Uppgift 10. Visa att det finnn en naturlig isomorfi $\bigwedge^2 V \cong \mathrm{Alt}^2(V)$.

Lösn: Vi definierar en avbildning

$$\varphi : V \otimes V \longrightarrow \Lambda^2 V$$ på generatorer genom

$$v \otimes w \longmapsto v \wedge w$$

och utvidgar till en linjär avbildning φ. Då ser vi att kärnan genereras av elem. på formen $v \otimes v$, dvs $\ker \varphi = \mathrm{Sym}^2 V$. Vi vet från förra övningen att $V \otimes V \cong \mathrm{Sym}^2 V \oplus \mathrm{Alt}^2 V$. Alltså har vi

$$\Lambda^2 V \cong V \otimes V / \mathrm{Sym}^2 V \cong \mathrm{Alt}^2 V$$

eftersom φ är surjektiv.

Uppgift 12. Verifiera att det är *kryssprodukten* som fås för $V = \mathbb{R}^3$ med den vanliga inre produkten som indikeras i Exempel 6 där vi får multiplikation

$$\wedge\colon V \times V \longrightarrow \bigwedge^2 V \cong V^* \cong V.$$

<u>Lösn:</u> Låt $\{e_1, e_2, e_3\}$ vara standardbasen. Då får vi

$$\wedge\colon V \times V \longrightarrow \Lambda^2 V$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right) \longmapsto (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \wedge (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3)$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\, e_1 \wedge e_2 + (a_1b_3 - a_3b_1)\, e_1 \wedge e_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)\, e_2 \wedge e_3$$

och isomorfin $\Lambda^2 V \longrightarrow V$ ges på basen som

$$e_1 \wedge e_2 \longmapsto e_3$$
$$e_1 \wedge e_3 \longmapsto -e_2$$
$$e_2 \wedge e_3 \longmapsto e_1.$$

Minustecknet i andra raden beror på att

$$e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 = -e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \quad \text{och}$$

tredje raden:

$$e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 = -e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3.$$

<u>Uppg. om determinanten:</u> Låt V vara ett vektorrum av dimension n. Om $L\colon V \longrightarrow V$ är en linjär avbildning så är

$$V^n \longrightarrow \Lambda^n V$$

$$(v_1, \dots, v_n) \longmapsto L(v_1) \wedge \dots \wedge L(v_2)$$

en alternerande multilinjär avbildning och vi får en linjär avbildning

$$\Lambda^n L\colon \Lambda^n V \longrightarrow \Lambda^n V.$$

Vi har alltså en avbildning

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_k(V, V) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\Lambda^n V, \Lambda^n V) \cong k \\ L &\longmapsto \Lambda^n L \longmapsto d_L. \end{aligned}$$

Visa att om M är en matris som representerar L i någon bas B så är $d_L = \det M$.

<u>Lösn:</u> I basen $\{b_1, \dots, b_n\}$ har vi att $\Lambda^n L$ avbildar $b_1 \wedge \dots \wedge b_n$ på

$$Mb_1 \wedge \dots \wedge Mb_n = \left(\sum_{i=1}^n m_{i1} b_i\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^n m_{in} b_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n m_{i1}\left(b_i \wedge \left(\sum_{i=1}^n m_{i2} b_i\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^n m_{in} b_i\right)\right)$$

kofaktorutveckling längs första kolumnen i M

$$= \\ \vdots$$

$$= \det(M)\, b_1 \wedge \dots \wedge b_n.$$

Isomorfin $\mathrm{Hom}_k(\Lambda^n V, \Lambda^n V) \xrightarrow{\cong} k$ ges av

$$(1 \mapsto a) \mapsto a.$$
