e analisi dati si sono articolate in più fasi: innanzitutto si è indagato il comportamento dei periodi  $y$  di oscillazione in funzione della distanza  $x$  della massa da uno dei coltelli, prendendo misure preliminari che comprendano l'intero *range* di distanze fisicamente raggiungibili. Una volta identificate le zone da analizzare in modo più approfondito, si indagheranno le modalità di misura più adatte per registrare correttamente i dati; infine, questi ultimi sono stati quindi analizzati per ricavare i punti di isocronia e quindi stimare il valore dell'accelerazione gravitazionale  $g$ .

### 2.1 Misure preliminari

Utilizzando l'apparato strumentale descritto nella sezione precedente è stato possibile raccogliere le misure dei periodi di oscillazione  $y$  della massa mobile, relativi ai moti di rotazione attorno ai due coltelli (*pivot*) del pendolo. A tali misure sono corrisposte quelle relative allo spostamento  $x$  del baricentro del pendolo rispetto al *pivot* B: i dati così ottenuti sono stati rappresentati in figura (3).



**Figura 3:** Rappresentazione dei periodi misurati, in funzione delle distanze dal coltello B. I dati in rosso corrispondono alle oscillazioni attorno al coltello B, mentre quelli in nero attorno al coltello A. Si noti, inoltre, che esistono dei limiti fisici nelle misure di distanza effettuabili dovuti allo spessore della massa mobile.

Dalla figura è possibile notare che l'andamento dei dati ricorda quello di una parabola ad asse verticale: per questo motivo si è deciso di effettuare due *fit* di tale forma, volti a stimare i parametri delle curve in questione con l'obiettivo di identificare preliminarmente le due intersezioni corrispondenti alla condizione di isocronia.

Date, infatti, due parabole  $y(x)$  le loro intersezioni possono essere trovate come:

$$\begin{cases} y(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 \\ y(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{\pm} = \frac{-(b_1 - b_2) \pm \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)} \\ \Delta = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) \\ y_{\pm} = a_1x_{\pm}^2 + b_1x_{\pm} + c_1 \end{cases} \quad (19)$$

dove  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  sono i parametri stimati con i *fit* parabolici delle due oscillazioni in esame.

Tali stime sono riportate nella seguente tabella:

	$a$ [ms/mm <sup>2</sup> ]	$b$ [ms/mm]	$c$ [ms]	$\tilde{\chi}^2$
<i>fit</i> 1 (B)	$0.0040 \pm 0.0004$	$-0.79 \pm 0.07$	$949 \pm 3$	4.64
<i>fit</i> 2 (A)	$0.0082 \pm 0.0007$	$-1.8 \pm 0.1$	$967 \pm 6$	18.21

**Tabella 1:** Parametri stimati dai *fit* parabolici, con relativi errori ed estimatori di bontà  $\tilde{\chi}^2$ .

In tabella (1) è stato anche riportato l'estimatore di bontà ottenuto per ciascun *fit*: è possibile osservare che in entrambi i casi i valori non soddisfano a pieno il test effettuato poiché si discostano in modo significativo dal valore di aspettazione di 1. Non ha quindi senso utilizzare i parametri trovati per la stima dell'accelerazione gravitazionale  $g$ . È possibile però sfruttare le informazioni così ottenute, per quanto incerte, per individuare due intervalli di valori in cui è probabile ricadano le intersezioni e quindi i punti di isocronia.

Per fare ciò, sono state quindi utilizzate le formule (19) per calcolare i valori di  $\Delta$  e delle coordinate dei punti di isocronia ( $x_{\pm}, y_{\pm}$ ) riportate nella seguente tabella e corredate da errori:

$$\begin{cases} \sigma_{x_{\pm}} = \frac{1}{2|a_1 - a_2|} \sqrt{\sigma_{b_1}^2 + \sigma_{b_2}^2 + \frac{1}{4\Delta}\sigma_{\Delta}^2 + (x_{\pm})^2(\sigma_{a_1}^2 + \sigma_{a_2}^2)} \\ \sigma_{\Delta} = \sqrt{4(b_1 - b_2)^2(\sigma_{b_1}^2 + \sigma_{b_2}^2) + 16(c_1 - c_2)^2(\sigma_{a_1}^2 + \sigma_{a_2}^2) + 16(a_1 - a_2)^2(\sigma_{c_1}^2 + \sigma_{c_2}^2)} \\ \sigma_{y_{\pm}} = \sqrt{x_{\pm}^4\sigma_{a_1}^2 + x_{\pm}^2(4a_1^2\sigma_x^2 + \sigma_{b_1}^2) + b_1^2\sigma_x^2 + \sigma_{c_1}^2} \end{cases} \quad (20)$$

