| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | Singulärvärdesuppdelning och pseudoinverser | §7.D i LADR | §7.D (4-20) |

I detta kap. antas att $\dim V < \infty$. Vissa lösningar fungerar även utan detta antagande.

15. Visa att en operator $L : V \longrightarrow V$ är en isometri (bevarar norm) om och endast om alla dess singulärvärden är 1.

---

**Lösn:** Låt $\lambda$ vara ett singulärvärde till $L$. Då finns vektorer $x \neq 0$ och $y \neq 0$ sådana att

$$L(x) = \lambda y \quad \text{och} \quad L^{+}(y) = \lambda x.$$

Dvs

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{\langle x \mid x \rangle}{\langle x \mid x \rangle} \\
&= \frac{\langle L(x) \mid L(x) \rangle}{\langle x \mid x \rangle} \\
&= \lambda \frac{\langle y \mid L(x) \rangle}{\langle x \mid \ \rangle} \\
&= \lambda \frac{\langle L^{+}(y) \mid x \rangle}{\langle x \mid x \rangle} \\
&= \lambda^2 \frac{\langle x \mid x \rangle}{\langle x \mid x \rangle} \\
&= \lambda^2
\end{aligned}
$$

och eftersom $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ så har vi $\lambda = 1$.

Visa själv det omvända.

---

4. Visa att om $\lambda$ är ett singulärvärde till en operator $T$ så finns $v \in V$ så att

$$\|v\| = 1 \quad \text{och} \quad \|Tv\| = \lambda.$$

---

**Lösn:** Med polär uppdelning kan vi skriva

$$T = S\sqrt{T^\dagger T}$$

där $S$ är en isometri. Låt $v$ vara en egenvektor till $\sqrt{T^\dagger T}$ av norm 1 med egenvärde $\lambda$. Då har vi $Tv = S(\lambda v)$ och

$$\|Tv\| = \sqrt{\langle S(\lambda v) \mid S(\lambda v)\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle Sv \mid Sv\rangle} = \lambda\|v\| = \lambda .$$

---

5. Låt $T$ vara operatorn på $\mathbb{C}^2$ som ges av

$$T(x,y) = (-4y, x).$$

Hitta singulärvärdena till $T$.

---

<u>Lösn:</u> Om $Tv = \lambda w$ och $T^\dagger w = \lambda v$ så har vi

$$TT^\dagger w = \lambda^2 w \quad \text{och} \quad T^\dagger T v = \lambda^2 v,$$

dvs singulärvärdena ges som rötter av egenvärden till operatorn $T^\dagger T$. Vi har att $T, T^\dagger$ ges av matriserna

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad M^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

och matrisen till $T^\dagger T$ är

$$M^\dagger M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena till $T^\dagger T$ är därför 1 och 16, vilket innebär att singulärvärdena till $T$ är 1 och 4.

---

<u>OBS:</u> Det finns en operator $\sqrt{T^\dagger T}$ sådan att

$$(\sqrt{T^\dagger T})^2 = T^\dagger T. \qquad (T^\dagger T \text{ Hermitesk och positiv})$$

Singulärvärdena till $T$ ges av egenvärdena till $\sqrt{T^\dagger T}$.

11. Visa att $T$ och $T^+$ har samma singulärvärden.

---

Lösn: Lös själv.

---

13. Visa att $T: V \longrightarrow V$ är inverterbar om och endast om $0$ inte är ett singulärvärde till $T$.

---

Lösn: Om $0$ är ett singulärvärde så finns vektorer $0 \neq x, y$ så att $Tx = 0 \cdot y = 0$, dvs $x$ ligger i kärnan till $T$ och $T$ är ej inverterbar.

Å andra sidan, om $T$ ej inverterbar så är $T$ ej injektiv eftersom $\dim V < \infty$. Dvs det finns en vektor $v$ så att $Tv = 0$ dvs $Tv = 0 \cdot w$ $\forall w \in V$ så $0$ är ett singulärvärde.

---

7. Låt $k$ vara en kropp och definiera

$$T: k^3 \longrightarrow k^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (z, 2x, 3y).$$

Hitta en isometri $S$ sådan att $T = S\sqrt{T^+T}$.

---

Lösn: Vi har att matrisen till $T$ är

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

och

$$M^+M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \sqrt{M^+M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi har därför att $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{M^T M}$.