



# **ESTRUTURAS DE DADOS E ALGORITMOS**

## **TABELA HASH**

**Adalberto Cajueiro**

**Departamento de Sistemas e Computação**

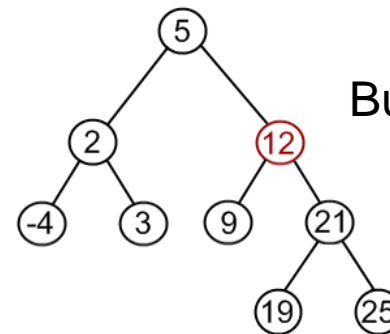
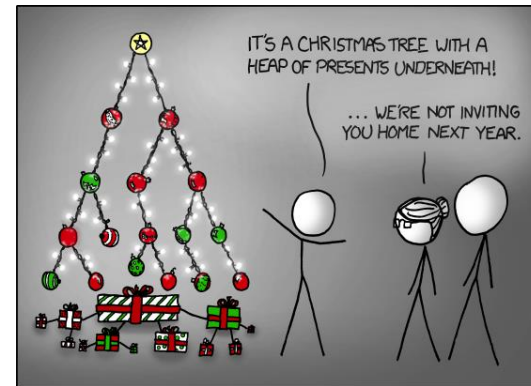
**Universidade Federal de Campina Grande**

**1**

# ESTRUTURAS VISTAS ATÉ AGORA



Busca  $O(n)$



Busca  $O(\log(n))$

# É POSSÍVEL?

- Add, search, remove em  $O(1)$ ?

# RELEMBRANDO: TABELA, MAPA, DICIONARIO

- Conceito <chave,valor>

- Operações

put(K key, V value) ->  $T[k] = v$

get(K key) ->  $T[k]$

remove(K key) ->  $T[k] = \text{null}$

Sigla (chave)	Capital (valor)
"MS"	"Campo Grande"
"PB"	"João Pessoa"
"SP"	"São Paulo"
"RS"	"Porto Alegre"

- Universo de chaves:  $U = \{"MS", "PB", "PA", "AM", "PE", "RJ", "CE", \dots\}$

- Chaves em uso:  $K = \{"MS", "PB", "SP", "RS"\}$

## COMO IMPLEMENTAR?

Qual a estrutura que pode nos dar acesso direto?



# COMO IMPLEMENTAR?

Sigla (chave)	pos
"MS"	0
"PB"	1
"SP"	2
"RS"	3

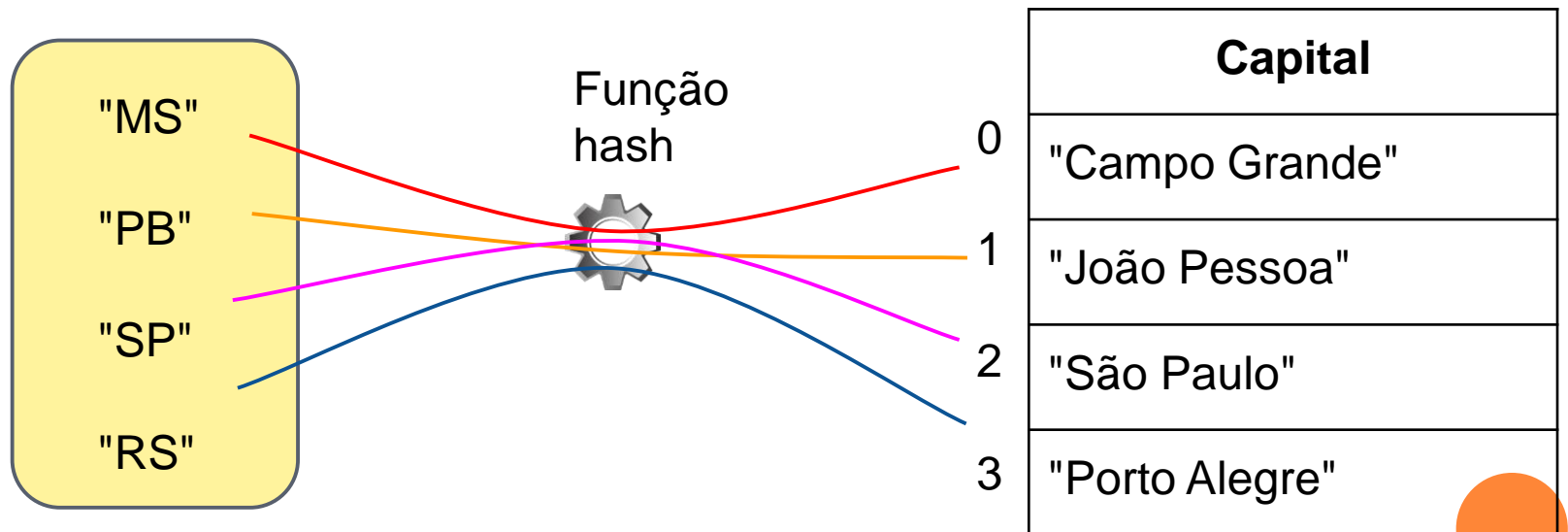
	Capital
0	"Campo Grande"
1	"João Pessoa"
2	"São Paulo"
3	"Porto Alegre"

Como mapear as chaves em valores? Tabela (vetor) indexada por inteiros.



# TABELAS HASH

- Função Hash: calcula um valor inteiro a partir de uma chave.
  - Determinística



# TABELA DE ACESSO DIRETO

$$|U| == |T|$$

$\text{hash}(K \text{ key}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, m\}$

- Sobrejetora: toda chave é mapeada para um valor
- Injetora: cada valor é referente a apenas uma chave





## NO NOSSO CASO

$\text{hash}(K \text{ key}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 26\}$

$\text{put}(\text{Key } k, \text{Element } e)$

$T[\text{hash}(k)] = e$

$\text{remove}(\text{Key } k)$

$T[\text{hash}(k)] = \text{null}$

$O(1)$

$\text{search}(\text{Key } k)$

return  $T[\text{hash}(key)]$



E SE...

Conjunto de chaves (U) for muito grande? Muito maior que o tamanho da estrutura (T) para armazená-las?

$$|U| \gg |T|$$

Exemplo: Matrículas de alunos da UFCG (8 dígitos)

- Quantas chaves possíveis?



# TABELA HASH

- K: conjunto de chaves efetivamente utilizadas
  - Apenas dos alunos de CC, por exemplo
- $|U| \gg |K|$ 
  - A tabela precisa apenas ter  $|K|$  posições
  - Espaço gasto  $O(|K|)$



# TABELAS HASH

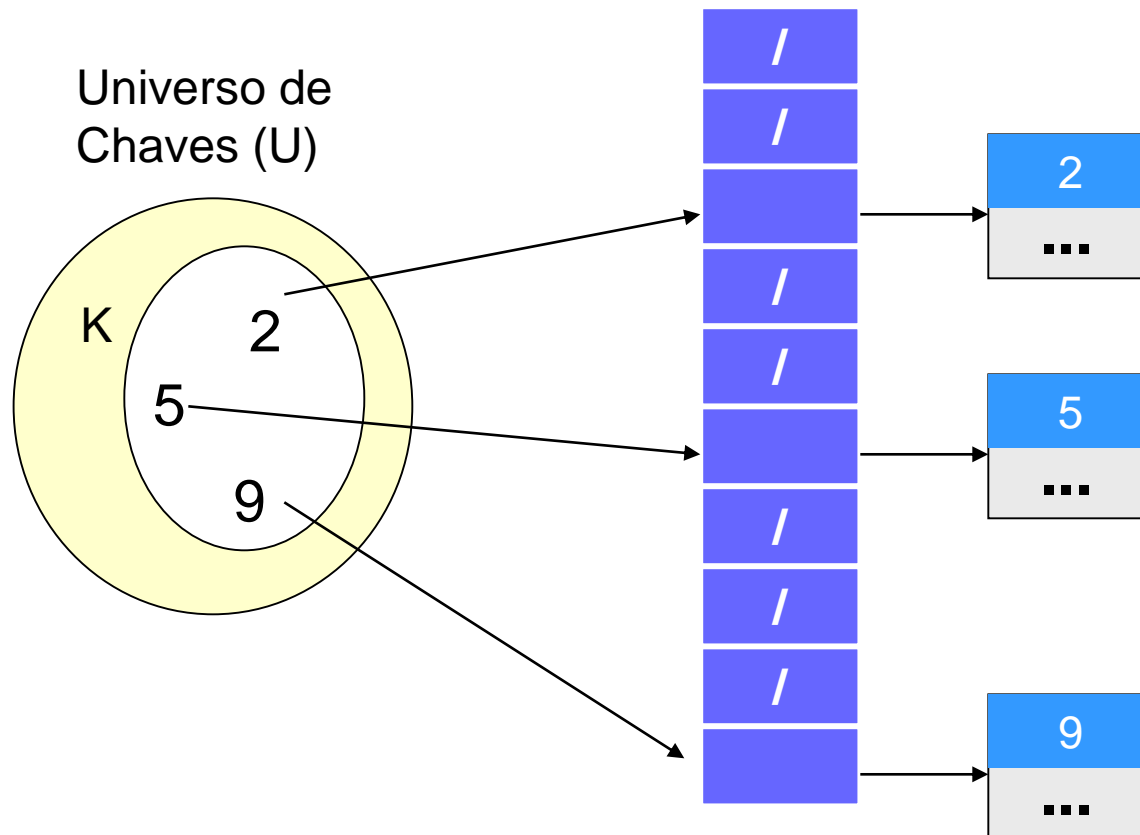
- Também conhecidas com o tabelas de dispersão
- Resolve o problema quando  $|U| > \text{length}(T)$  mantendo o tempo de acesso em  $O(1)$  em média
- Usa uma **funcao de hashing** (tem que ser **determinística**) para mapear chaves em índices

