10	Sannolikhetsmatriser och Perron-Frobenius sats	§5.6	§5.6 (5-6,10,13-16)

5.6.5:

* (5) A certain football team derives confidence from each win but gets demoralized after each loss. After winning a game, it has a 90% chance of winning the next game, but after losing a game it has only a 20% chance of winning the next game. In the long run, what fraction of the games will this streaky team win?

(6) A very different football team gets overconfident after a win but works

Lösn: Låt "vinst" vara stadie 1 och "förlust" stadie 2. Övergångsmatrisen blir då

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

och egenvärdena till T ges av rötterna till

$$\begin{aligned} p_T(x) &= (x-0{,}9)(x-0{,}8) - 0{,}02 \\ &= x^2 - 1{,}7x + 0{,}7 \\ &= (x-1)(x-0{,}7). \end{aligned}$$

Vi ser att 1 är ett icke degenererat egenvärde (alg. mult. 1) och enligt [Sadun, Theorem 5.3] så är motsvarande normaliserade egenvektor är en lösning till $Tx = x$. Vi har

$$T - I = \begin{pmatrix} -0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & -0{,}2 \end{pmatrix}$$

och $\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ligger i kärnan. Välj

$$b_1 = \frac{1}{3}\tilde{b}_1.$$

Dvs laget vinner $\frac{2}{3}$ av matcherna.

Uppgift 2. En *permutationsmatris* är en kvadratisk matris där varje rad och varje kolonn innehåller precis en etta och resten nollor.

(a) Visa att alla potenser av en permutationsmatris också är permutationsmatriser.
(b) Visa att permutationsmatriser är ortogonala.
(c) Visa att om P är en permuationsmatris av storlekt $n \times n$ och $p(x)$ är ett polynom med reella ickenegativa koefficienter med $p(1) = 1$ så är $p(P)$ en sannolikhets-matris.
(d) Vilka permutationsmatiser har en unik egenvektor med egenvärde 1?

Lösn: a) En permutationsmatris permuterar standardbasen dvs ordnar om standardbasen. Dvs den ger en bijektion $\sigma: \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$.

En m:te potens av matrisen svarar mot att applicera σ m gånger. Vi har en isomorfi av grupper

$$\{\text{Permutationsmatriser, matrismultiplikation}\} \xrightarrow[\cong]{\varphi} S_n$$

$$(\ Pe_i = e_j\ ) \longmapsto \sigma(i) = j$$

dvs en bijektion φ sådan att

$$\varphi(M_1 M_2) = \varphi(M_1) \circ \varphi(M_2),$$

där S_n är gruppen av permutationer av n element. Storleken av dessa grupper är $n!$

(välj var ettan i första kolumnen ska vara,
— " — andra — " — etc.)

b) Lös själv.

c) Om $p(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ så har vi

$$p(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k P^k$$

Varje P^k har en unik etta i varje kolumn så varje term $a_k P^k$ har i kolumn j nollor på alla rader utom en där vi har a_k. Dvs summan av elementen i kolumn j av $p(P)$ är $\sum_{k=0}^{d} a_k = p(1) = 1$.

d) De permutationsmatriser som svarar mot permutationer bestående av en enda cykel av längd n (om $n \times n$-matris).

Bevis: Om σ består av m cykler $(c_1 c_2 \dots c_{l_1})(c_{l_1+1} \dots c_{l_2}) \dots (c_{l_{m-1}+1} \dots c_n)$ så är vektorerna

$$v_i = \frac{1}{l_{i+1}-l_i} \sum_{s=1}^{t} e_s \quad , \quad t = l_{i+1} - l_i \qquad (l_0 := 0,\ l_m = n)$$

alla egenvektorer av längd 1.

Om σ_P består av en enda cykel så är vektorn $\frac{1}{n}(1,1,\dots,1)^T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i$ den enda egenvektorn av längd 1.

De matriser P så att σ_P har en enda cykel är de matriser sådana att

$e_i, Pe_i, P^2e_i, \dots, P^{n-1}e_i$ alla är olika

för alla i.
