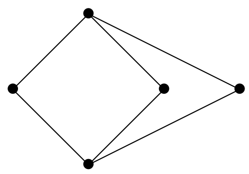
ÖVNING 1 - DISKRET MATEMATIK

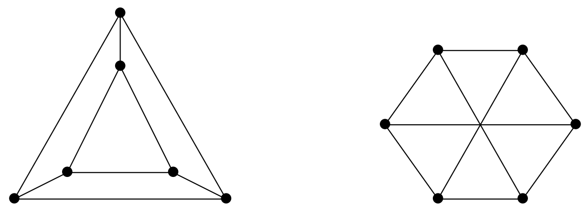
ERIC AHLQVIST

Biggs 15.1.4 (Lös själva!) Konstruera en graf med 5 hörn, 6 kanter och 0 3-cykler.

Lösning. One example is



Biggs 15.2.1. Bevisa att följande två grafer inte är isomorfa.



Lösning. Om $\alpha\colon G_1 \to G_2$ är en isomorfi av grafer och v_1, v_2, v_3 är hörn i en 3-cykel så är $\alpha(v_1), \alpha(v_2), \alpha(v_3)$ också hörn i en 3-cykel. Graf nummer två har ingen 3-cykel men det har graf nummer ett.

Biggs 15.2.3 (Lös själva!) Låt G vara grafen med hörn bestående av alla ord av längd 3 bestående av bokstäverna 0 och 1. En kant mellan två ord existerar om och endast om de skiljer sig på exakt en position. Visa att G är isomorf med en kub.

Lösning. Representera ett ord xyz som koordinaten (x, y, z).

Extra Övn 1 (2). I en graf med åtta hörn har sju av hörnen valenserna 1,3,3,4,5,6,7. Vilka värden är möjliga för det 8e hörnets valens?

Lösning. Vi har att $\sum_{v \in G} \delta(v) = 2|E|$ och $1+3+3+4+5+6+7 = 29$. Därför måste det 8e hörnet ha udda valens. Ett hörn kan ha som mest 7 grannar, dvs som mest valens 7, men eftersom första hörnet har valens 1 och 7e hörnet valens 7 så är första hörnet granne enbart med hörn nummer 7. Nod nummer 6 är därför granne med alla hörn utom första. Dvs valensen för 8e hörnet är udda och ≥ 2 och < 7, dvs 3 eller 5. Båda dessa fall är möjliga (Konstruera två sådana grafer!).

Extra Övn 1 (3). Visa att om valensen för varje hörn i en graf delas av primtalet $p \neq 2$ så delas också antalet kanter av p.

Lösning. Eftersom $p|\delta(v)$ för varje hörn $v \in G$ så gäller att $p|\sum_v \delta(v) = 2|E|$ och eftersom p inte delar 2 så delar p antalet kanter $|E|$.

Extra Övn 1 (4). Hur många hörn kan en graf med 28 kanter ha som mest om valensen för varje hörn är minst 3?

Lösning. Vi har att

$$3|V| \leq \sum_{v \in G} \delta(v) = 2|E| = 56\,,$$

dvs $|V| \leq 18$.

Biggs 15.3.1. Kan en graf ha följande lista av valenser till samtliga av sina hörn?

(i) 2,2,2,3
(ii) 1,2,2,3,4
(iii) 2,2,4,4,4
(iv) 1,2,3,4

Lösning. (i) Nej, ty summan är udda och $2|E|$ är jämnt. (ii) Ja. Rita ett kors och lägg till två kanter. (iii) Om vi tar bort hörnen med valens 2 så försvinner som mest 4 kanter. Det betyder att den nya grafen har minst $(2+2+4+4+4)/2-4 = 4$ kanter. Men en graf med 3 hörn kan ha som mest 3 kanter (iv) Nej. I en graf med 4 hörn kan ett hörn ha som mest tre grannar.

Biggs 15.3.2. Om en graf G har n hörn med valenser $d_1, \ldots, d_n$, vad har hörnen i komplementet $\overline{G}$ för valenser?

Lösning. Grannarna till ett hörn v i $\overline{G}$ är precis de hörn som ej är grannar v i G förutom v själv. Dvs valenserna i $\overline{G}$ är $|V| - 1 - d_1, \ldots, |V| - 1 - d_n$.

Biggs 15.3.3. Hitta alla reguljära grafer med 7 hörn och valens 4 upp till isomorfi.

Lösning. Två grafer är isomorfa om och endast om deras komplement är isomorfa. Därför räcker det att hitta alla grafer vars komplement är en 4-reguljär graf med 7 hörn.

Låt G vara en 4-reguljär graf. Komplementet $\overline{G}$ till G är reguljär med valens 2, dvs $14 = 2|\overline{V}| = 2|\overline{E}|$ så vi har $|\overline{E}| = 7$. En graf med 7 hörn och 7 kanter måste ha minst en cykel (träd har $|E| = |V| - 1$). Varje hörn i en cykel i en 2-reguljär graf har grad 2, dvs cykeln är frånkopplad från resten av grafen. De enda mölija valen av längd för en sådan cykel är 3,4 och 7. Om cykeln har längd 3 så är komplementet till cykeln en cykel av längd 4. Därför finns det bara två alternativ, $\overline{G}$ består antingen av en 3-cykel och en 4-cykel, eller av en 7-cykel.

Biggs 15.3.5. Visa att en graf med minst 2 hörn har minst två hörn med samma valens.

Lösning. Fågelholksprincipen. Om G har $n \geq 2$ hörn så är möjliga valenser $0, 1, \ldots, n-1$. Antag för att komma till en motsägelse att alla hörn har olika valens. Då måste ett hörn ha valen 0 och ett ha valens $n-1$. Men det hörn med valens $n-1$ måste då vara granne med hörnet med valens 0 vilket är en motsägelse.

Biggs 15.4.3 (Lös själva!) Hitta en Hamiltoncykel i grafen som bildas av hörnen och kanterna till en kub.

Lösning.

Biggs 15.4.5. En mus ska äta en kub av ost med volym 27. Den börjar i ett hörn och äter en kub i taget med volym 1 och går vidare till en närliggande kub, dvs en kub som har kontaktyta med den föregående. Kan musen avsluta med kuben i centrum av den stora kuben?

Lösning. Det är samma sak som att fråga om det finns någon Hamiltonväg som börjar i ett hörn och slutar i centrum, där grafen i fråga har hörn (x_1, x_2, x_3) där $0 \leq x_i \leq 2$ för all $1 \leq i \leq 3$ och det finns en kant mellan två hörn om och endast om de skiljer sig i exakt en koordinat med exakt 1.