$$h : U \rightarrow \{0, \dots, m-1\}$$

- Se  $|U| > \text{length}(T)$  pelo menos duas chaves são mapeadas para o mesmo índice (colisão)
  - É impossível não ter colisões
  - Elas devem ser minimizadas

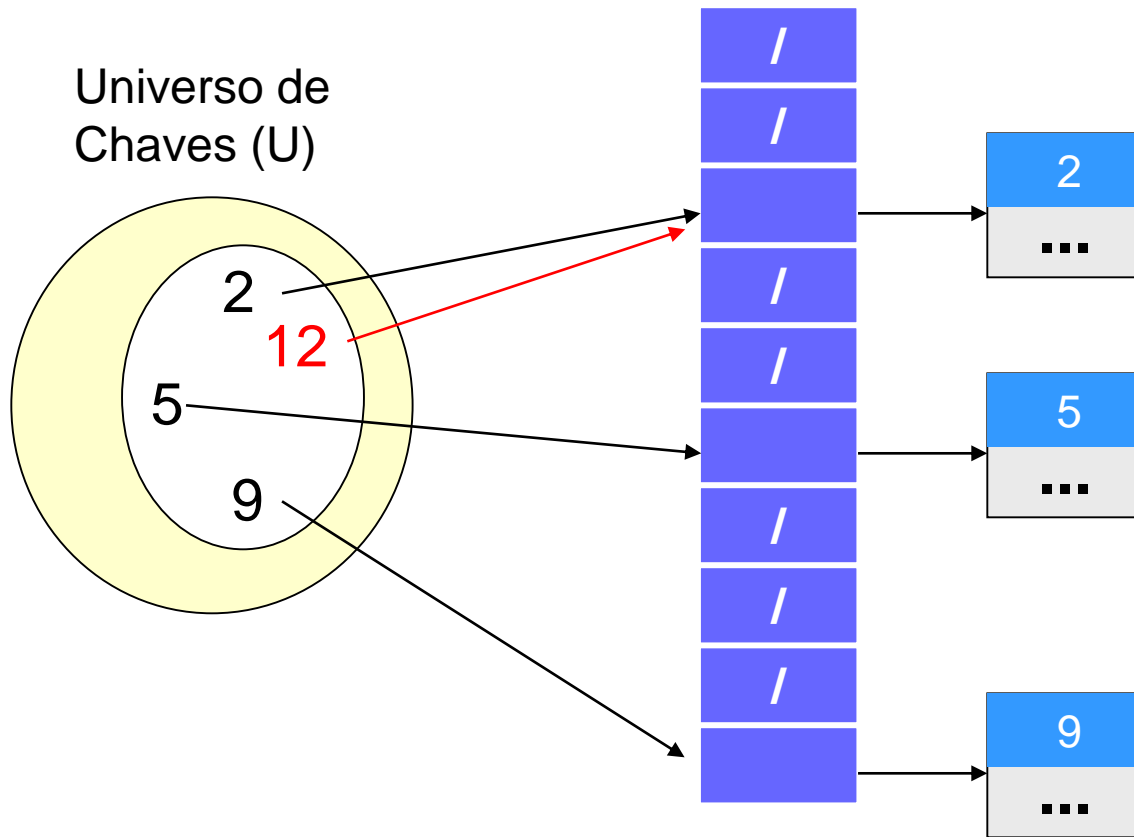
# EXEMPLO

- Seja  $h(k)=k\%10$  uma função hash que mapeia de chaves do universo  $K$  em  $\{2,5,9,100,107\}$ . Considere uma tabela com  $m=10$  células.



# EXEMPLO

- O que acontece se utilizarmos a função hash  $h(k)=k\%10$  para inserir os elementos  $\{2,5,9,12\}$ ?



# COLISÕES

- Tabela hash ideal seria aquela sem colisão
  - Impossível quando  $|U| > m$  (tamanho da tabela)
- Existem mais chaves que posições
  - Duas ou mais chaves são mapeadas em um mesmo índice
- Escolher uma boa função hash para minimizar as colisões

# RESOLUÇÃO DE COLISÕES (ABORDAGENS)

## ○ Endereçamento fechado

- Elementos com mesmo código hash são colocados na mesma posição da tabela (chaining)
  - Na verdade, inseridos na cabeça da lista já que existe a idéia que o elemento inserido será usado em breve

