

Università degli Studi dell'Insubria  
Dipartimento di Scienze e Alta Tecnologia  
Corso di Laurea Triennale in Fisica

# Oscillatore Armonico

Erica Brisigotti & Ylenia Mascolo



Esame di Laboratorio di Fisica I  
Docente: Prof. Dott. Massimo Luigi Maria Caccia  
Assistente di Laboratorio: Dott.ssa Samuela Lomazzi  
Anno Accademico 2018-2019

Settembre 2020

# Indice

<b>1</b>	<b>Descrizione del modello teorico</b>	<b>3</b>
1.1	Oscillatore armonico libero . . . . .	3
1.2	Oscillatore armonico smorzato . . . . .	3
1.3	Oscillatore armonico smorzato forzato . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Descrizione dell'apparato sperimentale</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Analisi dati</b>	<b>7</b>
3.1	Oscillatore armonico libero . . . . .	7
3.2	Oscillatore armonico smorzato . . . . .	9
3.2.1	Stima di $\omega_0$ tramite un <i>fit</i> esponenziale-sinusoidale . . . . .	9
3.2.2	Stima di $\omega_0$ tramite un <i>fit</i> puramente esponenziale . . . . .	11
3.3	Oscillatore armonico smorzato e forzato . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Appendice</b>	<b>16</b>
5.1	Media e relativa incertezza . . . . .	16
5.2	Test del Chi Quadrato . . . . .	16
5.3	Propagazione degli errori . . . . .	17
5.4	Pesi . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Fonti</b>	<b>17</b>

# 1 Descrizione del modello teorico

L'esperienza di laboratorio descritta a seguire si pone come obbiettivo di analizzare il comportamento di vari oscillatori armonici e di caratterizzarli tramite i parametri di pulsazione propria  $\omega_0$  e coefficiente di smorzamento  $\gamma$ .

## 1.1 Oscillatore armonico libero

Nei moti armonici entra tipicamente in gioco una forza di richiamo definita dalla legge di Hooke:

$$F(x) = -kx \quad (1)$$

Applicando la seconda legge di Newton si ottiene  $m\ddot{x} = -kx$ , relazione che può essere scritta come equazione differenziale lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti e omogenea:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2)$$

Le sue soluzioni sono della forma:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (3)$$

e corrispondono all'equazione del moto di un oscillatore semplice, dove  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  è la frequenza caratteristica del sistema,  $\varphi$  è uno sfasamento, mentre  $B = x(0)$  e  $A = \dot{x}(0)/\omega_0$  sono parametri che dipendono dalle condizioni iniziali  $x(0)$  e  $\dot{x}(0)$ .

Si osserva che il moto è periodico di periodo  $T$  (corrispondente all'intervallo di tempo impiegato dal corpo per passare tra una coppia di punti omologhi):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4)$$

La relativa formula inversa sarà impiegata nell'analisi per stimare la pulsazione  $\omega_0$  propria dell'oscillatore armonico semplice.

## 1.2 Oscillatore armonico smorzato

Nel caso di un oscillatore armonico smorzato, oltre alla classica forza di richiamo:

$$F(x) = -kx \quad (5)$$

entra in gioco una forza frenante della forma:

$$F_a = -b\dot{x} \quad (6)$$

Sfruttando il secondo principio di Newton si ottiene un'equazione differenziale lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti e omogenea:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (7)$$

La soluzione può essere trovata, in funzione dei due parametri:

$$2\gamma = \frac{b}{m} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8)$$

Partendo dal polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (9)$$

le soluzioni dell'equazione differenziale sono della forma:

$$x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \quad (10)$$

Per ottenere però delle forme più esplicite per la traiettoria è possibile dividere i casi a seconda dei valori di  $\gamma^2 - \omega_0^2$ :

- \* nel caso **sovra-smorzato** l'attrito domina sul termine oscillante (siccome si tratta di numeri non-negativi in quanto frequenze), infatti:

$$\gamma^2 - \omega_0^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma > \omega_0 \quad (11)$$

Pertanto le soluzioni del polinomio caratteristico sono numeri reali ed è possibile far ricorso al seno iperbolico, ottenendo quindi:

$$x(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \left[ e^{+\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right] = \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \sinh \left( \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t \right) \quad (12)$$

che corrisponde all'equazione del moto di un oscillatore sovra-smorzato, il quale non ha un andamento periodico.

- \* nel caso **sotto-smorzato** l'oscillatore domina sull'effetto smorzante, ovvero si ottiene:

$$\gamma^2 - \omega_0^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma < \omega_0 \quad (13)$$

Pertanto le soluzioni del polinomio caratteristico sono numeri puramente immaginari. Si può quindi definire  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$  in modo tale da poter scrivere le soluzioni come:

$$\pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \pm i \omega_1 \quad (14)$$

e l'equazione del moto come:

$$x(t) = \frac{v_0}{2i\omega_1} e^{-\gamma t} \left[ e^{+i\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t} \right] = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t) \quad (15)$$

con  $A_0 = v_0/\omega_1$  ampiezza massima di oscillazione. All'oscillatore armonico sotto-smorzato è possibile associare un periodo  $T$  pari a:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (16)$$

La relativa formula inversa sarà impiegata nell'analisi per stimare la pulsazione  $\omega_0$  propria dell'oscillatore armonico sotto-smorzato.

- \* nel caso di **smorzamento critico**, si ottiene che le due soluzioni reali coincidenti valgono  $\lambda = -\gamma$  poichè:

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \gamma = \omega_0 \quad (17)$$

Pertanto la soluzione dell'equazione differenziale sarà della forma:

$$x(t) = Ate^{-\gamma t} + Be^{-\gamma t} \quad (18)$$

la quale corrisponde all'equazione del moto di un oscillatore in smorzamento critico, il quale non ha un andamento periodico.

