Elektrotechnik 1 - Praktikum 1

Spannungs - und Stromquellen im belasteten Brückenschaltung

Karl Döring   Florian Tietjen   Eric Antosch

29. April 2020

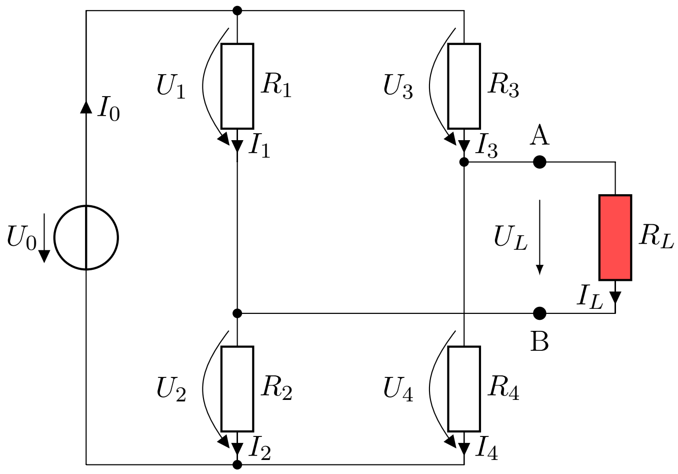
Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Der Gegenstand unserer Untersuchungen entsprechen auf dem Papier nur der Änderung eines Lastwiderstandes während einer bestimmten Zeit, und dessen Auswirkung auf der Rest der Schaltung (z.B. eine Brückenschaltung). Wheatstonesche Brücken werden jedoch vermehrt in der Messtechnik eingesetzt, um bestimmte Werte messbar bzw. messbarer zu machen.

Dabei wird die Brücke über die anderen Widerstände abgeglichen, d.h. ein Messgerät, was an den Punkten A und B (siehe Abbildung unter 2.1) angeschlossen werden würde, würde keine Potentialunterschiede und damit keine Spannung messen. Es kommt bei diesem Verfahren zu weniger Fehlern, welche in manchen Geräten von sehr mächtiger Konsequenz sein können. Es ist daher ratsam, sich mit dem Einfluss von bestimmten Kenngrößen auf eine solche Art von Schaltung eingehend Gedanken zu machen.

2 Belastete Brückenschaltung an einer Spannungsquelle



2.1 Vorbereitung

> **Aufgabe 1.1.1** Bestimmen Sie eine allgemeine Formel für die Berechnung der Ersatzspannungsquelle der Brückenschaltung, die in Abschnitt 2.1 angegeben ist, mit beliebigen R_1, R_2, R_3, R_4, wobei der Lastwiderstand R_L nicht angeschlossen ist und geben Sie U_q, I_k, R_i mit dieser Methode an.

Um hier auf die richtigen Lösung zu kommen, müssen wir die Potentiale ϕ_1 und ϕ_2 bestimmen, die an den Punkten A und B anliegen. Hier können wir die Spannungsteilerregel anwenden, um auf den Wert U_q zu kommen.

$$U_A = U_0 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$
$$U_B = U_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_q = U_{B-A} = U_0 \cdot \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \tag{1}$$

Für den Innenwiderstand der Ersatzspannungsquelle ergibt sich jetzt (siehe Anhang für das dafür genutzte Schaltbild):

$$\frac{1}{R_i} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \tag{2}$$

Durch die theoretischen Werte, die wir mit (1) und (2) berechnet haben, können wir nun auch den fehlenden Wert I_k berechnen:

$$I_k = \frac{U_q}{R_i} \tag{3}$$

Aufgabe 1.1.2 Stellen Sie nun dar, was passieren würde, wenn alle $R_1 = R_3$ und $R_2 = R_4$ gelten würde und was das für die Brückenschaltung bedeutet.

Da nun die oben genannten Bedingungen gelten, folgt, unabhängig von den Werten der Widerstände aus (1), dass die Quellenspannung der Ersatzspannungsquelle nun $0V$ beträgt. Demnach ist nun auch der Wert für $I_k = 0A$. Allein der Innenwiderstand der Ersatzspannungsquelle lautet nun:

$$\frac{1}{R_i} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Aufgabe 1.1.3 Berechnen Sie nun den Wert der Quellenspannung U_q, des Innenwiderstands R_i und des Kurzschlussstromes I_k der Ersatzspannungsquelle.

