ÖVNING 2 - DISKRET MATEMATIK

ERIC AHLQVIST

1. Träd

Biggs 15.5.2. Låt $T = (V, E)$ vara ett träd med $|V| \geq 2$. Visa att T har minst två hörn med valens 1.

Lösning. Antag för att komma till en motsägelse att alla hörn utom möjligen v_1 har valens ≥ 2. Om vi summerar över resten av hörnen får vi

$$\sum_{v \neq v_1} \delta(v) \geq 2(|V| - 1) = 2|E| = \sum_{v \in V} \delta(v)$$

eftersom T är ett träd, dvs $\delta(v_1) = 0$. Detta är en motsägelse eftersom ett träd är sammanhängande.

Extra Övn 2 (2). Visa att om det för varje par av hörn x och y i en graf $G = (V, E)$ med n hörn gäller att

$$\delta(x) + \delta(y) \geq n - 1$$

så är G sammanhängade.

Lösning. Antag att $\delta(x) + \delta(y) \geq n - 1$ gäller för varje par av hörn x och y i G. Antag för att komma till en motsägelse att $V = V_1 \cup V_2$ med $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$ och att ingen av hörnen i V_1 är granne med något hörn i V_2. Tag $v_1 \in V_1$ och $v_2 \in V_2$. Då gäller att $\delta(v_1) \leq |V_1| - 1$ och $\delta(v_2) \leq |V_2| - 1$, dvs

$$\delta(v_1) + \delta(v_2) \leq |V_1| + |V_2| - 2 = |V| - 2 = n - 2$$

vilket är en motsägelse.

2. Färgning av hörnen i en graf

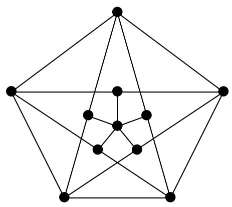
En *hörnfärging* av en graf $G = (V, E)$ är en funktion

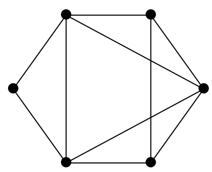
$$f : V \to \mathbb{N}$$

sådan att $f(v_1) \neq f(v_2)$ om $\{v_1, v_2\} \in E$. Dvs i en hörnfärging kräver vi att om v_1 och v_2 är grannar så har de olika färg.

Det *kromatiska talet* $\chi(G)$ av G är det minsta naturliga talet $n \in \mathbb{N}$ så att det existerar en hörnfärgning av G med n färger.

Biggs 15.6.2. Hitta det kromatiska talet till följande grafer.





Lösning. (i) En färgning med 4 förger är möjlig, t.e.x., färga den yttre 5-cykeln tillsammans med hörnet i centrum med 3 färger och välj sedan en 4e färg till resten av hörnen. En färgning med 3 färger är dock inte möjlig eftersom om en sådan färgning existserade och vi färgar den yttre 5-cykeln med 3 färger så måste samtliga av dessa färger finnas representerade bland de fem hörnen närmast centrum. Då finns ingen färg kvar till centrum.

(ii) Eftersom grafen innehåller 3-cykler så måste $\chi(G) \geq 3$. Kalla hörnet längst till vänster för nummer 1 och ordna hörnen medsols. En färgning med 3 färger är möjlig, t.ex., låt v_1, v_4 vara röda, v_2, v_5 blå och v_3, v_6 gula. Alltså har vi $\chi(G) = 3$.

3. "The greedy algorithm" för hörnfärgning

För en graf med n hörn är "the greedy algorithm" (GA) följande:

(1) ordna hörnen,
(2) ge färg 1 till hörn 1,
(3) för hörn $i = 2, \ldots, n$, färga hörn i med den första färg som inte redan finns hos dess grannar.

Biggs 15.7.1. Ordna hörnen i en kub så att GA ger 2, 3 respektive 4 färger.

Lösning. Tänk på kuben som att hörnen har koordinater (x_1, x_2, x_3) med $0 \leq x_i \leq 1$ för alla i.