### 1.3 Oscillatore armonico smorzato forzato

Nel caso di un oscillatore armonico smorzato forzato, entrano in gioco tre diverse forze:

1. una forza di richiamo della forma:

$$F(x) = -kx \quad (19)$$

2. una forza di attrito pari a:

$$F_a = -b\dot{x} \quad (20)$$

3. una forzante periodica della forma:

$$F_{\text{ext}} = F_0 \cos(\Omega t) \quad (21)$$

dove  $\Omega$  è la frequenza caratteristica della forzante e  $F_0$  la sua ampiezza massima.

Applicando quindi la seconda legge di Newton:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos(\Omega t) \quad (22)$$

si ottiene che:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) \quad (23)$$

che può essere riscritta, introducendo  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  e  $2\gamma = \frac{b}{m}$ , come:

$$\ddot{x} + \gamma^2 \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t) \quad \text{con} \quad f_0 = \frac{F_0}{m} \quad (24)$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti e disomogenea. Pertanto una sua soluzione sarà data da una combinazione lineare di una soluzione dell'equazione omogenea associata  $x_{\text{om}}(t)$ , e di una soluzione particolare  $x_{\text{p}}(t)$ : si noti che la soluzione dell'equazione omogenea sarà proprio uguale alle soluzioni trovate per l'oscillatore smorzato. Si può però osservare che, in tutti e tre i casi considerati, in condizioni di regime ( $t \gg \frac{1}{\gamma}$ ) si ha che  $x_{\text{om}}(t) \rightarrow 0$ . Pertanto, in tali condizioni, si potrà fare la seguente approssimazione:

$$x(t) = x_{\text{om}}(t) + x_{\text{p}}(t) \sim x_{\text{p}}(t) \quad (25)$$

dove la soluzione particolare ha forma:

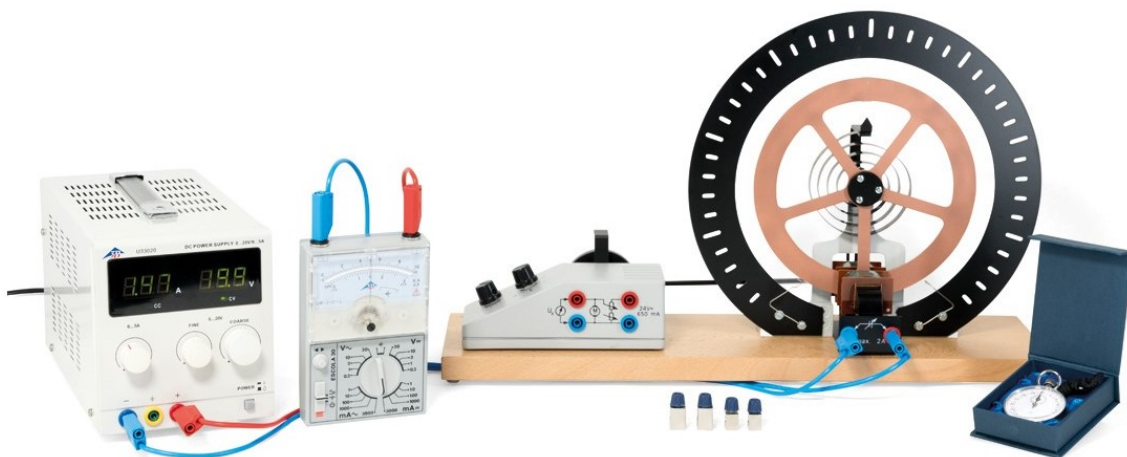
$$x(t) = A \cos(\Omega t - \varphi) \quad \text{con} \quad A = \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^2\Omega^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2}} \quad (26)$$

L'espressione per l'ampiezza  $A$  sarà impiegata nell'analisi per stimare la pulsazione  $\omega_0$  dell'oscillatore armonico smorzato e forzato.

## 2 Descrizione dell'apparato sperimentale

L'apparato sperimentale utilizzato per l'esperienza di laboratorio consiste in:

- \* un pendolo a torsione di Pohl (con il relativo alimentatore), ovvero un sistema oscillante in grado di riprodurre il comportamento di un oscillatore armonico libero. Questo è dotato di un anello graduato con sensibilità pari a  $\sigma_s = 0.2$  UA (unità arbitrarie della scala in questione) che permette di misurare l'ampiezza di oscillazioni;
- \* un freno elettromagnetico a corrente di Focault, impiegato per riprodurre il comportamento di un oscillatore armonico smorzato;
- \* un'asta di eccitazione collegata ad un motore a corrente continua con velocità regolabile, necessaria per riprodurre il comportamento da oscillatore armonico forzato tramite una combinazione periodica (di pulsazione  $\Omega$ ) di allungamento e compressione delle molle a spirale del pendolo di torsione di Pohl;
- \* un multimetro digitale utilizzato per misurare i differenti valori di intensità  $I$  di corrente forniti al motore per produrre i diversi smorzamenti;
- \* una fotocellula utilizzata per misurare, nei diversi casi analizzati, i periodi di oscillazione come l'intervallo di tempo che intercorre in coppie di posizioni estremanti successive.



