3 Egenvärden och diagonalisering §4.1-§4.6 §4.1 (4-7), §4.2 (6), §4.3 (12,14), §4.4 (1,3,8-9), §4.6 (1,11)

4.1.4: Hitta en bas till egenrummet E_0 till operatorn $\frac{d^2}{dt^2}$ på $C^\infty(\mathbb{R})$.

Lösn: Om $\frac{d^2}{dt^2}(f) = 0$ så är $f = ax + b$ för några $a, b \in \mathbb{R}$ och därför är $\{1, t\}$ en bas för E_0.

4.1.7: På $\mathbb{R}_2[t]$ låt

$$L(p)(t) = p(t) + p(-t).$$

Hitta en bas för E_2.

Lösn: Om $p \in \mathbb{R}_2[t]$ så kan p skrivas som

$$p = at^2 + bt + c \quad \text{för några } a, b, c \in \mathbb{R}$$

och $p(t) + p(-t) = 2(at^2 + c)$ vilket är lika med $2p(t)$ om och endast om $b = 0$. Dvs, en bas för E_2 är $\{1, t^2\}$.

4.2.6: Antag att vi har en bas $b_1, \ldots, b_n$ av egenvektorer till en operator A med motsvarande egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Visa att

$$L = (A - \lambda_1 I) \circ (A - \lambda_2 I) \circ \ldots \circ (A - \lambda_n I)$$

är nolltransformationen (Här är $(\lambda_i I)(v) = \lambda_i v$)

Lösn: Vi har att $(A-\lambda_i I)A = A^2-\lambda_i A = A(A-\lambda_i I)$

och $(A-\lambda_i I)\lambda_j I = \lambda_j A - \lambda_i\lambda_j I = \lambda_j I(A-\lambda_i I)$

så

$$(A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_n I) = (A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_{n-1}I)A - (A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_{n-1}I)\lambda_n I$$

$$= A(A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_{n-1}I) - \lambda_n I(A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_{n-1}I)$$

$$= (A-\lambda_n I)(A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_{n-1}I)$$

och på liknande sätt kan vi flytta vilken faktor $(A-\lambda_i I)$ som helst. Detta betyder att ordningen på faktorerna kan väljas hur som helst. Detta ger att $L(b_i)=0$ $\forall i$ eftersom $(A-\lambda_i I)b_i = 0$. Varje vektor kan skrivas som $v = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ och

$$L(v) = a_1 L(b_1) + \cdots + a_n L(b_n) = 0,$$

dvs $L = 0$.

4.3.12: Diagonalisera (på $\mathbb{R}_2[t]$) operatorn

$$L(p)(t) = -p(0) + 3p(1)t + p(2)t^2$$

Lösn: Basvektorerna avbildas som

$$\left.\begin{aligned} L(1) &= -1+3t+t^2 \\ L(t) &= -0+3t+2t^2 \\ L(t^2) &= -0+3t+4t^2 \end{aligned}\right\}$$

Så matrisen till L är

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiska polynomet ges av

$$\det(M - xI) = \begin{vmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 3 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= (-1-x)\big((x-3)(x-4)-6\big)$$

$$= (-1-x)(x^2-7x+6)$$

$$= -(x+1)(x-1)(x-6)$$

Så egenvärdena till L är $-1, 1, 6$. Motsvarande egenvektorer får vi då som bas för kärnan till $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, resp. $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Gausselim:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \overset{\text{välj}}{\Longrightarrow} v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och välj $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.3.14: Visa att om A är diagonaliserbar så är $p_A(A) = 0$.

Lösn: Detta följer av 4.2.6: Om A är diagonaliserbar och $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är motsv. egenvärden så har vi $p_A(A) = \pm(A-\lambda_1)(A-\lambda_2)\cdots(A-\lambda_n) = 0$.

4.4.8: Finns det en reell matris som är konjugat till
$$D = \begin{pmatrix} 3+2i & 0 \\ 0 & 3+2i \end{pmatrix} \; ?$$

__Lösn:__ Nej: Om en reell matris har komplexa egenvärden så har dess karaktäristiska polynom
$$p_A(x) = x^2 + ax + b$$
där $a^2 - 4b < 0 \iff a^2 < 4b$. Då har $p_A(x)$ rötter $x_1 = -\frac{a}{2} + i\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$ och $x_2 = -\frac{a}{2} - i\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$ vilka är komplexkonjugat. Dvs egenvärdena måste vara reella eller komplexkonjugat. Så svaret är nej.

(*) __En ännu enklare lösn:__ Om P inverterbar har vi
$$PDP^{-1} = P\,((3+2i)I)\,P^{-1} = (3+2i)PP^{-1} = (3+2i)I = D.$$

4.4.9: Finns det en reell matris som är konjugat till
$$D = \begin{pmatrix} 3+2i & 0 \\ 0 & 3-2i \end{pmatrix} \; ?$$

__Lösn:__ Ja, matrisen $3I$ har egenvärde 3 och matrisen $2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ har egenvärden $2i, -2i$ så
$$3I + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
har diagmatris D.

<u>4.6.11</u>: Hitta egenvärden plus egenvekt. Till

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Lösn:</u> Använd trick 4 sida 78 i boken.