

# Qué \$#%\\* & es una demostración?

---

Eric Brandwein

22/08/2025

Cubaweek 2025

# Qué $\$ \# \% \backslash * \&$ es una demostración?

Una secuencia de aplicaciones de **axiomas** y **teoremas**.

---

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Formal\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Formal_system)

# Qué $\$ \# \% \backslash * \&$ es una demostración?

Una secuencia de aplicaciones de **axiomas** y **teoremas**.

Tiene **reglas de inferencia** para llevar de un estado a otro.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Formal\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Formal_system)

# Qué \$#%\\*& es una demostración?

Una secuencia de aplicaciones de **axiomas** y **teoremas**.

Tiene **reglas de inferencia** para llevar de un estado a otro.<sup>1</sup>

$$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$$

---

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Formal\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Formal_system)

# Ejemplos

---



**Teorema 1**  $(a + 0) + c = a + (c + 0)$ .

**Teorema 1**  $(a + 0) + c = a + (c + 0)$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned}(a + 0) + c = a + (c + 0) &\Leftrightarrow (a) + c = a + (c + 0) \rightarrow \text{por axioma de la suma de 0.} \\ &\Leftrightarrow a + c = a + (c + 0) \rightarrow \text{por regla de paréntesis extra.} \\ &\Leftrightarrow a + c = a + (c) \rightarrow \text{por axioma de la suma de 0.} \\ &\Leftrightarrow a + c = a + c \rightarrow \text{por regla de paréntesis extra.} \\ &\Leftrightarrow \text{True} \rightarrow \text{por identidad de términos.}\end{aligned}$$

□

**Teorema 1**  $(a + 0) + c = a + (c + 0)$ .

*Demostración.*

```
import Mathlib.Data.Real.Basic
```

```
example (a c : Nat) : (a + 0) + c = a + (c + 0) := by
  rewrite [add_zero] -- a + c = a + (c + 0)
  rewrite [add_zero] -- a + c = a + c
```





**Teorema 1**  $(a + 0) + c = a + (c + 0)$ .

*Demostración.*

```
import Mathlib.Data.Real.Basic
```

```
example (a c : Nat) : (a + 0) + c = a + (c + 0) := by
  rewrite [add_zero] -- a + c = a + (c + 0)
  rewrite [add_zero] -- a + c = a + c
```



Podemos correr la demo [acá](#).

**Teorema 1**  $(a + 0) + c = a + (c + 0)$ .

*Demostración.* Nótese que  $a$  sumado a  $c$  es equivalente a sí mismo. Luego, por axioma de suma de cero, podemos sumar un cero a la  $a$  de la izquierda, y sumar un cero a la  $c$  de la derecha, y obtener el enunciado del teorema.  $\square$

**Teorema 1**  $(a + 0) + c = a + (c + 0)$ .

*Demostración.* Vale por propiedades básicas de la aritmética.



**Teorema 1**  $(a + 0) + c = a + (c + 0)$ .

*Demostración.* Vale por propiedades básicas de la aritmética. □

Esto es **más difícil** de pasar a algo formal.



# **Cosas Malas en Demos**

---

1. Deducir algo falso usando mal las conclusiones y/o hipótesis de un teorema/axioma/regla de inferencia.

1. Deducir algo falso usando mal las conclusiones y/o hipótesis de un teorema/axioma/regla de inferencia.

**Teorema 2**  $A \vee B \Rightarrow A \wedge B$ .

*Demostración.* Asumamos que se cumple  $A \vee B$ . Alguno de los dos debe ser cierto. Asumamos sin pérdida de generalidad que  $A$  es cierto. Con el mismo argumento, podemos asumir que  $B$  es cierto. Por lo tanto,  $A \wedge B$  es cierto. Con esto tenemos que  $A \vee B \Rightarrow A \wedge B$ , que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

2. Deducir algo verdadero usando las hipótesis incorrectas.



2. Deducir algo verdadero usando las hipótesis incorrectas.

**Teorema 1**  $(a + 0) + c = a + (c + 0)$ .

*Demostración.* Vale porque todo natural es positivo.



2. Deducir algo verdadero usando las hipótesis incorrectas.

**Teorema 1**  $(a + 0) + c = a + (c + 0)$ .

*Demostración.* Como todo natural es positivo, la suma de  $a$  con 0 es igual a  $a$ , y lo mismo con  $c$ . □

3. No contemplar todos los casos.

## 3. No contemplar todos los casos.

**Teorema 4** Todos los caballos son del mismo color.

*Demostración.* Demostramos por inducción en el tamaño del conjunto 🐎 de todos los caballos.