**Figura 1:** Schematizzazione dell'apparato strumentale utilizzato.

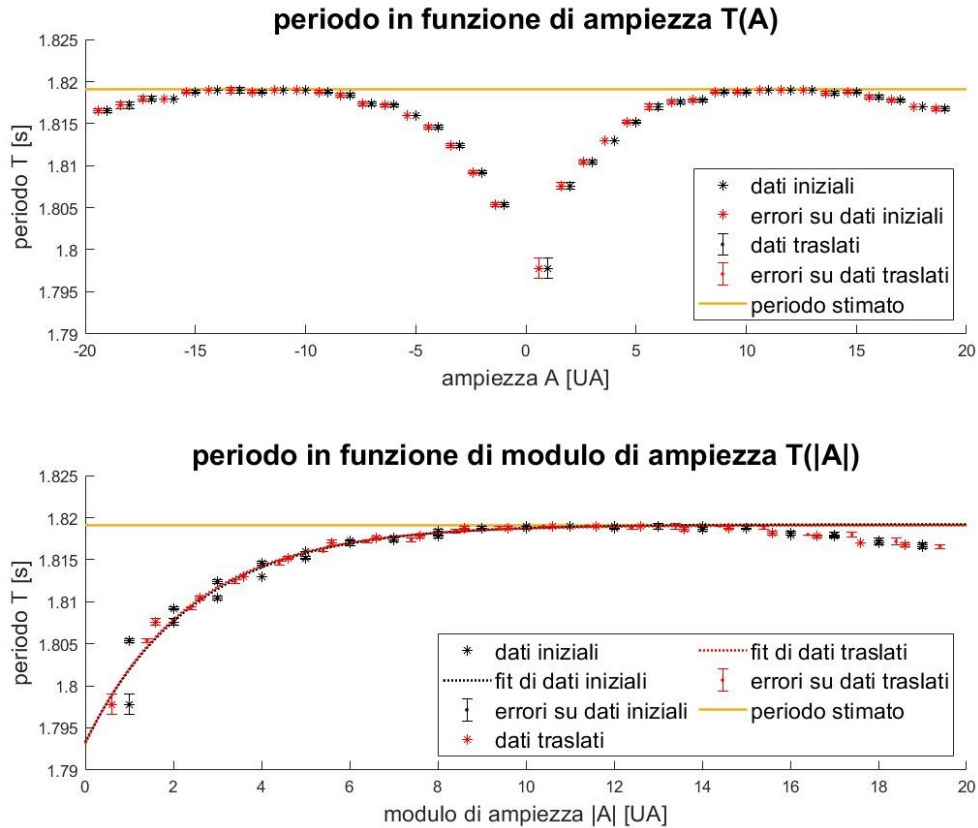
### 3 Analisi dati

Per tutte e tre le tipologie di oscillatori armonici descritti in precedenza, sarà stimato il valore di pulsazione  $\omega_0$  caratteristico del pendolo a torsione utilizzato e, se possibile, dei coefficienti di smorzamento  $\gamma$ . Si osserverà che le tre analisi saranno accomunate dalla presenza di uno sfasamento iniziale  $\delta$  legato alla procedura di misura e stimato nel caso più semplice.

#### 3.1 Oscillatore armonico libero

Il primo caso analizzato corrisponde all'oscillatore armonico semplice: dell'apparato strumentale è stato pertanto sfruttato solamente il pendolo a torsione (spegnendo il freno elettromagnetico). Per ricavare il valore di pulsazione  $\omega_0$  caratteristico del pendolo sono stati misurati i periodi di oscillazione  $T$  al variare dell'ampiezza  $A$ , corrispondente alla condizione iniziale del pendolo.

A seguire sono rappresentati i periodi, in funzione sia dell'ampiezza  $A$  che del suo modulo  $|A|$ :



**Figura 2:** Rappresentazione dell'andamento dei periodi di un oscillatore semplice al variare dell'ampiezza  $A$  e del suo modulo  $|A|$ .

Come è possibile notare nel primo grafico in figura (2), i dati iniziali (in nero) non risultano essere particolarmente simmetrici rispetto all'origine. Per indagare ulteriormente questo fatto, si è deciso quindi di rappresentare tali dati in funzione del modulo dell'ampiezza  $|A|$ : i risultati così ottenuti (riportati nel secondo grafico sempre in nero) confermano il comportamento anomalo che si suppone provenire da mancata calibrazione dell'oscillatore in  $A = 0$  (ovvero dalla presenza di uno sfasamento  $\delta$ ). Per evitare che le analisi ne risultassero inficiate è stato computato un valore di tale sfasamento  $\delta$ , da sottrarre ai dati iniziali in modo tale da ottenere i dati corretti (rappresentati in rosso).

La strategia utilizzata per individuare il valore di sfasamento  $\delta$  si è basata sull'utilizzo di un *fit* relativo all'andamento dei periodi in funzione del modulo dell'ampiezza traslata di  $\delta_i$ , ovvero  $x = |A - \delta_i|$ . La tipologia di *fit* utilizzata è quella esponenziale:

$$T(x) = -Be^{\alpha x} + T_0 \quad (27)$$

tipica delle transizione a regime di vari apparati: infatti  $\alpha$  rappresenta il *rate* di crescita mentre  $T_0$  è il valore raggiunto a regime e corrisponde al periodo dell'oscillatore armonico semplice, necessario per il calcolo della pulsazione  $\omega_0$ .

I valori  $\delta_i$  impiegati sono stati scelti in un intervallo compreso tra  $\delta_0 = 0$  UA e  $\delta_5 = 1$  UA (siccome si presuppone che lo sfasamento non sia stato notato in laboratorio poichè ridotto) con step pari alla sensibilità  $\sigma_A = 0.2$  UA dell'anello graduato.

$i$	0	1	2	3	4	5
$\delta_i$ [UA]	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\tilde{\chi}_i^2$	$1.89 \cdot 10^{-6}$	$7.20 \cdot 10^{-7}$	$3.49 \cdot 10^{-7}$	$6.25 \cdot 10^{-7}$	$1.30 \cdot 10^{-6}$	$2.20 \cdot 10^{-6}$

**Tabella 1:** Valori di  $\tilde{\chi}_i^2$  corrispondenti ai *fit* esponenziale ottenuti per ciascun valore  $\delta_i$ .

Come visualizzato nella tabella precedente, il criterio per stabilire il valore ottimale  $\delta = \delta_2 = 0.4$  AU si è basato sull'individuazione del minimo valore di  $\tilde{\chi}^2$ , corrispondente a  $i = 2$ . Il valore appena trovato sarà impiegato in tutte le analisi a seguire in modo tale da correggere lo sfasamento iniziale che caratterizza tutti i dati raccolti.

