

# Attrito radente su piano inclinato

## *Gruppo IV:*

Erica Brisigotti, Emmanuele Lotano, Ylenia Mascolo

## *Docente:*

Prof.ssa Maria Bondani

## *Assistenti di laboratorio:*

Filippo Pallotta  
Magda Lucchetta



Laboratorio di Fisica II

Anno accademico 2019/2020

Università degli Studi dell'Insubria

Dipartimento di Scienza ed Alta Tecnologia

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
1.1	Descrizione teorica del fenomeno . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Strumenti di presa dati</b>	<b>6</b>
2.1	Apparato sperimentale . . . . .	6
2.2	Phyphox . . . . .	7
2.3	Tracker . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Analisi dati</b>	<b>10</b>
3.1	Individuazione dell'angolo . . . . .	10
3.2	Legge oraria . . . . .	11
3.2.1	Analisi tramite campo magnetico . . . . .	11
3.2.2	Analisi tramite illuminamento . . . . .	17
3.2.3	Analisi tramite Tracker . . . . .	22
3.3	Stima del coefficiente di attrito dinamico . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>28</b>
<b>5</b>	<b>Appendice</b>	<b>30</b>
5.1	Errore sulla distribuzione rettangolare . . . . .	30
5.2	Media e relativa incertezza . . . . .	30
5.3	Propagazione degli errori . . . . .	31
5.4	Test del Chi Quadrato . . . . .	31
5.5	Coefficiente di Determinazione . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Fonti</b>	<b>34</b>

## **"Try it and see"**

And finally I would like to make a little philosophical argument - this I'm not very good at, but I would like to make a little philosophical argument to explain why theoretically I think that science and moral questions are independent.

The common human problem, the big question, always is "Should I do this?" It is a question of action. "What should I do? Should I do this?" And how can we answer such a question? We can divide it into two parts.

We can say, "If I do this what will happen?" That doesn't tell me whether I should do this. We still have another part, which is "Well, do I want that to happen?".

In other words, the first question - "If I do this what will happen?" - is at least susceptible to scientific investigation; in fact, it is a typical scientific question. It doesn't mean we know what will happen. Far from it. We never know what is going to happen. The science is very rudimentary. But, at least it is in the realm of science we have a method to deal with it.

The method is "Try it and see" - we talked about that - and accumulate the information and so on.

*Richard Feynman, 1963*

Abbiamo deciso di riportare questa breve riflessione di Richard Feynman riguardo il metodo scientifico perché, nel presente lavoro, abbiamo "sperimentato" le stesse sensazioni.

Curiosità ed interesse accendono la scintilla.

Ipotizzare e sperimentare danno la spinta.

Il lavoro del Fisico parte proprio da questo: "Try it and see"

# 1 Introduzione

Questo esperimento ha come obiettivo la valutazione del coefficiente d'attrito dinamico  $\mu_d$  di un piano inclinato con pendenza variabile.

L'acquisizione dei dati è stata effettuata tramite l'utilizzo dei sensori interni ad uno *smartphone*, con l'ausilio dell'applicazione *Phyphox* e del software *Tracker*.

## 1.1 Descrizione teorica del fenomeno

Tramite le leggi della meccanica classica è possibile descrivere il moto di un corpo che scorre, sotto l'effetto del proprio peso, su di un piano inclinato.

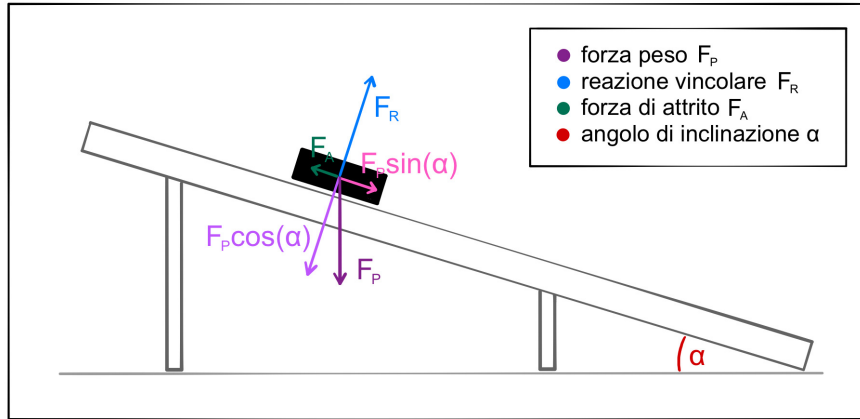


Figura 1: Schematizzazione del piano inclinato

Come mostrato in figura, il corpo è soggetto a diverse forze:

- la forza peso, che dipende dalla massa  $m$  dell'oggetto e dall'accelerazione gravitazionale di modulo  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ :

$$\vec{F}_P = m \cdot \vec{g} \quad (1)$$

- la reazione vincolare  $\vec{F}_R$  che controbilancia la forza premente esercitata dal corpo sul piano;
- la forza d'attrito  $\vec{F}_A$  che dipende dalla forza premente sul piano secondo il coefficiente di attrito radente dinamico  $\mu_d$  relativo ai materiali in contatto durante il moto.

Per il secondo principio della dinamica, tali forze sono legate dalla seguente relazione vettoriale:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_P + \vec{F}_R + \vec{F}_A \quad (2)$$

Introduciamo, quindi, un sistema di riferimento  $(\hat{x}, \hat{y})$  solidale al piano inclinato e specifichiamo le leggi del moto lungo i suoi assi.

$$\begin{cases} \hat{x}: & ma = mg \sin(\alpha) - \mu_d R \\ \hat{y}: & 0 = R - mg \cos(\alpha) \end{cases} \quad (3)$$

Combinando le due equazioni, appena menzionate, è possibile ottenere il coefficiente di attrito:

$$\mu_d = \tan(\alpha) - \frac{a}{g \cos(\alpha)} \quad (4)$$

dove  $\cos(\alpha) \neq 0$  quando l'angolo  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  (con  $k$  intero).

## 2 Strumenti di presa dati

Illustriamo a seguire l'apparato utilizzato per la presa dati che prevede l'impiego di un piano inclinato appositamente creato e di un carrello mobile sul quale è stato possibile posizionare lo *smartphone* con il quale sono state effettuate le misure.



*Figura 2:* Immagini dell'apparato strumentale utilizzato.

### 2.1 Apparato sperimentale

Per la costruzione dell'apparato sperimentale sono stati utilizzati i seguenti materiali:

- **legno**, che è stato impiegato per la realizzazione del piano di appoggio, del binario centrale e dei supporti laterali;
- il **carrello mobile** è stato costruito a partire da un blocco, anch'esso in legno, sul quale è stato montato un supporto per cellulare;
- l'applicazione della **paraffina** nel binario centrale del piano di appoggio è servita per facilitare la discesa del carrello mobile;
- vari **magneti al neodimio** di diametro 30 mm e spessore 5 mm, la cui forza magnetica è stimata essere di 8 Kg. Essi sono stati acquistati a forma di cilindro forato per facilitarne il fissaggio al supporto laterale, in modo tale che l'asse magnetico fosse parallelo al piano inclinato;

- una serie di **led** identici di diametro 5 mm e di potenza 3.6 W, fissati sul supporto laterale opposto al precedente.

L'assemblaggio delle specifiche appena descritte è stato svolto in modo tale da poter variare l'angolo di inclinazione  $\alpha$  del piano di appoggio.

Per evitare di ottenere grandi velocità di discesa, che compromettessero la presa dati, sono stati utilizzati angoli di inclinazione  $\alpha$  discretamente piccoli; anche per questa ragione è stato necessario l'impiego della paraffina, la quale ha proprietà lubrificanti una volta scaldata.

## 2.2 Phyphox

*Phyphox*, acronimo di **PHYsical PHOne eXperiment**, è un'applicazione concepita da *Christoph Stampfer*, del Politecnico di Aachen in Germania che, iniziando a usare i sensori degli *smartphone* per eseguire alcune semplici misure a casa, ne individuò il potenziale didattico.

Gli *smartphone* che utilizziamo quotidianamente sono dotati di un notevole numero di sensori (ad esempio fotocamera, microfono, accelerometro, giroscopio, magnetometro, etc...) che possono essere utilizzati come veri e propri strumenti di misura scientifica.



Figura 3: Schematizzazione dei sensori in uno *smartphone*.

Nella schermata iniziale dell'applicazione è possibile scegliere il tipo di misura da effettuare; in alcuni *smartphone*, però, non sono presenti dei sensori e di conseguenza l'utilizzo dell'applicazione è purtroppo limitato. Nel nostro caso, infatti, solo uno sperimentatore su tre possedeva uno *smartphone* con il sensore di luminosità. Questo problema, invece, non è stato riscontrato con il magnetometro e il sensore di inclinazione.



Figura 4: Elenco delle varie funzionalità dell'applicazione *Phyphox*.

La maggior parte dei dati acquisibili con *Phyphox* consisteste in segnali variabili nel tempo. Una volta registrato il fenomeno, è possibile esportare i dati in vari formati: nel nostro caso è stato utilizzato *Microsoft Excel* per via della compatibilità con *MATLAB*.