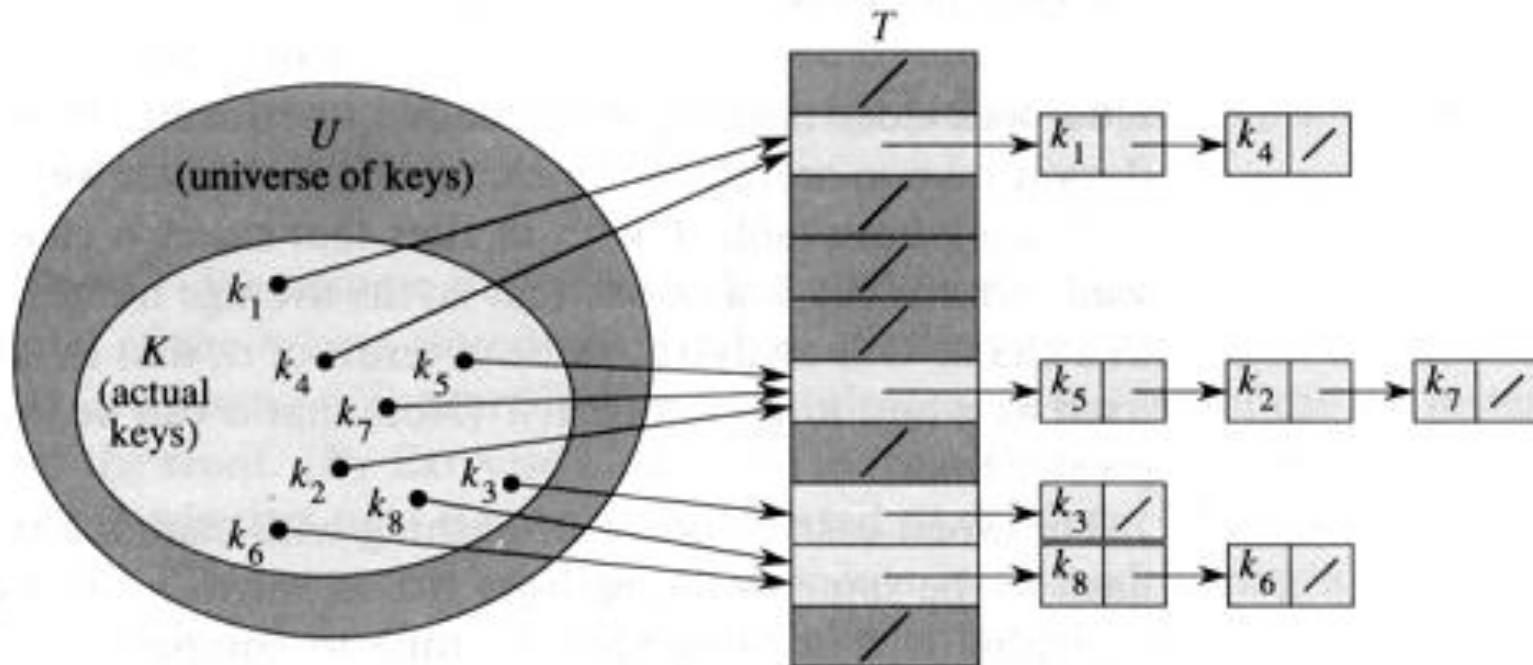
## ○ Endereçamento aberto

- Chaves com mesmo código hash são colocadas em posições diferentes



# ENDEREÇAMENTO FECHADO: CHAINING

- Usar uma lista encadeada



# EXERCÍCIO

- Implemente as operações (inserir, remover, pesquisar) utilizando a resolução de conflitos by chaining?
  - Inserir( $T, x$ )
  - Remover( $T, x$ )
  - Pesquisar( $T, k$ )

# EXERCÍCIO

- Implemente as operações (inserir, remover, pesquisar) utilizando a resolução de conflitos by chaining?
  - Inserir( $T, x$ )
    - Inserir  $x$  na cabeça de  $T[h(\text{key}(x))]$ ;
  - Remover( $T, x$ )
    - Deletar  $x$  da lista  $T[h(\text{key}(x))]$ ;
  - Pesquisar( $T, k$ )
    - Buscar  $x$  na lista  $T[h(k)]$ ;

# EXERCÍCIO

- Implemente as operações (inserir, remover, pesquisar) utilizando a resolução de conflitos by chaining?
  - Inserir( $T, x$ )
    - Inserir  $x$  na cabeça de  $T[h(\text{key}(x))]$ ;
  - Remover( $T, x$ )
    - Deletar  $x$  da lista  $T[h(\text{key}(x))]$ ;
  - Pesquisar( $T, k$ )
    - Buscar  $x$  na lista  $T[h(k)]$ ;

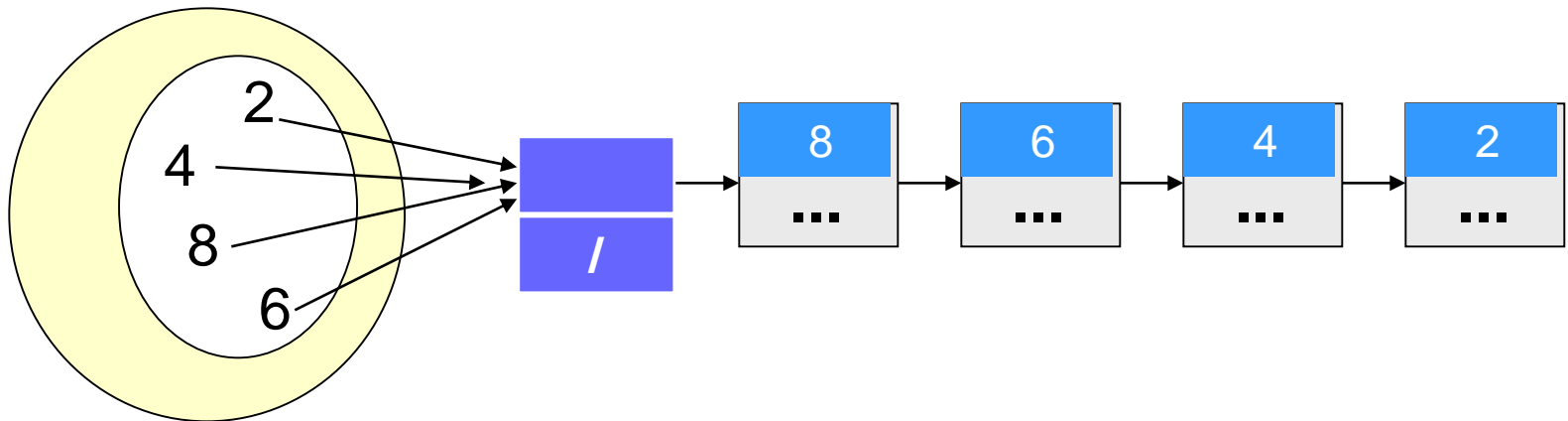
**Faça a análise do pior caso das operações (inserir, remover, pesquisar)**

## EXERCÍCIO

- Qual seria a tabela final considerando endereçamento fechado (resolução por chaining) e função de hash  $h(k)=k\%2$  e chaves do universo  $K=\{2,4,6,8\}$ ?

## EXERCÍCIO

- Qual seria a tabela final considerando endereçamento fechado (resolução por chaining) e função de hash  $h(k)=k\%2$  e chaves do universo  $K=\{2,4,6,8\}$ ?

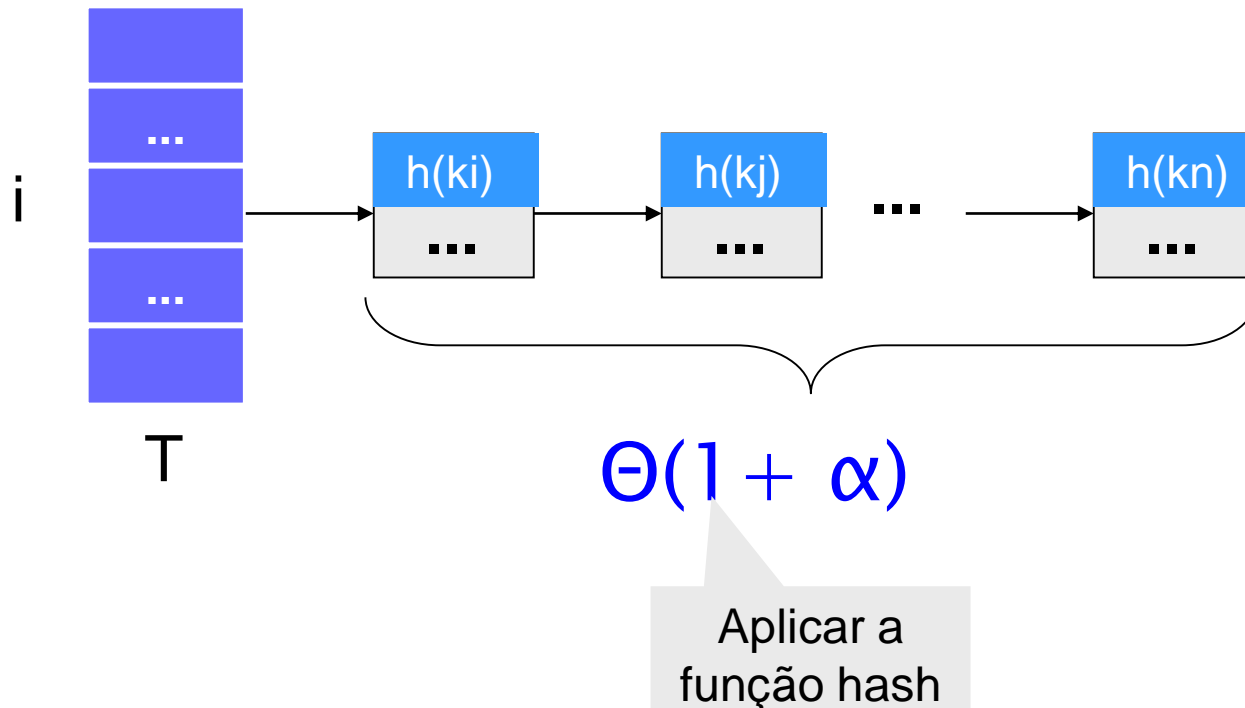


# FATOR DE CARGA

- A função  $h$  faz um **hashing uniforme** simples
  - Chaves possuem igual probabilidade de serem mapeadas para qualquer um dos índices
- Cada célula da tabela vai ter um número mais ou menos igual de elementos
- Origina a noção de *load factor* (fator de carga)  $\alpha$  (numero medio de elementos em cada lista)
  - $n$  = número de chaves
  - $m$  = número de células na tabela
  - $\alpha = n/m$
- Exemplo: qual o fator de carga de uma tabela hash com 50 células e 100 chaves?