Questa strategia è stata inoltre utile per ricavare il periodo caratteristico del pendolo semplice, che corrisponde al parametro  $T_0$  stimato dal *fit* corretto, riportato di seguito:

	B [s]	$\alpha$ [UA <sup>-1</sup> ]	$T_0$ [s]
Dati originali ( $\delta_0 = 0$ UA)	$0.026 \pm 0.002$	$0.40 \pm 0.06$	$1.819 \pm 0.001$
Dati traslati ( $\delta_2 = 0.4$ UA)	$0.0260 \pm 0.0008$	$0.42 \pm 0.02$	$1.8191 \pm 0.0003$

**Tabella 2:** Parametri stimati dal *fit* esponenziale sia per i dati originali/sfasati sia per i dati correttamente traslati, corredati dei rispettivi errori.

Come anticipato, il parametro  $T_0$  ha permesso di stimare la pulsazione  $\omega_0$  caratteristica dell'oscillatore armonico semplice tramite la formula:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 3.4540 \text{ rad/s} \quad \sigma_{\omega_0} = \frac{2\pi\sigma_{T_0}}{T_0^2} = 0.0006 \text{ rad/s} \quad (28)$$

dove l'errore  $\sigma_{\omega_0}$  è stato trovato attraverso propagazione degli errori<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>vedi **5.3 Appendice: Propagazione degli errori**.



### 3.2 Oscillatore armonico smorzato

Il secondo caso analizzato riguarda l'oscillatore armonico in condizione di sotto-smorzamento: è stato quindi sfruttato il freno elettromagnetico per introdurre nel sistema uno smorzamento, descritto dal parametro  $\gamma$  e di cui sono stati presi tre valori corrispondenti ad altrettante intensità  $I$ .

$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.35 A	0.60 A	0.85 A

**Tabella 3:** Valori di intensità di corrente utilizzati per introdurre nel sistema semplice uno smorzamento.

Per ricavare il valore di pulsazione  $\omega_0$  per ciascun caso considerato, sono state misurate le ampiezze  $A$  di oscillazione nel tempo. I dati ottenuti sono stati rappresentati e analizzati attraverso due strategie di *fit*, una puramente esponenziale e una anche sinusoidale, siccome quella effettuata per prima in ordine cronologico si è rivelata non compatibile con il valore di riferimento  $\omega_0$  trovato per l'oscillatore semplice.

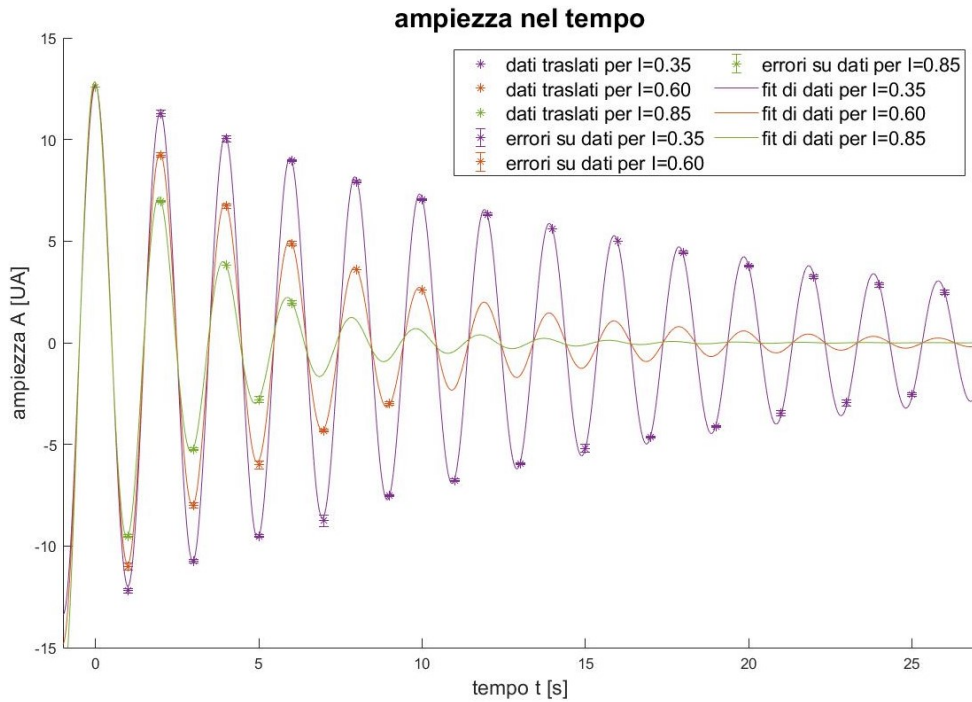
#### 3.2.1 Stima di $\omega_0$ tramite un *fit* esponenziale-sinusoidale

La prima strategia utilizzata ha permesso di analizzare i dati corrispondenti ai tre diversi valori di corrente (riportati in tabella (3)) per stimare la frequenza propria dell'oscillatore  $\omega_0$ . Questo è stato possibile grazie alla relazione (16) e a un *fit* della forma:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t) \quad (29)$$

dove  $A_0$  è l'ampiezza massima corrispondente all'ampiezza iniziale,  $\gamma$  è il parametro legato allo smorzamento e  $\omega_1$  è la pulsazione del pendolo nel caso di sotto-smorzamento.

Di seguito sono rappresentati i dati raccolti per ciascun caso assieme ai rispettivi *fit*:



**Figura 3:** Rappresentazione degli andamenti temporali delle ampiezze di un oscillatore sotto-smorzato con relativi *fit* ed errori, per ciascun valore di intensità.

