ÖVNING 3 - DISKRET MATEMATIK

ERIC AHLQVIST

1. Färgning av kanterna i en graf

En *kantfärging* av en graf $G = (V, E)$ är en funktion

$$f : E \to \mathbb{N}$$

sådan att $f(e_1) \neq f(e_2)$ om e_1 och e_2 har ett gemensamt hörn.

Anmärkning 1.1. Minsta antalet färger som behövs för att färga kanterna i en graf är större än eller lika med största valensen i grafen.

Sats 1.2. *Om G är en bipartiti graf så är det minsta antalet färger som behövs för att färga kanterna i G lika med den största valensen i G.*

Biggs 17.2.1. Vad är det minsta antalet färger som behövs för att färga kanterna i

(i) K_4;
(ii) K_5;
(iii) en kub?

Lösning. (*i*) Garfen K_4 kan färgas med 3 färger vilket är största valensen. Nämligen, färga den yttre kvadraten med 2 färger och välj en tredje färg för återstående kanter.

(*ii*) Grafen K_5 kan färgas med 5 färger men inte med 4. För att visa detta, färga den yttre 5-cykeln med 3 färger. Då har fyra av dessa kanter 2 färger och en av dem säg e har den tredje färgen. Färga en av de två ofärgade kanterna som är granne med e (detta kräver en 4e färg). Färga sedan den sista ofärgade kanten som går från e (detta kräver en 5e färg). Den sista kanten kan nu färgas med samma färg som e.

(*iii*) en kub kan färgas med 3 färger, vilket är max valensen. Nämligen, färga två motstående sidor (8 kanter) med två färger och färga de återstående fyra kanterna med en tredje färg.

2. Matchningar och alternerande stigar

En *matchning* i en bipartit graf $G = (X \cup Y, E)$ är en delmängd $M \subseteq E$ sådan att inga två kanter i M har ett hörn gemensamt. En matchning är *fullständig* om alla hörn har en kant hos sig. En matchning är *maximal* om det inte finns någon matchning med fler kanter (t.ex. en fullständig matchning).

Anmärkning 2.1. Det finns alltid en (eller flera) maximal matchning men en fullständig matchning finns om och endast om Halls kriterium är uppfyllt.

En alternerande stig för en delmängd $M \subseteq E$ är en stig $x_0, y_1, x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k$ sådan att $y_i x_i \in M$ men $x_{i-1} y_i \notin M$.

Extra Övn 3 (1). Tia tentanter har gjort en tentamen med tio uppgifter. Varje uppgift klarades av minst sex skrivande. Varje skrivande klarade minst fyra uppgifter. Visa att man kan fördela uppgifterna med en per tentand, så att var och en har klarat sin uppgift.

Lösning. Låt L vara mängden av tentanter och R mängden av uppgifter. Bilda en bipartit graf med hörn $V = L \cup R$ och där vi har en kant mellan $l \in L$ och $r \in R$ om och endast om uppgift r klarades av tentant l.

För varje $A \subseteq L$ definierar vi

$$J(A) = \{r \in R : lr \in E \text{ för något } l \in L\} .$$

Halls sats säger då att det finns en fullständig matchning om och endast om $|J(A)| \geq A$ för alla $A \subseteq L$.

Vi har att om $A \neq \emptyset$ så är $J(A) \geq 4$ och om $|A| \geq 5$ så är $|J(A)| = 10$ ty varje uppgift klarades av minst 6 tentanter, dvs varje uppgift klarades av någon i A. Därför är Halls kriterium uppfyllt.

Biggs 17.4.3. Antag att en grupp människor har varsin lista med k böcker de vill låna på biblioteket och att varje bok finns på exakt k listor. Det finns ett exemplar av varje bok. Visa att alla samtidigt kan låna en av böckerna de önskar.

Lösning. Vi behöver visa att (i) antalet antalet böcker är lika med antalet människor och (därefter) att (ii) Halls kriterium är uppfyllt.

Bilda en bipartit graf med människorna till vänster, böckerna till höger och en kant från en person till en bok om boken står på personens lista. Vi vet att (i) är uppfyllt för bipartita grafer så det återstår att visa (ii). Låt A vara någon delmängd till E med n kanter. Varje hörn har valens k och därför har vi att $|E_A| = kn$ där E_A är antalet kanter med ett hörn i A. Vi har att $|J(A)|$ är antalet böcker som står på någon av listorna hos personerna i A. Varje bok finns på exakt k listor vilket betyder att $|J(A)| \geq |E_A|/k = n$, dvs Halls kriterium är uppfyllt.

3. Maximala matchningar

Biggs 17.5.1. Hitta en fullständig mathning till den bipartita grafen $G = (X \cup Y, E)$ där

$$X = \{a, b, c, d, e\} ,$$
$$Y = \{v, w, x, y, z\} ,$$

och

$$E = \{av, ax, bv, bz, cw, cy, cz, dy, dz, ez\}$$

genom att använda algoritmen med alternerande stigar (se sida 220 i Biggs).

Lösning. Lös själv och tänk på att en alternerande stig inte måste innehålla alla kanter i M.

4. Transversaler

Biggs 17.6.1. Hitta en transversal till familjen som består av mängderna

$$\{a, b, l, e\}, \{l, e, s, t\}, \{s, t, a, b\},$$
$$\{s, a, l, e\}, \{t, a, l, e\}, \{s, a, l, t\} .$$

Lösning. En transversal är b, l, s, e, a, t. En annan är b, e, a, s, t, l.

Biggs 17.6.3. Visa a familjen av mängder

$$\{a, m\}, \{a, r, e\}, \{m, a, r, e\},$$
$$\{m, a, s, t, e, r\}, \{m, e\}, \{r, a, m\}$$

inte har någon traversal, genom att visa att Halls kriterium inte är uppfyllt.

Lösning. Halls sats säger att en familj $\{S_i | i \in I\}$ har en transversal om och endast om

$$\left| \bigcup_{i \in H} S_i \right| \geq |H|$$

för varje delmängd $H \subseteq I$. Välj nu $H = \{1, 2, 3, 5, 6\}$. Då ser vi att unionen av dessa mängder är $\{m, a, r, e\}$ men $|H| = 5$. Alltså är Halls kriterium inte uppfyllt.