## 2.3 Tracker

*Tracker* rappresenta un software di analisi quantitativa dei fenomeni fisici. Si tratta sostanzialmente di un programma in *Java* che è possibile installare sul proprio PC oppure eseguire direttamente dal sito Web.

E' stato sviluppato da *Douglas Brown*, insegnante di Fisica al Cabrillo College di Monterey in California.

I fenomeni che possono essere analizzati quantitativamente sono numerosi: il rimbalzo di un oggetto, la rotazione di un corpo rigido, l'oscillazione di un pendolo, il lancio di un proiettile, etc... .

In particolare, questo programma è utile per lo studio di tutti quei moti che possono essere filmati e per questo analizzati per ricavare i parametri che si desiderano.



Dopo aver installato *Tracker* sul proprio PC, è possibile importare il file video nella piattaforma considerata ed utilizzare le varie funzionalità proposte dal software per incominciare l'analisi.

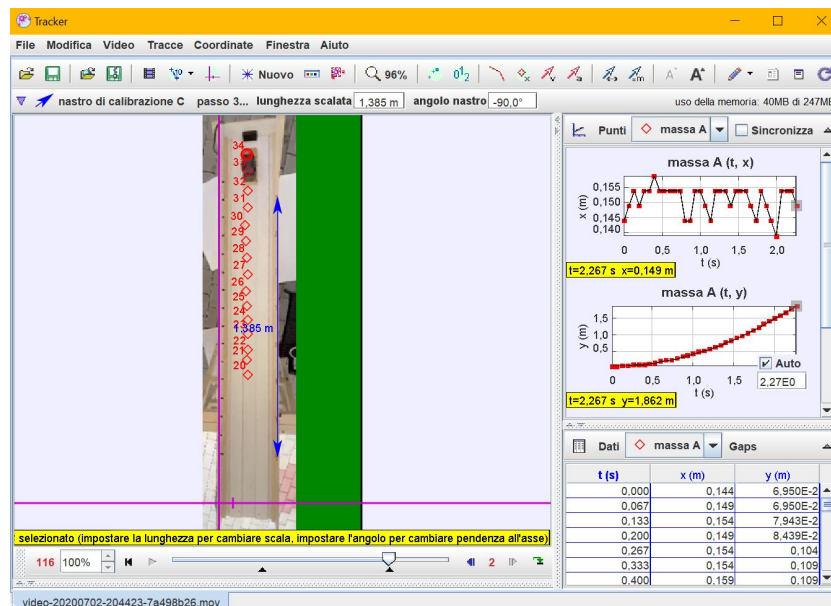


Figura 5: Schermata di *Tracker* durante l'analisi dati.

Dalla figura è possibile osservare:

- nella parte superiore i comandi per le diverse funzionalità come ad esempio gli assi cartesiani, il puntatore di massa o il nastro di calibrazione;
- nella parte centrale i video o le immagini in analisi;
- nella parte inferiore una barra di avanzamento del video, con la possibilità di modificare la velocità di riproduzione in funzione del numero di *frame* impostati;
- nella parte laterale destra:
  1. in alto, i grafici della traiettoria e della velocità in funzione del tempo. Naturalmente, è possibile scegliere molti altri grafici in base all'esperimento;
  2. in basso, invece, i dati estratti dal software organizzati in tabelle. I dati ottenuti possono essere esportati in diversi formati, come ad esempio *Microsoft Excel*.

### 3 Analisi dati

Passiamo ora all'analisi dei dati raccolti. Questi possono essere divisi in tre tipologie a seconda del sensore utilizzato (sensore di campo magnetico, sensore di illuminamento o fotocamera).

In ognuno dei casi, i dati sono stati analizzati con l'obiettivo di ricavarne gli istanti di passaggio, tramite i quali è stato possibile individuare la legge oraria del moto, in particolare l'accelerazione  $a$  del corpo.

Questa informazione, unita all'angolo di inclinazione  $\alpha$ , ha reso possibile la stima del valore del coefficiente di attrito radente dinamico  $\mu_d$ .

#### 3.1 Individuazione dell'angolo

Le serie di dati raccolti sono caratterizzate da un angolo di inclinazione differente per ogni sperimentatore nel caso del campo magnetico (che abbrevieremo come CM1, CM2, CM3) ed un ulteriore angolo per la misura dell'illuminamento (che nomineremo LUCE). Tale valore è stato determinato tramite il sensore di inclinazione dello *smartphone* (con l'apposita funzionalità di *Phyphox*), che per queste misure è stato posto alle estremità del piano di appoggio.

Per ottenere una misura statisticamente significativa di tale angolo di inclinazione sono state prese  $n_{angoli} = 3$  misure per caso, tutte accomunate da una stessa durata ( $T=10s$ ).

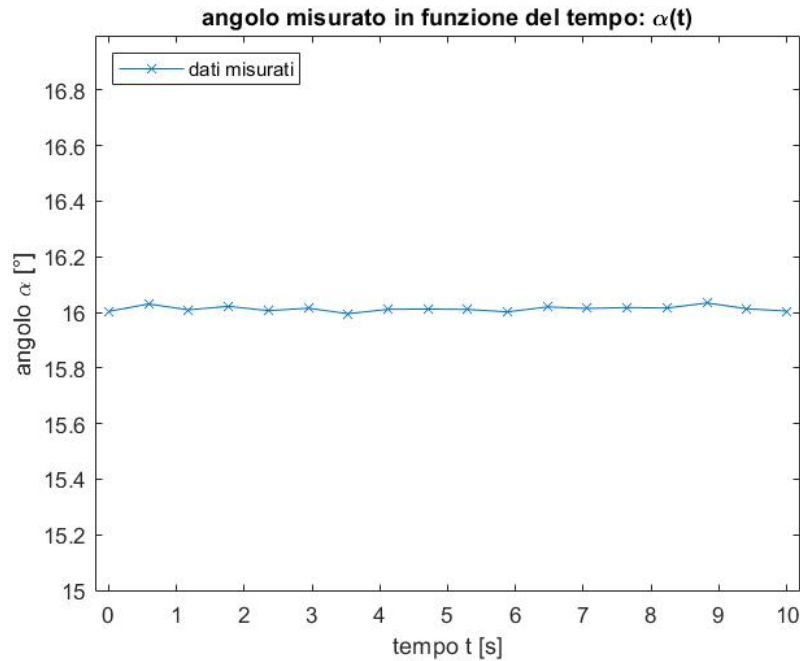


Figura 6: Rappresentazione di un esempio di segnale d'angolo in funzione del tempo (dati appartenenti a CM2)

Come è possibile osservare nell'immagine precedente, l'andamento dell'angolo di inclinazione  $\alpha$  al variare del tempo  $t$  è pressoché costante, a meno di fluttuazioni (che risultano comunque ridotte rispetto alla scala considerata). Pertanto è stato estratto il valore medio, che è stato corredato di un'incertezza  $\sigma_\alpha$  derivato dal valore di ampiezza picco-picco<sup>1</sup>, individuato come:

$$A_\alpha = \max_{t \in [0, T]} \alpha(t) - \min_{t \in [0, T]} \alpha(t) \quad \Rightarrow \quad \sigma_\alpha = \frac{A_\alpha}{\sqrt{12}} \quad (5)$$

Riportiamo a seguire gli angoli medi<sup>2</sup> così ottenuti:

$\alpha$ medio	CM1	CM2	CM3	LUCE
sopra	$14.81^\circ \pm 0.02^\circ$	$15.62^\circ \pm 0.01^\circ$	$13.872^\circ \pm 0.004^\circ$	$13.27^\circ \pm 0.02^\circ$
sotto	$15.10^\circ \pm 0.01^\circ$	$16.03^\circ \pm 0.01^\circ$	$13.896^\circ \pm 0.002^\circ$	$13.50^\circ \pm 0.02^\circ$
totale	$14.95^\circ \pm 0.01^\circ$	$15.828^\circ \pm 0.004^\circ$	$13.884^\circ \pm 0.002^\circ$	$13.39^\circ \pm 0.01^\circ$

Tabella 1: Valori medi ricavati per gli angoli misurati: in particolare verrà poi impiegato l'angolo medio totale (a cui ci riferiremo con  $\alpha$ ) di tutti i dati presi relativi a ciascun caso.

## 3.2 Legge oraria

In aggiunta all'angolo appena trovato, è fondamentale per la stima del coefficiente d'attrito conoscere la legge oraria del moto, in modo da poterne ricavare l'accelerazione.

Di seguito, per questo tipo di analisi, distingueremo i vari casi sulla base dell'utilizzo di diverse strategie di acquisizione dei dati.

### 3.2.1 Analisi tramite campo magnetico

Le considerazioni che ci apprestiamo a fare si basano sul numero di magneti utilizzati: inizialmente ci eravamo proposti di utilizzarne 16 distanziati di 10 cm. Tramite dei lanci di prova è stato però possibile osservare che questa configurazione non è ideale per l'acquisizione dei dati da parte del sensore di campo magnetico dello *smartphone*.

