Eric Altenburg ⠀⠀⠀⠀ Content Check 5 ⠀⠀⠀⠀ ①

812120 ⠀⠀⠀⠀ Diff. Eq.

1. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{X}$ $\qquad \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -3 \\ -4 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$

$\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$

$\lambda_1 = -3: \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 \\ -4 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{rref} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{16} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{7}{16} x_3 \\ x_2 &= -\tfrac{3}{4} x_3 \\ x_3 &= \mathbb{R} \end{aligned} \quad \vec{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ -12 \\ 16 \end{bmatrix},\ \vec{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ -12 \\ 16 \end{bmatrix} e^{-3t}$

$\lambda_2 = 2: \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{rref} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 &= -2x_3 \\ x_2 &= 3x_3 \\ x_3 &= \mathbb{R} \end{aligned} \quad \vec{\Lambda}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},\ \vec{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$

$\lambda_3 = 4: \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{rref} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= x_3 \\ x_3 &= \mathbb{R} \end{aligned} \quad \vec{\Lambda}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{\Phi}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$

$$\boxed{\therefore\ \vec{\Phi} = c_1 \begin{bmatrix} -7 \\ -12 \\ 16 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}}$$

2. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$ $\quad \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & 2 \\ -2 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - a + 6 = 0$

$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}\, i \quad \lambda_3 = 1 - \sqrt{2}\, i$

2

$$\lambda_1 = -2: \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{7}{4} x_3 \\ x_2 &= \tfrac{5}{4} x_3 \\ x_3 &= \mathbb{R} \end{aligned} \qquad \vec{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}\, i: \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2}i & -2 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}i & 2 \\ -2 & -2 & 2+\sqrt{2}i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}i}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= \tfrac{\sqrt{2}i}{2} x_3 \\ x_3 &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\vec{\Lambda}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2}i \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathrm{Re}\, \vec{\Lambda}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{Im}\, \vec{\Lambda}} i$$

$$\vec{\Phi}_2 = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{2}\, t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \sin(\sqrt{2}\, t) \right) e^{t}$$

$$\vec{\Phi}_3 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{2}\, t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \sin(\sqrt{2}\, t) \right) e^{t}$$

$$\vec{\Phi} = c_1 \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{2}\, t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \sin(\sqrt{2}\, t) \right) e^{t} + c_3 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{2}\, t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \sin(\sqrt{2}\, t) \right) e^{t}$$

$$\vec{\Phi} = c_1 \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{2}t) e^{t} - c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \sin(\sqrt{2}\, t) e^{t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{2}t) e^{t} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \sin(\sqrt{2}\, t) e^{t}$$

$$\boxed{\vec{\Phi} = c_1 \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-2t} + \left(c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{t} \cos(\sqrt{2}\, t) + \left(c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{t} \sin(\sqrt{2}\, t)}$$

3. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \tan t \end{bmatrix}$ $\qquad \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ $\qquad$ 3

$\lambda_1 = 1+i \;, \lambda_2 = 1-i$

$\lambda = 1+i: \begin{bmatrix} i & -2 \\ \frac{1}{2} & i \end{bmatrix} \xrightarrow{rref} \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad x_1 = -2i x_2$, $x_2 = \mathbb{R}$

$$\vec{\lambda} = \begin{bmatrix} -2i \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{Re\,\vec{\lambda}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{Im\,\vec{\lambda}} i$$

$$\vec{\Phi}_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) e^t$$

$$\vec{\Phi}_2 = \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t \right) e^t$$

$$\vec{\Phi}_c = c_1 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) e^t + c_2 \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t \right) e^t$$

$$= c_1 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ e^t \cos t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2e^t \sin t \\ 0 \end{bmatrix} \right) + c_2 \left(\begin{bmatrix} -2e^t \cos t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \sin t \end{bmatrix} \right)$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} 2e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 2e^t \sin t & -2e^t \cos t \\ e^t \cos t & e^t \sin t \end{bmatrix}, \quad \Psi^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sin t \cdot e^{-t}}{2} & \cos t \cdot e^{-t} \\ \frac{-\cos t \cdot e^{-t}}{2} & \sin t \cdot e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Phi}_p = \begin{bmatrix} 2e^t \sin t & -2e^t \cos t \\ e^t \cos t & e^t \sin t \end{bmatrix} \cdot \int \begin{bmatrix} \frac{\sin t \cdot e^{-t}}{2} & \cos t \cdot e^{-t} \\ \frac{-\cos t \cdot e^{-t}}{2} & \sin t \cdot e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \cdot \tan t \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^t \sin t & -2e^t \cos t \\ e^t \cos t & e^t \sin t \end{bmatrix} \cdot \int \begin{bmatrix} \sin t \\ \frac{(\sin t)^2}{\cos t} \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^t \sin t & -2e^t \cos t \\ e^t \cos t & e^t \sin t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\cos t \\ \ln\left(\frac{-\cos t}{\sin t - 1}\right) - \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^t \cos t \ln\left(\frac{-\cos t}{\sin t - 1}\right) \\ e^t \left(\sin t \ln\left(\frac{-\cos t}{\sin t - 1}\right) - 1 \right) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Phi} = c_1 \begin{bmatrix} 2e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2e^t \cos t \ln\left(\frac{-\cos t}{\sin t - 1}\right) \\ e^t \left(\sin t \ln\left(\frac{-\cos t}{\sin t - 1}\right) - 1 \right) \end{bmatrix}$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} 2\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} -2\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -2\cos t \ln\left(\frac{-\cos t}{\sin t - 1}\right) \\ \sin t \ln\left(\frac{-\cos t}{\sin t - 1}\right) - 1 \end{bmatrix} e^t$$

$$\boxed{\therefore \vec{\Phi} = c_1 \begin{bmatrix} 2\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} -2\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -2\cos t \ln\left(\frac{-\cos t}{\sin t - 1}\right) \\ \sin t \ln\left(\frac{-\cos t}{\sin t - 1}\right) - 1 \end{bmatrix} e^t}$$