## EXERCÍCIO

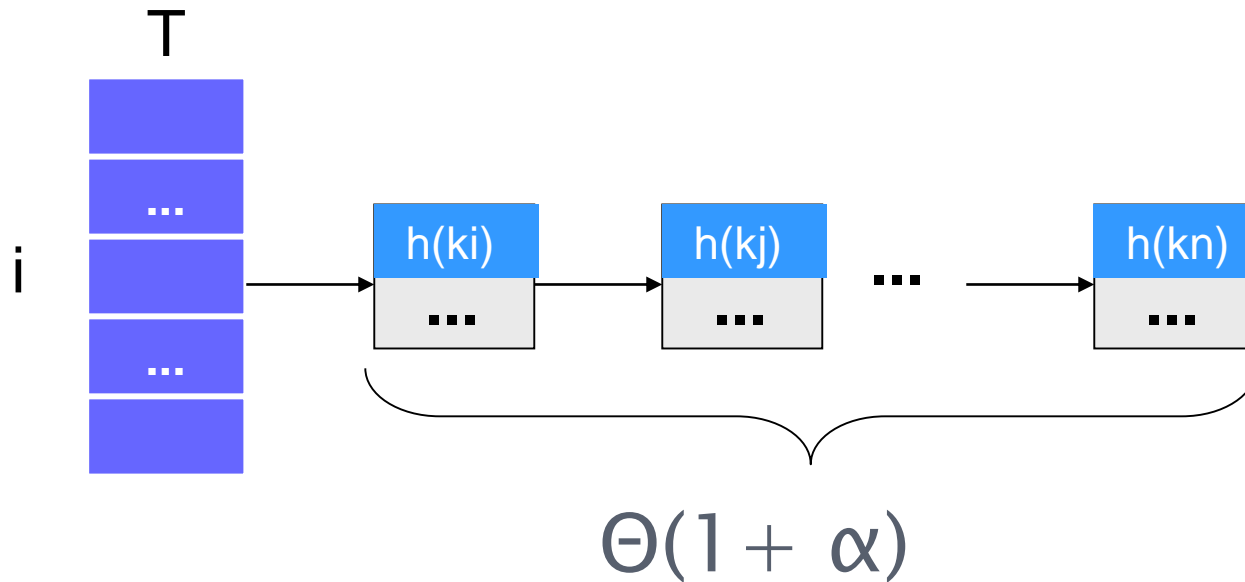
- Qual o limite assintoticamente restrito usando o fator de carga ( $\alpha$ ) para uma pesquisa?





# EXERCÍCIO

- Quando uma pesquisa será feita em  $\Theta(1)$ ?
  - $\alpha = n/m = O(1)$
  - $n = O(m)$



## EXERCÍCIO

- Vamos utilizar a função hash  $h(k) = k \% m$  ( $m=10$ ) para guardar os CPFs. Como vai ficar a tabela?
- Será que tem alguma função hash melhor?

Como escolher uma função hash?

# CARACTERÍSTICAS DA FUNÇÃO HASHING

- Minimizar o número de colisões
- Satisfazer a hipótese de **hashing uniforme**
  - Qualquer chave tem a mesma probabilidade de ser mapeada em qualquer um dos  $m$  slots. Mas é **difícil**
- Alguns métodos ajudam
  - **Divisão**
  - **Multiplicação**
- Consideramos as chaves como números
  - Fácil de mapear **Strings**,... para números

## MÉTODO DA DIVISÃO

- Usa o resto da divisão para encontrar valores hash
- Neste método a função hash é da forma:

$$h(k) = k \bmod m$$

Número de  
células da tabela

- Método rápido (requer apenas uma divisão)

## EXERCÍCIO

- Seja  $K = \{2, 4, 12, 10, 5\}$ , desenhe a tabela final considerando as seguintes funções hash (utilize a resolução de conflitos por chaining). As tabelas possuem 2, 5 e 10 células
  - $h = k \bmod 2$
  - $h = k \bmod 5$
  - $h = k \bmod 10$

# MÉTODO DA DIVISÃO

- O método da divisão garante boas funções de hashing?
- O que basicamente muda entre as funções hash no método da divisão?
- Que valores escolhemos para  $m$ ?

# MÉTODO DA DIVISÃO

- O método da divisão garante boas funções de hashing?
- O que basicamente muda entre as funções hash no método da divisão?
- Que valores escolhemos para  $m$ ?
- Não escolha um  $m$  tal que tenha um divisor  $d$  bem pequeno
- Não escolha  $m = 2^r$ ,
- Escolha  $m$  sendo um número primo que não seja próximo das potências de 2 ou 10

## MÉTODO DA DIVISÃO

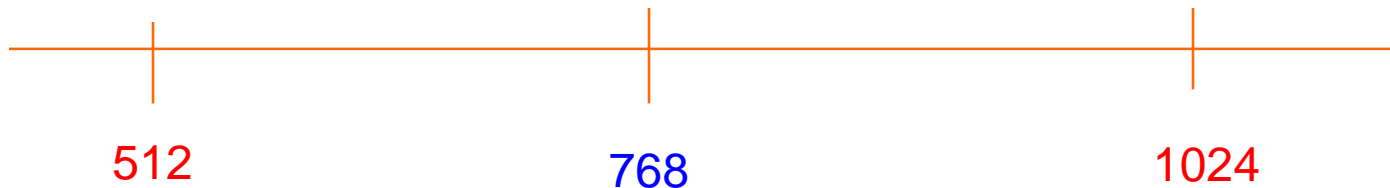
- Suponha que um conjunto de 2000 elementos será armazenado em uma tabela hash onde o fator de carga estimado é 3. Qual seria a melhor função de hash para o problema usando o método da divisão?



# MÉTODO DA DIVISÃO

- Suponha que um conjunto de 2000 elementos será armazenado em uma tabela hash onde o fator de carga estimado é 3. Qual seria a melhor função de hash para o problema usando o método da divisão?

- $h(k) = k \% m$
- $2000/3 \sim 667$
- Primos: 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, ...
- Potencias de 2: 256, 512, 1024, 2048, ...



# EXERCÍCIO

- Suponha as chaves {200, 205, 210, 215, 220, ..., 595}.
  - Se eu escolher a função  $h(k) = k \% 100$ . Vai existir colisão em alguma célula? Se sim, quantas?
  - Se eu escolher a função  $h(k) = k \% 101$ . Vai existir colisão? Se sim, quantas?

# EXERCÍCIO

- Suponha as chaves {200, 205, 210, 215, 220, ..., 595}.
  - Se eu escolher a função  $h(k) = k \% 100$ . Vai existir colisão em alguma célula? Se sim, quantas?
    - Cada célula preenchida terá quatro chaves
  - Se eu escolher a função  $h(k) = k \% 101$ . Vai existir colisão? Se sim, quantas?
    - Cada célula preenchida terá uma chave

	$K \% 100$	$K \% 101$
0	200, 300, 400, 500	Multiplos de 101: 101 202 303 404 505
...		
5	205, 305, 405, 505	200 205 210 215 220, ... , 295, 300
...		099 003 008 013 018, ... , 093, 098
10	210, 310, 410, 510	305 310 315 320 325, ... , 395, 400
...		002 007 012 017 022, ... , 092, 097
		405 410 415 420 425, ... , 495, 500
		001 006 011 016 021, ... , 091, 096

# MÉTODO DA MULTIPLICAÇÃO

- Neste método a função hash é da forma:

$$h(k) = \lfloor m (k.A \bmod 1) \rfloor$$

Extrai a parte fracionária de  $k.A$

- $k$  é a chave
- $A$  é uma constante entre  $(0..1)$ 
  - Um bom valor é  $A \approx (\sqrt{5} - 1) / 2 = 0.6180339887...$
- $m$  (número de células) geralmente é  $2^p$ , onde  $p$  é inteiro
- O valor de  $m$  **não é crítico** como no método da divisão
- Um pouco mais lento do que o da divisão

