# Ejercicio 1

## a) Existe un término $t \in \Lambda$ tal que para todo $s \in \Lambda$ se tiene que $t\ s =_\beta s\ t$.

**Verdadero.** Tomemos

$$t = (\lambda x.(\lambda y.yxx))\ (\lambda x.(\lambda y.yxx)).$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} t\ s &\to_\beta (\lambda z.z\ (\lambda x.(\lambda y.yxx))\ (\lambda x.(\lambda y.yxx)))\ s \\ &\to_\beta s\ (\lambda x.(\lambda y.yxx))\ (\lambda x.(\lambda y.yxx)) \\ &= s\ t. \end{aligned}$$

## b) Existe un término $t \in \Lambda$ tal que para todo $s \in \Lambda$ se tiene que $t =_\beta s\ t$.

**Falso.** Supongamos que sí existe tal $t$. Tomamos $s = (\lambda y.z)$. De esta forma, $s\ t \twoheadrightarrow_\beta z$.

Supongamos que $t$ reduce a un término en forma normal que no es una variable atómica. En este caso, $t$ reduce a una forma normal distinta que $s\ t$, y por confluencia de la $\beta$-reducción, no son $\beta$ equivalentes.

Si, en cambio, $t$ sí reduce a una variable atómica $x$, entonces tomamos $z$ como una variable atómica diferente a $x$. Así, los dos términos reducen a formas normales distintas, y por confluencia, tampoco son $\beta$ equivalentes.

En conclusión, para todo $t$ encontramos un término $s$ tal que $t \neq_\beta s\ t$.

# Ejercicio 2

## a) Existe un término cerrado de tipo $(\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha$.

**Falso.** Se resolvería igual que el ejercicio 9 de la práctica 5, que fue visto en clase. Lamentablemente no lo tengo copiado, y no lo recuerdo bien. A continuación está mi mejor intento.

A grandes rasgos, el juicio de tipado de un término de este tipo sería algo como lo que se ve en la Figura 1.

El juicio de tipado $\Gamma \vdash \sigma \to \alpha$ podría ser una aplicación de dos reglas de tipado posibles: la Abs, o la App. En ambas se alcanza a que es necesario deducir un juicio de tipado que crece o en el tamaño del tipo, o en el tamaño del contexto de tipado. Esto se puede ver en las Figuras 2 y 3. Como nunca decrece, el juicio de tipado es infinito, y por lo tanto no es un juicio válido. Por ende, no existe un término cerrado de tipo $(\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha$.

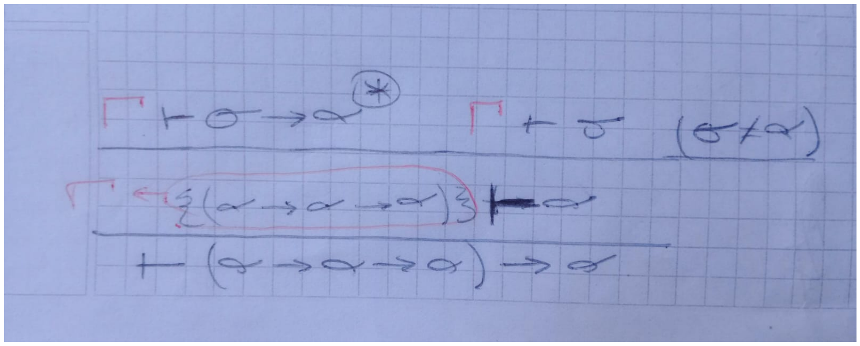

Figura 1: Supuesto juicio de tipado de $(\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha$. El tipo $\sigma$ no puede ser igual a $\alpha$, ya que sino tendríamos un juicio de tipado infinito.

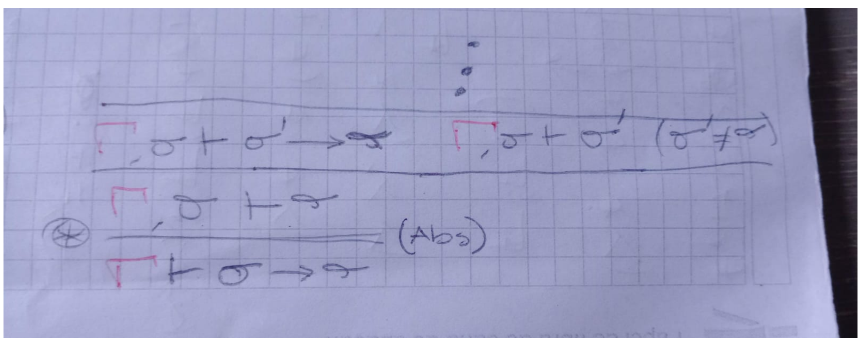


Figura 2: Continuación del juicio de tipado aplicando la regla Abs. Obligatoriamente se tiene que aplicar la regla App para continuar el juicio de tipado, ya que $\alpha \notin \Gamma, \sigma$.