Una giustificazione di questo fatto può risiedere sia nella composizione dei campi magnetici dovuti a due magneti successivi (troppo vicini tra loro), sia nel tempo di reazione necessario al sensore per registrare le differenze di campo magnetico.

Per ovviare a questo problema sono stati utilizzati  $n_{magneti} = 8$  magneti distanziati (dal centro di un magnete a quello del successivo) ciascuno di circa 20 cm.

<sup>1</sup>vedi *Appendice: Distribuzione Rettangolare*

<sup>2</sup>vedi *Appendice: Media e relativa incertezza*

Riportiamo a seguire le misure degli intervalli e la relativa lunghezza media con la rispettiva incertezza<sup>3</sup>:

intervallo	CM1	CM2	CM3	lunghezza media
$\Delta s_1$ [mm]	197	198	198	$198 \pm 1$
$\Delta s_2$ [mm]	200	200	200	$200 \pm 1$
$\Delta s_3$ [mm]	197	197	197	$197 \pm 1$
$\Delta s_4$ [mm]	198	198	199	$198 \pm 1$
$\Delta s_5$ [mm]	197	198	197	$197 \pm 1$
$\Delta s_6$ [mm]	198	197	198	$198 \pm 1$
$\Delta s_7$ [mm]	197	196	197	$197 \pm 1$

Tabella 2: Valori misurati da ciascun sperimentatore per le distanze tra i magneti, accompagnati dalla media e dalla sua incertezza.

Gli intervalli così trovati, però, non sono utili all'individuazione della legge oraria; è necessario considerare le distanze progressive tra i magneti, trovate nel seguente modo:

$$s_k = \sum_{i=1}^k \Delta s_i \quad (6)$$

dove  $k = 1, \dots, (n_{magneti} - 1)$ , mentre è posto  $s_0 = 0$ .

L'errore associato alle distanze è stato trovato propagando<sup>4</sup> le incertezze relative ad ogni intervallo:

$$\sigma_{s_k} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sigma_{\Delta s_i}^2} \quad (7)$$

Ci apprestiamo ora a individuare i tempi di passaggio corrispondenti alle distanze progressive appena trovate. La strategia in questione si basa sulla possibilità di associare un picco nell'andamento temporale del campo magnetico al passaggio dello *smartphone* in prossimità di un magnete.

Tali picchi, sono stati identificati tramite un'apposita funzione capace di individuare la posizione di un numero di massimi relativi consecutivi pari a  $n_{magneti}$ . Il punto di massimo del picco, infatti, equivale all'istante di passaggio per il magnete considerato.

---

<sup>3</sup>vedi *Appendice: Media e relativa incertezza*

<sup>4</sup>vedi *Appendice: Propagazione degli errori*

Di seguito riportiamo un esempio per ciascun caso dell'individuazione dei massimi relativi da parte della funzione.

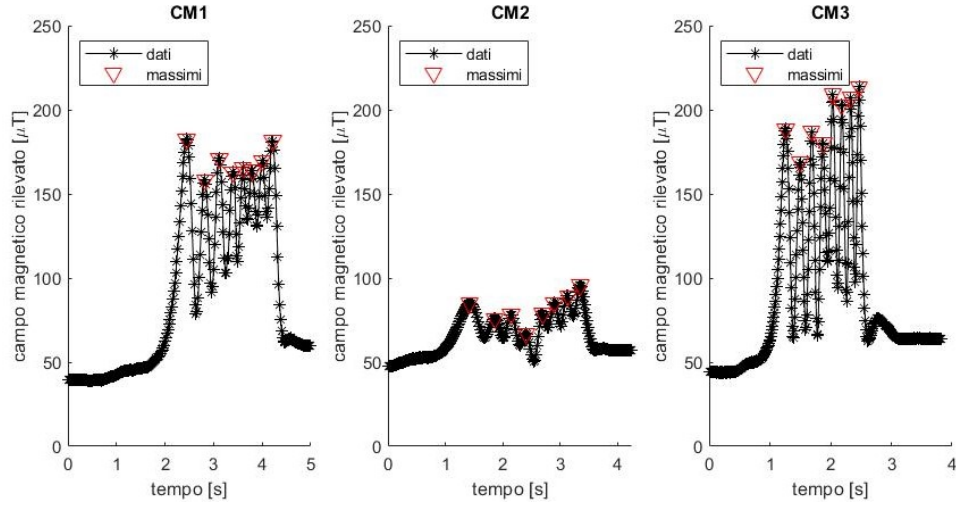


Figura 7: Rappresentazione di un esempio per ciascun caso di identificazione dei punti di massimo relativo.

E' possibile osservare dai grafici una notevole differenza nei valori di campo magnetico registrati da ciascuno *smartphone*. Questo può essere giustificato dalla sensibilità dei sensori utilizzati nei vari modelli dalle diverse aziende costruttrici.

Inoltre, per prevenire possibili imprecisioni, è stato misurato il modulo del campo magnetico (grazie alla funzionalità di *Phyphox*) alle estremità del piano inclinato:

rumore	CM1	CM2	CM3
sopra $[\mu\text{T}]$	$28.4 \pm 0.2$	$49.9 \pm 0.1$	$44.3 \pm 0.2$
sotto $[\mu\text{T}]$	$65.3 \pm 0.3$	$58.2 \pm 0.1$	$60.0 \pm 0.2$
totale $[\mu\text{T}]$	$46.8 \pm 0.2$	$54.0 \pm 0.1$	$52.2 \pm 0.1$

Tabella 3: Valori medi ricavati per il rumore alle estremità del piano inclinato: come per l'angolo di inclinazione, i valori riportati in tabella derivano da una media pesata di 5 *set* di dati relativi a ciascun sperimentatore. Analogamente a quanto fatto per  $\alpha$ , da ogni *set* (caratterizzato da un andamento pressoché costante) è stato ricavato un valore medio ed un'incertezza a partire dal valore di ampiezza picco-picco.

I valori così ottenuti risultano essere sostanzialmente differenti tra loro e difficili da manipolare senza particolari supposizioni sull'andamento del rumore. Inoltre, il tipo di analisi in questione privilegia le ascisse degli estremi

rispetto ai valori in sé del campo magnetico. Pertanto, i risultati elencati in tabella sono stati impiegati soltanto come valori di riferimento.

Per ottenere un risultato statisticamente significativo, in ciascun caso sono stati raccolti 15 *set* di dati da cui sono state estratte le posizioni dei picchi. Queste hanno poi permesso l'allineamento dei vari *set* rispetto al primo picco, che in tutti i casi è stato posto a  $t_0 = 0$ .

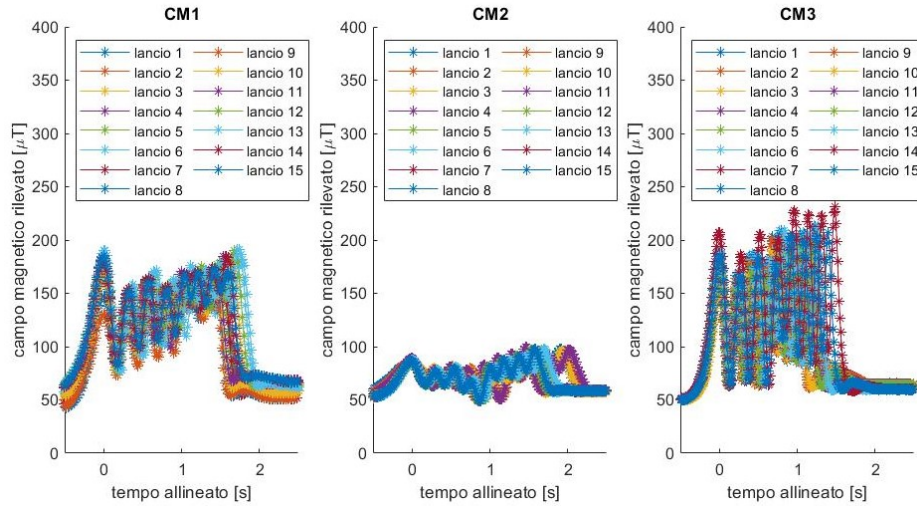
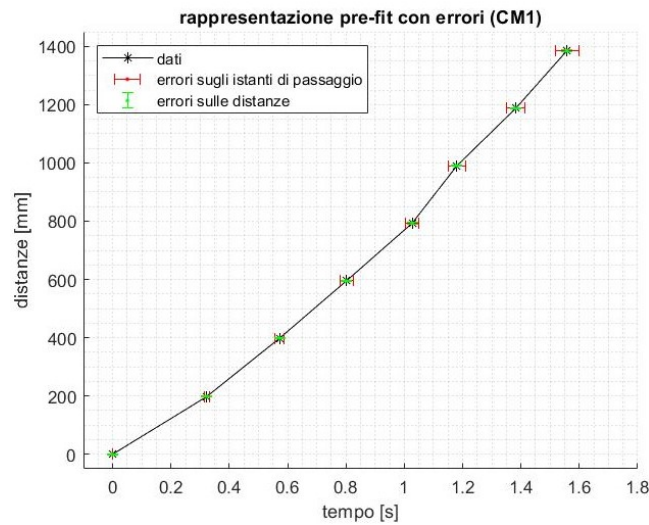


Figura 8: Allineamento dei vari *set* di dati per ciascun caso.