(i) Följande ordning ger 2 färger: $a_1 = (0,0,0)$, $a_2 = (0,1,0)$, $a_3 = (1,1,0)$, $a_4 = (1,0,0)$, $a_5 = (1,0,1)$, $a_6 = (0,0,1)$, $a_7 = (0,1,1)$, $a_8 = (1,1,1)$.

(ii) Följande ordning ger 3 färger: $a_1 = (0,0,0)$, $a_2 = (1,1,1)$, $a_3 = (1,0,0)$, $a_4 = (0,1,0)$, $a_5 = (1,1,0)$, $a_6 = (0,1,1)$, $a_7 = (0,0,1)$, $a_8 = (1,0,1)$.

(iii) Följande ordning ger 4 färger: $a_1 = (0,0,0)$, $a_2 = (1,1,1)$, $a_3 = (1,0,0)$, $a_4 = (0,1,1)$, $a_5 = (1,1,0)$, $a_6 = (0,0,1)$, $a_7 = (0,1,0)$, $a_8 = (1,0,1)$.

Biggs 15.7.2. Visa att hörnen i en graf $G = (V, E)$ alltid kan ordnas så att GA ger en färgning med $\chi(G)$ färger.

Lösning. Låt $f\colon V \to \mathbb{N}$ vara en färgning med $k = \chi(G)$ färger. Låt $\{n_1, \ldots, n_k\}$ vara bilden av f och låt a_i vara antalet hörn med "färg" n_i för $1 \leq i \leq k$. Ordna hörnen på något sätt så att de första a_1 hörnen har färg n_1. Fortsätt med de hörn som har färg n_2 och är grannar till de redan ordnade hörnen. Fortsätt med de hörn som har färg n_3 och är grannar till de redan ordnade hörnen osv. När du är klar ordnar du de resterande hörnen hur som helst. Glöm nu bort färgningen och använd GA för att hitta en färgning.

4. Planära grafer

För plana grafer gäller förljande formel.

Sats 4.1 (Eulers formel)**.** *Om en plan graf har v hörn, e kanter, r ytor och c komponenter så gäller*

$$v - e + r - c = 1\,.$$

Anmärkning 4.2. Kom ihåg att den obegränsade ytan också räknas som en yta.

Extra Övn 2 (8). Låt $G = (V, E)$ vara en 3-reguljär, plan, sammanhängande graf där alla ytor har antingen 4 eller 6 kanter. Hur många ytor har 4 kanter?

Lösning. Låt $v = |V|$, $e = |E|$ och x och y vara antalet ytor med 4 respektive 6 kanter. Varje kant räknas av exakt två ytor. Tillsammans med summaformeln får vi därför att

$$3v = 2e = 4x + 6y\,.$$

För att kunna hitta x genom Eulers formel vill vi hitta $v - e + y$. Vi har att $v = 4x/3 + 2y$ och $e = 2x + 3y$, dvs

$$v - e + y = (4x/3 + 2y) - (2x + 3y) + y = -2x/3\,.$$

Med Eulers formel får vi

$$2 = (v - e + y) + x = x - 2x/3 = x/3\,,$$

dvs $x = 6$.

Extra Övn 2 (7). Låt $G = (V, E)$ vara en plan graf där alla hörn har valens 3 eller 5, där antalet hörn är 12 och antalet ytor är 11. Hur många hörn har valens 3 och hur många har valens 5?

Lösning. Eulers formel ger $12 - e + 11 = 2$, dvs $e = 21$. Låt n vara antalet hörn med valens 3. Summaformeln ger sum att

$$3n + 5(12 - n) = 2e = 42\,.$$

Detta ger att $n = 9$, dvs 9 hörn har valens 3 och 3 hörn har valens 5.

Extra Övn 2 (9). Visa att Petersens graf (se Biggs sida 191) inte är planär.

Lösning. Välj ut 3 av de yttre hörnen och kontrahera en kant från var och en av dessa som går till en inre hörn. Detta ger en bipartit graf isomorf med $K_{3,3}$. Wagners sats ger nu att grafen in är planär.