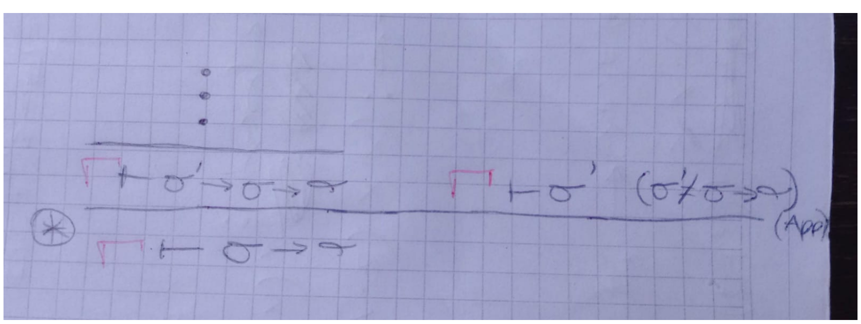


Figura 3: Continuación del juicio de tipado aplicando la regla App.

### b) Existe un término cerrado de tipo $((\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha$.

**Verdadero.** El juicio de tipado se puede ver en la Figura 4. En particular, el término que satisface el juicio de tipado es $(\lambda f.f\ I)$, donde $I$ es la identidad.

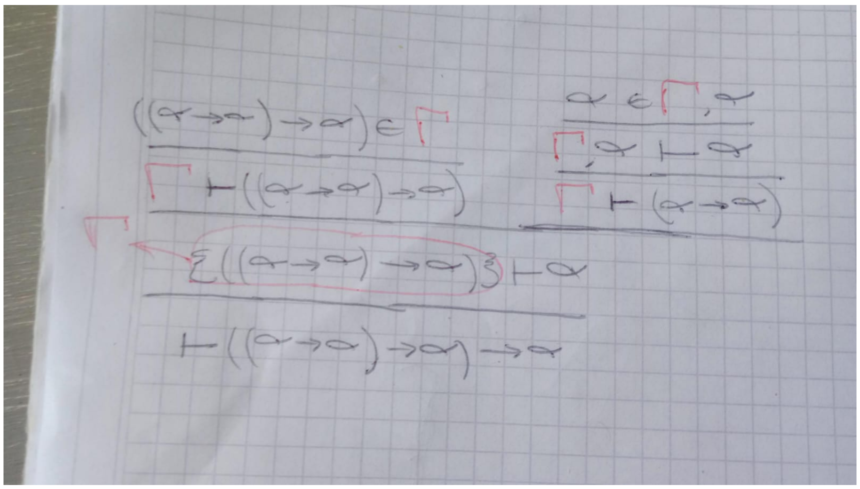


Figura 4: Juicio de tipado de $((\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha$.

# Ejercicio 3

Por lo visto en clase, si un término es tipable en el cálculo-$\lambda$ simplemente tipado, entonces es SN. Veremos entonces que $t_i$ es tipable para todo $i$. Para esto, es suficiente con ver que $t_i$ reduce a un término tipable.

Primero, $t_0 = z$ es tipable con un tipo atómico $a$. Ahora, veremos que $t_i$ tiene también tipo $a$ para todo $i > 0$.

Supongamos que $t_{i-1}$ tiene tipo $a$. Notar que $F$ reduce a $I = (\lambda x.x)$. Reduciendo $t_i$ tenemos entonces que

$$\begin{aligned} t_i &= (\lambda f.f(f\ t_{i-1}))F \\ &\to_\beta (\lambda f.f(f\ t_{i-1}))I \\ &\to_\beta I(I\ t_{i-1}) \\ &\twoheadrightarrow_\beta t_{i-1}. \end{aligned}$$

Como $t_{i-1}$ es tipable por hipótesis, $t_i$ también lo es, y por lo tanto es SN.