I dati così allineati sono poi stati mediati per ciascun istante ed è stata associata ad ogni istante medio di passaggio un'incertezza sulla media<sup>5</sup>. Nella figura a seguire rappresentiamo lo spazio percorso in funzione degli istanti di tempo mediati.



<sup>5</sup>vedi *Appendice: Media e relativa incertezza*

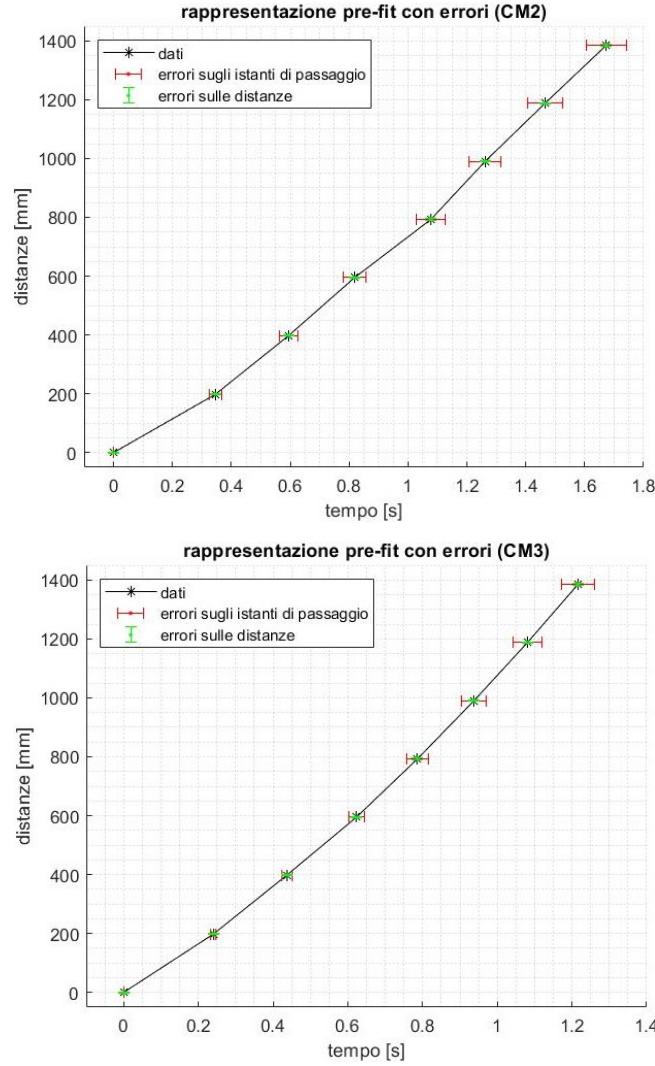


Figure 9: Leggi orarie dei vari casi dotate di errori su entrambe le coordinate.

Sui dati appena rappresentati è stato effettuato un *curve fitting* per ottenere una stima dell'accelerazione del corpo. I pesi utilizzati nel *fit* sono stati ricavati dalla combinazione degli errori sulle distanze progressive (sulla coordinata  $y$ ) e sugli istanti di passaggio (sulla coordinata  $x$ ).

$$\sigma_{fit} = \sqrt{\sigma_y^2 + \frac{(\sigma_x)^2 \cdot y^2}{x^2}} \quad (8)$$

dove  $\sigma_y$  corrisponde all'errore sulla distanza progressiva  $y$  dei vari magneti dall'origine, mentre  $\sigma_x$  corrisponde all'errore sugli istanti medi  $x$  di passaggio.

Rappresentiamo a seguire le leggi orarie con i *fit* ottenuti.

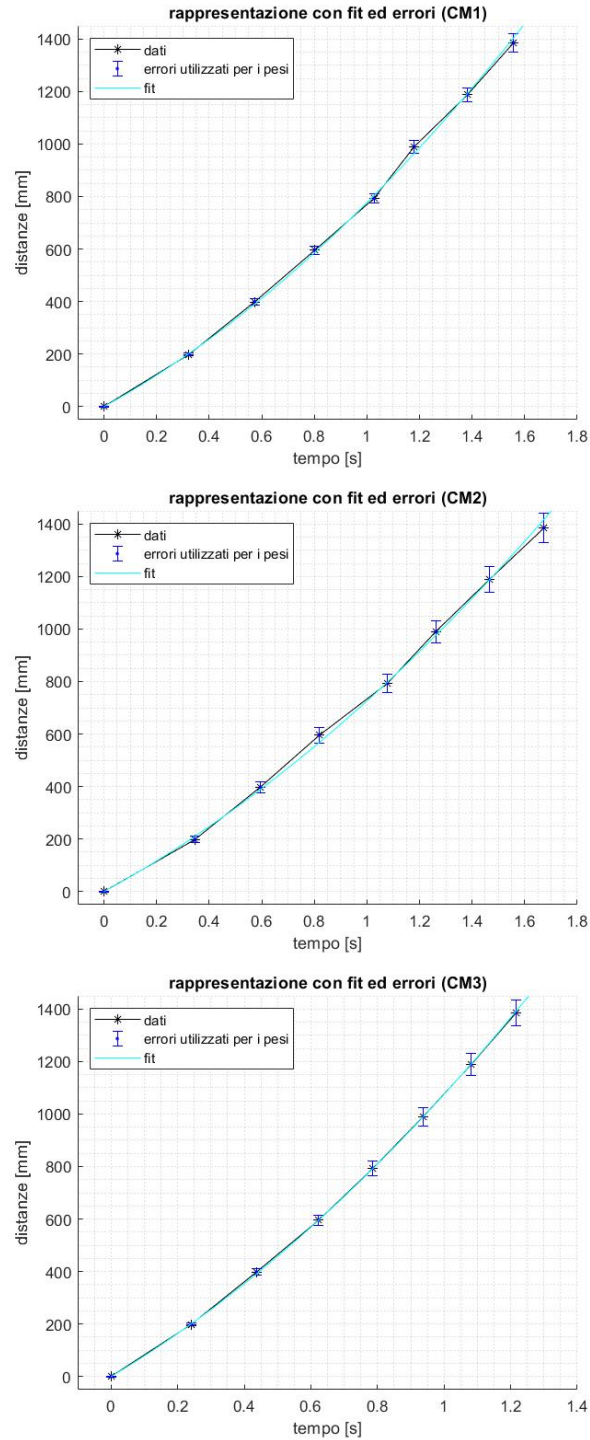


Figure 10: Leggi orarie dei vari casi dotate di *fit* e di errori combinati.



Riportiamo di seguito i parametri ottenuti dal *fit* e i relativi estimatori di bontà<sup>6</sup>:

parametro	CM1	CM2	CM3
accelerazione $a$ [ $\frac{m}{s^2}$ ]	$0.45 \pm 0.02$	$0.36 \pm 0.03$	$0.64 \pm 0.02$
velocità iniziale $v_0$ [ $\frac{m}{s}$ ]	$0.55 \pm 0.02$	$0.55 \pm 0.03$	$0.76 \pm 0.01$
posizione iniziale $x_0$ [m]	$-0.001 \pm 0.001$	$-0.001 \pm 0.001$	$-0.0001 \pm 0.0004$
valore di $\tilde{\chi}^2$	0.6032	0.5126	0.0825
valore di $\tilde{R}^2$	0.9996	0.9989	0.9999

Tabella 4: Parametri ricavati dal *fit*

Entrambi i test di ipotesi utilizzati si sono rivelati soddisfacenti: per tanto possiamo assumere che i *fit* così trovati costituiscano una buona approssimazione dei dati di partenza.

Dalla tabella è possibile notare in tutti i casi dei valori consistenti per le velocità iniziali: questo è dovuto al fatto che l'origine del sistema di riferimento è stata posta nel centro del primo magnete che si discosta dal reale punto di partenza del carrello mobile di circa 40 cm.

	CM1	CM2	CM3
punto di partenza [mm]	$385 \pm 1$	$386 \pm 1$	$386 \pm 1$

Tabella 5: Valori misurati per la posizione iniziale effettiva.

Di conseguenza, in questo intervallo, il corpo raggiunge il primo magnete con una velocità non nulla.

Per le considerazioni appena fatte, i valori trovati per le posizioni iniziali non sono da confondere con il reale punto di partenza del carrello mobile, ma si riferiscono esclusivamente all'intersezione del *curve fitting* trovato con l'asse delle ordinate.

Infine, le accelerazioni così ottenute verranno impiegate poi per la stima del coefficiente di attrito radente dinamico  $\mu_d$ .

### 3.2.2 Analisi tramite illuminamento

Consideriamo ora l'analisi dei dati rivelati dal sensore di illuminazione dell'unico *smartphone* avente questa funzionalità.