Dal ciascun *fit* sono stati ricavati i seguenti parametri:

	$A_0$ [UA]	$\gamma$ [Hz]	$\omega_1$ [rad/s]	$\tilde{\chi}^2$
$I_1$	$12.66 \pm 0.09$	$0.055 \pm 0.001$	$3.164 \pm 0.002$	1.06
$I_2$	$12.7 \pm 0.2$	$0.16 \pm 0.01$	$3.16 \pm 0.05$	0.76
$I_3$	$12.8 \pm 0.2$	$0.30 \pm 0.02$	$3.20 \pm 0.06$	0.85

**Tabella 4:** Parametri stimati dai *fit* per i diversi smorzamenti rappresentati, corredati dei rispettivi errori, con estimatore di bontà  $\tilde{\chi}^2$ .

Dai dati riportati in tabella (4) è stato possibile stimare il valore di  $\omega_0$  e la sua incertezza:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \gamma^2} \quad \sigma_{\omega_0} = \frac{\sqrt{4\omega_1^2\sigma_{\omega_1}^2 + 4\gamma^2\sigma_{\gamma}^2}}{2\sqrt{\omega_1^2 + \gamma^2}} \quad (30)$$

Nella tabella a seguire sono riportati i valori di pulsazione  $\omega_0$ , trovati mediante le formule appena menzionate, per ogni smorzamento utilizzato:

$\omega_0$ per $I_1$	$\omega_0$ per $I_2$	$\omega_0$ per $I_3$
$3.16 \pm 0.01$ rad/s	$3.17 \pm 0.05$ rad/s	$3.21 \pm 0.06$ rad/s

**Tabella 5:** Valori di pulsazione  $\omega_0$  ottenuti nei diversi casi analizzati.

I valori così ottenuti sono stati confrontati con il valore di riferimento  $\omega_0 = 3.4540 \pm 0.0006$  rad/s, ottenuto in precedenza nell'oscillatore armonico semplice, calcolando la distanza in unità di sigma  $\Delta_\sigma$  come il rapporto tra la distanza  $\Delta$  dei valori considerati e l'errore combinato  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\omega_0^s}^2 + \sigma_{\omega_0^I}^2} \quad (31)$$

dove  $\sigma_{\omega_0^s} = 0.0006$  rad/s è l'errore sul valore di riferimento mentre  $\sigma_{\omega_0^I}$  è l'incertezza per ciascuno smorzamento analizzato.

	$\Delta$ [rad/s]	$\sigma$ [rad/s]	$\Delta_\sigma$
$I_1$	0.29	0.01	29.00
$I_2$	0.29	0.05	5.80
$I_3$	0.25	0.06	4.17

**Tabella 6:** Distanza in unità di sigma  $\Delta_\sigma$  calcolate come rapporto tra la distanza  $\Delta$  dei valori considerati e l'errore combinato  $\sigma$ , per ciascuno smorzamento.

Dalla tabella appena riportata è possibile notare che le distanze in unità di sigma  $\Delta_\sigma$  risultano eccessivamente elevate (soprattutto rispetto alla soglia usuale di 3), e le stime non possono essere considerate statisticamente compatibili con il valore di riferimento.

### 3.2.2 Stima di $\omega_0$ tramite un *fit* puramente esponenziale

La seconda strategia utilizzata ha permesso di analizzare i dati corrispondenti ai tre diversi valori di corrente (riportati in tabella (3)) per stimare la frequenza propria dell'oscillatore  $\omega_0$ . Questo è stato possibile grazie a un *fit* della forma:

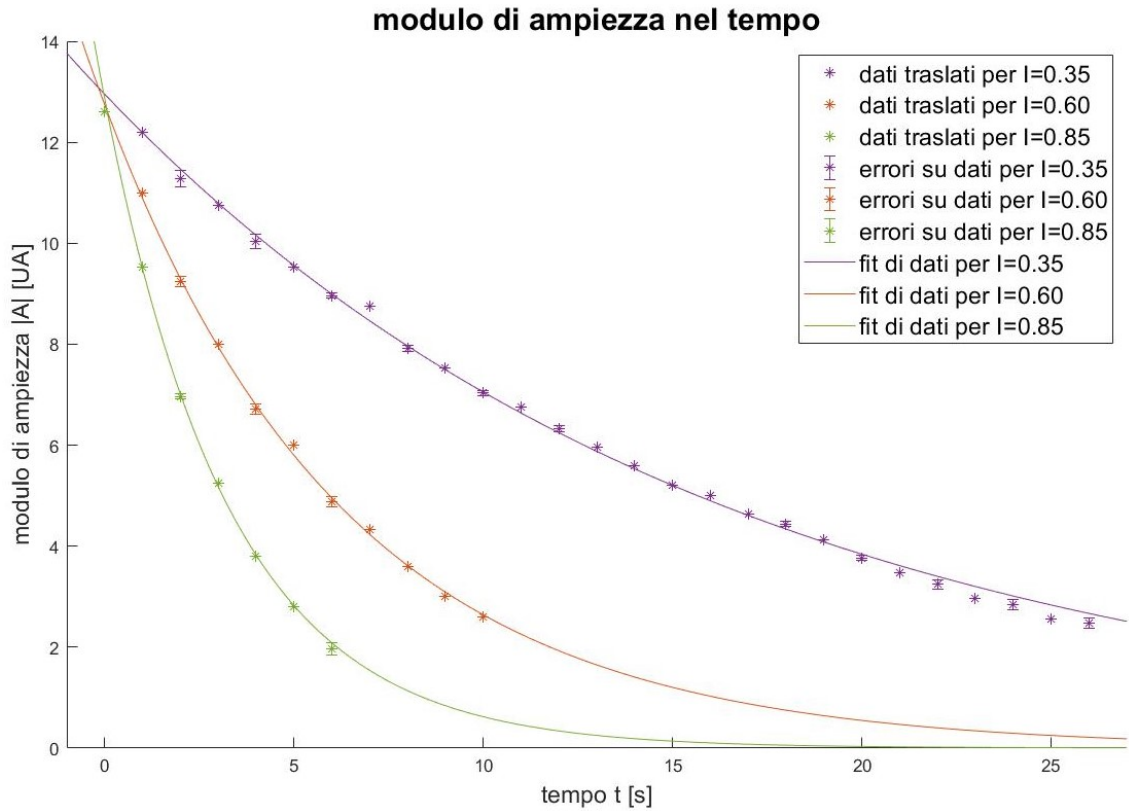
$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t} \quad (32)$$