Mit den oben gezeigten Formeln aus **Aufgabe 1.1.1** findet sich nun die Werte mit:

$$U_q = U_{B-A} = U_0 \cdot \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = 10V \cdot \left(\frac{10k\Omega}{10k\Omega + 47k\Omega} - \frac{22k\Omega}{22k\Omega + 33k\Omega} \right) = 2,2456V$$

$$R_i = \left(\frac{1}{R_i} \right)^{-1} = \left(\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \right)^{-1} = \left(\left(\frac{1}{22k\Omega} + \frac{1}{33k\Omega} \right) + \left(\frac{1}{10k\Omega} + \frac{1}{47k\Omega} \right) \right)^{-1} =$$

$$I_k = \frac{U_q}{R_i} = \frac{2,2456V}{} =$$

2.2 Simulation

2.2.1 Durchführung

Wir simulieren nun in LTSpice mittels einer zeitabhängigen Funktion des R_L (in der Grafik hellrot makiert) den Einfluss des Lastwiderstandes auf die verschiedenen Werte der

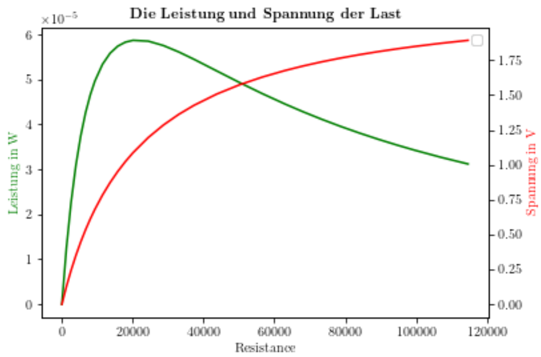


Abbildung 1: Die Graphen der Leistung und Spannung in Abhängigkeit von dem Lastwiderstand R_L

abgeglichnen belasteten Brückenschaltung und schauen uns zudem den Lastleistungswert an. Um diese Begebenheit in LTSpice zu simulieren, haben wir den Widerstandswert des Lastwiderstandes als Funktion der Zeit mit dem Proportionalitätsfaktor 2200 erstellt und dann von $t_0 = 0s$ bis $t_{end} = 1000s$ die Wertänderung betrachtet. Die Werte werden dann über sogenannte Traces von LTSpice auf dem Bildschirm ausgegeben. Diese werden dann als .txt-Tabelle exportiert und dann als Graph dargestellt (siehe Figure 1, siehe Anhang 1 für Tabelle).

2.2.2 Beobachtung

Die Werte für die Spannung ist in Rot in Abbildung 1 auf der nächsten Seite dargestellt. Man erkennt hier, dass, mit steigendem Widerstandswert, auch die Spannung steigt. Jedoch ist der Verlauf nicht linear sondern nähert sich asymptotisch der Quellenspannung der Ersatzspannungsquelle $U_q = 2,2456V$. Typisch für die Kurve eines Leistungswerts am veränderlichen Lastwiderstand ist dieser an einem bestimmten Punkt am höchsten, sinkt danach aber wieder; wir bezeichnen diesen Punkt im folgenden mit P_{max}. Der Punkt P_{max} ist in diesem Fall der auf der Abbildung 1 erkennbare Hochpunkt der Funktion für die Lastleistung.

$$\psi_n(\lambda, \mu) = \lambda \cdot \mu \wedge \lambda + \mu = x \in \mathbb{R} \text{ für beliebiges } n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

In der Aussage (4) definieren wir die Funktion der Leistung in Abhängigkeit von Strom und Spannung am Lastwiderstand. Wir überlegen uns, dass das Maximum der Leistung erreicht ist, wenn die Differenz der Stromstärke und der Spannung Null ist, sie also gleich sind. (Der Beweis findet sich im Anhang) Grafisch lässt sich dieser Punkt als Schnittpunkt der Graphen für Strom und Spannung interpretieren (siehe Figure 2). Setzen wir nun alle anderen Werte als Funktion vom Widerstand, sondern betrachten den Wert der Stromstärke als Funktion der Spannung, so bekommen wir eine wohlbekannte Generatorkennlinie, die ihren Nullpunkt auf dem Wert $U_q = 2,2456V$ und Y-Achsenabschnitt

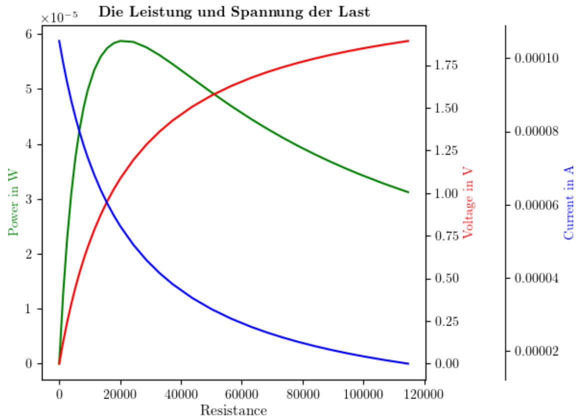


Abbildung 2: Die Graphen für die Spannung und den Strom treffen sich genau an dem Punkt, an welchem die Leistung maximal ist.