Come in precedenza, sono state inizialmente considerate 16 lucine distanziate di 10 cm l'una dall'altra. Tramite dei lanci di prova è stato però osservato che questa configurazione rendeva impossibile l'acquisizione dei dati da parte del sensore in questione: infatti non sono presenti lungo il piano inclinato delle variazioni percettibili di luce (come mostrato in *Figura 11*).

<sup>6</sup>vedi *Appendice: Test del Chi Quadrato e Coefficiente di Determinazione*

Per risolvere questo problema, si è ridotto il numero di lucine a  $n_{lucine} = 4$  distanziate l'una dall'altra come in tabella:

intervallo	Misura 1	Misura 2	Misura 3	lunghezza media
$\Delta s_1$ [mm]	399	397	397	$398 \pm 1$
$\Delta s_2$ [mm]	406	406	404	$405 \pm 1$
$\Delta s_3$ [mm]	404	405	404	$404 \pm 1$

Tabella 6: Valori misurati da ciascun sperimentatore per le distanze tra le lucine, accompagnati dalla media e dalla sua incertezza.

A differenza del sensore di campo magnetico, utilizzato nella sezione precedente, è stato necessario attivare il sensore di illuminamento tramite un'ulteriore lucina (posta all'inizio del percorso) il cui unico scopo era quello di avviare la registrazione dei dati.

Questa configurazione, però, non garantiva sempre l'identificazione del corretto numero di lucine, siccome il sensore non aveva il tempo necessario per rivelare e registrare correttamente le variazioni (soprattutto per angoli ripidi e velocità elevate).



Figure 11: Immagini del piano inclinato illuminato da meno lucine: non è possibile distinguere zone di buio.

Per questo motivo si è cercato di convogliare la luce emessa dalle lucine in aree più ridotte, in modo tale da isolare delle zone di buio lungo il percorso: in questo modo il sensore è in grado di distinguere e registrare delle significative variazioni di luce.



Figure 12: Immagini del piano inclinato dopo aver schermato la luce per distinguere delle zone di buio.

Procediamo adesso all'individuazione della legge oraria a partire dai dati raccolti.

Per quanto riguarda lo spazio è necessario passare dagli intervalli menzionati nella *Tabella 6* alle distanze progressive, tramite la seguente formula:

$$s_k = \sum_{i=1}^k \Delta s_i \quad (9)$$

dove  $k = 1, \dots, (n_{lucine} - 1)$ , mentre è posto  $s_0 = 0$ .

L'errore associato alle distanze è stato trovato propagando<sup>7</sup> le incertezze relative ad ogni intervallo:

$$\sigma_{s_k} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sigma_{\Delta s_i}^2} \quad (10)$$

Ci occupiamo ora di individuare i tempi di passaggio corrispondenti alle distanze progressive appena trovate. La strategia in questione si basa sulla possibilità di associare un picco nell'andamento temporale dell'illuminamento al passaggio dello *smartphone* in prossimità di una lucina.

Tali picchi, sono stati identificati tramite l'apposita funzione menzionata nella sezione precedente. Il punto di massimo del picco, infatti, equivale all'istante di passaggio per la lucina considerata.

---

<sup>7</sup>vedi *Appendice: Propagazione degli errori*

Di seguito riportiamo un esempio dell'individuazione dei massimi relativi da parte della funzione.

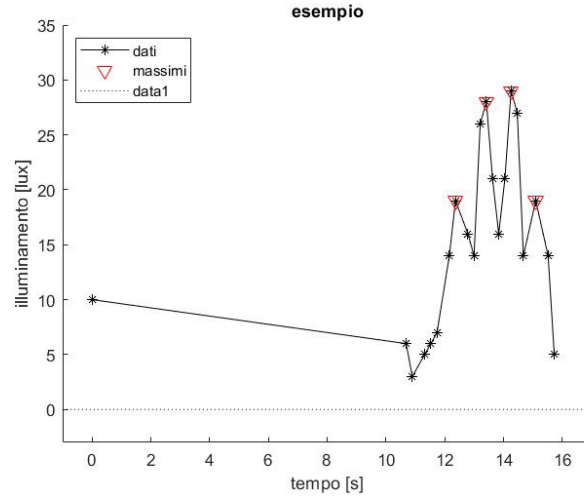


Figura 13: Rappresentazione di un esempio di identificazione dei punti di massimo relativo dei picchi.

E' possibile osservare dal grafico che il primo dato registrato (non nullo) coincide con l'attivazione del sensore di illuminazione in corrispondenza della lucina posizionata appositamente.

Per ottenere un risultato statisticamente significativo, sono stati raccolti 15 *set* di dati da cui sono state estratte le posizioni dei picchi. Queste hanno poi permesso l'allineamento dei vari *set* rispetto al primo picco, che in tutti i casi è stato posto a  $t_0 = 0$ .

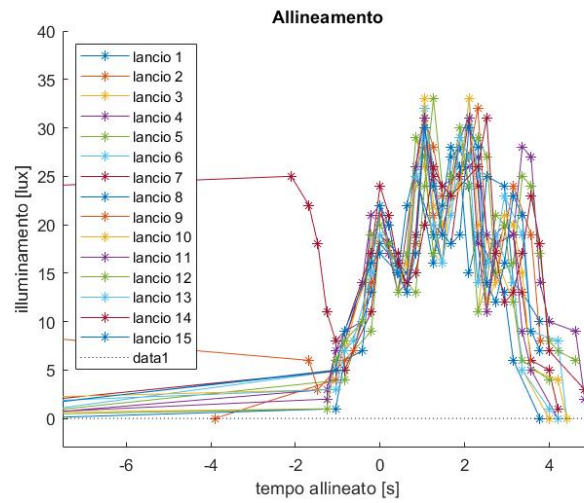


Figura 14: Allineamento dei vari *set* di dati.

I dati così allineati sono poi stati mediati per ciascun istante ed è stata associata ad ognuno un'incertezza sulla media<sup>8</sup>.

Nella figura a seguire rappresentiamo lo spazio percorso in funzione degli istanti di tempo mediati.

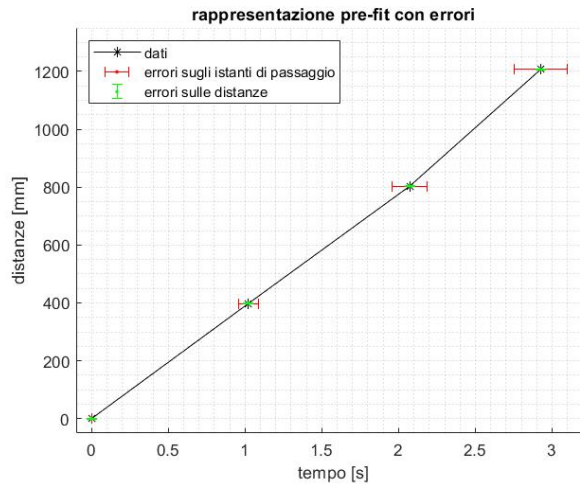


Figure 15: Legge oraria con errori su entrambe le coordinate.

Sui dati appena rappresentati è stato effettuato un *curve fitting* per ottenere una stima di accelerazione del corpo. I pesi utilizzati nel *fit* sono stati ricavati dalla combinazione degli errori sulle distanze progressive (sulla coordinata  $y$ ) e degli istanti di passaggio (sulla coordinata  $x$ ), sfruttando l'equazione 8.

Rappresentiamo a seguire la legge oraria con il *fit* ottenuto.

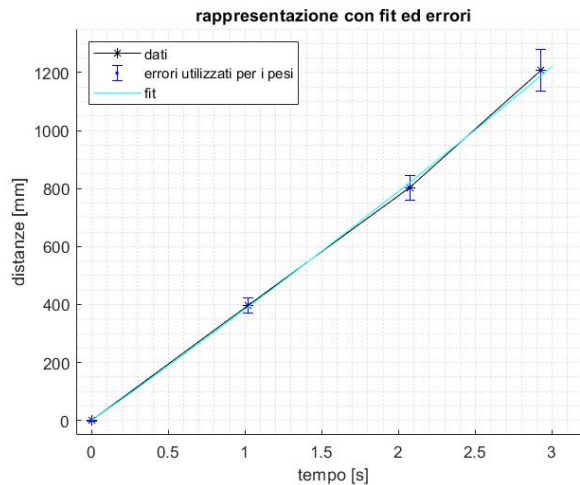


Figure 16: Legge oraria con *fit* ed errori combinati.

<sup>8</sup>vedi Appendice: Media e relativa incertezza

Riportiamo di seguito i parametri ottenuti dal *fit* e i relativi estimatori di bontà<sup>9</sup>:

parametro	LUCE
accelerazione $a$ [ $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ]	$0.02 \pm 0.06$
velocità iniziale $v_0$ [ $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ]	$0.4 \pm 0.1$
posizione iniziale $x_0$ [m]	$-0.001 \pm 0.003$
valore di $\tilde{\chi}^2$	0.2796
valore di $\tilde{R}^2$	0.9990

Tabella 7: Parametri ricavati dal *fit*

Entrambi i test di ipotesi utilizzati si sono rivelati soddisfacenti: per tanto possiamo assumere che i *fit* così trovati costituiscano una buona approssimazione dei dati di partenza.

