2 Linjära avbildningar och operatorer Kap 3 §3.1 (16-17), §3.2 (7-9, 14), §3.3 (6,8), §3.4 (1-4,7), §3.5 (5-6,10)

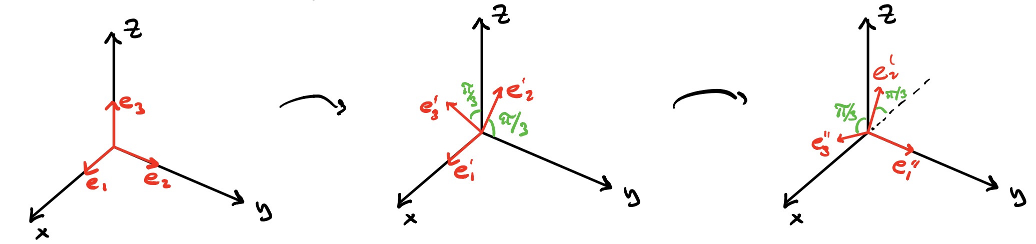
3.1.16-17: Hitta matriserna som representerar följande avbildningar:

(i) Rotation med vinkeln $\pi/3$ kring x-axeln följt av ——— " ——— $\pi/2$ kring z-axeln.

(ii) samma som (i) men i omvänd ordning.

Lösn: För att hitta matriserna räcker det att veta hur standardbasen avbildas:

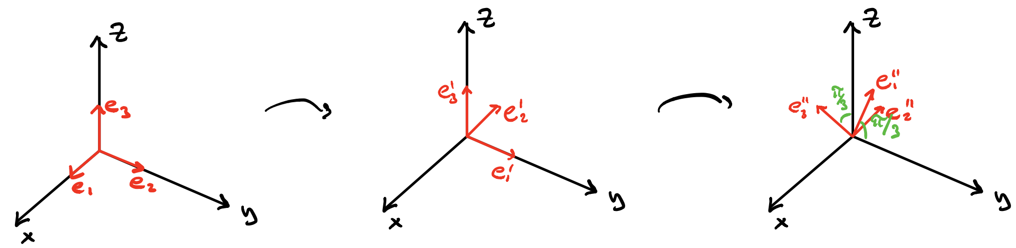
(i)



$$\begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \longmapsto \begin{matrix} e_1 \\ \frac{1}{2}e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_3 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 \end{matrix} \longmapsto \begin{matrix} e_2 \\ -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_3 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_3 \end{matrix}$$

Så $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(ii)



Så $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

3.2.8: Hitta matrisen till

$$T_1 : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$$
$$p(t) \longmapsto p(t-a).$$

Lösn: Vi ser hur standardbasen $\{1, t, t^2\}$ avbildas:

$$T_1(1) = 1, \quad T_1(t) = t-a, \quad T_1(t^2) = (t-a)^2 = t^2-2at+a^2$$

så

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -2at \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2.9: Hitta matrisen till

$$T_n : \mathbb{R}_n[t] \longrightarrow \mathbb{R}_n[t]$$
$$p(t) \longmapsto p(t-a).$$

Lösn:

$$T_n(1) = 1$$
$$T_n(t) = t-a$$
$$T_n(t^2) = t^2-2at+a^2$$
$$\vdots$$
$$T_n(t^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (-a)^{n-k}$$

Så $M_n = \sum_{\substack{0\le i\le n \\ 0\le j\le n}} \binom{j}{i}(-a)^{j-i} e_{i+1,j+1}$ under konventionen att $\binom{j}{i} = 0$ om $i > j$.

OBS: $e_{k,l}$ är matrisen med en etta vid index (k,l) och nollor på alla andra ställen.

3.3.6: På $M_{2,2}$, låt $\mathcal{B} = \{ \underset{B_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{B_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}, \underset{B_3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{B_4}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \}$. Låt

$$L(A) = (A + A^T)/2$$

och hitta $[L]_{\mathcal{BB}}$.

Lösn 1: Se hur $\mathcal{B}$ avbildas:

$$L(B_1) = L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B_1$$

$$L(B_2) = L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B_2$$

$$L(B_3) = L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B_3$$

$$L(B_4) = L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Så

$$[L]_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösn 2 (Sämre?) Vi har att

$$[L]_{\mathcal{BB}} = P_{\mathcal{BE}} [L]_{\mathcal{EE}} P_{\mathcal{EB}}.$$

Vi har

$$L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)/2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$$L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)/2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(e_2 + e_3)$$

$$L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \quad \text{— — —} \quad = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(e_2 + e_3)$$

$$L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \quad \text{— — — —} \quad = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_4$$

så

$$[L]_{\mathcal{EE}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi har

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

så

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}[L]_{\mathcal{E}\mathcal{E}}P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>3.4.2:</u> På $\mathbb{R}[t]$ låt

$$L_2 f(t) = (f(t) - f(0))/t .$$

Hitta matrisen till L_2.

<u>Lösn:</u> Vi har $L_2(t^n) = t^n/t = t^{n-1}$ om $n \geq 1$ och $L_2(1) = (1-1)/t = 0$ så matrisen till L_2 är

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & \\ & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

<u>3.5.5:</u> Låt L vara operatorn på $M_{2,2}$ som ges av $L(A) = A + A^T$. Hitta baser för $\ker(L)$ och $\operatorname{im}(L)$. Bestäm rangen av L.

(En lösn. är att använda basen i 3.3.6)

Annan lösn: Vi har

$$\left.\begin{aligned} L\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} &= 2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\\ L\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\\ L\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\\ L\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} &= 2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}$$ matrisen för L är

$$M = \begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

Vi har $\operatorname{im} L \cong M_{2,2}/\ker L$ och därför

$$\dim(\operatorname{im} L) = \dim(M_{2,2}) - \dim(\ker L).$$

Om $\bar{v} \in M_{2,2}$ kan vi skriva

$$\bar{v} = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3 + v_4e_4$$ och

$$M\bar{v} = v_1\bar{c}_1 + \dots + v_4\bar{c}_4$$

där $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_4$ är kolumnvektorerna i M. Dvs $\operatorname{im}(L)$ spänns upp av $\left\{\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\right\}$ OBS: Vi kan byta 2-orna mot 1-or.

Alltså har vi $\dim(\operatorname{im}(L)) = 3$ så L har rang 3. Vidare har vi att

$$\begin{aligned}\dim(\ker(L)) &= \dim(M_{2,2}) - \dim(\operatorname{im}(L))\\ &= 4-3\\ &= 1.\end{aligned}$$

Dvs, för att hitta en bas för $\ker(L)$ räcker det att hitta en nollskild matris i $\ker(L)$, t.ex. $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. Så $\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$ är en bas.