ÖVNING 4 - DISKRET MATEMATIK

ERIC AHLQVIST

1. Rekursion

För att hitta sekvensen $\{a_n\}_{n\geq 0}$ som uppfyller relationen

$$a_n + c_{n-1}a_{n-1} + \cdots + c_0 a_0 = b$$

så söker vi efter koefficienter till serien

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n .$$

Rekur. 4. Lös följande rekursion:

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}\,, \quad a_0 = 0, a_1 = 1\,.$$

Lösning. Låt $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Då har vi att

$$\begin{aligned} A(x) &= x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n \\ &= x + 3\sum_{n\geq 2} a_{n-1}x^n - 2\sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^n \\ &= x + 3x\sum_{n\geq 2} a_{n-1}x^{n-1} - 2x^2\sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^{n-2} \\ &= x + 3xA(x) - 2x^2 A(x)\,. \end{aligned}$$

Dvs

$$A(x) = \frac{x}{1-3x+2x^2}\,.$$

Vi vet att

$$\frac{1}{1-\alpha x} = \sum_{n\geq 0} (\alpha x)^n\,.$$

Vi försöker skriva om $A(x)$ som en summa av kvoter på denna form. Vi har att $1-3x+2x^2 = 2(x^2-3x/2+1/2) = 2(x-1)(x-1/2) = (1-x)(1-2x)$ och gör därför ansatsen

$$A(x)/x = \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1-2x}\,.$$

Om vi skriver detta som *en* kvot så får vi

$$\begin{aligned} A(x)/x &= \frac{(1-2x)B + (1-x)C}{1-3x+2x^2} \\ &= \frac{(-2B-C)x + (B+C)}{1-3x+2x^2}\,. \end{aligned}$$

Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

vilket har lösningen $B = -1$, $C = 2$. Vi kan därför skriva

$$\begin{aligned} A(x) &= x\left(\frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x}\right) \\ &= x\left(-\sum_{n\geq 0} x^n + 2\sum_{n\geq 0}(2x)^n\right) \\ &= x\left(\sum_{n\geq 0}(2^{n+1}-1)x^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}(2^n-1)x^n\,. \end{aligned}$$

Detta ger nu att $a_n = 2^n - 1$.

2. Permutationer

Biggs 10.6.2. Låt σ och τ vara permutationer i S_8 som på cykelform skrivs

$$\sigma = (123)(456)(78) \text{ och } \tau = (1357)(26)(4)(8)\,.$$

skriv permutationerna $\sigma\tau, \tau\sigma, \sigma^2, \sigma^{-1}, \tau^{-1}$ på cykelform.

Lösning. Vi har

$$\begin{aligned} \sigma\tau &= (123)(456)(78)(1357)(26)(4)(8) = (1)(24587)(36)\,, \\ \tau\sigma &= (1357)(26)(4)(8)(123)(456)(78) = (16478)(25)(3)\,, \\ \sigma^2 &= (123)(456)(78)(123)(456)(78) = (132)(465)(7)(8)\,. \end{aligned}$$

För att hitta inversen till en permutation på cykelform, läs den baklänges:

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} &= (132)(465)(78)\,, \\ \tau^{-1} &= (1753)(26)(4)(8)\,. \end{aligned}$$

Biggs 10.6.4. Visa att det bara finns 3 permutationer i S_4 som består av exakt 2 cykler.

Lösning. Permutationen kommer att ha formen $(xy)(zw)$. Permutationen förändras inte om vi byter plats på de två parenteserna eller om vi byter x och y eller byter z och w. Därför kan vi anta att $x = 1$. Permutationen bestäms nu fullständigt av värdet på y. Eftersom y kan vara 2,3 eller 4 så finns det exakt 3 sådana permutationer.

Extra Övn 4 (3). Året är 1846. I en radhuslänga med sex hus (numrerade 1-6) bor 6 gifta par (man och kvinna), ett par i varje hus. Var och en av kvinnorna har också (exakt) en bror bland de 6 männen. Ingen bor granne med, eller är gift med, sin syster eller bror. Anders har bara ett grannhus och bara en svåger (han bor i det en gavelhuset, nr 1, och hans frus bror hans hans systers man). Anders granne Börje däremot, har både två grannhus och två svågrar.

(a) I vilket hus bor Anders syster Anna?

(b) I det andra gavelhuset, nr 6, bor Cecilia med sin man. Börjes syster heter Birgitta. Ange var vart hus frus bror bor?

Lösning. Numrera först kvinnorna efter vilket hus de bor i. Numrera sedan männen efter vilket nummer deras syster har. Nu bildar paren en permutation $\sigma \in S_6$ genom att $\sigma(i) = j$ om kvinna i är gift med man j. Detta kan skrivas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & \sigma(6) \end{pmatrix} .$$

Eftersom ingen är gift med sin bror så gäller $\sigma(i) \neq i$, dvs det finns ingan 1-cykler. Cykelstrukturen måste därför vara någon av

$$[6], [24], [3^2], [2^3] .$$

Eftersom Anders frus bror är hans systers man så har vi en 2-cykel (1?) och eftersom detsamma inte gäller Börje så finns även en 4-cykel (????). Tre hus i rad kan ej ingå i en cykel eftersom ingen är granne med sitt syskon och därför kan hus nummer 4 ej ingå i 4-cykeln. Dvs permutationen har formen (14)(????).

(a) Formen på permutationen säger att Anders syster Anna bor i hus 4.

(b) Börje och hans fru bor i hus 2 (granne med Anders). Därför måste Börjes frus bror bo i hus 5 eller 6. Men det måste även Börjes syster Birgitta och eftersom Cecilia bor i hus 6 så bor Birgitta i hus 5. Börje har två svågrar och därför måste Börjes frus bror bo i hus 6 med Cecilia. Dvs permutationen är (14)(2536). Observera att denna permutation talar om i vilket hus varje fru har sin mans syster och inversen till denna permutation talar om i vilket hus varje fru har sin bror. Svaret på (b) ges därför av permutationen (14)(2635).