Dalla tabella è possibile notare un valore consistente per le velocità iniziale: questo è dovuto al fatto che l'origine del sistema di riferimento è stata posta nel centro della prima lucina delle quattro, che si discosta dal reale punto di partenza del carrello mobile di circa 70 cm.

Di conseguenza, in questo intervallo, il corpo acquisisce una velocità con cui transita in corrispondenza della prima lucina.

	Misura 1	Misura 2	Misura 3
punto di partenza [mm]	$690 \pm 1$	$691 \pm 1$	$690 \pm 1$

Tabella 8: Valori misurati per la posizione iniziale effettiva.

Nelle considerazioni appena fatte, non bisogna confondere i valori trovati per le posizioni iniziali con il reale punto di partenza del carrello mobile, ma si riferiscono esclusivamente all'intersezione del *curve fitting* con l'asse delle ordinate.

Anche in questo caso, l'accelerazione così ottenuta verrà impiegata poi per la stima del coefficiente di attrito radente dinamico  $\mu_d$ .

### 3.2.3 Analisi tramite Tracker

Per stimare ulteriormente il valore dell'accelerazione è stato utilizzato *Tracker* come strumento di analisi dei video filmati per ciascuno dei due *smartphone* non aventi il sensore di illuminazione.

Per poter fare un confronto con l'analisi del campo magnetico, si è deciso di utilizzare gli stessi due angoli (CM2 e CM3) già impiegati in precedenza per i due *smartphone* in questione.

<sup>9</sup>vedi *Appendice: Test del Chi Quadrato e Coefficiente di Determinazione*

Per ciascun caso, sono stati registrati 5 video utilizzando una videocamera posta su un supporto ad una certa altezza sopra l'apparato e parallela al piano inclinato.

Per poter considerare l'andamento temporale di una sola coordinata, i video in questione sono stati ruotati e tagliati in modo tale che i bordi dell'inquadratura del video risultassero paralleli ai bordi del piano (e quindi al moto del corpo).

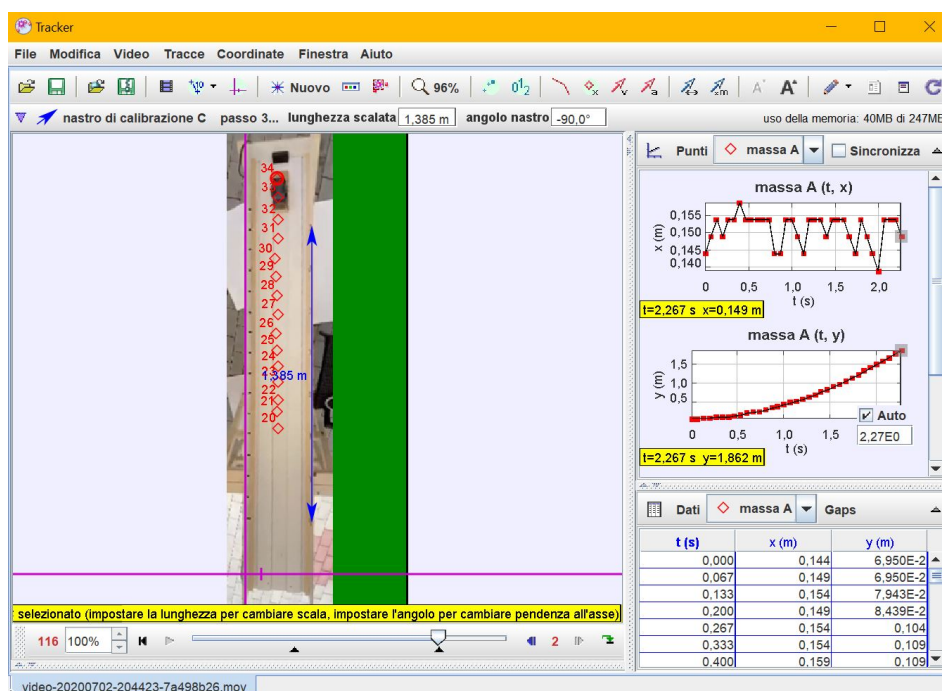


Figura 17: Esempio dell'utilizzo di *Tracker*

Sono stati quindi utilizzati:

- una coppia di assi cartesiani paralleli ai bordi dell'inquadratura e aventi l'origine nel punto di partenza del carrello mobile;
- il nastro di calibrazione, per definire la lunghezza di un pixel, a partire dalla distanza tra i centri del primo e dell'ultimo magnete;
- il punto di massa per identificare la posizione del corpo durante il suo moto: nel nostro caso questa operazione è stata fatta ogni 2 *frame*.

Le serie di dati estratti, che corrispondono alla legge oraria del moto, sono stati poi esportati in formato *Microsoft Excel* per poter essere analizzati con *MATLAB*.

Ci apprestiamo ora a ricavare un valore di accelerazione per ogni lancio, per poi trovare un valore complessivo per ciascun caso.

Nella figura a seguire rappresentiamo i dati estratti per ogni caso.

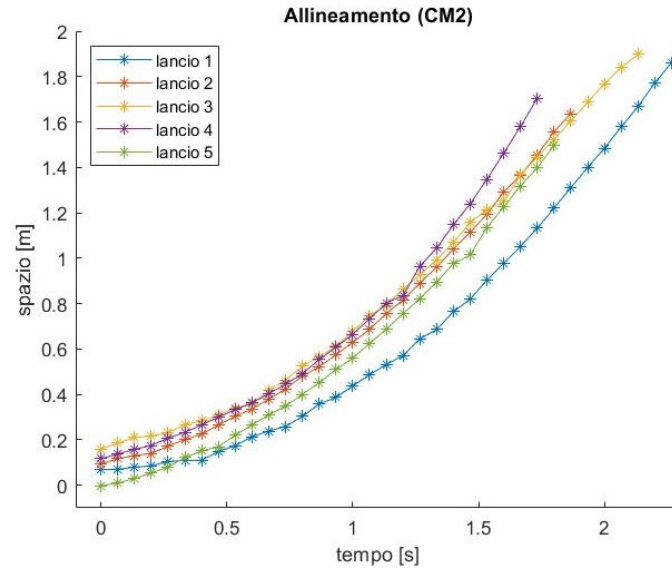


Figure 18: Dati estratti da *Tracker* per l'angolo di inclinazione CM2.

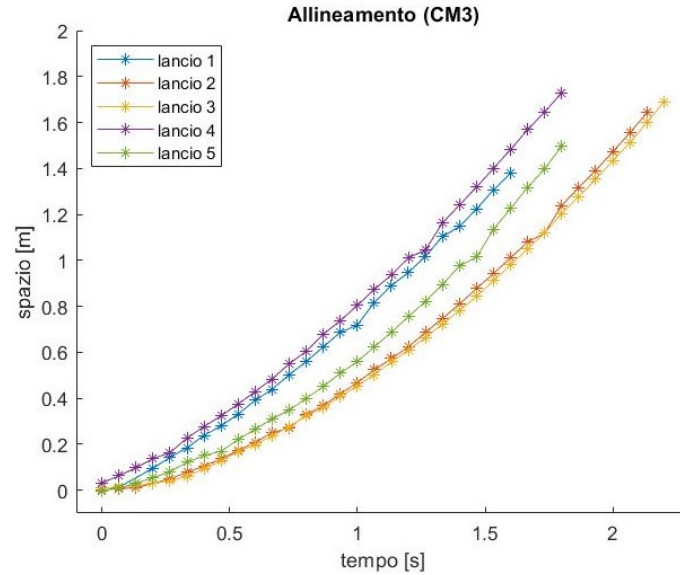


Figure 19: Dati estratti da *Tracker* per l'angolo di inclinazione CM3.

Su ciascuno dei *set* di dati appena rappresentati è stato effettuato un *curve fitting* (in questo caso senza pesi) per ottenere una stima dell'accelerazione del corpo.



Rappresentiamo a seguire, per ogni caso, la legge oraria con i *curve fitting* ottenuti ed i relativi parametri.