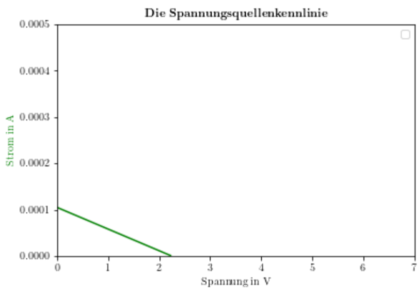
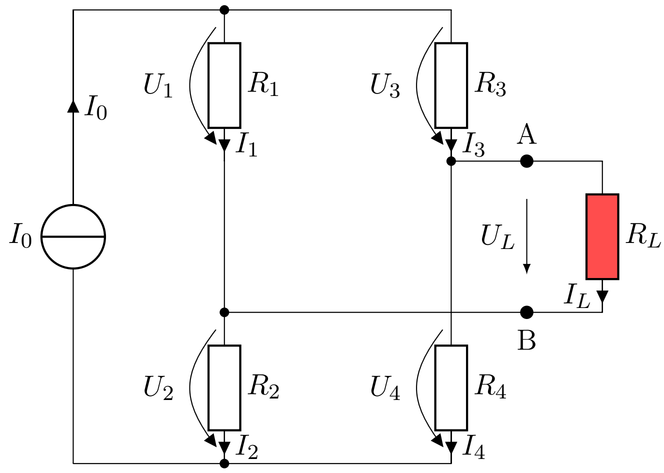


Abbildung 3: Generatorkennlinie der Ersatzspannungsquelle

auf den Wert $I_k =$ hat und somit der Kennlinie unserer Ersatzspannungsquelle entspricht (siehe Figure 3). Dieser Zusammenhang stellt wiederum nur erneut die Begebenheiten des Versuches dar, da wir mit dem Kurzschlussstrom denjenigen Strom mit $\lim_{R_L \to 0} \frac{U_q}{R_G} = I_k$ und mit der Leerlaufspannung diejenige Spannung $\lim_{R_L \to \infty} I_k \cdot R_G = U_q$ bezeichnen, wobei im Falle der Ersatzspannungsquelle $R_G = R_i + R_L$ gilt.

3 Belastete Brückengleichung an einer Stromquelle



3.1 Vorbereitung

> **Aufgabe 1.2.1** Ermitteln Sie mithilfe der obenstehenden Zeichnung die Werte R_i, U_q, I_k für die Ersatzspannungsquelle und geben Sie die allgemeinen Formeln für die Werte mit beliebigen $R_{1...4}$ an.

Um die Aufgabe so analog wie möglich zu gestalten, berechnen wir zuerst einmal den Gesamtwiderstand der vorliegenden Schaltung. Dieser wird berechnet durch:

$$\frac{1}{R_G} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} \tag{5}$$

Zusammen mit dem Gesamtstrom I_G, der uns angegeben ist, können wir mit $R_G \cdot I_G = U_G$ berechnen. Ab hier können wir nun uns an der **Aufgabe 1.1.1** orientieren und mit (1) den Wert U_q erhalten. Nur der Innenwiderstand der Ersatzspannungsquelle unterscheidet sich noch von dem vorherigen Wert, da die Stromquelle als Unterbrechung in der Leitung und nicht als Kurzschluss gewertet wird (siehe Anhang für entsprechende Zeichnung).

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2 + R_4}$$

mit (3) können wir nun auch endlich den fehlenden Wert berechnen.

> **Aufgabe 1.2.2** Berechnen Sie die Werte mithilfe der Formeln, die sie gerade erarbeitet haben und den vorgebenen Werten aus der Aufgabenstellung.

