7	Adjungerade och hermiteska operatorer	§7.1-§7.3	§7.1 (4-7), §7.2 (5-6), §7.3 (4,6,8-10)

7.1.4 Låt $V = \mathbb{R}^n$ med icke-standard inre produkt och låt L vara operatorn som ges av multiplikation med en matris A. Hitta matrisen till $L^\dagger$ i termer av A och metrikmatrisen G.

Lösn: Vi har att

$$\begin{aligned} \langle A\bar{x} \mid \bar{y} \rangle &= (A\bar{x})^T G\bar{y} \\ &= \bar{x}^T A^T G \bar{y} \\ &= \bar{x}^T G (G^{-1} A^T G)\bar{y} \end{aligned}$$

så $G^{-1}A^T G$ är matrisen till $L^\dagger$.

7.2.5: Låt A vara en operator. Visa att $H = A^\dagger A$ är en Hermitesk operator med icke-negativa egenvärden.

Lösn: Vi har att

$$\begin{aligned} \langle A^\dagger A\bar{x} \mid \bar{y} \rangle &= \langle A\bar{x} \mid A\bar{x} \rangle \\ &= \langle \bar{x} \mid A^\dagger A\bar{y} \rangle \end{aligned}$$

så $A^\dagger A$ är Hermitesk. Om $\bar{x}$ är en egenvektor sådan att $|\bar{x}| = 1$ med egenvärde λ så får vi

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \lambda\langle \bar{x} | \bar{x} \rangle \\
&= \langle \lambda\bar{x} | \bar{x} \rangle \\
&= \langle A^{\dagger}A\bar{x} | \bar{x} \rangle \\
&= \langle A\bar{x} | A\bar{x} \rangle \\
&= |A\bar{x}|^2 \geq 0 .
\end{aligned}
$$

7.3.4: Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ och bestäm vilka olika former kurvan $f_A(x) = 1$ kan ha?

Lösn: Vi har

$$f_A(x) = x^T A x .$$

Eftersom A är symmetrisk så är A Hermitesk, dvs har reella egenvärden och A är diagonaliserbar(*) så vi kan välja en ortonormal bas $\mathcal{B}$ av egenvektorer så att basbytesmatrisen är en rotationsmatris. Dvs kurvan $f_A(x) = 1$ har samma form i basen $\mathcal{B}$. Låt $y = [x]_{\mathcal{B}}$ och låt P vara basbytesmatrisen. Då har vi

$$
\begin{aligned}
x^T A x &= (Py)^T A (Py) \\
&= y^T (P^T A P) y \\
&= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2
\end{aligned}
$$

där λ_1 och λ_2 är egenvärden till A. Vi har alltså ekvationen

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1 \qquad (1).$$

i) Om $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ beskriver (1) en ellips.

ii) Om $\operatorname{sgn}(\lambda_1) \neq \operatorname{sgn}(\lambda_2)$ och $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ beskriver (1) en hyperbel.

iii) Om $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ (eller vice versa) har vi

$$y_2^2 = \frac{1}{\lambda_2} \iff \left(y_2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)\left(y_2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right) = 0$$

som beskriver två parallella linjer.

iv) Om $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ så har (1) ingen lösning så vi har tomma mängden.

(*) Om A ej är diagonaliserbar har A en generaliserad egenvektor av ordning ≥ 2. Dvs det finns en vektor v sådan att

$$(A - \lambda I)^2 v = 0 \quad \text{men} \quad (A - \lambda I)v \neq 0.$$

Men då har vi

$$\begin{aligned} 0 \neq \langle (A-\lambda I)v \mid (A-\lambda I)v \rangle &= v^T (A-\lambda I)^T (A-\lambda I) v \\ &= v^T (A-\lambda I)^2 v \\ &= 0 \end{aligned}$$

vilket är en motsägelse. Så A är diagonaliserbar.