

Qué \$#%* & es una demostración?

Eric Brandwein

2025-08-22

Cubaweek

Qué $\$ \# \% \backslash * \&$ es una demostración?

Una secuencia de aplicaciones de **axiomas** y **teoremas**.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Formal_system

Qué $\$ \# \% \backslash * \&$ es una demostración?

Una secuencia de aplicaciones de **axiomas** y **teoremas**.

Tiene **reglas de inferencia** para llevar de un estado a otro.¹

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Formal_system

Qué \$#%*& es una demostración?

Una secuencia de aplicaciones de **axiomas** y **teoremas**.

Tiene **reglas de inferencia** para llevar de un estado a otro.¹

$$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Formal_system

Ejemplos

Teorema 1 $(a + 0) + c = a + (c + 0)$.

Teorema 1 $(a + 0) + c = a + (c + 0)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}(a + 0) + c = a + (c + 0) &\Leftrightarrow (a) + c = a + (c + 0) \rightarrow \text{por axioma de la suma de 0.} \\ &\Leftrightarrow a + c = a + (c + 0) \rightarrow \text{por regla de paréntesis extra.} \\ &\Leftrightarrow a + c = a + (c) \rightarrow \text{por axioma de la suma de 0.} \\ &\Leftrightarrow a + c = a + c \rightarrow \text{por regla de paréntesis extra.} \\ &\Leftrightarrow \text{True} \rightarrow \text{por identidad de términos.}\end{aligned}$$

□

Teorema 1 $(a + 0) + c = a + (c + 0)$.

Demostración.

```
import Mathlib.Data.Real.Basic
```

```
example (a c : Nat) : (a + 0) + c = a + (c + 0) := by
  rewrite [add_zero] -- a + c = a + (c + 0)
  rewrite [add_zero] -- a + c = a + c
```



Ejemplos: Lenguaje de Programación (Lean 4)

Teorema 1 $(a + 0) + c = a + (c + 0)$.

Demostración.

```
import Mathlib.Data.Real.Basic
```

```
example (a c : Nat) : (a + 0) + c = a + (c + 0) := by
  rewrite [add_zero] -- a + c = a + (c + 0)
  rewrite [add_zero] -- a + c = a + c
```



Podemos correr la demo [acá](#).

Teorema 1 $(a + 0) + c = a + (c + 0)$.

Demostración. Nótese que a sumado a c es equivalente a sí mismo. Luego, por axioma de suma de cero, podemos sumar un cero a la a de la izquierda, y sumar un cero a la c de la derecha, y obtener el enunciado del teorema. \square

Teorema 1 $(a + 0) + c = a + (c + 0)$.

Demostración. Vale por propiedades básicas de la aritmética.



Teorema 1 $(a + 0) + c = a + (c + 0)$.

Demostración. Vale por propiedades básicas de la aritmética.



Esto es **más difícil** de pasar a algo formal.

Cosas Malas en Demos

1. Deducir algo falso usando mal las conclusiones y/o hipótesis de un teorema/axioma/regla de inferencia.

1. Deducir algo falso usando mal las conclusiones y/o hipótesis de un teorema/axioma/regla de inferencia.

Teorema 2 $A \vee B \Rightarrow A \wedge B$.

Demostración. Asumamos que se cumple $A \vee B$. Alguno de los dos debe ser cierto. Asumamos sin pérdida de generalidad que A es cierto. Con el mismo argumento, podemos asumir que B es cierto. Por lo tanto, $A \wedge B$ es cierto. Con esto tenemos que $A \vee B \Rightarrow A \wedge B$, que es lo que queríamos demostrar. \square

2. Deducir algo verdadero usando las hipótesis incorrectas.

2. Deducir algo verdadero usando las hipótesis incorrectas.

Teorema 1 $(a + 0) + c = a + (c + 0)$.

Demostración. Vale porque todo natural es positivo.



2. Deducir algo verdadero usando las hipótesis incorrectas.

Teorema 1 $(a + 0) + c = a + (c + 0)$.

Demostración. Como todo natural es positivo, la suma de a con 0 es igual a a , y lo mismo con c . □

3. No contemplar todos los casos.

3. No contemplar todos los casos.

Teorema 2 Todos los caballos son del mismo color.

Demostración. Demostramos por inducción en el tamaño del conjunto 🐎 de todos los caballos.