dove  $A_0$  è l'ampiezza massima corrispondente all'ampiezza iniziale e  $\gamma$  è il parametro legato allo smorzamento. Inoltre, per poter stimare il valore di  $\omega_0$  è stato necessario calcolare la pulsazione  $\omega_1$  dell'oscillatore sotto-smorzato a partire dal periodo  $T_1$  misurato (come la media di una serie di valori) del tempo trascorso tra due istanti di massimo successivi:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad \sigma_{\omega_1} = \frac{2\pi\sigma_{T_1}}{T_1^2} \quad (33)$$

dove l'incertezza  $\sigma_{\omega_1}$  è stata ottenuta tramite la propagazione degli errori<sup>2</sup> a partire dall'errore sul periodo medio<sup>3</sup>  $\sigma_{T_1}$ .

Di seguito sono rappresentati i dati raccolti per ciascun caso assieme ai rispettivi *fit*:



**Figura 4:** Rappresentazione degli andamenti temporali del modulo delle ampiezze di un oscillatore sotto-smorzato con relativi *fit* ed errori, per ciascun valore di intensità considerato.

<sup>2</sup>vedi 5.3 Appendice: Propagazione degli errori.

<sup>3</sup>vedi 5.1 Appendice: Media e relativa incertezza.

Dal ciascun *fit* sono stati ricavati i seguenti parametri:

	$A_0$ [UA]	$\gamma$ [Hz]	$\tilde{\chi}^2$
$I_1$	$12.95 \pm 0.07$	$0.0608 \pm 0.0005$	1.68
$I_2$	$12.8 \pm 0.1$	$0.158 \pm 0.002$	0.76
$I_3$	$12.9 \pm 0.1$	$0.303 \pm 0.005$	0.72

**Tabella 7:** Parametri stimati dai *fit* per i diversi smorzamenti rappresentati, corredati dei rispettivi errori, con estimatore di bontà  $\tilde{\chi}^2$ .

Dai dati riportati in tabella (7) è stato possibile stimare il valore di  $\omega_0$  e la sua incertezza:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \gamma^2} \quad \sigma_{\omega_0} = \frac{\sqrt{4\omega_1^2\sigma_{\omega_1}^2 + 4\gamma^2\sigma_{\gamma}^2}}{2\sqrt{\omega_1^2 + \gamma^2}} \quad (34)$$

Nella tabella a seguire sono riportati i valori di pulsazione  $\omega_0$ , trovati mediante le formule appena menzionate, per ogni smorzamento utilizzato:

$\omega_0$ per $I_1$	$\omega_0$ per $I_2$	$\omega_0$ per $I_3$
$3.456 \pm 0.001$ rad/s	$3.4502 \pm 0.0001$ rad/s	$3.4468 \pm 0.0004$ rad/s

**Tabella 8:** Valori di pulsazione  $\omega_0$  ottenuti nei diversi casi analizzati.

É possibile notare che le stime ottenute con questa strategia risultano piú precise rispetto ai valori ricavati tramite il metodo precedente, siccome hanno errori di almeno un ordine di grandezza inferiore rispetto a quelli precedentemente stimati in tabella (5).

Inoltre, i valori ottenuti sono stati confrontati con il valore di riferimento  $\omega_0 = 3.4540 \pm 0.0006$  rad/s, ottenuto in precedenza nell'oscillatore armonico semplice, calcolando la distanza in unità di sigma  $\Delta_\sigma$  come il rapporto tra la distanza  $\Delta$  dei valori considerati e l'errore combinato  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\omega_0^s}^2 + \sigma_{\omega_0^I}^2} \quad (35)$$

dove  $\sigma_{\omega_0^s} = 0.0006$  rad/s è l'errore sul valore di riferimento mentre  $\sigma_{\omega_0^I}$  è l'incertezza per ciascuno smorzamento analizzato.

	$\Delta$ [rad/s]	$\sigma$ [rad/s]	$\Delta_\sigma$
$I_1$	0.002	0.001	2.000
$I_2$	0.003	0.001	3.000
$I_3$	0.006	0.002	3.000

**Tabella 9:** Distanza in unità di sigma  $\Delta_\sigma$  calcolate come rapporto tra la distanza  $\Delta$  dei valori considerati e l'errore combinato  $\sigma$ , per ciascuno smorzamento.

I valori di distanza in unità di sigma  $\Delta_\sigma$  appena riportati risultano inferiori (o uguali) rispetto alla soglia usuale di 3: pertanto le stime ottenute per tutti gli smorzamenti risultano compatibili con il valore di riferimento.

La combinazione di compatibilità appena attestata (in contrasto con il rifiuto provato nella sezione precedente) e migliore precisione rispetto al metodo precedente permette di concludere che la seconda strategia risulta piú efficiente nella stima del valore di pulsazione caratteristica  $\omega_0$ .

### 3.3 Oscillatore armonico smorzato e forzato

L'ultimo caso analizzato riguarda l'oscillatore armonico smorzato-forzato: oltre al freno elettromagnetico è stata impiegata un'asta di eccitazione (collegata alla ruota di rame tramite una molla a spirale). Nel sistema, la smorzante è descritta dal parametro  $\gamma$ , già menzionato in precedenza, mentre la forzante è legata al parametro  $f_0$ . Anche in questo caso sono stati considerati i valori di intensità di corrente riportati in tabella (3).