Per l'angolo di inclinazione CM2, sono stati ottenuti i seguenti *fit*:

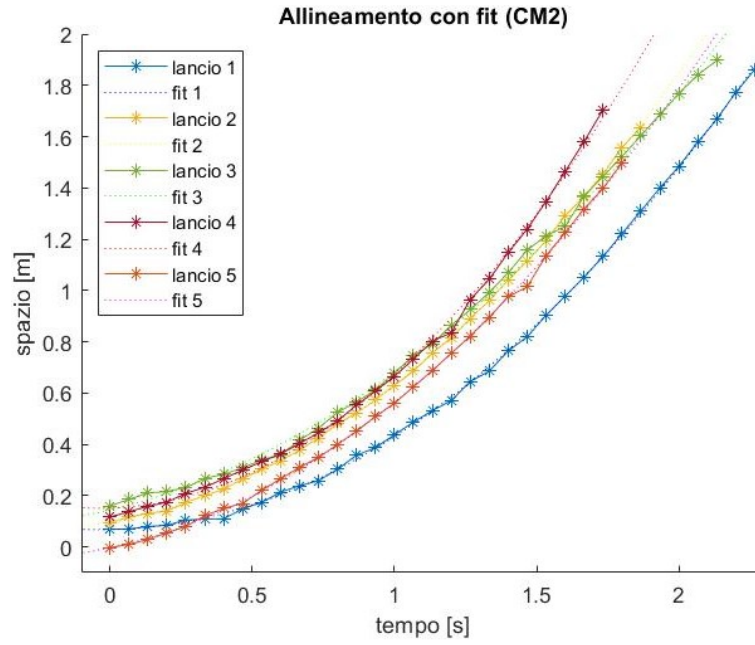


Figure 20: Dati estratti da *Tracker* con *fit* per l'angolo CM2.

caratterizzati dai seguenti parametri ed estimatori di bontà<sup>10</sup>:

parametro	Lancio 1	Lancio 2	Lancio 3	Lancio 4	Lancio 5
$a \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$	$0.687 \pm 0.004$	$0.677 \pm 0.004$	$0.55 \pm 0.01$	$0.97 \pm 0.02$	$0.658 \pm 0.008$
$v_0 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$	$0.019 \pm 0.09$	$0.198 \pm 0.007$	$0.26 \pm 0.02$	$0.03 \pm 0.03$	$0.24 \pm 0.01$
$x_0 \left[ \text{m} \right]$	$0.068 \pm 0.004$	$0.096 \pm 0.003$	$0.14 \pm 0.01$	$0.15 \pm 0.01$	$-0.005 \pm 0.005$
$\tilde{\chi}^2$	0.00008	0.00003	0.0005	0.0004	0.00009
$\tilde{R}^2$	0.9998	0.9999	0.9985	0.9982	0.9996

Tabella 9: Parametri ricavati dal *fit*

<sup>10</sup> vedi *Appendice: Test del Chi Quadrato e Coefficiente di Determinazione*

Per l'angolo di inclinazione CM3, sono stati ottenuti i seguenti *fit*:

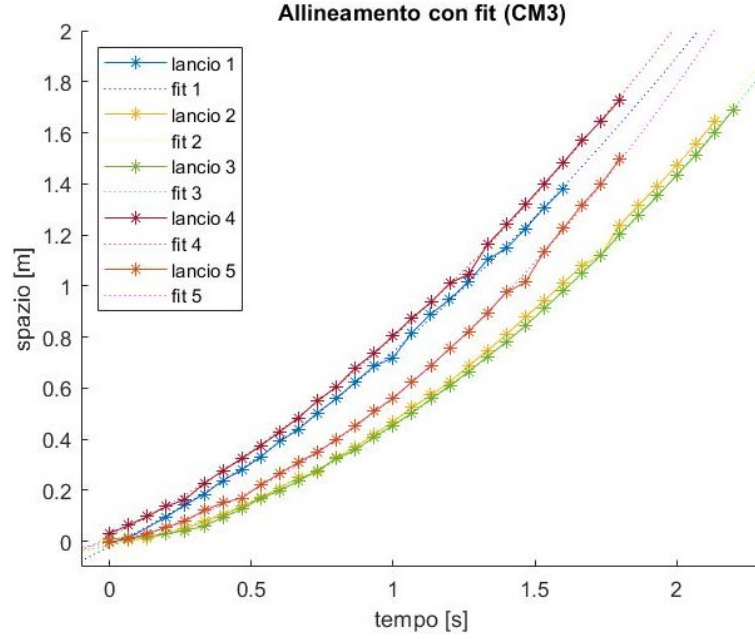


Figure 21: Dati estratti da *Tracker* con *fit* per l'angolo CM3.

caratterizzati dai seguenti parametri ed estimatori di bontà<sup>11</sup>:

parametro	Lancio 1	Lancio 2	Lancio 3	Lancio 4	Lancio 5
$a \left[ \frac{m}{s^2} \right]$	$0.39 \pm 0.01$	$0.523 \pm 0.005$	$0.517 \pm 0.004$	$0.443 \pm 0.008$	$0.658 \pm 0.007$
$v_0 \left[ \frac{m}{s} \right]$	$0.57 \pm 0.02$	$0.22 \pm 0.01$	$0.209 \pm 0.009$	$0.56 \pm 0.01$	$0.24 \pm 0.01$
$x_0 [m]$	$-0.021 \pm 0.007$	$-0.020 \pm 0.005$	$-0.016 \pm 0.005$	$0.018 \pm 0.006$	$-0.005 \pm 0.005$
$\tilde{\chi}^2$	0.0001	0.00009	0.00008	0.0001	0.00009
$\tilde{R}^2$	0.9994	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996

Tabella 10: Parametri ricavati dal *fit*

A questo punto le accelerazioni trovate sono state mediate tenendo conto dei pesi ottenuti dal *fit*, per ciascun caso, in modo tale da trovare un unico valore.

	CM2	CM3
$a_{media} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$	$0.679 \pm 0.002$	$0.521 \pm 0.003$

Tabella 11: Valori di accelerazione media.

Le accelerazioni così ottenute verranno impiegate per la stima del coefficiente di attrito radente dinamico  $\mu_d$ .

<sup>11</sup>vedi *Appendice: Test del Chi Quadrato e Coefficiente di Determinazione*

### 3.3 Stima del coefficiente di attrito dinamico

Avendo ricavato i valori dell'accelerazione e le relative ampiezze degli angoli di inclinazione, ci apprestiamo ora a stimare il coefficiente d'attrito radente dinamico  $\mu_d$ .

Per questo calcolo è stata utilizzata la seguente formula:

$$\mu_d = \tan(\alpha) - \frac{a}{g \cos(\alpha)} \quad (11)$$

A questa espressione è stata applicata la formula per la propagazione degli errori<sup>12</sup> per ottenere la seguente relazione:

$$\sigma_{\mu_d} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{g \cdot \cos(\alpha)}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\alpha}{\cos^2(\alpha)}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{a}{g} \cdot \sin(\alpha)\right)^2} \quad (12)$$

Dove  $\sigma_{\mu_d}$  è l'incertezza sul coefficiente d'attrito radente dinamico  $\mu_d$ ,  $\sigma_\alpha$  è l'incertezza sull'ampiezza dell'angolo di inclinazione  $\alpha$  del piano inclinato ed  $\sigma_a$  è l'incertezza sulle accelerazioni trovate in precedenza.

Riportiamo in tabella i valori così trovati:

caso	coefficiente $\mu_d$	incertezza $\sigma_{\mu_d}$
CM1	0.22	0.01
CM2	0.246	0.006
CM3	0.180	0.003
LUCE	0.24	0.02
Tracker1 - CM2	0.212	0.005
Tracker2 - CM3	0.193	0.003

Tabella 12: Valori dei coefficienti di attrito dinamico e la loro incertezza.

I valori trovati sono stati confrontati con vari valori di riferimento, i quali si riferisco a situazioni simili ma non identiche a quella analizzata.

Infatti una delle due superfici in contatto (del carrello mobile) è effettivamente costituita da un tradizionale legno levigato, mentre il materiale utilizzato per costruire il nostro piano inclinato è un legno melaminico, che presenta caratteristiche intermedie tra legno e cartone.

---

<sup>12</sup>vedi *Appendice: Propagazione degli errori*

Pertanto due possibili valori di riferimento per il coefficiente  $\mu_d$  sono:

- per **legno-legno**,  $\mu_d^{LL} \sim 0.20$  ;
- per **legno-cartone**,  $\mu_d^{LC} \sim 0.23$  ;

Inoltre, è stata utilizzata della paraffina per facilitare lo scorrimento del carrello mobile sul piano in questione. Per questa ragione, i valori ottenuti potrebbero discostarsi da quelli di riferimento.

## 4 Conclusioni

L'obiettivo di questa esperienza è stata la stima del coefficiente d'attrito radente dinamico  $\mu_d$  a partire dai valori di accelerazione e di angolo di inclinazione ricavati tramite diverse procedure sperimentali.

I coefficienti ottenuti, riportati in *Tabella 12*, risultano compatibili con il valore ottenuto nel caso "LUCE" (caratterizzato da maggiore incertezza) sulla base di test di ipotesi a due code con un grado di fiducia pari ad oltre il 99%.

Inoltre sono prossimi ai valori  $\mu_d^{LL}$  e  $\mu_d^{LC}$ , che si erano ipotizzati come riferimento.

E' possibile però osservare una variabilità non trascurabile tra i dati, che ci apprestiamo a discutere e che vedremo riprendere dalle differenti modalità di acquisizione dei dati.

Per evitare che sistematiche incidessero significativamente sui dati raccolti nelle varie prese dati, infatti, sono stati utilizzati 3 dispositivi di modello, dimensioni e masse differenti:

<i>smartphone</i>	modello	dimensione [mm]	massa [g]
CM1 e LUCE	Redmi Note 8 Pro	161x76x9	$248 \pm 1$
CM2	Iphone SE 2016	124x59x8	$142 \pm 1$
CM3	Iphone 11 Pro	158x78x8	$220 \pm 1$
Carrello mobile		210x80x26	$328 \pm 1$

Tabella 13: Dettagli riguardo gli *smartphone* e il carrello utilizzati.