- Caso base ($|\text{🐎}| = 1$): Trivial.
- Paso inductivo: Elijamos dos caballos c_1 y c_2 de 🐎. Sea $\text{🐎}_A := \{c_1, c_2\}$ y $\text{🐎}_B := \text{🐎} \setminus c_2$. Por hipótesis inductiva, ambos conjuntos 🐎_A y 🐎_B tienen caballos del mismo color, porque forman un conjunto de menos elementos. Como 🐎_A y 🐎_B comparten el caballo c_1 , todos los caballos de 🐎 tienen el mismo color.

□

4. Falta de formalismo, o sea, decir los pasos muy por arriba.

4. Falta de formalismo, o sea, decir los pasos muy por arriba.

Teorema 2 $a + 0 + c = a + c + 0$.

Demostración. Vale por [Teorema 1](#).



5. Terminar demostrando otra cosa.

- 5. Terminar demostrando otra cosa.
- 6. Que no se entienda nada, i.e. errores de escritura (ambigüedad, gramática, caligrafía, palabras raras o frases largas).

- 5. Terminar demostrando otra cosa.
- 6. Que no se entienda nada, i.e. errores de escritura (ambigüedad, gramática, caligrafía, palabras raras o frases largas).

7. Repetir lo que dijiste antes para darle más «fuerza».

Muy parecido a **debuggear un programa**.

Ejercicio. Entren a la materia que más les guste de <https://cubawiki.com.ar> (álgebra, análisis, Algo 2, Algo 3) y busquen cualquier demo de un alumno. Traten de ver qué errores de estos tienen.

Recomendaciones

- Pasen las ideas a definiciones formales.

Recomendaciones

- Pasen las ideas a definiciones formales.
- Sépanse los axiomas y teoremas comunes del área.

Recomendaciones

- Pasen las ideas a definiciones formales.
- Sépanse los axiomas y teoremas comunes del área.
- Ante la duda, háganlo más riguroso.

Recomendaciones

- Pasen las ideas a definiciones formales.
- Sépanse los axiomas y teoremas comunes del área.
- Ante la duda, háganlo más riguroso.
- Usen expresiones estándar.

Recomendaciones

- Pasen las ideas a definiciones formales.
- Sépanse los axiomas y teoremas comunes del área.
- Ante la duda, háganlo más riguroso.
- Usen expresiones estándar.
- Lean muchas demos bien escritas del área.

Recomendaciones

- Pasen las ideas a definiciones formales.
- Sépanse los axiomas y teoremas comunes del área.
- Ante la duda, háganlo más riguroso.
- Usen expresiones estándar.
- Lean muchas demos bien escritas del área.
- Practiquen, practiquen, practiquen.

Recomendaciones

- Pasen las ideas a definiciones formales.
- Sépanse los axiomas y teoremas comunes del área.
- Ante la duda, háganlo más riguroso.
- Usen expresiones estándar.
- Lean muchas demos bien escritas del área.
- Practiquen, practiquen, practiquen.
- Muestren sus demos a sus compañeros y a los profes.

Recomendaciones

- Pasen las ideas a definiciones formales.
- Sépanse los axiomas y teoremas comunes del área.
- Ante la duda, háganlo más riguroso.
- Usen expresiones estándar.
- Lean muchas demos bien escritas del área.
- Practiquen, practiquen, practiquen.
- Muestren sus demos a sus compañeros y a los profes.
- Lean sus demos de nuevo, y corrijan los errores que tuvieron.

Recomendaciones

- Pasen las ideas a definiciones formales.
- Sépanse los axiomas y teoremas comunes del área.
- Ante la duda, háganlo más riguroso.
- Usen expresiones estándar.
- Lean muchas demos bien escritas del área.
- Practiquen, practiquen, practiquen.
- Muestren sus demos a sus compañeros y a los profes.
- Lean sus demos de nuevo, y corrijan los errores que tuvieron.
- **Escriban bien, loco.**

Agarren la demo que encontraron antes que tenía el error y escríbanla de cero. Hagan muchas versiones, y hagan que cada versión sea más formal que la anterior, hasta llegar a una versión casi completamente formalizada.

- El libro de demostraciones de Fede Lebrón.
- <https://users.metu.edu.tr/serge/courses/111-2011/textbook-math111.pdf>
- <https://longformmath.com/proofs-book/>
- Libros de texto del área que estén estudiando.