## EXERCÍCIO

- Calcule o código hash  $h = \lfloor m (kA \bmod 1) \rfloor$  das chaves  $(\{2, 3, 4, 5, 6, 10, 15\})$ , onde  $A = 0.2$  e  $m = 1000$

$$h(2) = \lfloor 1000 (2 \times 0.2 \bmod 1) \rfloor = 400$$

$$h(3) = \lfloor 1000 (3 \times 0.2 \bmod 1) \rfloor = 600$$

$$h(4) = \lfloor 1000 (4 \times 0.2 \bmod 1) \rfloor = 800$$

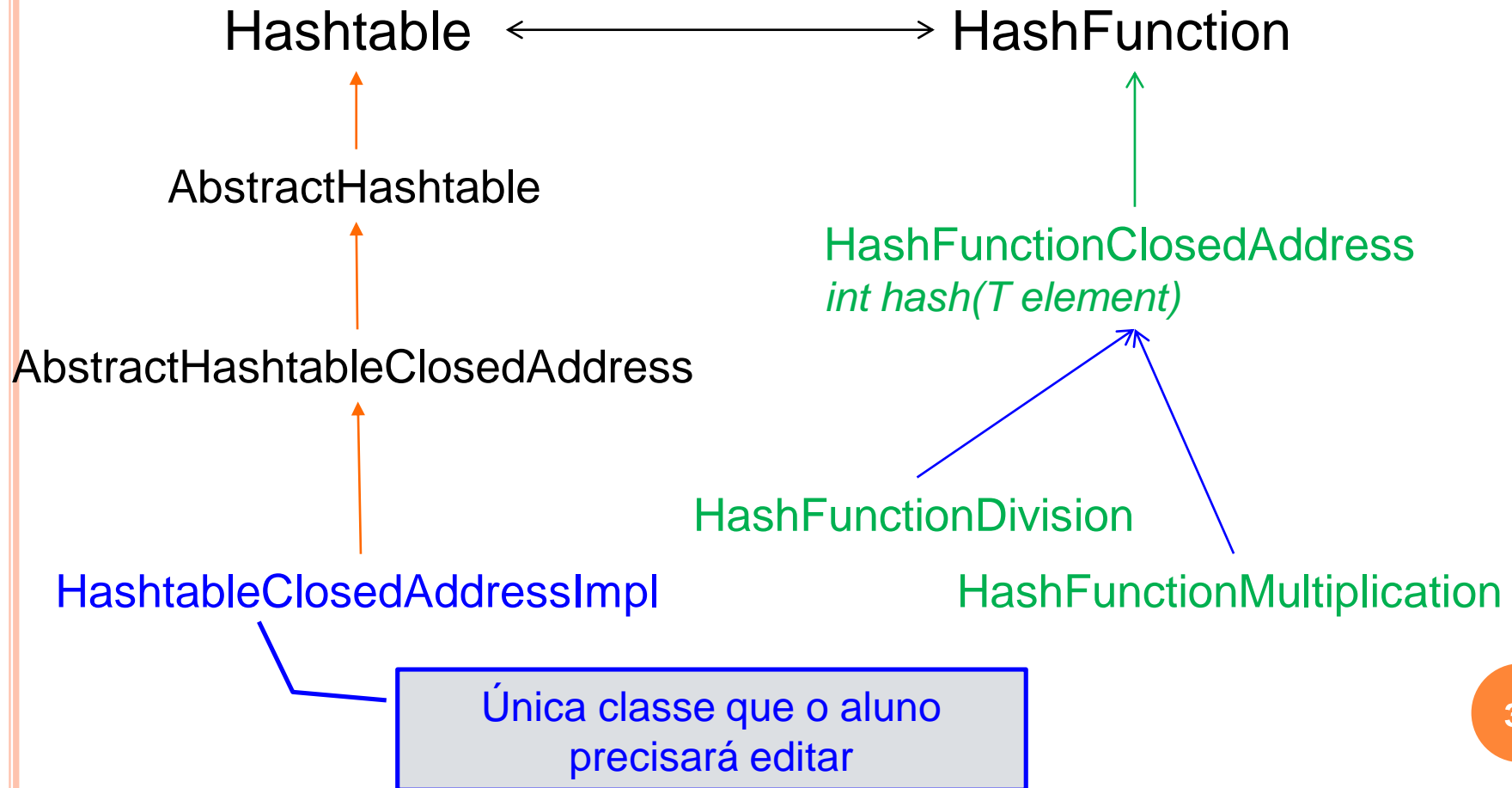
$$h(5) = \lfloor 1000 (5 \times 0.2 \bmod 1) \rfloor = 000$$

$$h(6) = \lfloor 1000 (6 \times 0.2 \bmod 1) \rfloor = 200$$

$$h(10) = \lfloor 1000 (10 \times 0.2 \bmod 1) \rfloor = 000$$

$$h(15) = \lfloor 1000 (15 \times 0.2 \bmod 1) \rfloor = 000$$

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO



# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public interface Hashtable<T> {  
  
    public boolean isEmpty();  
    public boolean isFull();  
    public int capacity();  
    public int size();  
    public void insert(T element);  
    public void remove(T element);  
    public T search(T element);  
    public int indexOf(T element);  
}
```

```
public interface HashFunction<T> {  
  
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public abstract class AbstractHashtable<T> implements Hashtable<T> {

    Object[] table;
    int elements;
    int COLLISIONS;
    HashFunction<T> hashFunction;

    public AbstractHashtable() {
        elements = 0;
        COLLISIONS = 0;
    }
    protected void initiateInternalTable(int size) {
        this.table = Util.<T>makeArray(size);
    }

    @Override
    public boolean isEmpty() {
        return (elements == 0);
    }
}
```



# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
@Override  
public boolean isFull() {  
    return (elements == table.length);  
}
```

```
@Override  
public int size() {  
    return elements;  
}
```

```
@Override  
public int capacity(){  
    return this.table.length;  
}
```

```
public int getCOLLISIONS() {  
    return COLLISIONS;  
}
```

```
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public abstract class AbstractHashtableClosedAddress<T>
    extends AbstractHashtable<T> {

    public AbstractHashtableClosedAddress() {
        super();
    }

    @Override
    protected void initiateInternalTable(int size) {
        this.table = Util.<LinkedList<T>>makeArray(size);
    }
}
```

```
public static <T> T[] makeArray(int size) {
    T[] array = (T[]) new Object[size];
    return array;
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public interface HashFunction<T> {  
}
```

```
public interface HashFunctionClosedAddress<T>  
    extends HashFunction<T> {  
  
    public int hash(T element);  
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public class HashFunctionDivisionMethod<T>
    implements HashFunctionClosedAddress<T> {

    protected int tableSize;

    public HashFunctionDivisionMethod(int tableSize) {
        this.tableSize = tableSize;
    }

    public int hash(T element) {
        int hashKey = -1;
        int key = element.hashCode();

        hashKey = (int) key % tableSize;

        return hashKey;
    }
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public class HashFunctionMultiplicationMethod<T>
    implements HashFunctionClosedAddress<T>{

    protected int tableSize;
    private static final double A = (Math.sqrt(5)-1)/2;

    public HashFunctionMultiplicationMethod(int tableSize){
        this.tableSize = tableSize;
    }

    public int hash(T element) {
        int hashKey = -1;
        int key = element.hashCode();
        double fractionalPart = key*A - Math.floor(key*A);
        hashKey = (int) (tableSize * fractionalPart);

        return hashKey;
    }
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public enum HashFunctionClosedAddressMethod {  
    DIVISION, MULTIPLICATION;  
}  
  
public class HashFunctionFactory<T> {  
    public static HashFunction  
        createHashFunction(HashFunctionClosedAddressMethod  
            method, int tableSize){  
        HashFunction result = null;  
        switch (method) {  
            case DIVISION:  
                result = new  
                    HashFunctionDivisionMethod(tableSize) ;  
            case MULTIPLICATION:  
                result = new  
                    HashFunctionMultiplicationMethod(tableSize) ;  
        }  
        return result;  
    }  
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public class HashtableClosedAddressImpl<T> extends
    AbstractHashtableClosedAddress<T> {

    public HashtableClosedAddressImpl(int desiredSize,
        HashFunctionClosedAddressMethod method) {
        int realSize = desiredSize;

        if (method == DIVISION) {
            realSize = this.getPrimeAbove(desiredSize);
        }
        initiateInternalTable(realSize);
        HashFunction function =
            HashFunctionFactory.createHashFunction(method, realSize);
        this.hashFunction = function;
    }
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
int getPrimeAbove(int number){  
    //use Util.isPrime(n)  
}  
  
public void insert(T element) {  
}  
  
public void remove(T element) {  
}  
  
public T search(T element) {  
}  
  
public int indexOf(T element) {  
}  
}
```