	$x_{\pm}$ [mm]	$\Delta$ [mm <sup>2</sup> /ms <sup>2</sup> ]	$y_{\pm}$ [ms]
<i>fit</i> 1 (B)	$20 \pm 30$	$0.7 \pm 0.4$	$930 \pm 30$
<i>fit</i> 2 (A)	$200 \pm 40$	$0.7 \pm 0.4$	$960 \pm 70$

**Tabella 2:** Valori di  $\Delta$ ,  $x_{\pm}$  e  $y_{\pm}$  stimati a partire dai *fit* parabolici, con relativi errori.

I dati così ottenuti, seppur molto imprecisi, risultano coerenti con la figura (3), nel supporre che i punti di isocronia si trovino nelle porzioni più esterne dell'asse delle ascisse: pertanto, una volta individuata una strategia efficace di misura, si andranno a raccogliere dati nelle zone adiacenti ai coltelli, nel limite posto dallo spessore della massa mobile.



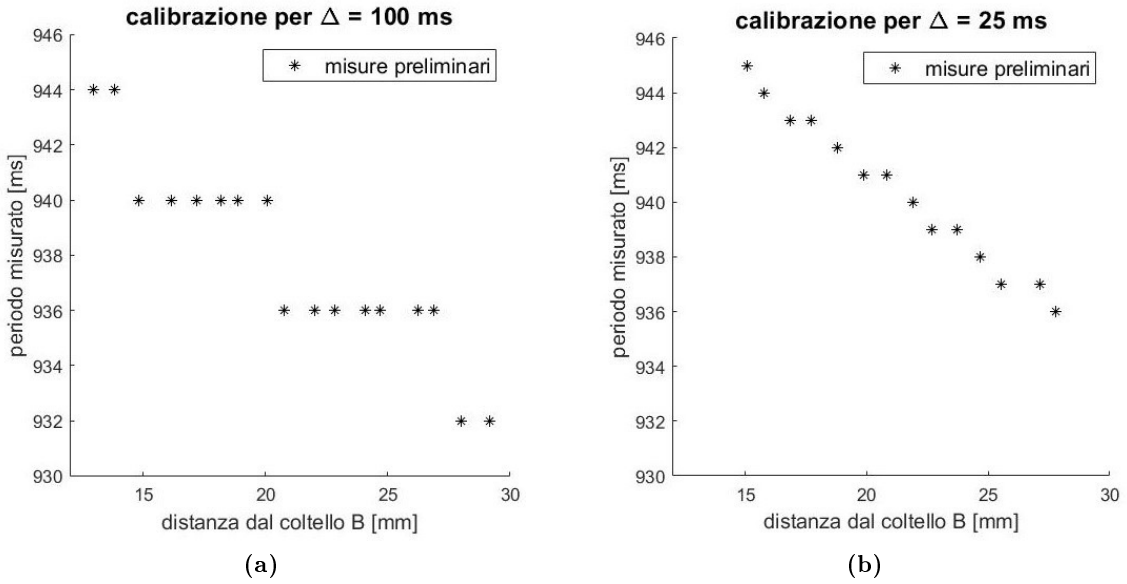
## 2.2 Calibrazione

Prima di poter procedere con le misure definitive, è stato necessario testare i settaggi dell'oscilloscopio per accertarsi di avere una buona precisione  $\sigma$ , necessaria per ottenere un'incertezza il più possibile ridotta sulla stima dell'accelerazione gravitazionale  $g$ .