- Caso base ( $|\text{🐎}| = 1$ ): Trivial.
- Paso inductivo: Elijamos dos caballos  $c_1$  y  $c_2$  de 🐎. Sea  $\text{🐎}_A := \{c_1, c_2\}$  y  $\text{🐎}_B := \text{🐎} \setminus c_2$ . Por hipótesis inductiva, ambos conjuntos  $\text{🐎}_A$  y  $\text{🐎}_B$  tienen caballos del mismo color, porque forman un conjunto de menos elementos. Como  $\text{🐎}_A$  y  $\text{🐎}_B$  comparten el caballo  $c_1$ , todos los caballos de 🐎 tienen el mismo color.

□

4. Falta de formalismo, o sea, decir los pasos muy por arriba.

4. Falta de formalismo, o sea, decir los pasos muy por arriba.

**Teorema 6**  $a + 0 + c = a + c + 0$ .

*Demostración.* Vale por [Teorema 1](#).



5. Terminar demostrando otra cosa.

## 5. Terminar demostrando otra cosa.

- *Ejemplo: Quería demostrar  $A \Rightarrow B$  asumiendo  $A$  y me mezclé y terminé demostrando  $A$  de nuevo.*



**5.** Terminar demostrando otra cosa.

*- Ejemplo: Quería demostrar  $A \Rightarrow B$  asumiendo  $A$  y me mezclé y terminé demostrando  $A$  de nuevo.*

**6.** Que no se entienda nada, i.e. errores de escritura (ambigüedad, gramática, caligrafía, palabras raras o frases largas).

7. Repetir lo que dijiste antes para darle más «fuerza».

7. Repetir lo que dijiste antes para darle más «fuerza».

**Teorema 1**  $(a + 0) + c = a + (c + 0)$ .

*Demostración.* No podría pasar que  $(a + 0) + c \neq a + (c + 0)$ , porque la suma no funciona así. Como los números son naturales,  $(a + 0) + c \neq a + (c + 0)$  es falso.  $\square$

# Cómo encontrar estos errores?

Muy parecido a **debuggear un programa**.

# Cómo encontrar estos errores?

Muy parecido a **debuggear un programa**.

*Ejercicio.* Entren a la materia que más les guste de <https://cubawiki.com.ar> (álgebra, análisis, Algo 2, Algo 3) y busquen cualquier demo de un alumno. Traten de ver qué errores de estos tienen.



# Recomendaciones

---

- **Practiquen, practiquen, practiquen.**

- **Practiquen, practiquen, practiquen.**
- Pasen las ideas a definiciones formales.



# Recomendaciones

- **Practiquen, practiquen, practiquen.**
- Pasen las ideas a definiciones formales.
- Sépanse los axiomas y teoremas comunes del área.

# Recomendaciones

- **Practiquen, practiquen, practiquen.**
- Pasen las ideas a definiciones formales.
- Sépanse los axiomas y teoremas comunes del área.
- Ante la duda, háganlo más riguroso.

# Recomendaciones

- **Practiquen, practiquen, practiquen.**
- Pasen las ideas a definiciones formales.
- Sépanse los axiomas y teoremas comunes del área.
- Ante la duda, háganlo más riguroso.
- Usen expresiones estándar.

# Recomendaciones

- **Practiquen, practiquen, practiquen.**
- Pasen las ideas a definiciones formales.
- Sépanse los axiomas y teoremas comunes del área.
- Ante la duda, háganlo más riguroso.
- Usen expresiones estándar.
- Lean muchas demos bien escritas del área.

# Recomendaciones

- **Practiquen, practiquen, practiquen.**
- Pasen las ideas a definiciones formales.
- Sépanse los axiomas y teoremas comunes del área.
- Ante la duda, háganlo más riguroso.
- Usen expresiones estándar.
- Lean muchas demos bien escritas del área.
- Muestren sus demos a sus compañeros y a los profes.

# Recomendaciones

- **Practiquen, practiquen, practiquen.**
- Pasen las ideas a definiciones formales.
- Sépanse los axiomas y teoremas comunes del área.
- Ante la duda, háganlo más riguroso.
- Usen expresiones estándar.
- Lean muchas demos bien escritas del área.
- Muestren sus demos a sus compañeros y a los profes.
- Lean sus demos de nuevo, y corrijan los errores que tuvieron.

# Recomendaciones

- **Practiquen, practiquen, practiquen.**
- Pasen las ideas a definiciones formales.
- Sépanse los axiomas y teoremas comunes del área.
- Ante la duda, háganlo más riguroso.
- Usen expresiones estándar.
- Lean muchas demos bien escritas del área.
- Muestren sus demos a sus compañeros y a los profes.
- Lean sus demos de nuevo, y corrijan los errores que tuvieron.
- **Escriban bien, loco.**

*Ejercicio.* Agarren la demo que encontraron antes que tenía el error y escríbanla de cero. Hagan muchas versiones, y hagan que cada versión sea más formal que la anterior, hasta llegar a una versión casi completamente formalizada.



- El libro de demostraciones de Fede Lebrón.
- <https://users.metu.edu.tr/serge/courses/111-2011/textbook-math111.pdf>
- <https://longformmath.com/proofs-book/>
- Libros de texto del área que estén estudiando.