# TABELA COM ENDEREÇAMENTO ABERTO

- Até agora vimos a resolução de conflitos por **chaining (Endereçamento Fechado)**
  - Precisa de uma estrutura de dados auxiliar (lista)
- E se não tivermos **listas para resolver as colisões?**
  - Precisamos de um número **m** bem maior de células.
  - Chaves que colidam precisam ter seu hash code “recalculado” para encontrar um slot vazio
    - Todas as chaves estão em **alguma célula**. Cada entrada da tabela ou contem um elemento ou NIL

# OUTRA FORMA DE RESOLVER CONFLITOS

- Endereçamento aberto faz uso de um *probe*.
  - Examina a tabela (sequencial ou não) até encontrar um slot vazio.
  - A sequência de posições sendo examinadas dependem da chave
- Função hash é estendida

$$h : U \times \{0, 1, \dots, m - 1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, m - 1\}$$

$$\langle h(k, 0), h(k, 1), \dots, h(k, m - 1) \rangle$$

- posição =  $h(k, p)$
- $k$  = chave
- $p$  = probe

# EXEMPLO: INSERÇÃO

- Insira a chave  $k=100$

- Probe  $h(100,0)$
- Probe  $h(100,1)$
- Probe  $h(100,2)$



# ALGORITMO: INSERÇÃO

**HASH-INSERT( $T, k$ )**

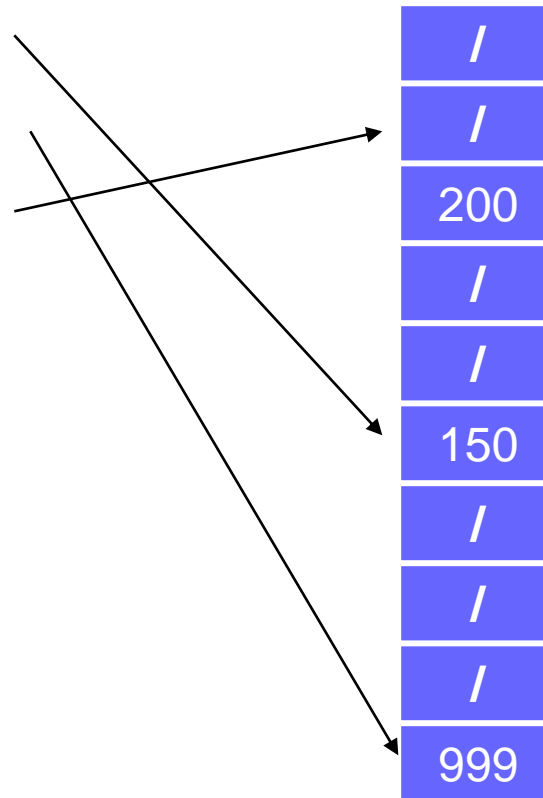
```
1   $i \leftarrow 0$   
2  repeat  $j \leftarrow h(k, i)$   
3         if  $T[j] = \text{NIL}$   
4             then  $T[j] \leftarrow k$   
5                 return  $j$   
6             else  $i \leftarrow i + 1$   
7  until  $i = m$   
8  error “hash table overflow”
```



# EXEMPLO: PESQUISA

## ○ Pesquisa a chave $k=100$

- Probe  $h(100,0)$
- Probe  $h(100,1)$
- Probe  $h(100,2)$



# ALGORITMO: PESQUISA

**HASH-SEARCH( $T, k$ )**

1  $i \leftarrow 0$

2 **repeat**  $j \leftarrow h(k, i)$

3 **if**  $T[j] = k$

4 **then return**  $j$

5  $i \leftarrow i + 1$

6 **until**  $T[j] = \text{NIL}$  or  $i = m$

7 **return** NIL

## ENDEREÇAMENTO ABERTO (DELEÇÃO)

- Como fazer uma remoção com endereçamento aberto?
  - Podemos atribuir NIL diretamente na posição da chave a ser removida?

# ENDEREÇAMENTO ABERTO (DELEÇÃO)

- Como fazer uma remoção com endereçamento aberto?
  - Não podemos simplesmente dizer que o slot esvaziou colocando NIL
  - Usar uma **flag** (valor especial DELETED) ao invés de NIL
  - **Alterar** as funções
    - Inserir (inserir no flag se ele for DELETED)
    - Pesquisar (continuar a pesquisa no flag ao invés de NIL)



# EXEMPLO

- Remova a chave  $k=100$

- Probe  $h(100,0)$
- Probe  $h(100,1)$
- Probe  $h(100,2)$



E como ficaria a inserção?

- Pesquisar até achar a chave (remova – coloque um **flag DELETED**) ou uma célula vazia

## EXEMPLO

**HASH-INSERT**( $T, k$ )

1  $i \leftarrow 0$

2 **repeat**  $j \leftarrow h(k, i)$

3       **if**  $T[j] = \text{NIL} \parallel T[j] = \text{DELETED}$

4       **then**  $T[j] \leftarrow k$

5       **return**  $j$

6       **else**  $i \leftarrow i + 1$

7 **until**  $i = m$

8 **error** “hash table overflow”

# HASHING COM PROBING

- Como **escolher** a **função hash** no endereçamento aberto usando o probe?
- Por que não utilizar a função  **$h(k,i) = k \% m$** ?
  - Precisamos usar  $i$  para que o endereço mude.
- Tres técnicas são usadas para computar as sequencias de probes
  - Linear Probing
  - Quadratic Probing
  - Double Hashing

# LINEAR PROBING

- Dada uma função de hash ordinária  $h': U \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\}$  (obtida por divisão ou multiplicação) o método usa a função de hash da forma:

$$h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod m$$

- Slots buscados linearmente

$T[h'(k)]$

$T[h'(k) + 1]$

...

$T[m-1]$

- Fácil de implementar mas apresenta problemas
  - Clustering Primário – clusters podem surgir quando slots ocupados se agrupam. Isso aumenta o tempo da busca.

## EXERCÍCIO

- Seja  $m=10$ ,  $h(k) = k \bmod 5$ . Utilize o probing linear para inserir os valores  $\{10, 15, 2, 12, 4, 8\}$

$$h(k,i) = (k \bmod 5 + i) \bmod 10$$

# PROBING QUADRÁTICO

- Neste método a função hash é da forma:

$$h(k, i) = (\underbrace{h'(k)} + c_1 i + c_2 i^2) \bmod m$$

Método da Divisão ou Multiplicação

- $c_1$  e  $c_2$  são constantes
- Primeiro elemento buscado  $T[h'(k)]$ . Demais variam com função quadrática de  $i$ .
  - Evita o clustering primário
  - Pode ocorrer um Clustering Secundário – duas chaves com mesmo probe inicial geram mesma sequência de probes
- Mas é melhor do que o anterior

## EXERCÍCIO

- Seja  $m=10$ ,  $c_1=3$ ,  $c_2=5$ ,  $h(k) = k \bmod 5$ . Utilize o probing quadrático para inserir os valores  $\{10, 15, 2, 12, 4, 8\}$ :

$$h(k,i) = (k \bmod 5 + 3i + 5i^2) \bmod 10$$

## EXERCÍCIO

- Compare a resposta anterior com o linear probing e o endereçamento fechado ( $h(k) = k \bmod 10$ ) com chaining para inserir os valores  $\{10, 15, 2, 12, 4, 8\}$ :

$$h(k) = k \bmod 10$$

$$h(k,i) = (k \bmod 5 + i) \bmod 10$$

$$h(k,i) = (k \bmod 5 + 3i + 5i^2) \bmod 10$$



# HASHING DUPLO

- Um dos melhores metodos para endereçamento aberto
- Neste método a função hash é da forma:

$$h(k, i) = (\underbrace{h_1(k)} + i \cdot \underbrace{h_2(k)}) \bmod m$$

Método da Divisão ou Multiplicação

- A sequencia de probe depende de duas formas em k.
- Dicas
  - Faça  $h_2(k)$  retornar um número ímpar e m ser um número  $2^p$
  - Faça m ser um numero primo e  $h_2(k)$  retornar um inteiro positivo menor que m
- **Excelentes resultados**
- Produz  $\Theta(m)$  sequências (se aproxima mais do hashing uniforme simples)