Infatti, per fare in modo che a ridotte variazioni di distanza  $\sigma_x$  corrispondano altrettante variazioni registrate di periodo  $\sigma_y$ , è necessario che l'oscilloscopio abbia un'appropriata sensibilità  $\sigma$  sulla registrazione dei periodi. La determinazione di tale valore  $\sigma$  si è basata sulla possibilità di approssimare (nelle vicinanze dei punti di isocronia) l'andamento di  $y(x)$  con uno lineare.

Si è quindi partiti da una finestra di larghezza  $\Delta_t = 100$  ms e sensibilità  $\delta = 4$  ms: il grafico così ottenuto, riportato in figura (4a), è risultato però poco soddisfacente in quanto è possibile osservare un comportamento a gradini dei dati, che risulta poco compatibile con una retta.

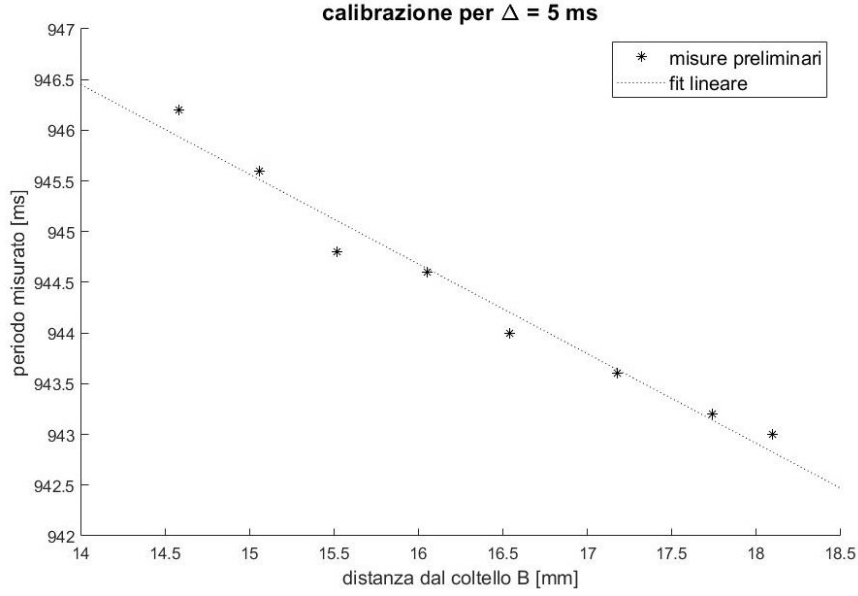
Lo stesso succede quando ci si riduce ad una finestra di larghezza  $\Delta_t = 25$  ms e sensibilità  $\delta = 1$  ms: i dati ottenuti, riportati in figura (4b), presentano un comportamento a gradini meno evidente ma non risultano ancora del tutto soddisfacenti.



**Figura 4:** Rappresentazione dei dati presi (in prossimità della condizione sinistra di isocronia) per i primi due *step* di calibrazione.

Si decide quindi di restringere ulteriormente la finestra in esame ad una larghezza  $\Delta_t = 5$  ms e sensibilità  $\delta = 0.2$  ms: come è possibile osservare a seguire in figura (5), il comportamento a gradini risulta scomparso. Pertanto è finalmente possibile stimare l'incertezza sulle misure di periodo  $\sigma$ :

$$\sigma = \max\left(\frac{2\delta}{\sqrt{12}}, \frac{2\Delta_t}{2048}\right) = \max(0.1, 0.01) = 0.1 \text{ ms} \quad (21)$$



**Figura 5:** Rappresentazione dei dati presi durante l'ultimo *step* della fase di calibrazione, affiancati dal *fit* lineare utilizzato per stimare la quantità ( $m_0$ ) che lega le incertezze sulle ascisse e le ordinate.