La quantità  $f_0$  appena menzionata è stata stimata, a partire dall'andamento delle ampiezze massime  $A$  rispetto alla pulsazione  $\Omega$  caratteristica della forzante, tramite un *fit* di forma Lorentziana:

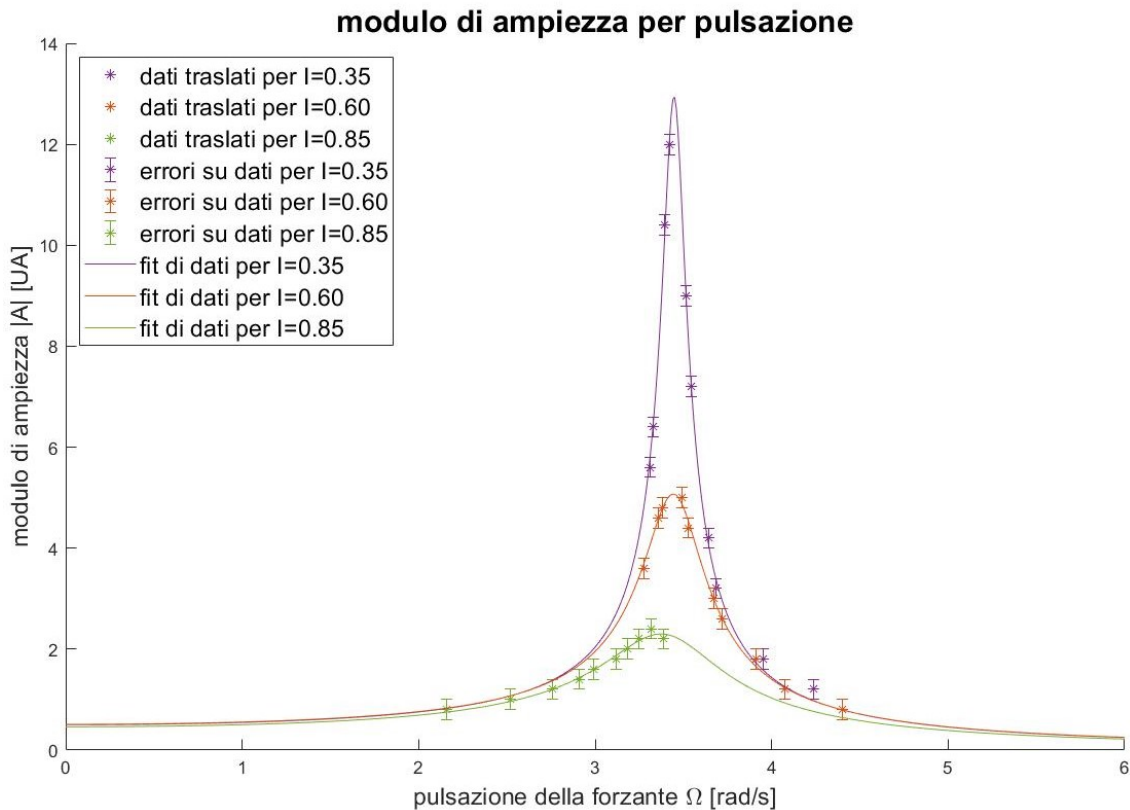
$$A(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \quad (36)$$

assieme alla pulsazione  $\omega_0$  propria dell'oscillatore e al parametro  $\gamma$  caratteristico della smorzante.

Per fare ciò è stato necessario calcolare i valori di pulsazione  $\Omega$  della forzante a partire dalle corrispondenti misure di periodo  $\tau$ :

$$\Omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad (37)$$

Di seguito sono rappresentati i dati relativi alle ampiezze  $A$  (corredati di errori pari alla sensibilità  $\sigma_s = 0.2$  UA della scala graduata) in funzione di  $\Omega$  per ciascun caso, assieme ai rispettivi *fit*:



**Figura 5:** Rappresentazione degli andamenti delle ampiezze di un oscillatore smorzato-forzato al variare della pulsazione  $\Omega$  della forzante, con relativi *fit* ed errori, per ciascun valore di intensità considerato.

Da ciascun *fit* sono stati ricavati i seguenti parametri:

	$f_0$ [UA rad/s]	$\omega_0$ [rad/s]	$\gamma$ [Hz]	$\tilde{\chi}^2$
$I_1$	$5.9 \pm 0.1$	$3.448 \pm 0.002$	$0.067 \pm 0.003$	1.25
$I_2$	$6.0 \pm 0.2$	$3.451 \pm 0.004$	$0.173 \pm 0.007$	0.24
$I_3$	$5.3 \pm 0.5$	$3.41 \pm 0.04$	$0.34 \pm 0.02$	0.14

**Tabella 10:** Parametri stimati dai *fit* per i diversi smorzamenti rappresentati, corredati dei rispettivi errori, con estimatore di bontà  $\tilde{\chi}^2$ .

I risultati ottenuti risultano accettabili per via dei valori di estimatori di bontà  $\tilde{\chi}^2$  ridotti o simili al valore di aspettazione di 1.

Pertanto questi sono stati confrontati con il valore di riferimento  $\omega_0 = 3.4540 \pm 0.0006$  rad/s, ottenuto in precedenza nell'oscillatore armonico semplice, calcolando la distanza in unità di sigma  $\Delta_\sigma$  come il rapporto tra la distanza  $\Delta$  dei valori considerati e l'errore combinato  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\omega_0^s}^2 + \sigma_{\omega_0^I}^2} \quad (38)$$

dove  $\sigma_{\omega_0^s} = 0.0006$  rad/s è l'errore sul valore di riferimento mentre  $\sigma_{\omega_0^I}$  è l'incertezza per ciascuno smorzamento analizzato.

	$\Delta$ [rad/s]	$\sigma$ [rad/s]	$\Delta_\sigma$
$I_1$	0.006	0.002	3.000
$I_2$	0.003	0.004	0.750
$I_3$	0.05	0.04	1.25

**Tabella 11:** Distanza in unità di sigma  $\Delta_\sigma$  calcolate come rapporto tra la distanza  $\Delta$  dei valori considerati e l'errore combinato  $\sigma$ , per ciascuno smorzamento.