Wie in **Aufgabe 1.1.3** rechnen wir:

$$\left(\frac{1}{R_G}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{55k\Omega} + \frac{1}{57k\Omega}\right)^{-1} =$$
$$U_G = I_G \cdot R_G = 1mA \cdot 5 = 5$$

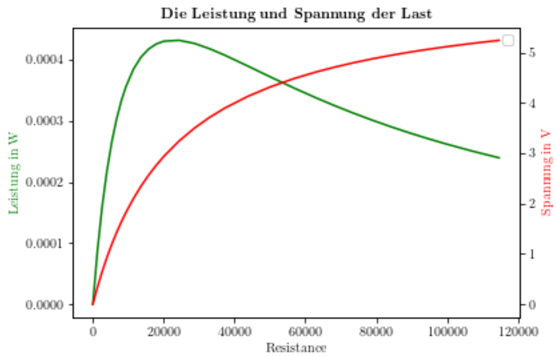


Abbildung 4: Die Leistung und Spannung des zweiten Versuches

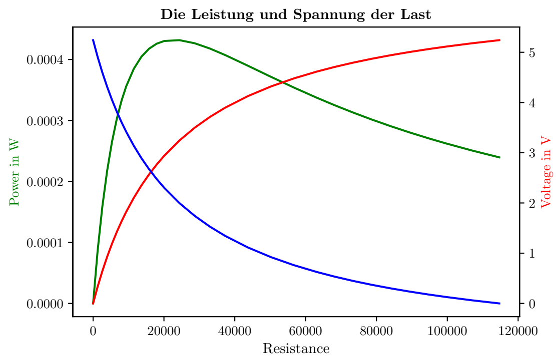


Abbildung 5: Der Schnittpunkt der beiden Were

3.2 Simulation

3.3 Durchführung

Wir verwenden das gleiche Setup wie in der Durchführung des ersten Versuches, nur, dass wir hier eine Stromquelle verwenden. Alle Werte werden wie gewohnt durch die Simulation errechnet und auf Graphen eingezeichnet.

3.4 Beobachtung

Auch hier ergibt sich ein ähnliches Schema, wie in Aufgabe 1. Sowohl Spannung als auch Strom nähern sich asymptotisch einem bestimmten Wert an (von I_k für I, bis U_q für U). Analog zur gemachten Überlegung in (4) ist auch hier das Maximum der Leistungsfunktion bei dem Schnittpunkt der beiden Graphen zu sehen.

4 Aufgabe 3

4.1 Vorbereitung

4.2 Simulation

5 Anhang

5.1 Beweis zu (4)

Lemma 1. *Sei ψ eine Abbildung, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, wobei $\psi_n(\lambda, \mu) = \lambda \cdot \mu \wedge \lambda + \mu = x \in \mathbb{R}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist. Es folgt, dass der Hochpunkt der Funktion an der Stelle ist, an der $\lambda - \mu = 0$ gilt.*

Beweis. Wir wollen nun zunächst den Hochpunkt von ψ_n berechnen. Dafür stellen wir $\lambda + \mu = x$ nach λ um und erhalten $\lambda = x - \mu$. Im nächsten Schritt setzen wir die umgestellte Gleichung in unsere Funktion ein und erhalten $\psi(\mu) = \mu \cdot (x - \mu) = x\mu - \mu^2$. Um den Extrempunkt der Funktion zu erhalten, leiten wir zunächst die Funktion einmal ab:

$$\psi'(\mu) = x - 2\mu$$

Setzen wir die Funktion nun gleich Null, ergibt sich:

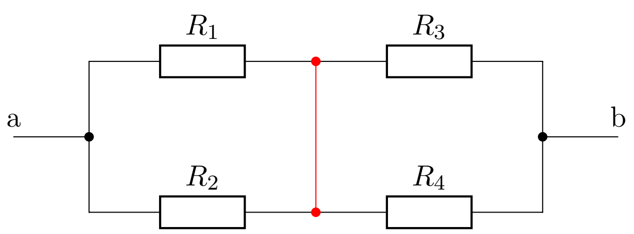
$$\begin{aligned} 0 &= x - 2\mu \\ 2\mu &= x \\ \mu &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Leiten wir nun die Funktion ein weiteres Mal ab und setzen unser μ von oben ein, erhalten wir:

$$\psi''(\mu) = -2 < 0 \implies \mu \text{ ist Hochpunkt der Funktion}$$

Dadurch, dass dieser Vorgang analog mit λ funktioniert, und das gleiche Ergebnis $\frac{x}{2}$ entsteht, ist das Lemma gezeigt. $\square$

5.2 Zeichnung zu der Widerstandsberechnung von 1 und 2



Anmerkung: Für Aufgabe 1 ist die rote Verbindungslinie vorhanden, während bei Aufgabe 2 die Linie nicht mehr da ist.