Il grafico (5) appena riportato conferma inoltre la presenza di dati assimilabili a delle rette di pendenza  $m_0$  (stimata tramite un *fit* lineare dei dati), che corrisponde anche al legame presente tra le sensibilità  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  sui dati:

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = m_0 \sim -0.88 \pm 0.12 \text{ ms/mm} \quad (22)$$

A partire da questo valore è stato quindi possibile identificare quanto grandi dovranno risultare gli incrementi di distanza  $\sigma_x$  nelle misure definitive, in modo tale che la corrispettiva variazione di periodo  $\sigma_y$  risulti essere maggiore della sensibilità dell'oscilloscopio  $\sigma = 0.1$  ms, e quindi i dati risultino correttamente registrati:

$$\sigma_y = m_0 \sigma_x > \sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma_x > \frac{\sigma}{m_0} \sim 0.1 \text{ mm} \quad (23)$$

Sotto queste condizioni i grafici vengono letti correttamente dall'oscilloscopio: si decide di considerare (per le misure definitive) variazioni di distanza  $\sigma_x = 0.5 \text{ mm} > 0.1 \text{ mm}$ . La ragione principale alla base della scelta di questo valore è la volontà di evitare di dover tenere conto, vista la scala notevolmente ridotta, anche dell'errore di riproducibilità che è stato infatti stimato valere  $0.3 \text{ mm}$  (come la deviazione standard di una serie di 10 valori di distanza  $x$ , che possono essere visti come dei tentativi di posizionamento della massa in uno stesso punto).

### 2.3 Misure di precisione e stima di $g$

Come anticipato alla fine della fase di calibrazione, il passaggio successivo riguarda le misure di precisione: le zone d'interesse trovate in precedenza (in prossimità dei coltelli) sono state campionate imponendo variazioni di distanza pari a  $0.5 \text{ mm}$  e raccogliendo misure, tramite l'oscilloscopio in una finestra larga  $\Delta_t = 5 \text{ ms}$ , caratterizzate da un errore  $\sigma = 0.1 \text{ ms}$  (vedi formula (21)).

I dati ottenuti sono stati quindi rappresentati e analizzati tramite dei *fit* lineari (possibili grazie alla fase di calibrazione), sfruttati poi per stimare con maggiore precisione le coordinate dei punti di isocronia. Il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} y(x) = m_1x + q_1 \\ y(x) = m_2x + q_2 \end{cases} \quad (24)$$

con  $m_1, m_2, q_1, q_2$  parametri stimati dai *fit* lineari e riportati di seguito.

	$m^s$ [ms/mm]	$q^s$ [ms]	$\tilde{\chi}_s^2$	$m^d$ [ms/mm]	$q^d$ [ms/mm]	$\tilde{\chi}_d^2$
<i>fit</i> 1 (B)	$-1.3 \pm 0.2$	$965 \pm 4$	0.27	$2.2 \pm 0.1$	$510 \pm 20$	0.30
<i>fit</i> 2 (A)	$-0.7 \pm 0.3$	$957 \pm 8$	1.22	$0.6 \pm 0.2$	$840 \pm 40$	0.78

**Tabella 3:** Parametri stimati dai *fit* lineari, con relativi errori ed estimatori di bontà  $\tilde{\chi}^2$  per entrambe le serie di dati (relative alle oscillazioni attorno ad A e B). I parametri  $m^s$  e  $q^s$  si riferiscono alle rette della zona a sinistra, mentre  $m^d$  e  $q^d$  si riferiscono alle rette della zona a destra.

Le coordinate dei punti di isocronia, ricavate come soluzione del sistema (24) e corredate dei corrispettivi errori, sono:

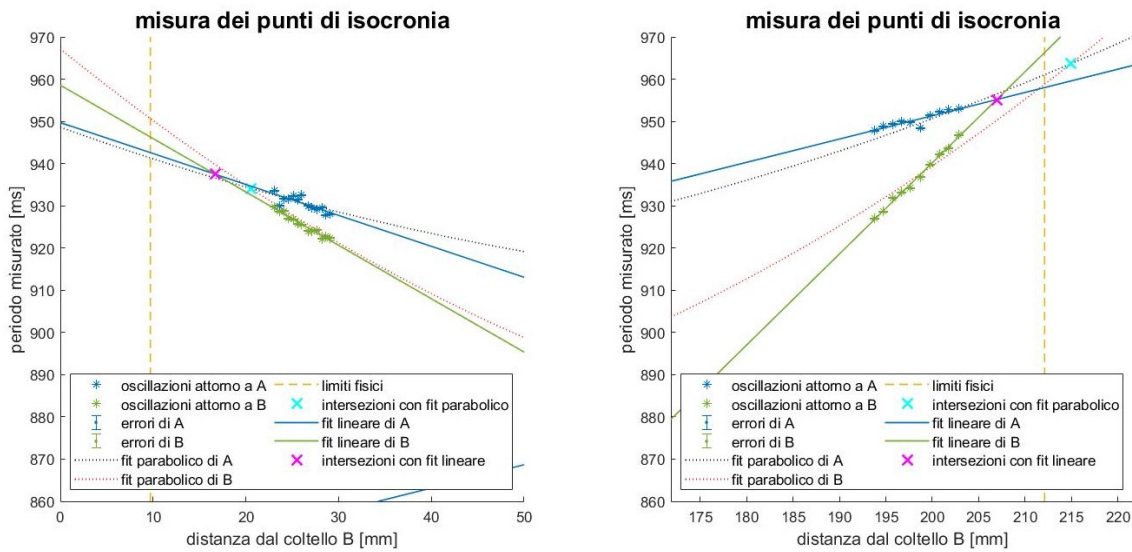
$$\begin{cases} x = -\frac{q_1 - q_2}{m_1 - m_2} \\ y = m_1x + q_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{1}{2|m_1 - m_2|} \sqrt{\sigma_{q_1}^2 + \sigma_{q_2}^2 + x^2(\sigma_{m_1}^2 + \sigma_{m_2}^2)} \\ \sigma_y = \sqrt{x^2\sigma_{m_1}^2 + m_1^2\sigma_x^2 + \sigma_{q_1}^2} \end{cases} \quad (25)$$

Vengono riportate di seguito le coordinate ottenute:

	$x$ [mm]	$y$ [ms]
Intersezione sinistra	$15.31 \pm 0.02$	$945.49 \pm 0.01$
Intersezione destra	$205.81 \pm 0.06$	$953.78 \pm 0.04$

**Tabella 4:** Coordinate dei punti di isocronia ottenute dalle formule (25), con relativi errori.

I grafici relativi alle due intersezioni sono:



**Figura 6:** Rappresentazione dei punti di isocronia trovati come intersezione di due *fit* lineari. I dati sono corredate dai rispettivi errori.

Avendo ricavato due valori distinti di periodo di isocronia, risulta necessario farne una media pesata che sarà impiegata per la stima dell'accelerazione di gravità  $g$ :

$$T = \frac{w_s y_s + w_d y_d}{w_s + w_d} = 0.946 \text{ s} \quad \sigma_T = \frac{1}{\sqrt{w_s + w_d}} = 0.008 \text{ s} \quad (26)$$

dove  $w_s$  e  $w_d$  sono i pesi<sup>4</sup> ricavati dalle incertezze sulle ordinate  $y$  riportate in tabella (4).

Per quanto riguarda la lunghezza ridotta  $l^*$ , questa è stata inizialmente stimata tramite la formula (13), come la somma delle posizioni di isocronia  $x$ , stimate in tabella (4):

$$l^* = x^s + x^d \sim 0.22 \text{ m} \quad \sigma_{l^*} = \sqrt{\sigma_{x^s}^2 + \sigma_{x^d}^2} \sim 0.06 \text{ m} \quad (27)$$

È possibile notare che l'errore  $\sigma_{l^*}$  stimato sulla lunghezza ridotta risulta particolarmente elevato, di conseguenza è stata valutata un'ulteriore strategia che si basa sulla seguente osservazione:

$$l^* = \begin{cases} x^s + x^d \\ (d - x^s) + (d - x^d) = 2d - (x^s + x^d) = 2d - l^* \end{cases} \Rightarrow d = l^* \quad (28)$$

ovvero notando che la lunghezza ridotta  $l^*$  del pendolo deve essere uguale tra le oscillazioni attorno ai due *pivot*, e può essere stimata come la distanza  $d$  tra i due coltelli, che è caratterizzata da un errore pari alla sensibilità del calibro  $\sigma_c = 0.00001 \text{ m}$ :

$$l^* = d = 0.22182 \pm 0.00001 \text{ m} \quad (29)$$

Siccome questo secondo valore ottenuto risulta caratterizzato da una minore incertezza (ed è quindi più preciso), è impiegato a seguire per la stima dell'accelerazione di gravità  $g$ :

$$g = 4\pi^2 \frac{l^*}{T^2} = 9.79 \text{ m/s}^2 \quad \sigma_g = \frac{4\pi^2}{T^2} \sqrt{\sigma_{l^*}^2 + \frac{l^{*2}}{T^2} \sigma_T^2} = 0.08 \text{ m/s}^2 \quad (30)$$