## EXERCÍCIO

- Seja  $m=24$ ,  $h_1(k) = k \bmod 5$  e  $h_2(k) = k+1 \bmod 7$ . Utilize o hashing duplo para inserir os valores  $(\{10,15,2,12,4,8\})$ :

$$h(k,i) = (k \bmod 5 + (k+1 \bmod 7) \cdot i) \bmod 24$$

# POSCOMP 2009

## Questão 31. [FUN]

Considere uma tabela de espalhamento (tabela *hash*) de comprimento  $m = 11$ , que usa endereçamento aberto (*open addressing*), a técnica de tentativa linear (*linear probing*) para resolver colisões e com a função de dispersão (função *hash*)  $h(k) = k \bmod m$ , onde  $k$  é a chave a ser inserida. Considere as seguintes operações sobre essa tabela:

- Inserção das chaves 3, 14, 15, 92, 65, 35 (nesta ordem);
- Remoção da chave 15; e
- Inserção da chave 43.

Escolha a opção que representa esta tabela após estas operações:

- A) 65 –  $\emptyset$  – 35 – 14 –  $\emptyset$  – 92 – 3 –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  – 43
- B) 43 –  $\emptyset$  – 35 – 3 – 14 – 92 –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  – 65
- C) 65 –  $\emptyset$  – 35 – X - 14 – 92 – 3 –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  – 43
- D) 65 –  $\emptyset$  – 35 – 3 – 14 – 92 –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  – 43
- E) 43 –  $\emptyset$  – 35 – 3 – 14 – X – 92 –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  – 65

# POSCOMP 2009

## Questão 31. [FUN]

Considere uma tabela de espalhamento (tabela *hash*) de comprimento  $m = 11$ , que usa endereçamento aberto (*open addressing*), a técnica de tentativa linear (*linear probing*) para resolver colisões e com a função de dispersão (função *hash*)  $h(k) = k \bmod m$ , onde  $k$  é a chave a ser inserida. Considere as seguintes operações sobre essa tabela:

- Inserção das chaves 3, 14, 15, 92, 65, 35 (nesta ordem);
- Remoção da chave 15; e
- Inserção da chave 43.

Escolha a opção que representa esta tabela após estas operações:

- A) 65 –  $\emptyset$  – 35 – 14 –  $\emptyset$  – 92 – 3 –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  – 43
- B) 43 –  $\emptyset$  – 35 – 3 – 14 – 92 –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  – 65
- C) 65 –  $\emptyset$  – 35 – X – 14 – 92 – 3 –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  – 43
- D) 65 –  $\emptyset$  – 35 – 3 – 14 – 92 –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  – 43
- ☒ E) 43 –  $\emptyset$  – 35 – 3 – 14 – X – 92 –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  –  $\emptyset$  – 65

# FATOR DE CARGA

- Qual o fator de carga no endereçamento aberto?
  - O **load factor** é  $\leq 1$
- Por que?

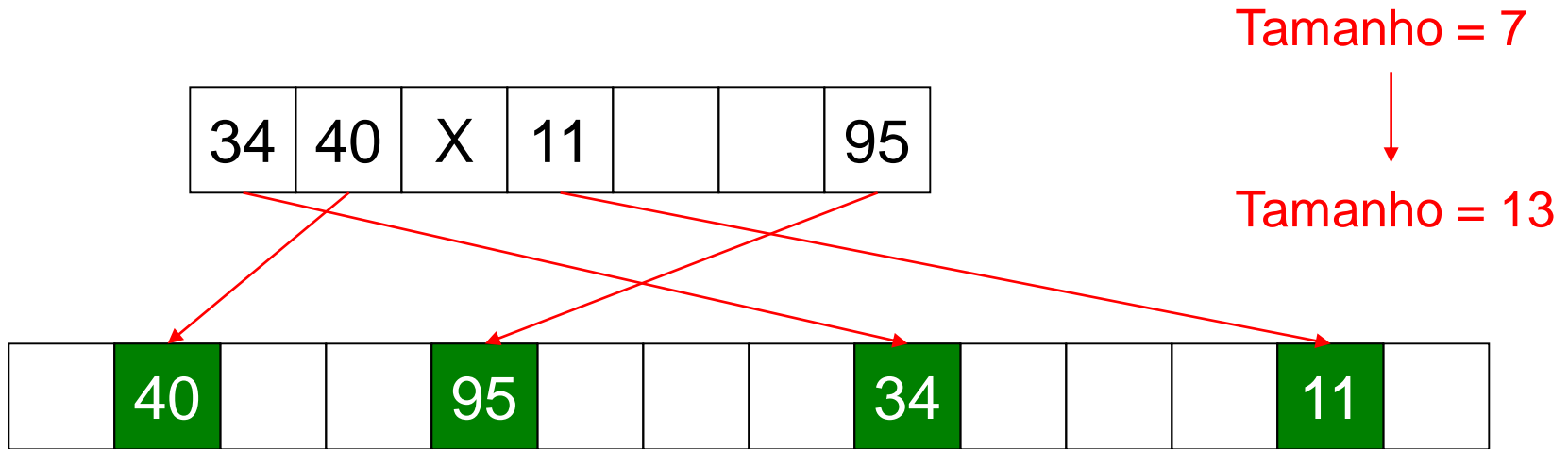
## LIDANDO COM OVERFLOW

- O que fazer quando o vetor interno da tabela hash ficar **cheio**?
  - **Duplicar** quando estiver cheio?
  - Duplicar quando atingir uma certa **capacidade**?

# REHASHING

- Quando a capacidade preenchida (exceder 50%), as operações na tabela passam a demorar mais, pois o **número de colisões aumenta**
- Expandir o array que constitui a tabela, e reorganizar os elementos na nova tabela
  - Novo tamanho: número primo próximo ao dobro da tabela atual

# EXEMPLO



```
Object put() { ...  
    if (++size > threshold)  
        rehash(); ...  
}  
void rehash() { ...  
    newcapacity = prime number near 2*buckets;  
    threshold = (int) (newcapacity * loadFactor);  
    buckets = new HashEntry[newcapacity]; ...  
}
```



# EXERCÍCIO

- Quando devemos fazer o **rehashing**?
  - No endereçamento aberto não conseguirmos mais inserir um elemento
  - Quando metade da tabela estiver ocupada (limite de capacidade)

# IMPLEMENTAÇÃO

## ○ Hashtable

- <http://www.docjar.com/html/api/java/util/Hashtable.java.htm>  
!