Non è stato però possibile prevedere l'incidenza di altri fattori, come:

- il **comportamento della paraffina**, le cui proprietà lubrificanti sono direttamente proporzionali al suo tempo di utilizzo: infatti, all'ultimo lancio effettuato nel caso dei magneti (CM3) corrisponde il massimo valore di accelerazione (in *Tabella 4*) e il minimo coefficiente d'attrito radente dinamico (in *Tabella 12*);

- la **temperatura dell'ambiente** in cui è stato effettuato l'esperimento, che ha inciso particolarmente nell'analisi dell'illuminamento (caso LUCE) poiché è stato necessario posizionare l'apparato in un ambiente buio, accidentalmente molto caldo ed umido. Il valore ridotto di accelerazione (in *Tabella 7*) non è infatti giustificabile dall'angolo impiegato poiché questo risulta essere molto simile all'angolo CM3 (in *Tabella 1*), il quale però è dotato di un'accelerazione consistente. Una possibile spiegazione di questo fatto risiede nell'espansione dei legni costituenti il carrello mobile ed il binario in cui questo scorreva, in seguito alla quale si è generato maggiore attrito;
- l'**attrito dell'aria**, che è plausibile freni il carrello mobile proporzionalmente all'area della superficie di impatto durante la discesa.

Concludiamo pertanto che, nonostante i risultati ottenuti sembrano a primo impatto distanti tra di loro, questi sono comunque soddisfacenti per via del comportamento variabile della paraffina e delle diverse superfici in contatto durante lo scivolamento.



## 5 Appendice

### 5.1 Errore sulla distribuzione rettangolare

In teoria delle probabilità la distribuzione rettangolare (o continua uniforme)  $U(S)$  è una distribuzione di probabilità continua ed uniforme su l'insieme  $S$  di definizione. Pertanto, questa attribuisce a tutti i sottoinsiemi di  $S$  con la stessa misura la stessa probabilità di verificarsi.

Nel nostro caso specifico, l'insieme di definizione  $S = [a, b]$  è un intervallo di larghezza  $(b - a) = A_k$ .

La sua densità di probabilità è:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(S)} & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases} \quad (13)$$

dove  $\mu(S)$  è la misura dell'insieme  $S$ .

Inoltre, il suo *valore di aspettazione* risulta essere:

$$E[U] = \frac{a + b}{2} \quad (14)$$

mentre la varianza può essere ottenuta tramite la formula:

$$\text{Var}[U] = \frac{(a - b)^2}{12} \quad (15)$$

### 5.2 Media e relativa incertezza

Sia  $x_i$  un *set* di  $N$  dati. Si definisce *valore medio*:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \quad (16)$$

Inoltre, è possibile attribuire a questo valore un'incertezza pari a:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\text{std}(x_i)}{\sqrt{N}} \quad (17)$$

Dove  $\text{std}(x_i)$  è la *deviazione standard* che può essere calcolata tramite la seguente formula:

$$\text{std}(x_i) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|^2} \quad (18)$$

### 5.3 Propagazione degli errori

Sia una funzione continua  $f(x_1, \dots, x_n)$  dipendente da  $n$  variabili  $x_1, \dots, x_n$ , caratterizzate rispettivamente da incertezze  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ . Supponendo che tali incertezze possano essere ritenute indipendenti e casuali, è possibile stimare l'incertezza  $\sigma_f$  sul valore di  $f(x_1, \dots, x_n)$  nel seguente modo:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_i^2} \quad (19)$$

### 5.4 Test del Chi Quadrato

Il *Test del Chi Quadrato* è un test di verifica delle ipotesi utilizzato in statistica, basato sulla distribuzione del  $\chi^2$ .

Siano un set di dati sperimentali  $\{x^s\}$ , caratterizzati da incertezze  $\{\sigma^s\}$ , e dei valori attesi  $\{x^t\}$ ; si definisce il *Chi Quadrato* come:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^s \cdot (x_i^s - x_i^t)^2 \quad (20)$$

dove i pesi usati nell'equazione precedente possano essere calcolati, a partire dagli errori  $\{\sigma^s\}$ , come:

$$\omega_i^s = \frac{1}{(\sigma_i^s)^2} \quad (21)$$

Il valore utile per la verifica delle ipotesi è però il *Chi Quadrato Ridotto* che viene calcolato come:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{\text{dfe}} \quad (22)$$

dove il numero di *gradi di libertà* dfe si ottiene a partire dal numero di dati considerati  $n_{\text{dati}}$ , dal numero di parametri del *fit*  $n_{\text{par}}$  e dal numero di punti esclusi  $n_{\text{esc}}$ ; la formula, considerati tali parametri, risulta essere:

$$\text{dfe} = n_{\text{dati}} - n_{\text{par}} - n_{\text{esc}} \quad (23)$$

In generale, il valore di aspettazione per questa distribuzione è di 1, pertanto per  $\tilde{\chi}^2 \gg 1$  si può dedurre che la distribuzione sperimentale non segua quella teorica ipotizzata.

## 5.5 Coefficiente di Determinazione

Il *coefficiente di determinazione* è una proporzione tra la variabilità dei dati e la correttezza del modello statistico utilizzato.

Di seguito spiegheremo nel caso più semplice (*regressione lineare*) come sia definito e come siano intuitivamente ottenuti i suoi valori di aspettazione.

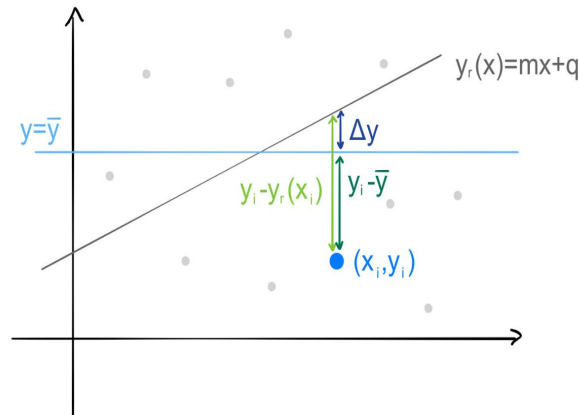
Siano un set di variabili indipendenti (nel nostro caso sono le  $x_i$ ) e un set di variabili dipendenti (nel nostro caso sono le  $y_i$ ) che ipotizziamo di poter assimilare ad una retta ( $y_r(x) = mx + q$ ).

Definiamo *devianza totale* TSS come lo scarto quadratico medio dei dati rispetto alla media ( $\bar{y}$ ):

$$\text{TSS} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (24)$$

Introduciamo, inoltre, il concetto di *devianza residua* RSS come lo scarto quadratico delle variabili dipendenti  $y_i$  rispetto ai corrispettivi punti del modello lineare  $y_r(x_i)$ :

$$\text{RSS} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_r(x_i))^2 \quad (25)$$



*Immagine rappresentativa delle quantità appena considerate:*  
 si osservi la complementarietà fra  $(y_i - \bar{y})$  e  $\Delta y$ , da cui nasceranno le  
 prossime considerazioni, dove  $\Delta y$  è la porzione di devianza  
 descritta dal modello utilizzato.



Con queste premesse, si definisce *coefficiente di determinazione* il seguente rapporto:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} \quad (26)$$

Siccome la quantità  $\frac{\text{RSS}}{\text{TSS}}$  rappresenta la frazione di variazione che dipende dal modello lineare della retta, se tale modello rappresenta correttamente i dati allora il rapporto appena menzionato sarà prossimo a zero ( $R^2 \sim 1$ ).

Una quantità utile collegata a questo concetto è il *coefficiente di determinazione corretto*, che può essere ottenuto secondo la seguente formula:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1} \cdot \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} \quad (27)$$

in cui  $n$  corrisponde al numero di punti realmente utilizzati nel *fit* e  $k$  al numero di parametri utilizzati nel modello.

Per definizione  $\bar{R}^2 \leq R^2$  ed il valore di  $R^2$  varia tra 0 ed 1.

Possiamo, quindi, concludere che:

- tanto più il valore si avvicinerà a 0, sempre meno il modello utilizzato spiegherà i dati in esame;
- quando, invece, il valore sarà prossimo ad 1, il modello risulterà coerente con i dati analizzati.

## 6 Fonti

1. John R. Taylor, *Introduzione agli analisi degli errori* , 1999  
(ISBN: 88 0817 656 1)
2. Maria Garetto, *Statistica: lezioni ed esercizi* , 2002
3. Khan Academy: *R-squared or coefficient of determination*
4. Phyphox - Physical Phone Experiments  
(<https://phyphox.org>)
5. Tracker 5.1.5 - Video Analysis and Modeling Tool  
(<https://physlets.org/tracker>)
6. Utama Alan Deta, Husni Mubarak, Nadi Suprpto, Alif Syaiful Adam, Abd. Kholiq - *The Comparison of Static Friction Coefficient on Wood Between the Combination of Wood-Metal Load System and Wood-Sand Load System* - 2018