I valori di distanza in unità di sigma  $\Delta_\sigma$  appena riportati risultano inferiori (o uguali) rispetto alla soglia usuale di 3: pertanto le stime ottenute per tutti gli smorzamenti risultano compatibili con il valore di riferimento.

## 4 Conclusioni

Questa esperienza si è proposta di stimare la pulsazione  $\omega_0$  caratteristica del pendolo a torsione e dei differenti coefficienti di smorzamento  $\gamma$  utilizzati.

Per quanto riguarda  $\omega_0$ , in ogni caso analizzato è stato possibile osservare (nelle corrispettive sezioni) la compatibilità delle stime trovate con il valore di riferimento:

$$\omega_0 = 3.4540 \pm 0.0006 \text{ rad/s}$$

trovato nel caso di oscillatore armonico libero.

La compatibilità dei vari coefficienti di smorzamento  $\gamma$  stimati, riportati nelle tabelle (4) e (7), è invece discussa di seguito:

	$\gamma^s$ [Hz]	$\gamma^{sf}$ [Hz]	$\Delta$ [rad/s]	$\sigma$ [rad/s]	$\Delta_\sigma$
$I_1$	$0.0608 \pm 0.0005$	$0.067 \pm 0.003$	0.006	0.003	2.000
$I_2$	$0.158 \pm 0.002$	$0.173 \pm 0.007$	0.015	0.007	2.429
$I_3$	$0.303 \pm 0.005$	$0.34 \pm 0.02$	0.04	0.02	2

**Tabella 12:** Coefficienti di smorzamento nel caso di oscillatore sotto-smorzato ( $\gamma^s$ ) e smorzato-forzato ( $\gamma^{sf}$ ), distanze in unità di sigma  $\Delta_\sigma$  calcolate come rapporto tra la distanza  $\Delta$  dei valori considerati e l'errore combinato  $\sigma$ , per ciascuno smorzamento.

È possibile confermare la compatibilità tra i dati ottenuti nelle due tipologie di oscillazioni poichè le distanze in unità di sigma  $\Delta_\sigma$  risultano inferiori alla soglia usuale di 3. Per questo motivo è possibile trovare un unico valore medio (attraverso una media pesata<sup>4</sup>) di coefficiente di smorzamento  $\gamma$  per ciascun caso:

$\gamma$ per $I_1$	$\gamma$ per $I_2$	$\gamma$ per $I_3$
$0.064 \pm 0.003 \text{ Hz}$	$0.165 \pm 0.008 \text{ Hz}$	$0.32 \pm 0.02 \text{ Hz}$

**Tabella 13:** Valori medi di coefficiente di smorzamento  $\gamma$ , ottenuti nei diversi casi analizzati e corredati dai rispettivi errori.

---

<sup>4</sup>vedi 5.1 **Appendice: Media e relativa incertezza.**

## 5 Appendice

### 5.1 Media e relativa incertezza

Sia  $x_i$  un set di  $N$  dati. Si definisce *valore medio*:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \quad (39)$$

Inoltre, è possibile attribuire a questo valore un'incertezza pari a:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\text{std}(x_i)}{\sqrt{N}} \quad (40)$$

Dove  $\text{std}(x_i)$  è la *deviazione standard* che può essere calcolata tramite la seguente formula:

$$\text{std}(x_i) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|^2} \quad (41)$$

### 5.2 Test del Chi Quadrato

Il *Test del Chi Quadrato* è un test di verifica delle ipotesi utilizzato in statistica, basato sulla distribuzione del  $\chi^2$ .

Siano un set di dati sperimentali  $\{x^s\}$ , caratterizzati da incertezze  $\{\sigma^s\}$ , e dei valori attesi  $\{x^t\}$ ; si definisce il *Chi Quadrato* come:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^s \cdot (x_i^s - x_i^t)^2 \quad (42)$$

dove i pesi usati nell'equazione precedente possano essere calcolati, a partire dagli errori  $\{\sigma^s\}$ , come:

$$\omega_i^s = \frac{1}{(\sigma_i^s)^2} \quad (43)$$

Il valore utile per la verifica delle ipotesi è però il *Chi Quadrato Ridotto* che viene calcolato come:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{\text{dfe}} \quad (44)$$

dove il numero di *gradi di libertà* dfe si ottiene a partire dal numero di dati considerati  $n_{\text{dati}}$ , dal numero di parametri del *fit*  $n_{\text{par}}$  e dal numero di punti esclusi  $n_{\text{esc}}$ ; la formula, considerati tali parametri, risulta essere:

$$\text{dfe} = n_{\text{dati}} - n_{\text{par}} - n_{\text{esc}} \quad (45)$$

In generale, il valore di aspettazione per questa distribuzione è di 1, pertanto per  $\tilde{\chi}^2 \gg 1$  si può dedurre che la distribuzione sperimentale non segua quella teorica ipotizzata.



### 5.3 Propagazione degli errori

Sia una funzione continua  $f(x_1, \dots, x_n)$  dipendente da  $n$  variabili  $x_1, \dots, x_n$ , caratterizzate rispettivamente da incertezze  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ . Supponendo che tali incertezze possano essere ritenute indipendenti e casuali, è possibile stimare l'incertezza  $\sigma_f$  sul valore di  $f(x_1, \dots, x_n)$  nel seguente modo:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_i^2} \quad (46)$$

### 5.4 Pesi

Data una serie di dati  $\{y_i\}$  e il relativo *set* di incertezze  $\{\sigma_i\}$ , è possibile ricavare i pesi  $\{w_i\}$  da attribuire a  $\{y_i\}$  come:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i^2} & \sigma_i \neq 0 \\ 0 & \sigma_i = 0 \end{cases} \quad (47)$$

## 6 Fonti

1. John R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*, 1999
2. Maria Garetto, *Statistica: lezioni ed esercizi*, 2002
3. S. Rosati, *Fisica generale: meccanica, acustica, termologia, termodinamica, teoria cinetica dei gas*, 1994