Il valore di  $g = 9.79 \pm 0.08 \text{ m/s}^2$  stimato risulta compatibile con il valore teorico (di  $9.81 \text{ m/s}^2$ ) entro  $1 \sigma$ : ne consegue che l'utilizzo del pendolo di Kater ha permesso di ottenere una corretta stima dell'accelerazione di gravità  $g$ .

---

<sup>4</sup>vedi **3.4 Appendice: Pesì**.

## 3 Appendice

### 3.1 Media e relativa incertezza

Sia  $x_i$  un set di  $N$  dati. Si definisce *valore medio*:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \quad (31)$$

Inoltre, è possibile attribuire a questo valore un'incertezza pari a:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\text{std}(x_i)}{\sqrt{N}} \quad (32)$$

Dove  $\text{std}(x_i)$  è la *deviazione standard* che può essere calcolata tramite la seguente formula:

$$\text{std}(x_i) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|^2} \quad (33)$$

### 3.2 Test del Chi Quadrato

Il *Test del Chi Quadrato* è un test di verifica delle ipotesi utilizzato in statistica, basato sulla distribuzione del  $\chi^2$ .

Siano un set di dati sperimentali  $\{x^s\}$ , caratterizzati da incertezze  $\{\sigma^s\}$ , e dei valori attesi  $\{x^t\}$ ; si definisce il *Chi Quadrato* come:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^s \cdot (x_i^s - x_i^t)^2 \quad (34)$$

dove i pesi usati nell'equazione precedente possano essere calcolati, a partire dagli errori  $\{\sigma^s\}$ , come:

$$\omega_i^s = \frac{1}{(\sigma_i^s)^2} \quad (35)$$

Il valore utile per la verifica delle ipotesi è però il *Chi Quadrato Ridotto* che viene calcolato come:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{\text{dfe}} \quad (36)$$

dove il numero di *gradi di libertà* dfe si ottiene a partire dal numero di dati considerati  $n_{\text{dati}}$ , dal numero di parametri del *fit*  $n_{\text{par}}$  e dal numero di punti esclusi  $n_{\text{esc}}$ ; la formula, considerati tali parametri, risulta essere:

$$\text{dfe} = n_{\text{dati}} - n_{\text{par}} - n_{\text{esc}} \quad (37)$$

In generale, il valore di aspettazione per questa distribuzione è di 1, pertanto per  $\tilde{\chi}^2 \gg 1$  si può dedurre che la distribuzione sperimentale non segua quella teorica ipotizzata.

### 3.3 Propagazione degli errori

Sia una funzione continua  $f(x_1, \dots, x_n)$  dipendente da  $n$  variabili  $x_1, \dots, x_n$ , caratterizzate rispettivamente da incertezze  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ . Supponendo che tali incertezze possano essere ritenute indipendenti e casuali, è possibile stimare l'incertezza  $\sigma_f$  sul valore di  $f(x_1, \dots, x_n)$  nel seguente modo:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_i^2} \quad (38)$$

### 3.4 Pesi

Data una serie di dati  $\{y_i\}$  e il relativo *set* di incertezze  $\{\sigma_i\}$ , è possibile ricavare i pesi  $\{w_i\}$  da attribuire a  $\{y_i\}$  come:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i^2} & \sigma_i \neq 0 \\ 0 & \sigma_i = 0 \end{cases} \quad (39)$$

## 4 Fonti

1. John R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*, 1999
2. Maria Garetto, *Statistica: lezioni ed esercizi*, 2002
3. S. Rosati, *Fisica generale: meccanica, acustica, termologia, termodinamica, teoria cinetica dei gas*, 1994
4. *Datasheet* oscilloscopio elettronico *Tektronix TDS1002*  
(<https://it.rs-online.com/web/p/oscilloscopi/4314729/>)