## ○ Ver funções

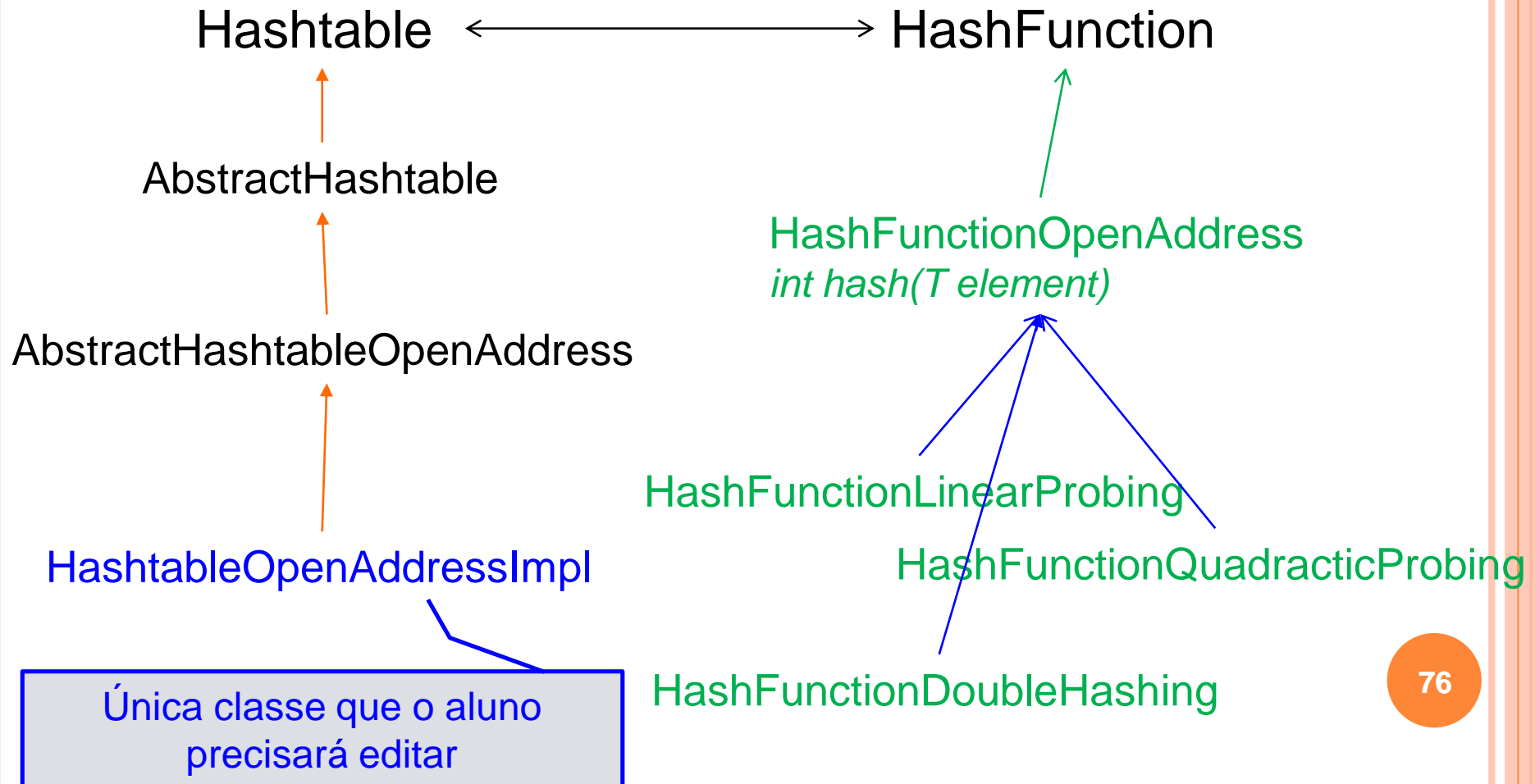
- hash()
  - O código hash é delegado para cada classe
- containsKey()
- get()
- put()
- remove()
- rehash()
- equals( ) x hashCode( ).
  - $a.equals(b) \Leftrightarrow hashCode(a) = hashCode(b)$

# TABELA HASH (IMPLEMENTAÇÃO)

- Separando a tabela de sua função hash?

Hashtable  $\longleftrightarrow$  HashFunction

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO



# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public abstract class AbstractHashtableOpenAddress<T>
    extends AbstractHashtable<T> {

    protected final DELETED deletedElement = new DELETED();
    private int tableSize;

    public AbstractHashtableOpenAddress() {
        this.tableSize = tableSize;
        this.initiateInternalTable(size);
    }
    @Override
    protected void initiateInternalTable(int size) {
        this.table = Util.<Storable>makeArray(size);
    }
}

public static <T> T[] makeArray(int size) {
    T[] array = (T[]) new Object[size];
    return array;
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public abstract class AbstractHashtableOpenAddress<T>
    extends AbstractHashtable<T> {

    protected final DELETED deletedElement = new DELETED();
    private int tableSize;

    public AbstractHashtableOpenAddress() {
        this.tableSize = tableSize;
        this.initiateInternalTable(size);
    }
    @Override
    protected void initiateInternalTable(int size) {
        this.table = Util.<Storable>makeArray(size);
    }
}
```

```
public interface Storable {
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public interface HashFunction<T> {  
}
```

```
public interface HashFunctionOpenAddress<T>  
    extends HashFunction<T> {  
  
    public int hash(T elemento, int probe);  
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public HashFunctionLinearProbing<T> implements
    HashFunctionOpenAddress<T> {
    protected HashFunctionClosedAddress<T> originalHashFunction;
    protected int tableCapacity;

    public HashFunctionLinearProbing(int tableCapacity,
        HashFunctionClosedAddressMethod method) {
        this.tableCapacity = tableCapacity;
        if(method == HashFunctionClosedAddressMethod.DIVISION) {
            originalHashFunction = new
                HashFunctionDivisionMethod<T>(tableCapacity)
        }else{
            originalHashFunction = new
                HashFunctionMultiplicationMethod<T> (tableCapacity);
        }
    }
}
```



# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
@Override
public int hash(T element, int probe) {
    int generatedIndex = 0;

    generatedIndex= ((originalHashFunction.hash(element)
    + probe) % this.hashtable.capacity());

    return generatedIndex;
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public class HashFunctionQuadraticProbing<T> implements
    HashFunctionOpenAddress<T> {
    private int tableCapacity;
    protected HashFunctionClosedAddress<T> originalHashFunction;
    protected int c1;
    protected int c2;
    public HashFunctionQuadraticProbing(int tableCapacity,
        HashFunctionClosedAddressMethod method, int c1, int c2) {
        this.tableCapacity = tableCapacity;
        if(method == HashFunctionClosedAddressMethod.DIVISION) {
            originalHashFunction = new
                HashFunctionDivisionMethod<T>(tableCapacity);
        }else{
            originalHashFunction = new
                HashFunctionMultiplicationMethod<T>(tableCapacity);
        }
        this.c1 = c1;
        this.c2 = c2;
    }
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

@Override

```
public int hash(T element, int probe) {  
    int generatedIndex = 0;  
  
    generatedIndex = originalHashFunction.hash(element);  
    generatedIndex = ((generatedIndex + c1*probe +  
        c2*probe*probe)% tableCapacity);  
  
    return generatedIndex;  
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public abstract class AbstractHashtableOpenAddress<T extends
    Storable> extends AbstractHashtable<T> {

    protected final DELETED deletedElement = new DELETED();
    private int tableSize;

    public AbstractHashtableOpenAddress(int size) {
        this.tableSize = size;
        this.initiateInternalTable(size);
    }

    @Override
    protected void initiateInternalTable(int size) {
        this.table = Util.<Storable>makeArray(size);
    }
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public abstract class AbstractHashtableOpenAddress<T extends
    Storable> extends AbstractHashtable<T> {

    protected final DELETED deletedElement = new DELETED();
    private int tableSize;

    public AbstractHashtableOpenAddress(int size) {
        this.tableSize = size;
        this.initiateInternalTable(size);
    }

    @Override
    protected void initiateInternalTable(int size) {
        this.table = Util.<Storable>makeArray(size);
    }
}
```

```
public class DELETED implements
    Storable{
    public DELETED() {
    }
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public class HashtableOpenAddressLinearProbingImpl<T extends
    Storable> extends AbstractHashtableOpenAddress<T> {

    public HashtableOpenAddressLinearProbingImpl(int size,
        HashFunctionClosedAddressMethod method) {
        super(size);
        hashFunction = new HashFunctionLinearProbing<T>(size,
            method);
        this.initiateInternalTable(size);

    }

    //métodos a implementar
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public class HashtableOpenAddressQuadraticProbingImpl<T extends
    Storable> extends AbstractHashtableOpenAddress<T> {

    public HashtableOpenAddressQuadraticProbingImpl(int size,
        HashFunctionClosedAddressMethod method, int c1, int c2) {
        super(size);
        hashFunction = new HashFunctionQuadraticProbing<T>(size,
            method, c1, c2);
        this.initiateInternalTable(size);
    }

    //métodos a implementar
}
```

# QUESTÕES DE IMPLEMENTAÇÃO

```
public class HashtableOpenAddressDoubleHashing<T extends
    Storable> extends AbstractHashtableOpenAddress<T> {

    public HashtableOpenAddressDoubleHashing(int size,
        HashFunctionClosedAddressMethod methodFunction1,
        HashFunctionClosedAddressMethod methodFunction2) {
        super(size);
        hashFunction = new HashFunctionDoubleHashing<T>(size,
            methodFunction1, methodFunction2);
        this.initiateInternalTable(size);
    }

    //métodos a implementar
}
```



# REFERÊNCIAS

- Capítulo 11
  - 2a edição

